Università
Ca'Foscari
Venezia

Corso di Laurea Magistrale
(*ordinamento ex D.M. 270/2004*)
in Economia e Finanza

Tesi di Laurea

–

Ca' Foscari
Dorsoduro 3246
30123 Venezia

Modelli jump diffusion per la valutazione di opzioni europee ed americane

Relatore
Ch. Prof. Antonella Basso

Laureanda
Stefania Magro
Matricola 825716

Anno Accademico
2012 / 2013

Indice

Elenco delle figure

Elenco delle tabelle

La teoria è quando si sa tutto e niente funziona.

La pratica è quando tutto funziona e nessuno sa il perché.

Noi abbiamo messo insieme la teoria e la pratica:

non c'è niente che funzioni... e nessuno sa il perché!

— Albert Einstein

Ringraziamenti

Desidero semplicemente ringraziare, innanzitutto, tutte le persone che mi sono state vicine nel bene e nel male, nei momenti tristi ed in quelli felici, negli attimi di follia e di fastidio nei quali avrei voluto mollare tutto. Riuscire a terminare questo percorso di studi mi ha aiutato a crescere, mi ha formato ed ha fatto si che io ora abbia una mente più aperta e più matura, tutto ciò grazie ai corsi di studio frequentati, alle giornate trascorse a Venezia, ai sei mesi passati in Erasmus a Zurigo dove ho fatto un'esperienza indimenticabile fra le lezioni di finanza, economia e tedesco, ed infine al percorso di elaborazione della mia tesi finale accompagnata dall'inizio del mio stage in Gruppo Coin Spa presso la cui azienda lavoro tutt'ora. Vorrei ringraziare subito la mia famiglia, tutta, senza la quale non avrei mai potuto fare tutte queste scelte e senza la quale non sarei qui ora; Luca senza il quale avrei avuto molte difficoltà con l'uso di LaTex e il quale mi ha dato un forte sostegno morale; le mie amiche, i miei amici, che nei weekend sono riusciti a farmi distrare dai miei pensieri fissi della settimana; tutte le altre persone che in un modo o nell'altro hanno contribuito alla mia crescita e mi sono state accanto. Un ringraziamento particolare va anche al mio relatore la professoressa Antonella Basso, la quale mi è stata molto vicina nel mio percorso di tesi dandomi consigli ed aiutandomi con la stesura, che mi ha seguito da prima dell'inizio dello stage, fino ad oggi.

Un sincero grazie a tutti. Stefania

Venezia, Giugno 2013 S. M.

Introduzione

In questa tesi introdurremo il concetto di modello diffusivo a salti per verificare se la valutazione di prodotti derivati possa essere più corretta con l'utilizzo di un modello più innovativo rispetto ad uno più tradizionale.
Nell'ambito della finanza si vanno a proporre modelli sempre più complessi che cercano di incorporare diversi tipi di variabili per arrivare al miglior risultato possibile, o per meglio dire alla stima più corretta. Uno dei modelli più conosciuti ed usati per la valutazione delle opzioni, di cui parleremo in questa tesi, è il modello di Black, Scholes e Merton (1973). Esso, nonostante sia abbastanza preciso, non riesce a riprodurre con fedeltà l'andamento e le informazioni che propone il mercato; in particolare uno dei limiti di questo modello è la volatilità. Per far fronte a questi limiti verrà proposto un modello più evoluto con il quale cercheremo di arrivare a dei risultati più corretti, o per meglio dire più verosimili; trattasi del modello diffusivo a salti proposto da Merton nel 1976. Ad oggi non è uno dei modelli più aggiornati, ma è il primo processo in cui nella dinamica continua del sottostante sono stati introdotti i salti per mezzo del processo di Poisson. Oltre a questi modelli più tradizionali, daremo spazio anche ad un modello più innovativo per la valutazione delle opzioni americane con salti; trattasi dell'approssimazione di Kou (2002).

Il nostro obiettivo sarà quello di delineare gli aspetti principali del modello di Black e Scholes e del modello diffusivo a salti per quanto riguarda le opzioni europee, ossia quella tipologia di derivati esercitabili solo a scadenza. Per quanto concerne le opzioni americane, invece, più complesse perché lasciano all'investitore la facoltà di esercizio in un qualsiasi momento prima della scadenza del contratto, vedremo degli esempi calcolati con il modello di Kou ed il modello standard, quello binomiale.

La struttura di questo elaborato è così definita:

Nel *Capitolo 1* vengono presentate le nozioni fondamentali dei titoli derivati, delineandone i caratteri principali e le tipologie; il perché utilizzarli, dov'è la loro convenienza e in che mercati vengono negoziati.

Nel *Capitolo 2* sono riportati gli strumenti derivati principali che utilizzeremo anche per proporre degli esempi dei modelli che studieremo nei capitoli successivi; le azioni come primo step, in quanto titoli sottostanti ai derivati, proseguendo con le definizioni principali dei warrant, di covered warrant e dei certificate per dare una visuale più ampia degli strumenti che si possono utilizzare negli investimenti. Lo strumento principale a cui daremo spazio saranno le opzioni; contratti per mezzo dei quali è possibile attuare coperture e negoziazioni per raggiungere elevati rendimenti.

Il *Capitolo 3* presenta il modello diffusivo a salti, argomento principale della tesi; questo modello incorpora i movimenti giornalieri dei prezzi ed i salti aleatori che possono avvenire, in modo da valutare le opzioni in maniera più parsimoniosa tramite i processi di Lèvy. Si inizia col parlare del modello base di Black e Scholes; delinenadone i caratteri particolari e i processi sottostanti se ne descrivono le formule ed i relativi limiti. Da questo modello si passerà poi alle definizioni alla base del modello più complesso: il modello jump diffusion. *In primis* descriveremo il processo di Poisson per mezzo del quale si riesce a catturare l'effetto dei salti; si tratta di un processo di conteggio che conta il numero di eventi accaduti in un certo intervallo temporale.

Illustreremo un esempio pratico che metterà a confronto il metodo con jump ed il metodo di Black e Scholes, utilizzando i dati dell'indice FTSE MIB per la valutazione delle opzioni europee.

Nel *Capitolo 4*, invece, parleremo delle opzioni americane sia in ambito continuo, sia nel caso diffusivo con salti; infatti confronteremo il modello binomiale con il modello di Kou, il quale ci proporrà un'approssimazione analitica. Anche in questo caso, mostreremo degli esempi applicativi e cercheremo infine di capire quali siano le differenze principali fra i diversi metodi.

Capitolo 1

I titoli derivati

1.1 Considerazioni introduttive

Questo primo paragrafo vuole essere un'introduzione alla tipologia di strumenti che verranno trattati in seguito. Si parlerà di strumenti derivati, nello specifico, strumenti derivati scritti su titoli azionari.
Gli strumenti derivati sono prodotti finanziari con un valore strettamente legato a quello di un'attività sottostante, identificabile come un'azione, un'obbligazione, un tasso d'interesse, una valuta, un indice, una merce e così via. Questo legame scaturisce dall'andamento del prezzo del sottostante stesso a scadenza, da cui deriva il valore del derivato.
La definizione generica ci dice che il derivato è un contratto a termine tra due controparti in cui viene fissato un determinato prezzo (definito nelle formule con la lettera 'K'), al tempo $t = 0$, che a scadenza ($t = T$) verrà pagato. Questo prezzo dipende strettamente dal sottostante, per ipotesi dall'azione di riferimento.
Un esempio di contratto derivato semplice è il forward. Si tratta di un contratto per l'acquisto (vedi esempio in fig.1.1) o la vendita (vedi esempio in fig.1.2) di una certa attività ad una data futura ad un prezzo stabilito. Infatti i forward sono contratti con regolamento differito, nel quale le parti si impegnano a scambiarsi un'attività sottostante. Un forward è un accordo bilaterale in quanto questo con-

tratto prevede due soggetti obbligati rispettivamente a comprare e a vendere, dopo aver concordato al momento della stipula il prezzo forward che verrà pagato a scadenza. Il costo di tale contratto è pari a zero in quanto non prevede il pagamento di premi. Di seguito ne illustriamo un esempio per chiarire meglio le idee.

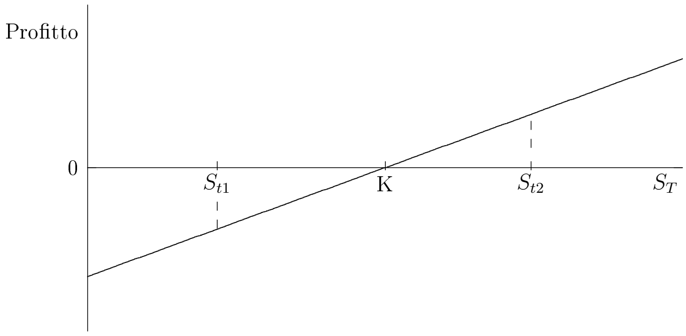

Figura 1.1: Forward lungo

Nella figura 1.1 per:

- K si intende il prezzo d'esercizio;
- S_T è il prezzo a scadenza dell'attività sottostante;
- S_{t1}, S_{t2} sono esempi di prezzi possibili alla scadenza del forward.

Gli stessi valori vengono usati nella rappresentazione del forward corto (fig.1.2)

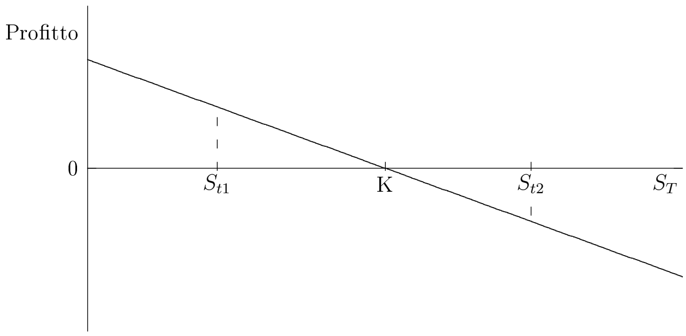

Figura 1.2: Forward corto

In questo tipo di contratti esistono due posizioni, la posizione lunga che si impegna a comprare l'attività sottostante (fig.1.1), e quella corta che, invece, si impegna a venderla (fig.1.2). Il loro payoff o valore finale è determinato dalla seguente formula:

$$\textbf{Payoff}_{\text{ FORWARD LUNGO}} = S_T - K \tag{1.1}$$

$$\textbf{Payoff}_{\text{ FORWARD CORTO}} = K - S_T \tag{1.2}$$

dove S_T indica il valore del sottostante a scadenza e K il prezzo d'esercizio. Nell'equazione (1.1), il caso del forward lungo, lo speculatore prevede che il prezzo del sottostante aumenterà, quindi se il payoff S_T-K darà esito positivo avremo un certo guadagno, tanto quanto la differenza della formula. Nel caso del forward corto, cioè l'equazione (1.2), invece si sarà di fronte ad un payoff positivo se K sarà maggiore di S_T, altrimenti lo speculatore subirà una perdita. Il prezzo del sottostante, nel caso di forward lungo, che varia durante la vita del contratto potrà assumere diversi valori, l'importante è che a scadenza esso assuma un valore maggiore del prezzo d'esercizio, precedentemente fissato, calcolabile mediante la formula (1.1). Analogamente, nel caso di un forward corto (1.2), si punterà sul fatto che la variazione di S_T sia inferiore a quella di K, in modo tale da ricavarne un guadagno finale, nel caso di ribasso del prezzo.

Le formule (1.1) e (1.2) permettono di calcolare il valore finale di un contratto forward con posizione lunga e corta; entrare in una di queste posizioni non comporta costi, pertanto il possibile profitto o l'eventuale perdita che deriva dal contratto sarà pari al valore finale dello stesso.

Vogliamo ora fare un esempio per chiarire meglio quanto appena affermato.

Ipotizziamo che il prezzo del sottostante di un forward, acquistabile a 4 mesi, sia oggi di €30; graficamente la posizione lunga e quella corta risulterebbero, in riferimento alle figure 1.1 e 1.2, come segue:

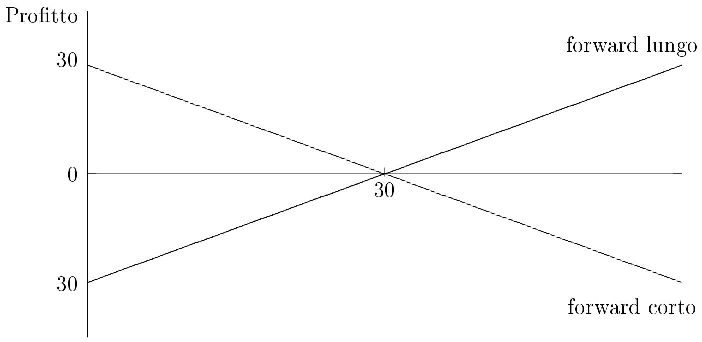

Figura 1.3: Esempio di forward con $St = K = 30$€

Nel caso in cui fra un mese il nostro sottostante assumesse un valore pari ad €32, sarebbe per l'investitore un caso favorevole se fosse detentore di un forward lungo perchè vedrebbe il manifestarsi di un possibile guadagno, al contrario della posizione in un forward corto nella quale subirebbe una perdita pari alla stessa differenza. Il corso della vita del forward ci permette comunque di sperare in una diminuzione del prezzo nel qual caso fossimo in una posizione corta del contratto, in quanto solo con un prezzo a scadenza inferiore al prezzo iniziale avremmo un profitto. Situazione analoga per quanto riguarda la posizione forward lunga, nella quale si spera in un prezzo a scadenza superiore a quello iniziale per avere un guadagno; se il prezzo finale dovesse essere inferiore avremmo un perdita. Solo a scadenza (T) verificheremo se il valore finale sarà positivo per una o l'altra posizione, se fossimo nella situazione in cui S_T a scadenza fosse pari ad €40 avremo un valore finale per la posizone sul forward lungo pari a:

$$S_T - K = 40 - 30 = €10.$$

Saremo difronte ad un guadagno di €10 nel contratto lungo, mentre per quanto riguarda il contratto su un forward corto avremo avuto una perdita dello stesso valore, pari a €10:

$$K - S_T = 30 - 40 = -€10.$$

Nel caso, invece, in cui il valore del sottostante S_T sia pari ad €25, la situazione sarà la seguente:

$$S_T - K = 25 - 30 = -€5$$

una perdita pari ad €5 nel caso di forward lungo, dal momento che il prezzo finale del sottostante è inferiore a quello iniziale; caso opposto quello del forward corto in cui si sarà di fronte ad un guadagno di €5, perché questa posizione trae profitto dagli abbassamenti di prezzo rispetto al valore iniziale:

$$K - S_T = 30 - 25 = €5$$

si tratterà perciò di casi opposti in base al valore che assumerà il sottostante al tempo T.

Graficamente risulterà quanto segue:

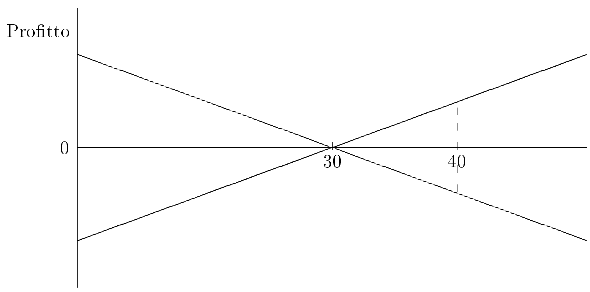

Figura 1.4: Guadagno forward lungo pari a 10€;
Perdita forward corto pari a 10€

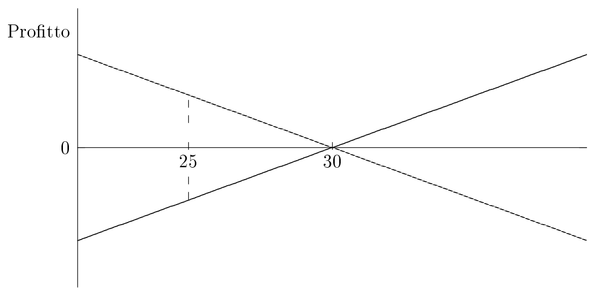

Figura 1.5: Guadagno forward corto pari a 5€;
Perdita forward lungo pari a 5€

1.2 L'utilizzo

Perché utilizzare i derivati? Quali sono i vantaggi che ne derivano? Rispondiamo a queste domande considerando che il derivato ci consente di stipulare un contratto ad un certo prezzo d'esercizio determinato al tempo ipotetico 't', che non rappresenta il reale prezzo di mercato. Lo scopo di questi strumenti è di poter acquistare o vendere un determinato sottostante in un tempo 't' futuro ad un prezzo stabilito al momento della stipula del contratto derivato, determinando a scadenza un guadagno o una perdita per i contraenti in base all'andamento del prezzo del sottostante.
Gli strumenti derivati vengono utilizzati per tre motivi principali: copertura, speculazione ed arbitraggio. Nei casi di copertura l'obiettivo è quello di coprirsi dal rischio assumendo una determinata posizione, corta (per chi decide di vendere) o lunga (per chi decide di comprare), a seconda dell'evento. È inoltre utile specificare che, a seconda che si tratti di derivati in opzioni o di altro genere, si potrà avere la neutralizzazione del rischio o semplicemente una sorta di assicurazione per proteggersi da oscillazioni svantaggiose del prezzo di un'attività, cercando comunque di sfruttare gli andamenti positivi. Questo caso rappresenta con tutta probabilità la ragione più forte per cui si nota l'elevato utilizzo dei derivati, con la possibilità di copertura efficiente del portafoglio e una gestione ottimale dei rischi di importanza strategica soprattutto per le imprese.

Nei casi di speculazione gli operatori assumono volontariamente posizioni di rischio sull'andamento del prezzo, in salita o in discesa, alla ricerca di forti potenziali guadagni sfruttando un effetto leva, con l'eventualità di possibili grosse perdite.

Ma cosa s'intende per effetto leva? Con questo termine facciamo riferimento ad un meccanismo per amplificare il nostro possibile guadagno prodotto tramite l'investimento nell'attività sottostante. Questo effetto che assume anche il nome di 'leverage', risulta essere strettamente legato all'attività sottostante. L'investitore avrà la possibilità di sfruttare in modo vantaggioso la variazione del sottostante, investendo un importo superiore al capitale posseduto per riuscire a beneficiare di un rendimento maggiore; invece di investire direttamente sull'attività che renderebbe in misura minore, è l'effetto moltiplicativo della leva che comporta un guadagno od una perdita più elevato. Da mettere in evidenza è anche il fatto che questo effetto non funziona solo con esito favorevole, ma ha anche un effetto svantaggioso perché incrementa il rischio potenziale dell'investitore. Ci si deve ricordare che nel caso in cui il mercato si muova a sfavore di quella che è la nostra attesa, il valore della leva è indice di rischiosità.

L'effetto leva è la possibilità di moltiplicare la redditività del capitale investendo non direttamente sul sottostante, ma su prodotti derivati. I derivati danno la possibilità di replicare le performance di un determinato quantitativo di sottostante senza dover impiegare il capitale necessario per acquistare tutto il sottostante. La formula che mostriamo di seguito, è ciò che la leva finanziaria rappresenta:

$$Leva = \frac{Guadagno}{Capitale\ investito}.$$

Un esempio potrebbe chiarire meglio questo concetto;

"Un investitore che vuole investire il suo capitale di €100, può avere le seguenti alternative:

a. Acquistare un titolo al costo di €100 nella speranza che il suo valore aumenti;

b. Acquistare delle opzioni call, sullo stesso titolo sottostante, che darebbero la possibilità di acquisto a €100 fra n giorni;

Se il premio per la call (alternativa b) fosse €10 si dovrebbe sborsare questo importo rispetto al dover pagare €100 per il titolo (alternativa a); potrei, inoltre, acquistare ben 10 opzioni call, scommettendo 10 volte di più sul rialzo del prezzo del titolo sottostante e nel caso positivo avrei un forte guadagno.

Si supponga ora che l'azione passi dal prezzo di €100 ad azione al prezzo di €130 ad azione. Se l'investitore ha deciso per la prima alternativa (a), il suo guadagno/perdita a scadenza sarà:

$$(130 - 100) * 1 = 30€.$$

Caso diverso è il secondo, perché con questa alternativa può vendere 1 azione al prezzo di €130 ed esercitare le 10 opzioni acquistate avendo come risultato finale, il seguente:

$$(10 * 130) - [(10 * 10) + (100 * 10)] = 200€;$$

questo è il valore che si ricava, nel momento in cui il prezzo del sottostante aumenta, dall'aver comprato 10 opzioni call meno il costo del premio per le opzioni e il valore delle opzioni al tempo iniziale. Da ciò si evince che l'effetto leva si evidenzia nella seconda alternativa (b) perché a fronte di un investimento di €100 si è ottenuto un guadagno di €200."

Più precisamente, in termini numerici il valore della leva finanziaria nei due casi appena citati viene così descritto:

$$Leva_1 = \frac{30}{100} = 0.3$$
$$Leva_2 = \frac{200}{100} = 2.$$

In queste due formule si mettono a rapporto il guadagno ottenuto con il valore investito; il risultato maggiore denota un effetto leva più elevato che avrà reso un guadagno superiore.

Ovviamente è da ricordare che l'effetto leva non ha solo vantaggi, il possedere un numero maggiore di unità di titolo sottostante espone l'acquirente a maggior rischio. L'effetto leva permette di guadagnare n volte tanto rispetto all'investire direttamente sul sottostante, ma si può anche perdere n volte tanto rispetto all'investimento sul sottostante stesso.

Ulteriore caso di utilizzo dei derivati è quello riguardante l'arbitraggio. Qui si vuole bloccare un profitto privo di rischio, certo, con l'entrata simultanea in due o più mercati. La durata di queste opportunità è solitamente molto breve, in quanto consentono di sfruttare un disallineamento temporaneo tra il prezzo del sottostante e quello dello strumento derivato.

1.3 La negoziazione

Il più delle volte le variabili sottostanti i nostri finanziamenti sono rappresentate dal prezzo di attività negoziabili. La domanda che ci poniamo è dove vengano negoziati questi valori; la risposta è subito data: la loro negoziazione avviene in borsa, nei mercati over the counter, nei mercati fuori borsa o nei mercati elettronici, ossia le ex-borse alle grida oggi superate dalle piattaforme di contrattazione elettronica.

Nelle borse vengono negoziati contratti standardizzati predefiniti. In questa tesi ci occuperemo in particolare della Borsa Italiana, da cui ricaveremo i dati che ci serviranno successivamente. Il suo ruolo principale è quello di vigilare sul corretto funzionamento delle negoziazioni, gestire l'informativa delle società quotate e definire i requisiti e le procedure di ammissione per gli intermediari finanziari e per le società emittenti.

Alternativamente alle borse abbiamo, invece, i mercati fuori borsa, i cosiddetti mercati over the counter, nei quali esiste un collegamento per mezzo di telefoni e computer, dove mediatori di diverse istituzioni finanziarie si scambiano contrattazioni. Diversamente dalla 'Borsa', qui i contratti non sono standard e ciò potrebbe portare ad un eventuale rischio di credito, in quanto una delle parti del contratto potrebbe risultare inadempiente, causando così una perdita per la controparte. Il rischio di credito perciò è strettamente legato al merito di credito delle parti interessate. Questo perché si tratta di un rischio di inadempienza o d'insolvenza, al quale si cerca di porre rimedio ponendo delle garanzie a salvaguardia dell'investimento in atto. Con il merito di credito si cerca così di valutare la posizione del soggetto, analizzando la sua affidabilità ed attuando dei controlli concreti.

1.4 Le tipologie

I contratti derivati collegati a valori sottostanti possono assumere differenti fattispecie, che si presentano sotto il nome di[1]:

- Futures: "Contratti standardizzati con il quale le parti si impegnano a scambiare a una data prestabilita determinate attività oppure a versare o riscuotere un importo determinato in base all'andamento di un indicatore di riferimento".
- Opzioni: "Contratto derivato che attribuisce a una delle parti, dietro il pagamento di un corrispettivo detto premio, la facoltà - da esercitare entro un dato termine o alla scadenza di esso - di acquistare o di vendere determinate attività finanziarie a un certo prezzo oppure di riscuotere un importo determinato in base all'andamento di un indicatore di riferimento".
- Swaps: "Contratto derivato con il quale le parti si scambiano due flussi finanziari relativi ad attività o passività specifiche, espresso rispettivamente in valute o tassi di interesse diversi".
- Forward Rate Agreements: "Contratto derivato con il quale le parti si mettono in accordo per applicare uno stesso tasso d'interesse ad un certo capitale per un periodo futuro".

[1]Regolamento Banca d'Italia; Vigilanza creditizia e finanziaria; Derivati finanziari

- Warrant: "Documento che conferisce al suo possessore la facoltà e non l'obbligo di sottoscrivere/acquistare una determinata quantità di titoli ad un certo prezzo e ad una certa scadenza".

- Covered warrants: "Strumento (nella fattispecie di titolo) che attribuisce il diritto di acquistare o vendere, a seconda della posizione ricercata, ad un certo prezzo e ad un determinato sottostante in un periodo prescelto. Essi sono emessi da istituzioni finanziarie".

. . . Un esempio che ci porta alle "origini". . .

Citando un passo molto interessante, tratto dal libro di Chiara Oldani[2] "Dalla Bibbia alla Enron", si vuole mettere in luce come dalle nostre origini ad oggi le cose non siano più di tanto cambiate. Si è modificata la struttura e il modo di fare finanza, ma tendenzialmente le basi e i contenuti sono rimasti sempre gli stessi. Già nella bibbia si può individuare una tipologia di contratto d'opzione, probabilmente il primo. Si tratta dell'episodio in cui Giacobbe ottenne la possibilità di avere in sposa Rachele, ossia l'attività sottostante, in cambio di un premio, che in quel caso fu di sette anni di lavoro. Il problema fu che allo scadere del termine il datore di lavoro, il padre di Rachele, sostituisce il sottostante con un altro, ossia un'altra figlia. Dal momento che il contratto a quel tempo era verbale, Giacobbe si vede obbligato a lavorare altri sette anni, non avendo avuto nessun tipo di garanzia, quindi a pagare un premio dello stesso importo pur di ricevere il sottostante dovuto inizialmente. A quell'epoca, la violazione del contratto stipulato verbalmente e l'insoddisfazione delle controparti furono dovute alla mancanza di un mercato regolamentato, ma col passare del tempo si cercò di migliorare il controllo e la regolamentazione dei contratti. Continuando il cammino temporale, risulta evidente come anche le popolazione del Medio Oriente conoscessero già gli scambi a termine e le promesse di vendita. Questo perchè esisteva la necessità di una garanzia futura in prevenzione ad eventuali carestie o condizioni climatiche sfavorevoli. Risultano rilevanti esempi di contratti futures sul grano o su altre merci di fondamentale utilizzo dell'epoca. Stipula dell'accordo, controllo di qualità delle merci e lo scambio avvenivano sotto un regolamento dettato da principi religiosi. Il tempio era il simbolo della odierna clearing house, organo di controllo. La religione svolgeva, quindi, un ruolo molto importante e di forte impatto, in quanto chi non onorava il contratto si trovava a dover subire una pena immediata o nell'Aldilà. Questi

[2] OLDANI C., (2010) "I derivati finanziari - Dalla Bibbia alla Enron", Franco Angeli.

commodity futures continuarono fino a dopo le crociate. Con la chiesa romana si ebbe il primo grosso produttore di beni agricoli d'Europa, affinandosi sempre di più alla tipologia di mercati finanziari. Nel Rinascimento si arriva ad avere strumenti finanziari swap del debito pubblico, per poi proseguire con la scoperta dell'America e la continua evoluzione dell'uomo, fino a spostare dall'Europa alle Americhe il centro della finanza.

Capitolo 2

Proprietà fondamentali dei derivati

Gli strumenti di interesse che verranno di seguito analizzati sono strumenti finanziari derivati utili per la nostra analisi sui modelli jump-diffusion. Questo secondo capitolo vuole essere una descrizione delle principali caratteristiche di azioni, warrant, covered warrant ed opzioni, per avere una visione generale di alcuni strumenti derivati, in modo tale da capire meglio le assunzioni e le conclusioni che verranno evidenziate in questa tesi.

Ruolo fondamentale avranno le opzioni in quanto tema essenziale per la nostra analisi finale.

2.1 Le azioni

La nostra analisi ci porta a dare maggior rilevanza alle negoziazioni, riguardanti il mercato dei titoli azionari. Per questo motivo vogliamo, in primis, descrivere questo strumento, che sarà per noi il sottostante dei nostri strumenti derivati.
Dal punto di vista legislativo si fa riferimento all'*art. 2348* C.c. in cui viene stabilito che le azioni sono delle parti di identico ammontare in cui è diviso il capitale sociale di una società per azioni (S.p.a).

"Art. 2348 . Categorie di azioni.

Le azioni devono essere di uguale valore e conferiscono ai loro possessori uguali diritti. Si possono tuttavia creare, con lo statuto o con successive modificazioni di questo, categorie di azioni fornite di diritti diversi anche per quanto concerne l'incidenza delle perdite. In tal caso la società, nei limiti imposti dalla legge, può liberamente determinare il contenuto delle azioni delle varie categorie. Tutte le azioni appartenenti ad una medesima categoria conferiscono uguali diritti."

Ognuna di queste partizioni, definita 'azione' attribuisce ad ogni suo possessore lo stesso identico diritto; essa è l'unità minima di partecipazione al capitale sociale ed è indivisibile. Ciò non vuol dire che solo una persona può essere titolare di una o più azioni, bensì più persone possono essere titolari della stessa azione purché fra i soggetti ci sia una situazione di proprietà indivisa che imponga la nomina di un comune rappresentante per l'esercizio dei diritti dell'azione stessa. Si aggiunge inoltre, che essa è nominativa e trasferibile ed è rappresentata da un documento disciplinato nello stesso modo dei titoli di credito.
Quando il sottostante è dato da azioni, come nel nostro caso, è utile porre attenzione ad alcuni fattori. Questo perché il valore dell'azione è strettamente legato al valore dell'impresa: aumenta se la società consegue degli utili e scende se è in difficoltà.
È bene ricordare che vi sono anche molti altri fattori, legati all'impresa, che possono influenzare il valore di un'azione; alcuni di questi sono i seguenti:

- la tipologia di attività d'impresa (se è stagionale oppure continua);
- il livello di diversificazione (se l'impresa opera in molti settori oppure in uno solo);
- la qualità del management, ossia il modo in cui l'impresa è organizzata;
- gli eventuali aumenti di capitale;

- gli stacchi di dividendi;
- il livello di capitalizzazione;
- la volatilità del titolo, cioè l'ampiezza delle variazioni dei prezzi.

2.2 I warrant

Secondo una sua prima definizione, il warrant era anche detto buono d'acquisto. Si tratta di una garanzia che consente di avere il diritto, o la facoltà, di acquisto di un titolo ad un prezzo fissato in precedenza. Esso dà diritto quindi ad acquistare un'azione ad un prezzo prefissato ad una certa data, ricordando che nel caso di mancato esercizio entro il termine di scadenza, esso non assumerebbe alcun valore. Si precisa che si tratta di uno strumento finanziario che attribuisce a chi lo acquista il diritto, e non l'obbligo, di acquistare o di vendere un determinato sottostante (nel nostro caso un titolo azionario) ad un prezzo d'esercizio prefissato. Nel primo caso si fa riferimento ai warrant call, mentre nel secondo (diritto di vendere) ai warrant put. Questi derivati seguono l'andamento dell'azione amplificandone le variazioni, ed è per questo motivo che sono soggetti all'effetto leva, artefice di oscillazioni decisamente maggiori nel caso di rialzo o ribasso del sottostante.

Per quanto concerne l'esercizio del contratto si vogliono evidenziarne due tipologie, se il warrant viene esercitato a scadenza si parlerà di warrant di tipo europeo, altrimenti, nel caso in cui esso venga esercitato in un qualsiasi momento della sua vita fino alla data ultima di scadenza avremo a che fare con una tipologia di warrant americano.

Proseguendo, le motivazioni per cui vengono usati i warrant sono molteplici, infatti come accennato in precedenza nella panoramica iniziale, questi derivati vengono utilizzati per scopi speculativi, di copertura o di miglioramento della performance. Nello specifico, se si perseguono finalità speculative, si può avere la prima distinzione:

Speculazione per esercizio del warrant: è effettuata di solito da chi ha intenzione di mantenere il warrant in portafoglio, e si tiene in considerazione il prezzo che l'investitore vuole conseguire;

Speculazione nel breve periodo: è eseguita da coloro che vogliono guadagnare rapidamente sull'andamento del warrant. Esso non verrà esercitato alla scadenza, bensì quando i warrant raggiungono una quotazione conveniente, cioè in un particolare momento della vita dello strumento derivato stesso, in cui lo speculatore avrà un buon guadagno, in linea con le sue aspettative.

Quando l'investitore desidera potenziare la performance del proprio portafoglio titoli e quindi vuole migliorarne la performance, rendendolo più aggressivo nella partecipazione ai movimenti di breve periodo del mercato, trova nei warrant uno strumento efficace e flessibile. Grazie all'utilizzo che se ne vuole fare, si ha peraltro l'impiego di un capitale ridotto rispetto a quello richiesto dal mercato a pronti.

I contratti warrant possono classificarsi in 4 sottospecie. Da un punto di vista formale il warrant è definibile come contratto a termine di acquisto o di vendita, per questo motivo avremo warrant call e warrant put:

- *Warrant call*: sono contratti a termine in cui si acquisisce il diritto di acquistare entro una certa data una determinata quantità di un'attività finanziaria (titolo sottostante) ad un prezzo fissato nel contratto. Il prezzo di acquisto è chiamato prezzo d'esercizio (K). In questi casi si ha la previsione che il prezzo del titolo sottostante aumenterà e per questo motivo si sarà propensi al suo acquisto. Nel caso in cui l'evento non si verificasse ed il prezzo diminuisse si andrebbe incontro a perdite anche consistenti. L'effetto leva, in questo contesto, gioca un ruolo vantaggioso nel caso di rialzo del prezzo dell'azione, mentre nel caso sfavorevole, la perdita sarà al massimo pari al premio pagato per il warrant e quindi sarà limitata rispetto alla perdita nel caso di solo acquisto dello stesso numero di azioni sottostanti ai warrant. In questo caso il profitto vero e proprio avrà luogo quando il warrant raggiungerà almeno un valore tale per cui si riesca a coprire anche il premio pagato all'inizio.

- *Warrant put*: Contratti a termine in cui si acquisisce il diritto di vendere una certa quantità del sottostante entro un certo termine ad un prezzo stabilito in precedenza. In questo caso si avranno delle aspettative ribassiste.

- *Warrant in senso stretto*: Strumenti finanziari ai quali faremo particolarmente riferimento, in quanto consentono di effettuare compravendite esclusivamente su azioni. Essi possono essere di tipologia call o put.

- *Covered warrant*: Strumenti derivati che rappresentano in un certo senso l'evoluzione dei warrant iniziali. Verranno trattati nei prossimi paragrafi.

2.2.1 L'evoluzione e l'origine dei warrant

Originariamente il fenomeno dei warrant prese il via in qualità di strumento derivato delle azioni di compendio[1], nello specifico come call warrant emessi da società quotate allo scopo di raccogliere capitale.
La loro negoziazione in Italia, sotto determinati requisiti, avvenne in tre mercati principali: sul MTA (Mercato telematico azionario), sul Mercato Ristretto e sul Nuovo Mercato della Borsa Italiana Spa. Il Mercato Telematico Azionario offriva ed offre tutt'ora la possibilità di raccolta di capitali da investitori istituzionali e professionali che garantiscono un'elevata liquidità del titolo. Il Mercato ristretto, invece, nacque per la quotazione di piccole medie imprese, lasciando poi il posto nel 2003 al Mercato Expandi, orientato sempre alla stessa clientela, che in esso reperisce in maniera più semplice e a costi più contenuti nuovi capitali.
Altro mercato che si occupava dei warrant era il Nuovo Mercato; dedicato alle

[1] Trattasi di titoli assegnati ad un investitore che aderisce alla conversione di un'obbligazione convertibile o di un warrant.

piccole medie imprese (PMI) con elevato potenziale di crescita; venne chiuso nel 2005, rinominato Mtax e finì alla fine per essere incorporato definitivamente nel già citato MTA.
Ad oggi i mercati nei quali è possibile la negoziazione dei warrant sono il MTA ed il Mercato Expandi.
Di seguito vogliamo riportare l'elenco, tratto dal 'Regolamento dei mercati organizzati e gestiti da Borsa Italiana Spa', dei requisiti che i warrant devono avere per essere ammessi allo scambio:

- Circolazione autonoma.
- Le azioni derivanti dall'esercizio dei warrant devono essere rese disponibili entro il decimo giorno di mercato aperto del mese successivo alla richiesta.
- Sono dovute rettifiche in occasione di eventi straordinari riguardanti la società, per neutralizzarne gli effetti.
- Adeguata diffusione, valutata da Borsa Italiana.

Le caratteristiche di questi strumenti vengono disciplinate dal 'Codice del Sistema Tributario', in cui viene data la definizione estesa del warrant e ne viene fatta la distinzione nel caso di emissione per l'acquisto o la vendita di azioni. Inoltre, la disciplina elenca i requisiti di questi strumenti così come i requisiti degli emittenti di warrant.

In questo paragrafo si vuole dare comunque un accenno a questi strumenti, rimandando all'Appendice 'A1' le definizioni intere tratte dal codice del sistema tributario. Questi strumenti finanziari conferiscono al detentore la possibilità di sottoscrivere, di vendere o di acquistare entro un determinato termine oppure alla scadenza del contratto, un determinato quantitativo di azioni dietro il versamento o l'incasso di un importo stabilito o ancora da stabilire. La distinzione che viene fatta riguarda l'emissione di warrant per l'acquisto oppure per la vendita di azioni,

entrambi sotto il vincolo di vigilanza prudenziale a cui deve sottostare il soggetto competente del deposito dei fondi.
Alternativamente, nel caso di warrant per la vendita di azioni, può anche essere costituita una garanzia. La disciplina descrive i requisiti che gli emittenti dei warrant sono obbligati a rispettare.

Oggi questo strumento risulta ormai superato da nuove tipologie di investimento come ad esempio i Covered Warrant. Questi ultimi presentano alcune differenze pur essendo simili per certi aspetti ai semplici warrant, infatti possono riguardare più oggetti e nel caso in cui siano riferiti ad azioni o titoli di Stato, devono essere emessi da soggetti diversi gli emittenti del sottostante. Essi inoltre possono essere esercitati in qualsiasi momento entro la scadenza.
Nel mercato italiano con la comparsa dei covered warrant si è osservata una grossa diminuzione iniziale degli scambi di strumenti warrant.

2.3 I covered warrant

Evoluzione dei warrant (precedentemente descritti) i covered warrant hanno differente emittente e finalità. Se i warrant hanno uno scopo di raccolta di capitale, i covered warrant hanno la peculiarità di avere un ruolo autonomo rispetto all'emittente dei titoli sottostanti.
I covered warrant danno la possilibilità di investire sul mercato essendo a conoscenza della perdita massima che si può sostenere, ossia il prezzo d'acquisto, a fronte di profitti potenzialmente illimitati.
Per quanto riguarda i covered warrant, l'emittente è un ente finanziario, nella fattispecie, una banca o una società finanziaria e non la società a cui fa capo il sottostante. L'emittente si assume totalmente gli obblighi derivanti dalla stipula del contratto, mentre l'investitore ha solo il diritto, acquistato pagando il premio del covered warrant, di esercitare o meno il contratto. L'emittente, inoltre, agisce

come market maker, ha cioè l'obbligo di assicurare in qualsiasi momento prezzi di vendita ed acquisto in modo tale da rendere lo strumento facilmente negoziabile.

2.3.1 L'origine e la loro regolamentazione

Originariamente il nome 'Covered Warrant' venne ideato perchè l'emittente prendeva posizione sull'attività sottostante, ciò vale a dire che si 'copriva' ('Covered = coperto'), affinchè egli potesse adempiere, in caso di esercizio del warrant emesso, alle proprie obbligazioni.
Con il termine covered warrant, però, non si fa riferimento a strumenti completamente coperti, bensì ci si occupa di elementi che possono essere anche semplicemente, in parte o per niente, coperti dal sottostante. La loro regolamentazione avviene per mezzo del 'Regolamento dei Mercati Organizzati e Gestiti da Borsa Italiana S.P.A', dove all'*art. 2.2.19 (Capo 7)* ne troviamo, innanzitutto, la definizione.

Il punto focale di questo primo articolo si trova al *comma 1*, dove si afferma che i covered warrant sono emessi da soggetti diversi ed indipendenti dagli emittenti l'attività sottostante. Nell'Appendice 'A2' verrà delineata la disciplina e l'elenco delle attività sottostanti di questi strumenti finanziari, i requisiti che devono rispettare gli emittenti e le caratteristiche dei covered warrants. La disciplina tratta assieme covered warrant e certificate, benché siano strumenti finanziari differenti. Di fatto, entrambi vengono negoziati nello stesso mercato, il Sedex. Questo mercato, che ha sostituito il mercato telematico dei covered warrant, fa sì che gli investitori abbiano la possibilità di negoziare elettronicamente in tempo reale questa specifica tipologia di strumenti derivati.

2.4 I Certificate: cenni

Il termine certificate individua degli strumenti finanziari derivati cartolarizzati (negoziati sul mercato SeDeX) che replicano l'andamento dell'attività sottostante.

Si possono individuare due tipi di certificates in base al fatto che abbiano effetto leva oppure no.

I certificate che non possiedono l'effetto leva sono sostanzialmente un'alternativa all'investimento nel sottostante. Di questo tipo di certificate fanno parte:

- i certificate che replicano semplicemente la performance del sottostante (detti comunemente 'benchmark'). Essi sono vantaggiosi per sottostanti quali ad esempio indici, valute, future sul petrolio, oro ed argento che altrimenti sarebbero difficili da raggiungere da investitori privati, perché sono materie prime che hanno bisogno di grandi costi di stoccaggio o indici che sono immateriali;

- i certificate che permettono, attraverso opzioni a carattere accessorio, la realizzazione di strategie di investimento più complesse, che mirano ad esempio alla protezione parziale o totale del capitale investito oppure all'ottenimento di performance migliori di quelle ottenute dal sottostante stesso in particolari condizioni di mercato.

Un'altra tipologia è data dai leverage certificate, cioè certificate con effetto leva che danno la possibilità di investire con effetto leva in posizione lunga o corta su un certo sottostante:

- i *bull leverage certificate* sono strumenti finanziari che consentono all'investitore di assumere una posizione lunga sul sottostante impiegando solo una frazione del valore richiesto per l'acquisto dello stesso. Acquistare un certificato con leva del tipo bull equivale infatti, dal punto di vista finanziario, ad acquistare il sottostante e contestualmente accendere un finanziamento con l'emittente per un importo pari al valore dello strike price;

- i *bear leverage certificate* sono invece, strumenti finanziari che consentono all'investitore di assumere una posizione corta sul sottostante: acquistare un certificato con leva del tipo bear equivale finanziariamente a vendere il sottostante allo scoperto e contestualmente effettuare un deposito, presso l'emittente, pari ad un importo corrispondente allo strike price, per un periodo coincidente con la vita residua del certificato.

Sia i bull che i bear certificate vengono compresi nel segmento 'leverage certificate' del mercato SeDeX. Mentre i certificate con leva si adattano maggiormente ad investitori con una buona preparazione tecnico finanziaria che tendono ad avere una strategia di investimento altamente speculativa ed un orizzonte temporale mediamente di breve periodo, i certificate senza leva rispondono, invece, a logiche di investimento più conservative ed orientate al medio lungo termine.

Il valore dei certificate, sia con leva che senza leva, non dipende, a differenza dei covered warrant, dal trascorrere del tempo e dalla volatilità del sottostante. Fanno chiaramente eccezione gli 'investment certificate', certificati con effetto leva, a causa della componente opzionale che li caratterizza.

2.5 Le opzioni

I contratti di opzione sono uno strumento finanziario molto versatile, in quanto permettono di mettere in pratica un elevato numero di strategie diverse d'investimento per raggiungere obiettivi differenti, quali la copertura d'investimenti, la protezione del portafoglio da eventuali rischi, elevati rendimenti a medio-lungo periodo cosiccome particolari strategie non attuabili con altri strumenti.
Essi possono essere differenziati subito in due sottospecie principali: opzioni call e opzioni put. Le opzioni 'CALL', sono contratti che danno il diritto e non l'obbligo di acquisire una certa attività sottostante ad un determinato prezzo entro una certa data. Le opzioni 'PUT', invece, sono contratti che danno al portatore il diritto e non l'obbligo di vendere il sottostante ad un determinato prezzo ed entro una certa scadenza.
Un'ulteriore particolarità, che potrebbe causare una difficoltà nel calcolo del prezzo,

è la distinzione che viene fatta fra opzioni di tipo europeo ed opzioni di tipo americano. Le prime possono essere esercitate solo alla scadenza (come altri strumenti quali forward e futures), mentre l'esercizio delle seconde avviene in un qualsiasi momento fino alla scadenza (inclusa).
La loro negoziazione avviene nei mercati over the counter ed in borsa. Per mercato over the counter s'intende un mercato non regolamentato dove avvengono le operazioni di compravendita titoli, nel quale le caratteristiche dei contratti non sono standard (trattasi di contratti atipici).

2.5.1 I fattori principali

IL SOTTOSTANTE (S_0)

L'attività sottostante per le opzioni è l'attività sulla quale viene stipulato il contratto d'opzione. Tale attività può essere di diverso tipo: valute estere, futures, commodities ..., ma quelle più rilevanti sono in assoluto le azioni e gli indici azionari, ed è proprio su queste che focalizzeremo i nostri interessi.
Con S_0 indicheremo il prezzo del sottostante all'epoca 0, ossia alla stipula del contratto, mentre si parlerà di S_T al momento della scadenza del contratto, e S_t quando prenderemo in considerazione un tempo intermedio compreso fra 0 e T.

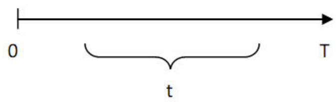

Figura 2.1: Arco temporale della vita di un sottostante

Opzioni su azioni

Quando si parla di opzioni su azioni si fa riferimento a opzioni il cui sottostante è un titolo azionario. Per meglio descrivere questa tipologia analizzeremo un esempio pratico:

"L'investitore Tizio decide di comprare un'opzione call con un prezzo d'esercizio pari a €60, sapendo che il prezzo dell'azione sottostante è di €52. Dato che il prezzo dell'opzione è di €5, se Tizio vuole un centinaio di contratti, spenderà €500. La commissione da pagare per l'acquisto del derivato è di €28.
Supponiamo che l'azione aumenti il suo valore e di conseguenza l'opzione venga esercitata quando il prezzo di €70, ipotizziamo anche che l'investitore paghi l'1,9‰ di commissioni sulla compravendita di azioni. Si avrebbe così una commissione da pagare pari a:

$$0,0019 \, * \, €65 \, * \, 100 = €12,35$$

nel momento di esercizio dell'opzione.
Il profitto finale per Tizio, invece, risulterà essere:

$$€1000 \, - \, €500 \, - \, €40,35 = €459,65$$

dove €40,35 è il totale della commissione, cioé €12,35 + €28.
Se si decide di vendere l'opzione a €10 invece di esercitarla si risparmierebbero le commissioni."

In particolare i prezzi delle opzioni su azioni vengono influenzati da alcuni fattori determinanti, quali, il prezzo corrente dell'azione (prezzo del sottostante); il prezzo di esercizio; la vita del titolo; la volatilità del prezzo dell'azione, quindi la sua propensione al rischio; i dividendi attesi e il tasso privo di rischio.
La tabella 2.1, tratta dal libro *Opzioni futures e altri derivati* di John Hull, ci mostra in che modo questi fattori determinano le variazioni dei contratti d'opzione, sia per la tipologia 'europea' che per quella 'americana', e quindi qual è la loro

influenza in essi.

Tabella 2.1: Fattori che influiscono sul prezzo di un'opzione

FATTORE	Call europea	Put europea	Call americana	Put americana
Prezzo dell'azione	+	−	+	−
Prezzo d'esercizio	−	+	−	+
Vita residua	?	?	+	+
Volatilità	+	+	+	+
Dividendo	−	+	−	+
Tasso d'interesse	+	−	+	−

Fonte: HULL J.C., (2009) "Opzioni, futures e altri derivati", (7) Pearson, Prentice Hall.

Con il simbolo '+' si identifica un effetto positivo sul prezzo dell'opzione dato l'aumento della variabile selezionata, mentre il simbolo '−' rifletterà un effetto negativo. Con il segno '?' l'effetto sarà incerto e quindi non delineabile a priori.

Opzioni su indici azionari

In questa tipologia di opzioni troviamo un sottostante differente, che indica la variazione del valore di un portafoglio formato da azioni. Le opzioni su indici azionari hanno come sottostante un indice azionario, generalmente un indice dei mercati azionari delle maggiori Borse a livello mondiale. Queste opzioni, come le opzioni su azioni, fanno parte delle opzioni su strumenti finanziari.

IL PREZZO DI ESERCIZIO (K)

Si tratta di un prezzo di esercizio, chiamato anche prezzo base che è indicato nel contratto ed è il prezzo al quale verrà esercitata l'opzione nel caso favorevole di possibile guadagno.

IL PREMIO E LA SCADENZA

Come precisato in precedenza i contratti derivati qui trattati, e quindi anche i contratti di opzione, richiedono di sostenere un costo per l'acquisto del contratto stesso. Questo costo è chiamato 'premio'. La scadenza del contratto è la data di estinzione ultima, che viene esplicitata nel contratto stesso.

Prima di passare alle altre caratteristiche delle opzioni, mettiamo in evidenza la formula generale, che definisce il payoff alla scadenza delle opzioni, che ci sará utile per capire meglio le descrizioni appena fatte, e ci permetterà inoltre di proseguire con i nostri ragionamenti.

2.5.2 Opzioni Call, Put e Call-Put Parity

Quando si parla di opzioni si è di fronte ad una prima distinzione che riguarda la tipologia call e quella put.

Possedere un'*opzione call* significa sperare che il prezzo dell'azione sottostante in futuro cresca, in modo tale da assicurarsi un guadagno più o meno importante. Questo contratto a termine conferisce all'investitore il diritto di scelta nell'acquisto del titolo sottostante al prezzo prefissato. Il profitto a scadenza di una call lunga, quindi in acquisto, è dato dalla formula sottoindicata (2.1), ed i possibili risultati sono due. Abbiamo un primo caso, in cui il prezzo del sottostante risulta essere minore rispetto al prezzo iniziale d'esercizio; in tal caso non ci sarà convenienza nell'esercizio dell'opzione, ci avvarremo della possibilità di non usufruire di questo diritto, pertanto il profitto previsto sarà 0. Il secondo caso è quello in cui il prezzo del titolo supera il prezzo d'esercizio facendo sì che la differenza risulti positiva e si decida così per l'esercizio del diritto d'opzione, in modo tale da portarsi a casa un guadagno. Un caso, invece, che non viene preso in considerazione nella precedente formula, è quello riguardante la seguente uguaglianza: $S_t = K$, in cui non c'è stato né un vantaggio né uno svantaggio in termini di guadagno o perdita.

La prossima formula serve a calcolarne il valore a scadenza (senza premio):

$$\textbf{Payoff}_{\text{ CALL LUNGA}} = \begin{cases} 0, & \text{se } S_T \leq \text{K} \\ \\ S_T \text{ - K}, & \text{se } S_T > \text{K} \end{cases} \tag{2.1}$$

Proseguendo con le nostre considerazioni, mostriamo ora il caso, più realistico, in cui sia presente anche il premio (P):

$$\textbf{Payoff}_{\text{ CALL LUNGA con premio}} = \begin{cases} \text{P}, & \text{se } S_T \leq \text{K} \\ \\ (S_T \text{ - K,})\text{- P}, & \text{se } S_T > \text{K} \end{cases} \tag{2.2}$$

Graficamente risulta:

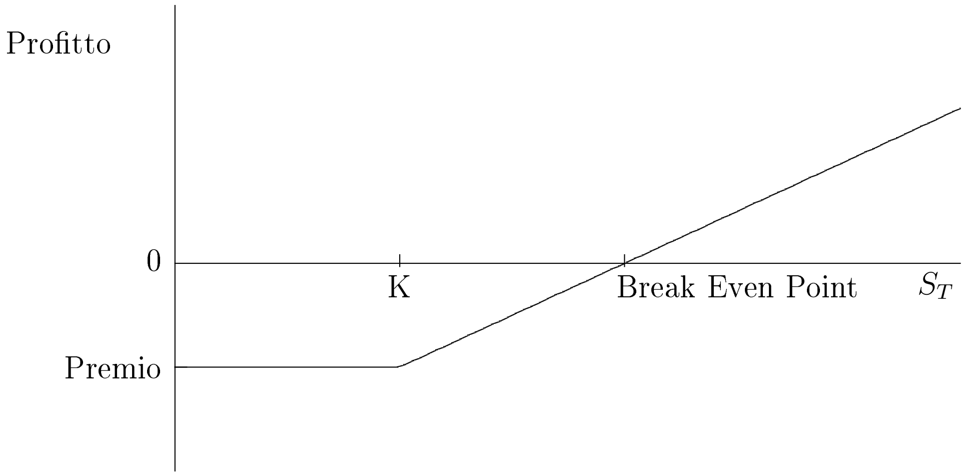

Figura 2.2: Payoff opzione call lunga

Con il termine premio, ci si riferisce a quell'importo che ci conferisce il diritto d'esercizio dell'opzione. Si tratta di un prezzo che viene pagato nel momento dell'acquisto dell'opzione, che rappresenta un costo per il diritto acquistato, esso, nei casi sfavorevoli, sarà la perdita massima a cui si andrà incontro. Graficamente, nella fig. (2.2) possiamo vedere il valore del premio, ossia la nostra massima perdita possibile o/ed il prezzo che paghiamo per l'opzione, e i possibili valori che può assumere l'opzione stessa lungo la linea tracciata.

Per quanto riguarda le *opzioni put*, invece, possederne una, in modo tale da assicurarsi un guadagno più o meno importante, significa sperare che il prezzo dell'azione sottostante diminuisca in futuro. Il valore a scadenza di una put (in assenza di premio) è dato da:

$$\textbf{Payoff}_{\text{ PUT CORTA}} = \begin{cases} K - S_T, & \text{se } S_T \leq \text{K} \\ 0, & \text{se } S_T > \text{K} \end{cases} \tag{2.3}$$

Questa formula funziona in maniera opposta a quella della call vista in precedenza. Nel caso in cui il prezzo del sottostante sia maggiore di quello d'esercizio non ci sarà convenienza ad esercitare l'opzione, mentre nella situazione in cui il prezzo del sottostante sia minore del prezzo d'esercizio ci sarà vantaggio per l'investitore nell'esercizio del diritto acquistato. Punto in comune con la call è che anche in questo caso quando i due prezzi quello d'esercizio e quello del sottostante sono uguali non ci saranno posizioni favorevoli o sfavorevoli. La figura (2.3), qui sotto, ci mostra la rappresentazione grafica della put con premio (P), mentre la formula (2.4) ci propone il payoff a scadenza che potrebbe avverarsi in base al valore del sottostante in T.

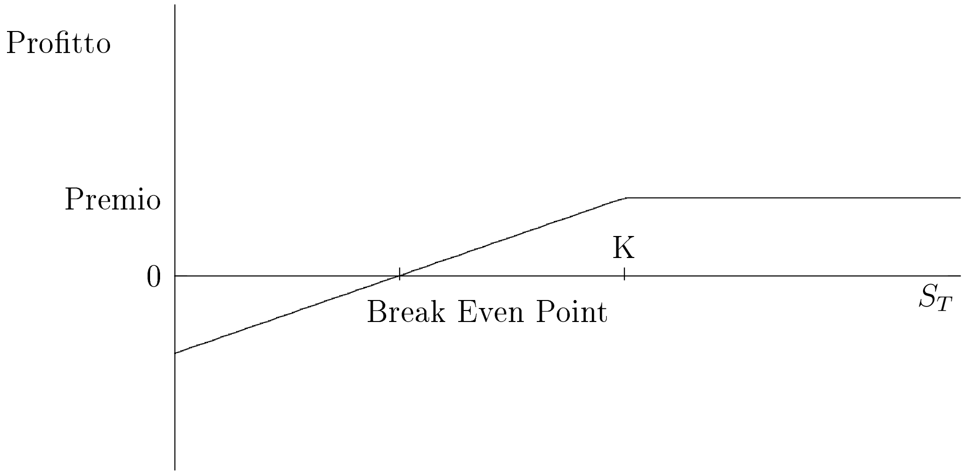

Figura 2.3: Payoff opzione put corta

Come nel caso precedente il premio pagato sarà la nostra perdita massima, in quanto è il costo che paghiamo per acquistare il diritto.

$$\textbf{Payoff}_{\text{ PUT CORTA con Premio}} = \begin{cases} K - S_T - P, & \text{se } S_T < \text{K} \\ \text{-P}, & \text{se } S_T \geq \text{K} \end{cases} \tag{2.4}$$

Va inoltre ricordato che in ognuno di questi contratti esistono a loro volta due posizioni. Avremo l'investitore che assume la posizione lunga di acquisto del contratto e l'investitore che assume la posizione corta di vendita dello stesso contratto. Ognuno di questi in base alla propria previsione spera che il prezzo aumenti o diminuisca. Le posizioni sono speculari, quindi, ad esempio chi vende l'opzione ha un'entrata iniziale sicura ma sarà soggetto ad una potenziale perdita, e il profitto/ perdita di uno sarà pari al profitto/ perdita dell'altro.

Si parlerà di posizioni lunghe e corte su call e di posizioni lunghe e corte su put.

Di seguito verrà proposta una semplice tabella riassuntiva, la tabella 2.2 per sintetizzare i concetti principali:

CALL	**PUT**
Prezzo del sottostante al tempo T > Prezzo d'esercizio = guadagno	Prezzo d'esercizio > prezzo del sottostante al tempo T = guadagno
Si può acquistare una certa quantità (Q) di attività sottostante ad un prezzo stabilito in precedenza (K)	Si può vendere una certa quantità (Q) di attività sottostante ad un prezzo stabilito in precedenza (K)
Si può incassare una somma di denaro corrispondente al prezzo dell'attività sottostante liquidata meno il prezzo precedentemente stabilito (K)	Si può incassare una somma di denaro corrispondente al prezzo precedentemente stabilito (K) meno il prezzo dell'attività sottostante liquidata

Tabella 2.2: Tabella riassuntiva per le opzioni call e put

In precedenza abbiamo affermato che le opzioni possano assumere diverse posizioni, lunghe o corte, a seconda che si tratti di derivati d'acquisto o di vendita. Interessante è considerare come il prezzo d'esercizio 'K' sia determinante ai fini dell'esercizio del derivato, quindi dell'acquisto o della vendita dell'opzione, sia che si tratti di opzione put sia nel caso di opzione call.
Un'opzione call lunga, (si veda l'eq.(2.1)) avrà guadagno ad essere esercitata quando il prezzo del sottostante (St) supera il prezzo d'esercizio; mentre quando si parla di call corta, quindi di vendita del sottostante, ci sarà convenienza nel caso di prezzo d'esercizio (K) minore di St. Viceversa per le opzioni put. Ci sarà convenienza d'esercizio nel caso di put lunga, quando il prezzo del sottostante è minore del prezzo di esercizio, mentre con una posizione corta si avrà convenienza con un prezzo del sottostante maggiore di K.
Le figure 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, ci mostrano i valori finali delle opzioni call e put su opzioni europee; in questi grafici viene considerato anche il premio da pagare per l'acquisto del derivato.

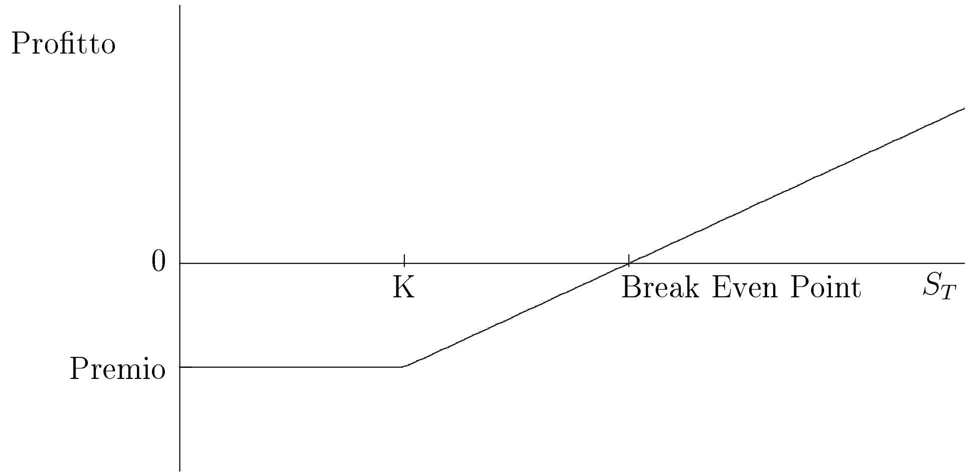

Figura 2.4: Payoff a scadenza di un'opzione call lunga in funzione di S_T

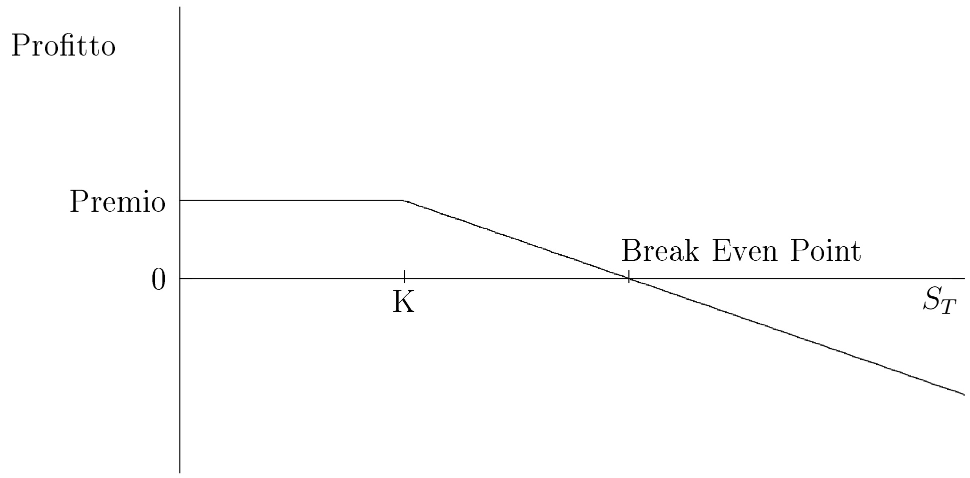

Figura 2.5: Payoff a scadenza di un'opzione call corta in funzione di S_T

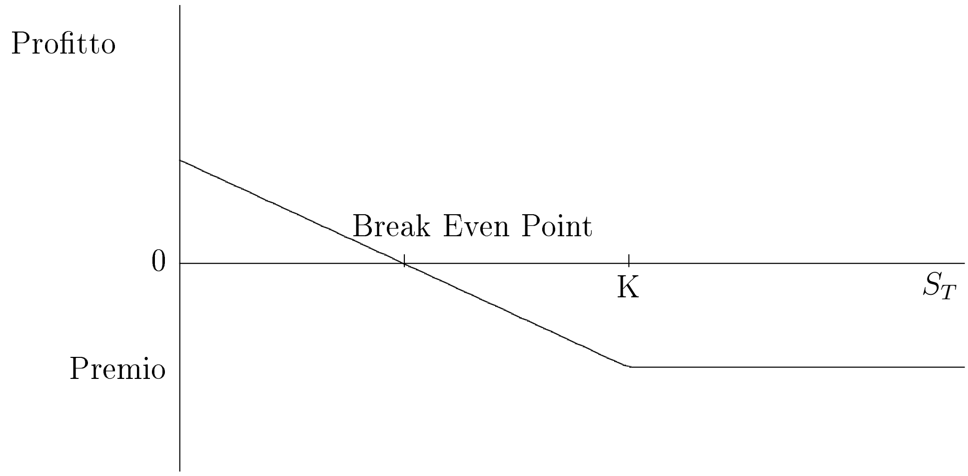

Figura 2.6: Payoff a scadenza di un'opzione put lunga in funzione di S_T

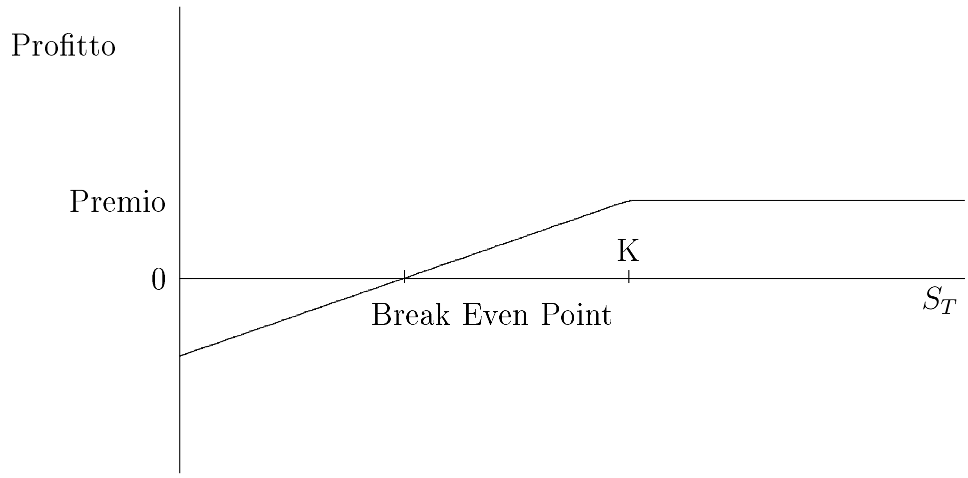

Figura 2.7: Payoff a scadenza di un'opzione put corta in funzione di S_T

In relazione al premio, un breve approffondimento è dovuto anche al valore intrinseco e a quello temporale delle opzioni. Il valore intrinseco è quel valore che, non considerando il costo per il diritto dell'opzione, indica la differenza tra prezzo d'esercizio e valore del sottostante. Un valore intrinseco superiore allo zero sta ad indicare quanto un'opzione possa essere in the money[2]. Quando invece parliamo di valore temporale ci atteniamo alla parte del premio che supera il valore intrinseco, cioè si tratta di quanto è disposto a pagare un investitore oltre al valore intrinseco. Il premio infatti è calcolato con la somma dei due valore, valori intrinseco + valore temporale.

PUT CALL PARITY

Vogliamo porgere ora l'attenzione alla put-call parity.
Si tratta di una formula che lega tra loro il prezzo di un opzione put e quello di un opzione call:

$$c - p = S_0 - Ke^{-r(T-t)} \tag{2.5}$$

dove con il simbolo 'c' indichiamo il costo dell'opzione call e con 'p' il costo dell'opzione put; S_0 indica prezzo del sottostante dell'opzione al tempo iniziale 0 e K è il prezzo d'esercizio a scadenza.

Prendendo in considerazione la tipologia delle opzioni europee, per poter riuscire a calcolare il valore di una put noto quello di una call, e viceversa, le opzioni devono avere la stessa scadenza e o lo stesso prezzo d'esercizio.

Vediamone subito un esempio:

' Sia il prezzo d'esercizio pari ad €20, quello del sottostante pari ad €19, mentre il tasso d'interesse privo di rischio è pari al 10 % all'anno. Dato il prezzo di una put a 6 mesi pari ad €2.50, quale sarà il prezzo di una call a 6 mesi?

[2]Per chiarire il concetto di opzione in the money si veda il par. 2.5.3.

$$c = p + S_0 - Ke^{-rT}$$

$$c = 2.50 + 19 - 20 * 2.71828^{-0.10*0.5} \cong 2.47$$

Il prezzo di una call a sei mesi è pari ad €2.47.

2.5.3 Posizioni 'In, at, out of the money'

A seconda che il prezzo di esercizio sia maggiore, uguale o inferiore al prezzo corrente dell'azione sottostante, l'opzione può essere definita in questi diversi modi: in-the-money, at-the-money e out-of-the-money.
Anche in questo caso, avremo due distinzioni a seconda che l'opzione sia di tipo put oppure call. Per quanto riguarda le opzioni call, un'opzione si definisce in the money quando il prezzo di esercizio è minore del prezzo corrente del sottostante, perciò sarà possibile l'acquisto del sottostante da parte dell'investitore ad un prezzo favorevole rispetto al mercato azionario ($K < S$).
Si parla di call at the money, al contrario, quando il prezzo di esercizio e quello corrente sono molto simili se non addirittura uguali ($S = K$). Infine, la call out of the money avrà un prezzo di esercizio maggiore di quello corrente del sottostante ($K > S$). L'opzione verrà esercitata solo se è in the money, posizione favorevole che comporterebbe un flusso di cassa positivo se l'esercizio della stessa avvenisse all'istante $t = 0$.
Viceversa sarà per quanto riguarda le opzioni put. L'unica posizione uguale è quella che riguarda il caso at the money, mentre nel caso in the money il prezzo d'esercizio risulterà maggiore di quello del titolo, in modo tale da rendere possibile l'esercizio dell'opzione, tramite la vendita del sottostante da parte dell'acquirente ad un prezzo più alto di quello presente sul mercato. Il caso out of the money prevede, infine, un prezzo di esercizio minore del prezzo del titolo. Nella figura 2.8

portiamo ad esempio le possibili posizioni per un'opzione call, per capirne meglio la logica sottostante.

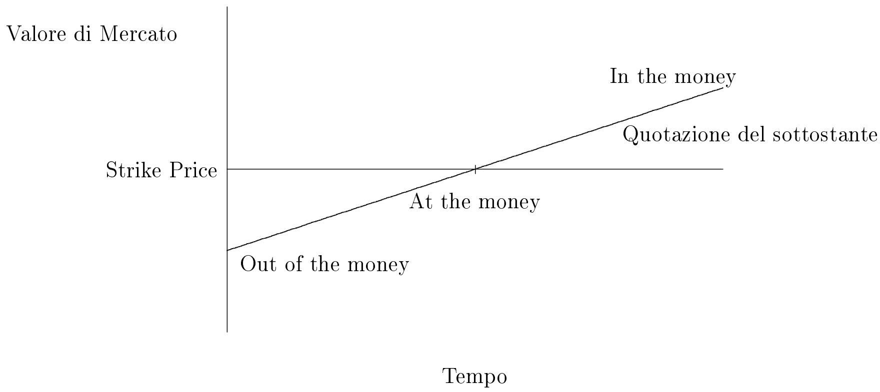

Figura 2.8: Valutazione dell'opzione call in base al valore del sottostante rispetto al prezzo d'esercizio

Nel momento in cui il valore di mercato del titolo sottostante è pari al prezzo d'esercizio, saremo nella posizione at the money, in cui non si avranno né perdite né guadagni. Man mano che il prezzo del sottostante cresce e quindi ci allontaniamo sempre di più dal valore fissato d'esercizio, ci sarà, via via, maggiore convenienza ad esercitare l'opzione. (posizione in the money)
Caso contrario, quando saremo in zona out of the money, cioè quando il prezzo del sottostante sarà via via minore del prezzo d'esercizio, si potranno verificare delle perdite nel momento dell'esercizio dell'opzione.
Si consideri inoltre che con questi strumenti derivati si ha interesse nel bloccare la possibile perdita, rimettendoci al massimo il premio pagato inizialmente.

2.5.4 Le lettere greche

Le lettere greche ci aiutano a rendere più efficiente la copertura del nostro portafoglio, e quindi a contenere gli eventuali rischi a cui possiamo andare incontro nelle nostre contrattazioni. Ognuna di esse misura una diversa dimensione del rischio in merito alle posizioni su opzioni.

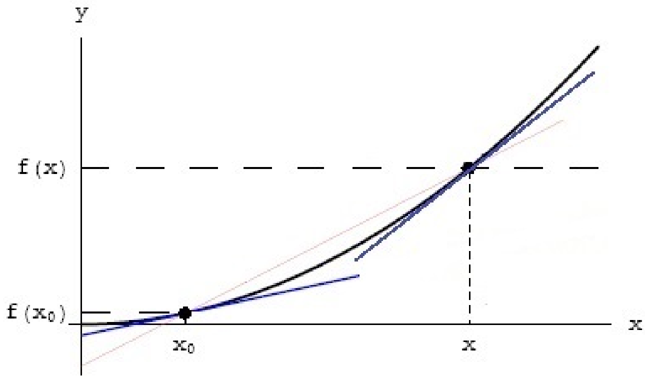

Figura 2.9: Rappresentazione del delta - *tratto da "Borsa Italiana".*

Il Delta

Questo primo indicatore è pari alla derivata del valore del portafoglio rispetto al prezzo dell'attività sottostante:

$$\Delta = \frac{\partial \Pi}{\partial S}.$$

Esso indica la sensibilità del prezzo dell'opzione al variare del prezzo del titolo sottostante. Il delta è definibile anche come pendenza della curva che lega il valore del portafoglio al prezzo del sottostante. Si tratta perciò della pendenza della retta tangente alla curva in un qualsiasi punto ed in base al prezzo del sottostante e al prezzo del derivato, si avranno delta differenti, il Δ sarà la pendenza della retta tangente. Nella rappresentazione della figura 2.9 vengono riportati i due punti: $(f(x_0); x_0)$ e $(f(x); x)$ nei quali passano le due rette tangenti.

Le caratteristiche di questo indicatore riguardano il tipo di posizione che l'investitore ha sull'opzione, put oppure call, lunghe o corte.

I possibili risultati del delta vengono evidenziati nella tabella 2.3:

Acquisto Call	$0 < \Delta < 1$	Vendita Call	$-1 < \Delta < 0$
Acquisto Put	$-1 < \Delta < 0$	Vendita Put	$0 < \Delta < 1$

Tabella 2.3: Valori di delta

Nel caso di acquisto di un'opzione call, una variazione positiva del prezzo del sottostante fa sì che aumenti anche il valore dell'opzione, ed il delta fornirà un'approssimazione dell'aumento del sottostante. Caso opposto è quello dell'acquisto di una put in cui ci sarà una relazione inversa fra i due prezzi; in questo caso la relazione vale solo nel caso si stiano trattando singole opzioni. Nell'ipotesi, invece, di un portafoglio di opzioni avremo dei valori di delta che nel complesso supereranno l'unità, sia al di sopra che al di sotto dello zero.
Per trovare il delta di un portafoglio è possibile usare anche la seguente formula:

$$\Delta\Pi = \sum_{i=1}^{n} n_i \Delta_i,$$

nella quale si sommano i singoli delta (Δ_i) delle opzioni (n_i) che sono possedute nel portafoglio (Π). Si ricorda anche che il delta non è un indicatore costante, bensì variabile, percui esso dipende dal prezzo del sottostante, dalla sua volatilità e dalla vita residua dell'opzione.

Il Gamma

Con il termine *gamma* facciamo riferimento alla derivata del Delta, appena descritto, del portafoglio rispetto al prezzo dell'attività sottostante. Si tratta perciò di una derivata seconda del valore del portafoglio rispetto al prezzo del sottostante.

$$\Gamma = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}.$$

Se il risultato che ne deriva sarà molto elevato, avremo un delta molto sensibile al valore del sottostante e alle sue oscillazioni e sarà perciò inevitabile un continuo 'aggiornamento' (più frequente rispetto al caso precedente della lettera 'delta') del proprio portafoglio per mantenerlo coperto. Se il valore ottenuto è, invece, molto piccolo, avremo a che fare con un delta che cambia molto lentamente e non sarà necessario ribilanciare costantemente il nostro portafoglio.
Anche in questo caso, come nel caso precedente, questo valore non è costante ed assume un valore positivo nel caso in cui ci troviamo in una posizione lunga di acquisto, mentre assume valore sempre negativo nella posizione corta di vendita; non vi è pertanto differenza fra la tipologia d'opzione put oppure call.

Il Theta

Con questa lettera greca definiamo la derivata del valore del portafoglio costruito da opzioni rispetto al tempo:

$$\Theta = \frac{\partial \Pi}{\partial t}.$$

Man mano che la vita delle opzioni, presenti all'interno del portafoglio, procede, il suo valore si riduce con il passare del tempo avvicinandosi alla scadenza. Misureremo con questo indicatore la variazione di valore del portafoglio (Π), ricordando che le opzioni al trascorrere del tempo perderanno valore e che il valore del theta tende ad essere quasi sempre negativo, in quanto è un parametro certo, dato che non esiste incertezza sul trascorrere del tempo.

Il Vega

La volatilità di uno strumento è un fattore molto importante, in quanto cambia costantemente nel tempo. Il valore della nostra opzione quindi si modifica perché varia la sua volatilità, a causa del prezzo del sottostante che varia e per il trascorrere del tempo. La formula del *Vega* ci fa capire in base al risultato che si otterrà se avremo un portafoglio molto sensibile a piccole oscillazioni di volatilità, quindi un vega elevato, oppure poco sensibile, nel caso in cui il risultato del vega sia basso.

$$V = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}.$$

Il Rho

Anche in questo caso trattasi di una derivata, che misura il variare del portafoglio al variare del tasso d'interesse privo di rischio:

$$r = \frac{\partial \Pi}{\partial r}.$$

Come gli altri coefficienti di sensibilità, anche questo valore ci permette di analizzare al meglio una delle dimensioni del rischio a cui possono incorrere le opzioni del nostro portafoglio.

Capitolo 3

Introduzione al modello Jump Diffusion

3.1 Il modello di Black, Scholes e Merton

Il modello di Black Scholes e Merton ci introduce alla teoria moderna della valutazione delle opzioni finanziarie su azioni o su indici azionari.
Esso risulta infatti utilissimo come metodo per ricavare il prezzo di un'opzione in assenza di arbitraggio e sotto determinate assunzioni, che vedremo nel dettaglio in seguito.
Il modello viene assunto in un'ipotesi di mercato perfetto; ciò vuol dire che ci troviamo nel caso di assenza di costi di transazione e di tasse, in assenza di rischio di credito ed inoltre non sono presenti asimmetrie informative.
Esistono delle assunzioni sottostanti che dobbiamo esplicitare per delineare meglio questo modello, e pertanto verrano subito elencate:

- i titoli sono in negoziazione continua;
- il tasso di interesse privo di rischio di breve periodo è costante (per cui gli operatori finanziari ricevono e cedono a prestito denaro allo stesso tasso);

- non ci sono possibilità di arbitraggio prive di rischio nel mercato;
- la varianza del tasso di rendimento istantaneo del prezzo del titolo sottostante è costante;
- sono possibili le vendite allo scoperto;
- non c'è presenza di costi di transazione e le negoziazioni non influenzano i prezzi;
- l'azione non paga dividendi durante la vita dell'opzione, che è di tipo europeo.

Sotto le "condizioni ideali" appena elencate, possiamo rappresentare il valore teorico di un'opzione call europea al tempo 't', per mezzo della seguente formula:

$$c = S_t N(d_1) - K e^{-r\tau} N(d_2) \tag{3.1}$$

dove:

- S_t: prezzo del titolo sottostante;
- K: prezzo d'esercizio stabilito all'inizio del contratto;
- r: tasso privo di rischio;
- τ: differenza fra la scadenza finale 'T' e l'epoca in essere 't' ($\tau = T - t$);
- σ: volatilità, che indica la variabilità del prezzo del sottostante;
- N(d): funzione di ripartizione della distribuzione cumulata della variabile aleatoria normale standardizzata, con media nulla e deviazione standard pari a 1.

La formula di Black e Scholes non è utilizzata solo per il calcolo delle opzioni call, bensì anche per le opzioni put, mediante la formula di valutazione riportata di seguito:

$$p = Ke^{-r\tau}N(-d_2) - S_tN(-d_1). \tag{3.2}$$

I fattori presenti in formula sono gli stessi esplicitati precedentemente nella valutazione dell'opzione call. Va inoltre ricordato che i valori di *d1* e *d2*, presenti in parentesi, sia nella formula (3.1) che nella formula (3.2), sono calcolabili nel seguente modo:

$$d_1 = \frac{ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{3.3}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{3.4}$$

Questo modello viene utilizzato per il calcolo delle opzioni europee, non considerando così la possibilità di esercizio anticipato, ma risulta essere di enorme utilità anche per la realizzazione di coperture assicurative.
L'equazione originale del 1973, ricavata da Black e Scholes, si basa su un'equazione differenziale alle derivate parziali fondamentale, riportata di seguito:

$$\frac{\delta c}{\delta t} + rS\frac{\delta c}{\delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 c}{\delta S^2} - rc = 0. \tag{3.5}$$

Nell'equazione (3.5) c rappresenta il prezzo di un'opzione call, che dev'essere funzione di S e t. Innanzitutto assumiamo che ci sia neutralità al rischio in modo tale da rendere agevole la valutazione delle equazioni che studieremo; e in questo modo anche l'ipotetico investitore non sarà influenzato dalla sua propensione al rischio.
Data l'assunzione, il valore di un'opzione *call* al tempo t risulterà calcolabile per mezzo della seguente formula:

$$C_t = e^{-r\tau} E(C_T). \tag{3.6}$$

Nella formula (3.6) $E(C_T)$ è il valore atteso del payoff dell'opzione a scadenza[1].

Nel caso in cui prendessimo in considerazione il valore del bene sottostante, varrebbe lo stesso principio, cioè:

$$S_t = e^{-r\tau} E(S_T). \tag{3.7}$$

Si nota infatti che la formula (3.7) è analoga alla (3.6), di fatto l'unico valore che cambia è quello del sottostante; il suo valore (S_T) è equivalente aal seguente formula, con $Z \sim N(0,1)$:

$$S_T = S_t e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma\tau\sqrt{Z}}. \tag{3.8}$$

In modo più semplice è possibile affermare che il valore medio del prezzo del titolo sottostante sia pari a:

$$S_t e^{\mu\tau} \tag{3.9}$$

dove μ è il tasso di rendimento istantaneo per un periodo di tempo unitario.

[1] Il valore medio una di variabile aleatoria x del tipo log - normale, con parametri α e β^2 risulta pari a $E(x) = e^{\alpha - \frac{\beta^2}{2}}$

Come affermato prima, se ci trovassimo in un mercato privo di avversione al rischio, il tasso di rendimento atteso delle attività rischiose sarebbe uguale al tasso d'interesse delle attività non rischiose, per questo motivo si può sostenere che questi due valori siano uguali:

$$\mu = r \tag{3.10}$$

e di conseguenza sarà possibile riscrivere la formula (3.8) nella seguente maniera:

$$S_T = S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma\tau\sqrt{Z}} \tag{3.11}$$

con $Z \sim N(0,1)$.

La formula di Black e Scholes (3.1) vista in precedenza per la valutazione di una call europea, si ottiene mediante i seguenti passaggi.
Innanzitutto si deve tener presente che quando affermiamo che il prezzo del sottostante in T è maggiore del prezzo di esercizio, cioè $S_T > K$, equivale a dire che:

$$S_T = S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma\sqrt{\tau}Z} > K; \tag{3.12}$$

considerando poi il valore atteso di un opzione call, iniziamo col valutare questa espressione:

$$E(C_T) = E(max[0, S_T - K]) = \int_K^{\infty} max[0, S_T - K]\lambda(S_T)^2 dS_T =$$

[2] Con $\lambda(S_T)$ si indica la funzione di densità della variabile aleatoria S_T:

$$\lambda(S_T) = \begin{cases} 0, & \text{se } S_T \leq 0 \\ \frac{1}{S_T\beta\sqrt{2\pi}} e^{-(\log S_T - \alpha)^2/(2\beta^2)}, & \text{se } S_T > 0. \end{cases}$$

$$= \int_K^{\infty} [S_T - K]\lambda(S_T)dS_T = \int_K^{\infty} S_T\lambda(S_T)dS_T - K\int_K^{\infty} \lambda(S_T)dS_T. \tag{3.13}$$

Se separiamo i due addendi finali della formula (3.13), ricaviamo il primo addendo

$$\int_K^{\infty} S_T\lambda(S_T)dS_T$$

che risulterà, dopo una serie di calcoli matematici che non verranno trattati in questa sede[3], pari a:

$$= S_t e^{r\tau} \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} e^{-\frac{(z-\sigma\sqrt{\tau})^2}{2}}}{}^{4},$$

la sua risoluzione ci porterà ad un risultato semplificato e facilmente calcolabile, di questo tipo:

$$S_t e^{r\tau} N(d_1). \tag{3.14}$$

Per quanto riguarda il secondo addendo, invece, ricaveremo il valore $N(d_2)$, mediante la tavola delle probabilità della variabile casualenormale standardizzata.

$$\int_K^{\infty} \lambda(S_T)dS_T =$$

$$= P(S_T > K) = P(Z > -d_2) = P(Z \leq d_2) =$$

$$= N(d_2). \tag{3.15}$$

[3]Si veda: HULL, J.C., *Opzioni, futures ed altri derivati.* 7° edizione, Pearson Prentice Hall. 2009. - Cap.13., per lo svolgimento dell'intera equazione;

[4]dove: $(z - \sigma\sqrt{\tau}) = \mu$

Per mezzo della risoluzione di questa equazione possiamo definire il valore atteso della call europea a scadenza, che sarà formato dalle due formule appena viste, la (3.14) e la (3.15):

$$E(c_T) = S_t e^{r\tau} N(d_1) - KN(d_2)$$

Tramite tale equazione e ricordando la seguente uguaglianza,

$$C_T = max[0, S_T - K]$$

risulta facile definire l'equazione di Black e Scholes per una call europea, che verrà calcolata nel seguente modo:

$$c_t = e^{-r\tau} E(c_T) = S_t N(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2). \tag{3.16}$$

Vediamo ora un esempio numerico:

Tabella 3.1: Dati di esempio per la formula Black e Scholes

S	60 €
K	55 €
T	4 mesi = (1/3 = 0.33)
r	6 %
σ	26 %

(σ) è l'unico fattore che non è direttamente osservabile, ma può essere calcolato mediante i dati storici, ossia tramite i tassi di variazione passati del prezzo del titolo sottostante.

Calcoliamo il valore dell'opzione put e dell'opzione call utilizzando la formula di Black, Scholes e Merton. Innanzitutto si vogliono trovare i valori di d_1 e di d_2 utili per il successivo calcolo, mediante i dati della tabella 3.1:

$$d_1 = \frac{ln(60/55) + (0.06 + 0.26^2/2) * 0.33}{0.26\sqrt{0.33}} \cong 0.79$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = 0.79 - 0.26\sqrt{0.33} \cong 0.64$$

una volta calcolati questi due valori, individuiamo nella tabella della probabilità normale standardizzata i valori di $N(d_1)$ e di $N(d_2)$.

I valori trovati sono $N(d_1)$ = 0.7852 e $N(d_2) = 0.7389$. Ora che abbiamo a disposizione tutti i dati necessari, tramite la formula (3.1) *possiamo calcolare il prezzo della opzione* call *e con la* (3.2) *quello dell'opzione* put.

$$c = S_t N(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2) =$$

$$60 \cdot 0.7852 - 55e^{-0.06 \cdot 0.33} 0.7389 \cong 7.2694$$

Successivamente, per il calcolo della put si devono calcolare i valori di $N(-d_1)$ e $N(-d_2)$ come mostrato nella tabella 3.2:

Tabella 3.2: Calcolo delle probabilità N(-d_1) N(-d_2);

N(-d_1)	=	N(-0.79)	=	1-N(0.79)	=	1-0.7852	=	0.2148
N(-d_2)	=	N(-0.64)	=	1-N(0.64)	=	1-0.7389	=	0.2611

A questo punto sarà possibile procedere con il calcolo del valore dell'opzione put europea:

$$p = Ke^{-r\tau} N(-d_2) - S_t N(-d_1) =$$

$$55e^{-0.06 \cdot 0.33}(0.2611) - 60(0.2148) \cong 1.1909.'' \tag{3.17}$$

Ricordando quanto detto nel cap.2 par.2.5.2, in questo caso vale la relazione di parità. Infatti, volendo calcolare il valore dell'opzione call tramite quella della put, con la formula (2.5) avremo la controprova dei risultati ottenuti:

$$c = p + S_t - Ke^{-rT}$$

$$c = 1.1909 + 60 - 55e^{-0.06*0.33} \cong 7.2694.$$

Al fine di una migliore comprensione di questo modello è utile capire l'impatto che hanno il comportamento del prezzo del sottostante e del processo di Itô, ed è proprio su quest'ultimo che ci focalizzeremo successivamente poiché esso servirà per comprendere la dinamica del prezzo del titolo derivato.

3.1.1 Moto browniano geometrico

Per descrivere la formula della variazione del prezzo abbiamo bisogno di un ulteriore approfondimento: il moto browniano geometrico.

Con il modello browniano si vogliono descrivere i movimenti casuali che avvengono nell'andamento dei prezzi azionari. Il comportamento del prezzo dipende dal moto browniano geometrico, la cui formula è:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu d_t + \sigma dW_t \tag{3.18}$$

dove ritroviamo i valori precedentemente descritti (S_t = prezzo futuro del titolo sottostante; t = istante temporale compreso tra 0 e T; σ = volatilità del prezzo del titolo azionario (aleatorietà); μ = tasso di rendimento atteso).

La formula della variazione del prezzo è composta da due componenti, una certa ed una aleatoria:

$$dS = \underbrace{\mu S dt}_{contributo\ certo\ o\ deterministico} + \underbrace{\sigma S dz}_{componenete\ stocastica\ aleatoria} \tag{3.19}$$

nella quale con dS si identifica la differenza fra $(S_{t+dt} - S_t)$, con d_t il tempo che è trascorso e con dz la variazione casuale pari a $dz = \varepsilon\sqrt{\Delta_t}$ con $\varepsilon \sim N(0,1)$.

Quindi per ricavare la formula di Black e Scholes abbiamo bisogno, oltre che di imporre la condizione di non arbitraggio, che il prezzo dell'azione sottostante (S) segua un moto browniano geometrico.

Il processo di Wiener

Il processo di Wiener è usato per modellizzare il moto browniano. Trattasi di un particolare processo di Markov, con media pari a zero, e varianza pari a uno. Una variabile casuale 'z' segue il processo di Wiener se:

$$\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t};$$

dove

- $\mu\ \Delta z = 0$,
- Var $\Delta z = \Delta$t,
- deviazione standard $\Delta z = \sqrt{\Delta t}$.

Inoltre una variabile casuale z segue il processo di Wiener anche nel caso in cui i valori di Δz, in due differenti intervalli casuali definiti con Δt, siano indipendenti.

Si dice processo di Wiener generalizzato per x, il processo che viene definito nel seguente modo:

$$dx = a\ dt + b\ dz \quad con\ a = \mu\ e\ b = \sigma;$$

Inoltre la variazione di valore di X può essere descritta, in un certo intervallo di tempo Δt, per mezzo della formula sotto indicata:

$$\Delta X = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

con $\varepsilon \sim$ N(0, 1) e ΔX = variazione del prezzo del sottostante.

3.1.2 Il lemma di Itô

Il processo di Itô è una tipologia di processo di Wiener, la sua definizione (Hull,*Opzioni, futures e altri derivati*, 2009) infatti ci dice che '*una variabile stocastica x segue un processo di Itô nel caso in cui la sua variazione definita come dx, in un intervallo di tempo dt, sia data dalla seguente formula:*

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz, \tag{3.20}$$

dove dz è una variabile stocastica e $a(x,t)$ *e* $b(x,t)$ *sono parametri definiti da x, valore del sottostante, e da t, valore del tempo*'.

In particolare il Lemma di Itô afferma quanto segue[5]:

' *Sia x una variabile stocastica che segue un processo di Itô con drift a(x,t) e volatilità* $b(x,t)$*; sia* $F(x,t)$ *una funzione di x e del tempo t. Allora anche F seguirà un processo stocastico di Itô con drift, tale per cui:*

[5] NEFTCI, SALIH N., *An introduction to the mathematics of financial derivatives.* 2° edizione - San Diego, Academic press. 2000. - Cap.10.3.

$$a\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

con volatilità:

$$b^2\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2.$$

Risulta logico applicare questo *Lemma* alle opzioni, perchè il loro prezzo non è altro che funzione del prezzo del titolo sottostante, infatti, la formula (3.20) definisce il processo di Itô. In questa formula vengono sommate la variazione attesa per ogni unità di tempo $(a(x,t))$ e la variazione per ogni unità di tempo $(b(x,t))$, che possono variare con il passare del tempo[6].

Riprendiamo ora i passaggi fondamentali. Date a e b funzioni di x e t, dove con x si fa riferimento al sottostante (S) e con t ci si riferisce al tempo, il processo di Itô (formula (3.20)) viene modificato nel seguente modo:

$$dS = a(S,t)dt + b(S,t)dz, \tag{3.21}$$

l'equazione può essere rappresentata come variazione tra i prezzi tramite questa approssimazione:

$$\Delta S = a(S,t)\Delta t + b(S,t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}. \tag{3.22}$$

In questa maniera i parametri (a(x,t)) e (b(x,t)) sono stati modificati con altre variabili: a(S,t) e b(S,t). Il parametro a(S,t) è sia funzione del tempo che del

[6]Si ricordi quanto detto in precedenza: con x si fa riferimento al titolo sottostante, mentre con t al tempo.

prezzo dell'azione ed è pari a μ(S,t), mentre il secondo parametro b(S,t) risulta uguale a σ(S,t); in altri termini la formula (3.22) si trasforma come segue:

$$\Delta S = S\mu\delta t + \sigma S\varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{3.23}$$

in cui :

$$\mu(S,t) = S \cdot \mu + 0 \cdot t = S\mu;$$

con S = valore iniziale del prezzo, e μ = rendimento;

$$\sigma(S,t) = S \cdot \sigma = S\sigma.$$

La formula (3.23) ci dice che la variazione del valore di un'azione dipende da una componente certa e da una incerta.

3.1.3 Limiti del modello di Black e Scholes

Il modello di Black e Scholes, molto utilizzato e alla base degli studi della valutazione di opzioni, presenta dei limiti evidenti; in particolar modo ci si riferisce alla volatilità (σ). Utilizzando l'equazione di Black e Scholes verrà calcolata la volatilità in base ai dati storici dei prezzi del sottostante.

Se la volatilità dipendesse solamente dal prezzo del sottostante, allora il valore delle opzioni sarebbe tanto più elevato quanto elevata è la volatilità del sottostante, e perciò è più alta la probabilità che l'opzione scada in the money, cioè quando vi è convenienza all'esercizio. Nella realtà, inoltre, per il titolo sottostante c'è lo stacco dei dividendi prima della scadenza del contratto; nei nostri esempi numerici invece per semplicità non viene considerata questa eventualità, e non consideriamo nemmemo che nel mondo reale il tasso privo di rischio e la volatilità non sono costanti nel tempo, bensì variano.

La volatilità storica, diversamente da quella implicita di cui parlermo successivamente, è una volatilità costante che non tiene conto della variabilità dei prezzi e del divario che si creerebbe fra prezzi reali delle opzioni e quelli calcolati dal modello. Oltre a questa esiste un'altra volatilità, quella implicita che prende in considerazione i prezzi delle opzioni; si tratta di un valore che guarda al futuro e non al passato come quella storica. Essa non può essere direttamente osservata, bensì deve essere stimata tramite i prezzi storici dell'opzione stessa ricavandone implicitamente il valore. I grafici usati per la rappresentazione della volatilità implicita sui i prezzi delle opzioni vengono chiamati 'volatility smiles' o più semplicemente smiles.

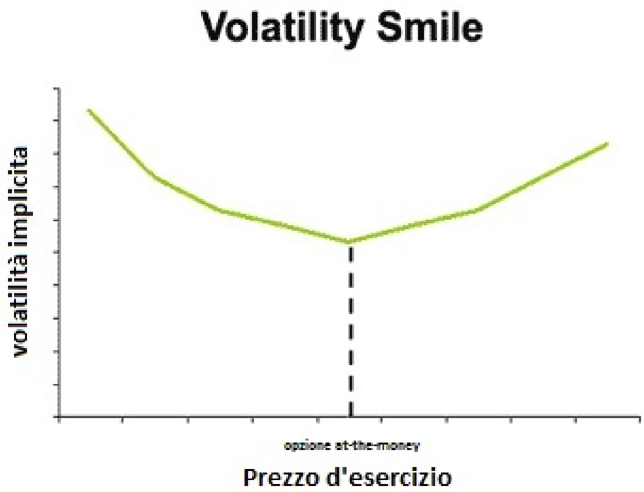

Figura 3.1: Esempio di 'volatility smile'

L'effetto che si nota è dato da una volatilità che diminuisce, si stabilizza e poi aumenta al crescere del prezzo d'esercizio dell'azione sottostante denotando una forma a "smile". Una rappresentazione grafica viene data nella Fig. 3.1, nella quale vediamo la forma assunta dalla volatilità implicita in funzione del prezzo d'esercizio; aumenta verso destra nel momento in cui un'opzione call è out of the money o una put ìn the money, mentre, viceversa, aumenta verso sinistra quando un'opzione call è in the money o una put è out of the money.
Quando si utilizza questo tipo di volatilità si presentano due ipotesi: la prima è che i rendimenti del sottostante dipendano da una sola fonte d'incertezza, la seconda che i prezzi seguano un moto browniano geometrico. Noi ci concentreremo sull'eliminazione della seconda ipotesi in modo tale da introdurre un modello a salti, chiamato anche *modello 'Jump Diffusion'*.

3.2 Il modello di Poisson

Il processo di Poisson[7] è molto utile per aiutarci nell'introduzione del meccanismo dei modelli jump diffusion, pertanto, per introdurre questo processo, iniziamo con una sequenza di variabili casuali esponenziali indipendenti $(x_0, x_1, x_2, x_3..)$ con la stessa media pari a $\frac{1}{\lambda}$ (i.i.d.).
Vogliamo costruire un modello in cui contiamo quanti eventi, salti, accadono in un centro arco temporale.
Ipotizziamo, per chiarire meglio le idee, di essere davanti alla finestra e guardando al di fuori, di contare quante siano le macchine che passano in un certo intervallo di tempo.

[7] J.F.C. KINGMAN, *Poisson Processes.* Oxford : Clarendon press. 1993.

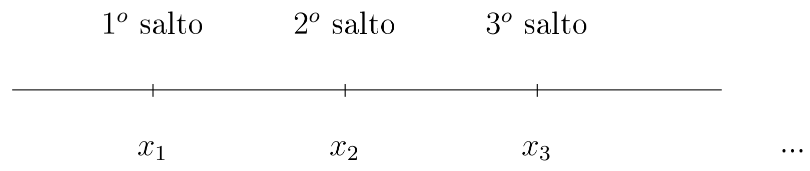

Figura 3.2: Esempio: ad ogni x corrisponde un evento, un salto.

Il processo di Poisson (N_t) conta il numero totale di salti avvenuti prima del tempo t; considerando come variabili X_t (salto avvenuto all'istante t) e T_n (sequenza di variabili aleatorie non negative):

$$N_t = \sum_{n \geq 1} X_t \geq T_n, \tag{3.24}$$

con $X_t \geq T_n$ funzione generatrice di T_n, dove $T_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Facendo riferimento al nostro esempio, questo processo conta il numero totale di macchine passate mentre eravamo alla finestra in quel determinato periodo di tempo. Esiste un parametro di frequenza del processo, definito con il simbolo λ, che rappresenta il valore atteso del numero totale di eventi che possono accadere in un'unità di tempo. Il numero di salti avvenuti fino all'istante t, definito con il simbolo N_t, avrà distribuzione di Poisson con parametro λt, per $t > 0$, con la seguente formula:

$$P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, 3... \tag{3.25}$$

Tale processo è definito anche processo di conteggio. Entrando nello specifico, vediamo ora la definizione probabilistica di questo processo.

Tutti i salti di un *processo di Poisson* hanno dimensione 1 (vale a dire un'altezza costante di uno), mentre per avere una dimensione differente si deve considerare il processo composto di Poisson (Par. 3.2.1).
Come il moto browniano è alla base del modello Black e Scholes così il processo di Poisson è alla base dei modelli Jump Diffusion.
Quando definiamo N_t nell'equazione (3.24), dobbiamo ricordarci che questo valore deve soddisfare le seguenti caratteristiche:

- N(t) $\geq$ 0, ossia che il numero di salti t che si possono verificare è maggiore o uguale a zero;
- N(t) assume valori interi;
- Se z<t, allora N(z) $\leq$ N(t);
- Per z<t, N(t) - N(z) è uguale al numero di eventi accaduti nell'intervallo (z,t].

Un processo di conteggio ha incrementi indipendenti se i numeri di eventi che accadono in intervalli di tempo disgiunti sono indipendenti, esso inoltre ha incrementi stazionari se la distribuzione del numero di eventi che accadono in ogni intervallo di tempo dipende solo dalla lunghezza del tempo dell'intervallo.
Uno dei processi di Poisson più importanti è definito come {N(t), t$\geq$0} con tasso λ. Se ipotiziamo che il tasso λ sia maggiore di 0, allora:

1. N(0) = 0;
2. Il processo avrà incrementi indipendenti;
3. Il numero di eventi in ogni intervallo di lunghezza (t$\geq$0) avrà distribuzione di Poisson con media λt.

A questo punto si può affermare che per ogni z, con t ≥ 0 si avrà la seguente formula:

$$P\{N(t+z) - N(z) = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad conn = 0, 1, 2...$$

Avendo definito λ come il tasso medio di arrivi del processo, il valore atteso del processo N(t) risulterà pari a:

$$E(N(t)) = \lambda t,$$

cioè pari alla media del numero di eventi in ogni intervallo, considerando che il processo di Poisson ha incrementi stazionari.

È utile anche verificare che le tre ipotesi siano soddisfatte; la prima e la seconda sono semplicemente date dalla conoscenza del processo, mentre per quanto riguarda la terza è utile dare la seguente definizione, equivalente alla precedente.

Osserviamo ora un'ulteriore definizione del processo di Poisson[8], considerando innanzitutto la funzione f definita come o(h) nel caso in cui il limite sia così definito:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Il processo contatore {N(t), $t \geq 0$} è un processo di Poisson con tasso λ, come precedentemente definito, dato $\lambda > 0$ nel caso in cui:

1. N(0) = 0;

2. Il processo presenti incrementi stazionari ed indipendenti;

3. P{N(h) = 1} = λh + o(h);

4. P{N(h) $\geq$ 2} = o(h).

[8] J.F.C. KINGMAN, (1993) "Poisson Processes", Clarendon press.

Per provare quanto appena affermato, cioè che la prima definizione sia equivalente alla seconda, poniamo:

$$P_n(t) = P\{N(t) = n\}$$

e deriviamo un'equazione differenziale per $P_0(t)$ nel seguente modo:

$$P_0(t+h) = P\{N(t+h) = 0\} =$$

$$= P\{N(t) = 0, N(t+h) - N(t) = 0\}$$

$$= P\{N(t) = 0\}P\{N(t+h) - N(t) = 0\}$$

$$= P_0(t)[1 - \lambda h + o(h)] \tag{3.26}$$

dove le ultime due equazioni della (3.26) derivano dalla seconda ipotesi della seconda definizione, sopracitata, mentre la terza e la quarta ipotesi implicano che $P\{N(h) = 0\} = 1 - \lambda h + o(h)$. Pertanto si evince la seguente uguaglianza:

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t) + \frac{o(h)}{h} \tag{3.27}$$

e considerando h $\rightarrow 0$ avremo

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$$

$$\frac{P_0'(t)}{P_0(t)} = -\lambda. \tag{3.28}$$

proseguendo con un'integrazione, risulta

$$log P_0(t) = -\lambda t + c$$

$$P_0(t) = ke^{-\lambda t}. \tag{3.29}$$

Dato $P_0(0) = P\{N(0) = 0\} = 1$, arriveremo alla conclusione che:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}. \tag{3.30}$$

Nel caso in cui n non sia uguale a zero, bensì sia $n \geq 1$, il risultato finale sarà:

$$P_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \tag{3.31}$$

come quello precedentemente visto nella formula (3.25).

Vediamone ora un esempio pratico. Rimaniamo sull'esempio visto inizialmente; siamo interessati al numero di macchine che passano davanti alla nostra finestra, e vogliamo calcolarne la frequenza. Ipotizziamo di volerci concentrare sull'orario dalle 12^{00} alle 13^{00}; la variabile casuale discreta n sarà perciò il numero di macchine passate durante quell'ora.
Se questa variabile segue il modello di Poisson (2) si avrà, nel caso di $\lambda = 2$:

$$P(0) = \frac{2^0}{0!}e^{-2} = 0.1353.$$

Il risultato 0.1353 è la probabilità che in quell'ora non passi nessuna macchina, mentre nella tabella 3.3 vediamo gli altri casi, in cui il numero di macchine non è più zero, bensì $x \geq 2$.

Tabella 3.3: Modello di Poisson - Probabilità che passino x macchine

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P(x)	0.1353	0.2707	0.2707	0.1804	0.0902	0.0361	0.0120	0.0034	0.0009	0.0002

tratto da: "*STATISTICA metodologie per le scienze economiche e sociali.* BORRA S., DI CIACCIO A. 2° edizione. McGraw-Hill. 2008. '

I valori $n > 9$ hanno delle probabilità piccolissime che è possibile trascurare.

La media e la varianza di questa distribuzione sono rispettivamente:

$$E(n) = \lambda; \quad V(n) = \lambda$$

dove λ è il parametro della distribuzione (l'intensità); in altri termini, con λ indichiamo un valore positivo che equivale al numero medio di successi, nel nostro caso di macchine che pensiamo possano passare, che ci aspettiamo si possano verificare in un certo arco di tempo.

3.2.1 Il processo composto di Poisson

Particolare interesse riveste anche il processo composto di Poisson, in quanto, in questo caso, i salti possibili in un certo intervallo di tempo potranno essere piú d'uno.

In questo processo il tempo d'attesa fra i salti è di tipo esponenziale, e precisamente se N è un processo di Poisson con parametro λ, e Y_i con $i \geq 1$, è una sequenza di variabili casuali indipendenti, il processo composto di Poisson sarà così descritto:

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i. \tag{3.32}$$

Esso ha incrementi indipendenti e stazionari, e la sua funzione caratteristica[9]

[9]La funzione caratteristica di una variabile aleatoria X è data dalla seguente formula:

$$\varphi_X(u) = E[e^{iuX}]. \tag{3.33}$$

È possibile affermare che nel nostro caso essa possa assumere la seguente rappresentazione:

$$\sum_{n\geq 0} e^{iun} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \sum_{n\geq 0} \frac{(\lambda t e^{iu})^n}{n!} = exp[\lambda t(e^{iu} - 1)],$$

si ricorda inoltre che la stessa formula 3.33, può essere definita anche nell'ambito continuo (3.34), sia in quello discreto (3.35), nei modi sottoindicati:

$$f e^{iux} dF_X x = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) e^{iux} dx, \tag{3.34}$$

$$\sum_{n\geq 0} e^{iun} P(N_t = n). \tag{3.35}$$

in un certo momento t è data dalla seguente equazione:

$$E[e^{iuX_t}] = exp\ t\lambda \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1), f(dx). \tag{3.36}$$

Prima di procedere con l'analisi dei modelli diffusivi a salti, presentiamo un altro modello utile: il processo di Levy.

3.3 Il processo di Levy

Si tratta di un modello che tenta di superare le diverse imperfezioni che produce il moto browniano geometrico, date dal fatto che il moto browniano geometrico dipendendo del processo continuo di Wiener, non riesce a catturare i 'salti' che ci sarebbero nel mondo reale in determinati istanti.
Tramite i *processi di Poisson* precedentemente trattati è possibile costruire il processo di Levy per arrivare ad utilizzare i modelli che proporremo nel *Capitolo 5.*

Se consideriamo un modello di probabilità filtrato[10] definito dai seguenti parametri $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$, allora un processo stocastico di questo tipo: $\{X_t; 0 \leq t \leq \infty\}$ con $X_0 = 0$, può essere definito come processo di Levy se presenta le seguenti proprietà:

1. X_t ha gli incrementi $X_z - X_t$ indipendenti per ogni 0 ≤ t ≤ z ≤ T;

2. X_t ha incrementi stazionari, cioè per ogni z, t ≥ 0 la distribuzione $X_{t+z} - X_t$ non dipende da t;

3. X_t è stocasticamente continuo: per ogni $\varepsilon > 0$, $\lim_{z \to \infty} \mathbb{P}(|X_{t+z} - X_t| > \varepsilon) = 0$.

[10]Con il termine spazio di 'probabilità filtrato' s'intende uno spazio nel quale si tengono in considerazione solo alcuni parametri d'interesse. In questo caso con Ω osserviamo solo determinate realizzazioni delle variabili aleatorie, dove P sarà la probabilità ≥ 0 considerata in Ω, mentre con $\mathbb{F} = F_t$ si descrive l'informazione disponibile con l'andare del tempo.

Dopo queste affermazioni possiamo dire che il moto browniano (si veda il *Par. 3.1.1.*), altro non è che un processo di Levy senza la presenza di salti, infatti, questo modello ci aiuta a descrivere la struttura dei modelli jump diffusion.

3.4 Il modello Jump Diffusion

Come già discusso nei paragrafi precedenti, il modello di Black e Scholes assume che la dinamica del prezzo del sottostante segua un moto browniano geometrico continuo, diffusivo. In questa tesi, si vuole analizzare un'alternativa a questo modello di valutazione, e quindi considerare un processo in cui il prezzo dell'azione segua un moto browniano geometrico con salti, è per questo motivo che il processo segue la dinamica di Levy (*vedi Par. 3.3*) ed è definito come modello diffusivo con salti.

I modelli diffusivi con salti (modelli ibridi) sono stati introdotti da Merton nel 1976, proprio per incorporare, nel modello principale di prezzamento, movimenti giornalieri dei prezzi e i salti aleatori a cui essi potevano e possono andare incontro, riuscendo a dare in questo modo una visione più realistica del mercato e dei prezzi futuri. Il modello di Merton è anche detto 'modello jump diffusion', proprio perchè il prezzo del sottostante segue un processo di Levy del tipo a salti casuali. Esso è più parsimonioso rispetto a quello Black e Scholes del 1973, e verrà definito nel seguente modo.

Consideriamo il prezzo del sottostante, al tempo t, S_t, ; in un modello diffusivo a salti l'equazione differenziale stocastica di questo prezzo è:

$$dS_t = \mu S_t - dt + \sigma S_t - dZ_t + S_t - dJ_t$$

dove:

(dZ_t) è il moto browniano geometrico;

(J_t) è il processo composto di Poisson cosí definito : $J_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$.

I salti, rappresentati dal simbolo J_t, sono indipendenti ed identicamente distribuiti $(i.i.d.)$ con distribuzione $\mathbb{F}$, così definita:

$$X \sim s\ exp(-\frac{v^2}{2} + v\ \aleph(0,1))$$

in cui s è la media dei salti; v è la volatilità dell'ampiezza del salto e $\aleph(0,1)$ è la distribuzione normale standardizzata. Il numero di salti N_t (visto nei precedenti paragrafi) è un processo di Poisson con intensità pari a λ, per cui il prezzo del sottostante segue un processo browniano con salti. Rispetto al modello 'base' di Black e Scholes, in quello di Merton (1976), si vuole catturare l'asimmetria negativa e l'eccessiva curtosi delle serie storiche.

Ipotizziamo ora che il prezzo del sottostante durante un intervallo di tempo (dt) salti, usando il processo di Poisson (dN_t) possiamo dire che la probabilità dei salti sia pari a:

$$\begin{cases} Prob.\{che\ si\ verifichi\ 1\ salto\ in\ (t, t+\Delta t)\} \cong \lambda dt; \\ Prob.\{che\ non\ si\ verifichino\ salti\ in\ (t, t+\Delta t)\} \cong 1 - \lambda dt; \\ Prob.\{che\ si\ verifichino\ N\ salti\ in\ (t, t+\Delta t)\} \cong 0. \end{cases} \tag{3.37}$$

dove λ è un parametro appartenente all'insieme dei numeri reali positivi, ed è indipendente dal tempo. Dato l'intervallo di tempo che va da t a t+Δt, nel quale il prezzo del sottostante varia da S_t a $y_t S_t$, l'ampiezza del salto sarà:

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = \frac{y_t S_t - S_t}{S_t} = y_t - 1. \tag{3.38}$$

Come definito in precedenza, l'ampiezza dei salti è rappresentata dal simbolo k, la cui media equivale a $[E(y_t - 1) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} - 1 \equiv k]$; e la varianza è $[E[(y_t -$

$1 - E[y_t - 1])^2] = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{sigma^2} - 1)]$. Questo perchè Merton considera y_t come variabile casuale lognormale, per cui la formula (3.38), per Δ t $\rightarrow 0$ diventerà:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\alpha - \lambda k)dt + \sigma dW_t + (y_t - 1)dN_t \tag{3.39}$$

dove con $\alpha(dt)$ rappresentiamo il rendimento istantaneo atteso del titolo aggiustato con la componente deterministica: -$\lambda k(dt)$, così da rendere la componente diffusiva imprevedibile. Il valore atteso invece sarà:

$$E(\frac{dS_t}{S_t}) = E[(\alpha - \lambda k)dt] + E[\sigma dW_t] + E[(y_t - 1)dN_t]$$

$$= (\alpha - \lambda k)dt + 0 + \lambda k dt = \alpha dt, \tag{3.40}$$

per cui la variazione del prezzo del sottostante atteso $(E(\frac{dS_t}{S_t}))$, appena descritta, è riferita alla componente di salto dN_t (nell'intervallo di tempo preso in considerazione), mentre la probabilità che si verifichi un salto con una determinata ampiezza (k) risulta pari a

$$\lambda k dt = E[(y_t - 1)dN_t] = E[y_t - 1]E[dN_t]. \tag{3.41}$$

Nel modello diffusivo a salti troviamo due tipologie di 'casualità'. La prima è il processo di Poisson (dN_t), la cui funzione è quella di modellizzare i salti, i cosiddetti 'jumps'; con questo termine, si fa riferimento a dei movimenti discreti, ossia movimenti che accadono all'improvviso. Cosiccome il salto è un movimento casuale, così è casuale anche la sua dimensione; inoltre essi sono indipendenti gli uni dagli altri. Riprendendo le probabilità dei salti viste prima, nella (3.37), mostriamo cosa accade nelle nostre formule nei diversi casi. Se il prezzo del sottostante non subisce salti nell'intervallo prestabilito, il modello jump diffusion è un semplice modello browniano di questo tipo:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\alpha - \lambda k)dt + \sigma W_t.$$

Nel caso in cui, invece, il numero di salti sia pari a 1, avremo:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\alpha - \lambda k)dt + \sigma W_t + (y_t - 1)$$

dove $(y_t - 1)$ è l'ampiezza del salto avvenuto sul prezzo del sottostante.

Inoltre questo prezzo è modellato dal processo esponenziale di Levy, sotto questa ipotesi:

$$S_t = S_0 e^{L_t},$$

con

$$0 \leq t \leq T;$$

dove L_t è la somma di un moto browniano e un processo composto di Poisson:

$$L_t = \underbrace{(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k)t + \sigma W_t}_{\textit{Moto browniano}} \quad + \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{N_t} Y_i}_{\textit{Processo composto di Poisson}} \quad . \tag{3.42}$$

L'unica differenza rispetto al modello di Black e Scholes è data dall'aggiunta del processo composto di Poisson: $\sum_{i=1}^{N_t} Y_i$; il quale contiene due termini casuali: il processo di Poisson con intensità λ e la dimensione dei salti. Merton nel suo modello assume che i salti seguano una distribuzione normale e siano *i.i.d*, con media μ e varianza σ^2, e ne segue che:

$$f(dx_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp -\frac{(dx_i - \mu)^2}{2\sigma^2}.$$

È proprio questa formula che, moltiplicata all'intensità del salto (λ), ci porterà alla formula di Levy introdotta precedentemente ((3.42)); si avrà perciò :

$$l(dx) = \lambda f(dx).$$

Entriamo ora più nel dettaglio, mostrando la formula di valutazione per le opzioni, utile per le nostre prossime valutazioni, quando il modello jump diffusion ha salti distribuiti normalmente ($y_i \sim N(\alpha, \delta^2)$). Introduciamo la formula per l'opzione call europea:

$$C(S, k, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda' T}(\lambda' T)^n}{n!} CBS(S, K, r_n, \sigma_n, T) \tag{3.43}$$

con

$$\lambda' = \lambda e^{\alpha + \sigma^2/2};$$

$$\delta_n^2 T = \delta^2 T + \delta^2;$$

$$r_n T = (r + \mu)T - n(\alpha + \delta^2/2);$$

dove CBS è il prezzo dell'opzione call calcolata con il metodo Black e Scholes.

Nel caso in cui in questo modello non ci fossero salti la volatilità implicita sarebbe piatta, inoltre se nella (3.43) non avessimo scritto la prima parte della formula (CBS), essa non sarebbe stata altro che la formula di Black e Scholes (vedi Par.3.1).

Per arrivare a questa formula iniziamo con il considerare un portafoglio Π formato dal sottostante S_t, una posizione lunga $V(S_t, t)$ e una corta Δ:

$$\Pi_t = V(S_t, t) - \Delta S_t.$$

La dinamica del prezzo del sottostante è definita dalla seguente equazione:

$$dS_t = (\alpha - \lambda k)S_t dt + \sigma S_t dW_t + (y_t - 1)S_t dN_t.$$

Questa equazione si modifica in un processo jump diffusion applicando la formula di Itô:

$$dV(S_t, t) = \frac{\partial V}{\partial t}dt + (\alpha - \lambda k)S_t\frac{\partial V}{\partial S_t}dt + S_t^2\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}dt +$$
$$\sigma S_t\frac{\partial V}{\partial S_t}dW_t + [V(y_t S_t, t) - V(S_t, t)]dN_t$$

dove con gli ultimi due valori ($[V(y_t S_t, t) - V(S_t, t)]dN_t$), viene espressa la differenza del prezzo dell'opzione causata dall'avvenimento del salto. Si specifica, inoltre, che nel caso non sussitano salti nell'intervallo preso in considerazione, per la valutazione dell'opzione sarà più comodo e logico usare la classica formula di Black e Scholes, poiché le fonti di rischio dW_t e dN_t risultano nulle.

3.5 Alcuni esempi applicativi: valutazione delle opzioni europee

La valutazione delle opzioni, come già spiegato nei capitoli precedenti può avvenire attraverso l'utilizzo di diversi modelli che incorporano informazioni differenti. Utilizzando il foglio di calcolo Excel, vogliamo mostrare successivamente quali possono essere i valori di opzioni scritte su titoli azionari in un determinato istante temporale, usando i modelli spiegati in precedenza. Innanzitutto procediamo col ricordare che le opzioni di stile europeo sono esercitabili solo alla scadenza del contratto, pertanto per i nostri modelli, quello di Black e Scholes e quello Jump Diffusion, utilizzeremo come indice di riferimento il FTSE MIB.
L'indice FTSE MIB è il principale indice di riferimento dei mercati azionari italiani, ci avvarremo pertanto dei suoi prezzi giornalieri per il calcolo del modello in quanto la modalità di esercizio dell'opzione è attuabile solamente a scadenza

(opzione europea).

Ricaviamo dal sito "*it.finance.yahoo.com*" i valori storici dell'indice FTSE MIB per un periodo di circa un mese, nell'arco temporale che va dall'1 marzo al 31 marzo 2013 (si veda la Tab.3.4).

DATA	**FTSE MIB**
01/03/2013	15675.40
04/03/2013	15542.20
05/03/2013	15974.30
06/03/2013	15899.70
07/03/2013	15947.20
08/03/2013	16204.00
11/03/2013	16092.00
12/03/2013	16024.00
13/03/2013	15745.30
14/03/2013	16131.00
15/03/2013	16061.20
18/03/2013	15924.10
19/03/2013	15670.60
20/03/2013	16016.00
21/03/2013	15936.00
22/03/2013	16045.50
25/03/2013	15644.40
26/03/2013	15495.90
27/03/2013	15353.80
28/03/2013	15338.70

Tabella 3.4: Valori di chiusura del FTSE MIB - Mese di marzo 2013.

L'andamento dell'indice viene rappresentato graficamente nella figura 3.3; il prezzo del sottostante parte dal valore di 15675.40 euro ed arriva alla fine del mese di marzo al valore di 15338.70 euro, mentre il prezzo di esercizio dell'opzione scelta (K) viene stabilito pari al valore di 16500.00 euro. A seconda delle scadenze, quest'ultimo prezzo può assumere anche altri valori, è l'investitore che decide alla stipula del contratto quale valore di K selezionare, ossia quel valore al quale si può decidere se vendere o comprare l'azione sottostante alla scadenza. Il valore del sottostante (si veda la figura 3.3) non avrà un'andamento costante, bensì partirà da un valore più basso di K per poi toccare l'apice di 16204.00 euro e non arrivare

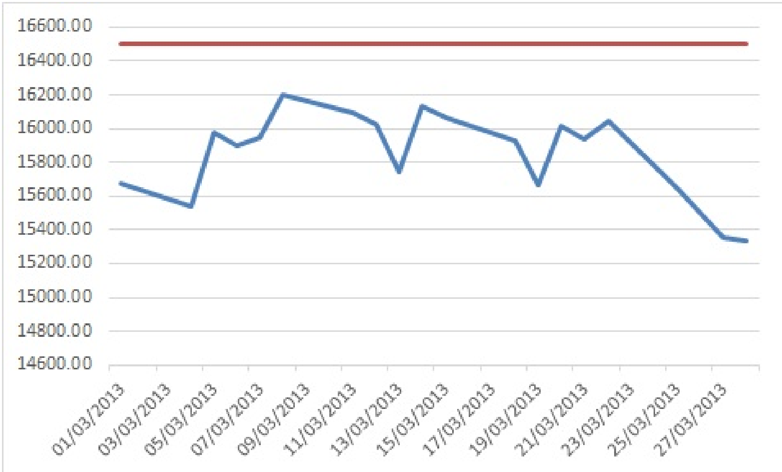

Figura 3.3: Andamento del valore del FTSE MIB - Mese di marzo 2013

mai, in questo arco temporale, al valore d'esercizio. Con questo esempio il valore di K sarà sempre superiore al valore del sottostante perciò i valori dell'opzione call non saranno mai molto convenienti per l'investitore entro la scadenza stabilita al tempo 19/04/2013.

Proponiamo ora anche l'andamento che lo stesso indice ha avuto nel mese di febbraio 2013 (figura 3.4):

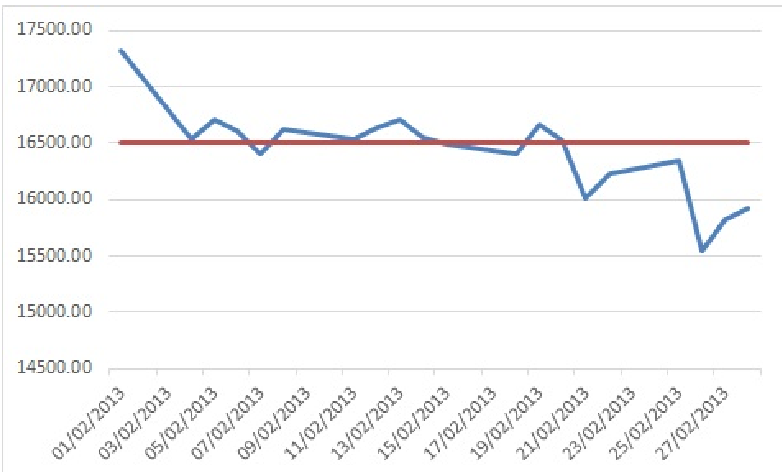

Figura 3.4: Andamento dell'indice FTSE MIB - Mese di febbraio 2013

da questa rappresentazione notiamo, a differenza del mese di marzo, che nel primo periodo del mese di febbraio ci sono stati molti momenti in cui l'opzione considerata era 'in the money'. Con questo esempio riusciamo a mostrare in maniera migliore i momenti in cui il derivato risulta in the money, ossia assume un valore superiore rispetto al sottostante scelto. Altri parametri utili ai fini della valutazione dell'opzione sono la volatilità, o deviazione standard, considerata pari al 21.20% ed il tasso privo di rischio, r, considerato anch'esso costante per il periodo, pari allo 0.25% e calcolato tramite l'utilizzo di dati storici di titoli di stato a lungo termine. Come affermato in precedenza, l'intervallo di tempo considerato per il nostro esempio è quello del mese di marzo, ed il primo valore utile per la formula di Black e Scholes è il tempo a scadenza (si veda Tab.3.5) del contratto stipulato, una variabile che con l'avanzare dei giorni si riduce, fino ad arrivare a zero a scadenza.

scadenza	**oggi**	**tempo a scadenza**
19/04/2013	01/03/2013	0.134246575
19/04/2013	04/03/2013	0.126027397
19/04/2013	05/03/2013	0.123287671
19/04/2013	06/03/2013	0.120547945
19/04/2013	07/03/2013	0.117808219
19/04/2013	08/03/2013	0.115068493
19/04/2013	11/03/2013	0.106849315
19/04/2013	12/03/2013	0.104109589
19/04/2013	13/03/2013	0.101369863
19/04/2013	14/03/2013	0.098630137
19/04/2013	15/03/2013	0.095890411
19/04/2013	18/03/2013	0.087671233
19/04/2013	19/03/2013	0.084931507
19/04/2013	20/03/2013	0.082191781
19/04/2013	21/03/2013	0.079452055
19/04/2013	22/03/2013	0.076712329
19/04/2013	25/03/2013	0.068493151
19/04/2013	26/03/2013	0.065753425
19/04/2013	27/03/2013	0.063013699
19/04/2013	28/03/2013	0.060273973

Tabella 3.5: Tempo a scadenza del contratto

Nella tabella 3.5 si mostra il valore del tempo che manca alla scadenza, calcolato con la seguente formula (3.44):

$$\frac{Data\ di\ scadenza - Data\ Odierna}{365}. \tag{3.44}$$

Una volta che siamo in possesso di tutti questi dati, possiamo procedere con il calcolo dei valori di *d1* e *d2*, mediante le formule già descritte nel paragrafo 3.1:

$$d_1 = \frac{ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{3.45}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}, \tag{3.46}$$

e calcolare i valori della normale standardizzata N(d1) e N(d2). La formula ((3.45)) utilizzata non presenta i valori dei dividendi, in quanto per semplicità in questo esempio vengono ignorati. A questo punto proponiamo la tabella dei dati al completo (tab.3.6), comprensivi dei risultati dell'opzione call europea, calcolati mediante la formula di Black e Scholes (3.47):

$$c = S_t N(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2). \tag{3.47}$$

Prendendo una data casuale nella tabella 3.6 è possibile confrontare il valore della call ricavato mediante il foglio di calcolo Excel, per mezzo della formula di Black e Scholes, con il dato reale della borsa. Ad esempio considerando la data del 28/03/2013, con i nostri calcoli avremo un prezzo della call pari a 30,78 euro che può essere confrontato sul sito di Borsa Italiana,[11] (*www.borsaitaliana.it*), con il

[11] Borsa Italiana è una società che dal 2007 fa parte del gruppo London Stock Exchange.
Nel 1808 tramite un decreto nasce la "Borsa di Commercio di Milano", che nel 1998 viene privatizzata, accorpando tutte le borse valori minori, facendo così nascere la Borsa Italiana S.p.A..
La gestione del sistema avviene tramite la suddivisione in diversi mercati in base alla tipologia di titolo o emittente.
I mercati che compongono Borsa Italiana si possono così elencare:

- MTA (Mercato Telematico Azionario);
- MIV (Mercato Telematico degli Investment Vehicles);
- AIM Italia rivolto alle piccole imprese;
- MAC mercato alternativo dei capitali;
- IDEM (Italian Derivatives Market);
- SEDEX dove vengono negoziati covered warrant, leverage certificates, certificates della categoria investment;

dato realizzato nella stessa data; noteremo che la differenza è minima: 2.22 euro, in quanto il dato di borsa presenta un valore per il prezzo della call pari a 33.00 euro; pertanto la nostra valutazione è in linea con quella reale.

Per rendere la teoria più chiara vogliamo illustrare anche il caso in cui il prezzo corrente del sottostante si trovi al di sopra o al di sotto il prezzo d'esercizio, mostrando come varia il valore finale dell'opzione call con un prezzo d'esercizio pari a K= 15.500 e a K= 17.500, mantenendo sempre la stessa serie di dati dell'indice FTSE MIB di marzo.

Figura 3.5: Prezzo opzione call europea con differenti valori di K

Nella figura 3.5 notiamo come il prezzo della call sia molto variabile nelle diverse ipotesi, infatti in questa rappresentazione si riescono a mostrare i casi in the money, ossia quando S_t è maggiore del prezzo d'esercizio (K); vediamo anche che nell'intervallo di tempo preso in considerazione (mese di marzo 2013) la nostra opzione[12] non avrà mai convenienza ad essere esercitata a scadenza se il

- MOT (Mercato Telematico delle obbligazioni e dei Titoli di Stato);
- ETF Plus.

[12]Dobbiamo ricordare che essendo un'opzione europea non sarà possibile l'esercizio prima della scadenza.

Tabella 3.6: Risultati della formula Black and Scholes con K=16500; deviazione standard=21.20%; tasso privo di rischio=0.75%; scadenza=19/04/2013.

Prezzo sottostante	epoca di valutazione	tempo alla scadenza	**d1**	**d2**	**N(d1)**	**N(d2)**	**PREZZO CALL**
15675,40	01/3	0,134246	-0,608219	-0,68589	0,27152	0,24638	194,8645
15542,20	04/3	0,126027	-0,744401	-0,81966	0,22831	0,20620	149,3881
15974,30	05/3	0,123287	-0,385340	-0,45977	0,34999	0,32283	268,9901
15899,70	06/3	0,120547	-0,454404	-0,52801	0,32476	0,29874	238,8751
15947,20	07/3	0,117808	-0,419790	-0,49255	0,33731	0,31116	249,6378
16204,00	08/3	0,115068	-0,203762	-0,27567	0,41926	0,39139	341,3439
16092,00	11/3	0,106849	-0,315096	-0,38439	0,37634	0,35034	280,1022
16024,00	12/3	0,104110	-0,382323	-0,45072	0,35111	0,32609	249,8632
15745,30	13/3	0,101370	-0,648615	-0,71611	0,25829	0,23696	160,0286
16131,00	14/3	0,098630	-0,295306	-0,36188	0,38387	0,35871	277,8860
16061,20	15/3	0,095890	-0,366802	-0,43245	0,35688	0,33270	246,2547
15924,10	18/3	0,087671	-0,524105	-0,58687	0,30010	0,27864	184,2750
15670,60	19/3	0,084931	-0,793556	-0,85534	0,21372	0,19618	114,2932
16016,00	20/3	0,082191	-0,449315	-0,51009	0,32660	0,30499	201,5782
15936,00	21/3	0,079452	-0,542168	-0,60192	0,29385	0,27361	170,9064
16045,50	22/3	0,076712	-0,436542	-0,49525	0,33122	0,31020	199,1237
15644,40	25/3	0,068493	-0,922706	-0,97818	0,17808	0,16399	81,5055
15495,90	26/3	0,065753	-1,118690	-1,17305	0,13163	0,12038	54,4073
15353,80	27/3	0,063013	-1,317403	-1,37062	0,09385	0,08524	35,0762
15338,70	28/3	0,060273	-1,367494	-1,41954	0,08573	0,07787	30,7834

suo valore sarà uno di quelli avverati in questo mese, infatti, non sarà mai in the money. In questo grafico si nota come il prezzo del sottostante possa assumere valori differenti giorno per giorno, infatti ogni volta che S_t si troverà al di sopra di K (prezzo d'esercizio) ci troveremo di fronte ad un'opzione in the money, che in caso di esercizio comporterà un flusso di cassa positivo. In modo analogo nel caso in cui S_t risultasse pari a K saremo di fronte ad un'opzione at the money, mentre quando S_t è minore di K, l'opzione si dice out of the money. Con la linea blu viene rappresentato, appunto, il caso in cui K sia uguale a S, per cui si tratterà del livello di riferimento nel quale un'opzione potrà essere definita "at the money". L'opzione nel nostro caso, essendo europea, verrà esercitata a scadenza nel caso in cui sia in the money e sarà pertanto conveniente esercitarla, altrimenti la maggior perdita a cui andremo incontro sarà solo il premio pagato per il suo acquisto al momento della stipula del contratto.
Successivamente proseguiamo col considerare il secondo modello studiato: il modello *jump diffusion*, per vedere che risultati ci propone a confronto con quelli appena calcolati con il modello di Black e Scholes. I dati che consideriamo sono gli stessi della tabella precedente (tabella 3.6) e risulteranno molto utili anche la formula ed il risultato dell'opzione call calcolata con la formula di Black e Scholes, per poterne fare un confronto. Procedendo con l'equazione di Merton,

$$C(S,k,T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda' T}(\lambda' T)^n}{n!} CBS(S,K,r_n,\sigma_n,T), \tag{3.48}$$

è possibile trovare il valore della call europea che considera anche i salti per mezzo del processo di Poisson (*par.3.2*).

Nella tabella 3.7 si mostrano i risultati numerici del calcolo dell'opzione call europea ottenuti con l'utilizzo del modello di Black e Scholes, a confronto con quelli del modello jump diffusion. Dalla tabella (3.7) si nota una forte discrepanza tra i valori giornalieri dell'opzione call calcolati con i due diversi metodi. Questo fatto è

Prezzo Black e Scholes	**Prezzo jump diffusion** $\lambda = 1.2$	$\lambda = 10$	$\lambda = 15$	$\lambda = 30$
194.86	44.44	194.25	87.49	10.96
149.39	34.07	148.92	67.07	8.40
268.99	61.34	268.14	120.77	15.12
238.88	54.47	238.12	107.25	13.43
249.64	56.93	248.85	112.08	14.04
341.34	77.84	340.27	153.25	19.19
280.10	63.88	279.22	125.76	15.75
249.86	56.98	249.08	112.18	14.05
160.03	36.49	159.52	71.85	9.00
277.89	63.37	277.01	124.76	15.62
246.25	56.16	245.48	110.56	13.84
184.28	42.02	183.69	82.73	10.36
114.29	26.06	113.93	51.31	6.43
201.58	45.97	200.94	90.50	11.33
170.91	38.97	170.37	76.73	9.61
199.12	45.41	198.50	89.40	11.20
81.51	18.58	81.25	36.59	4.58
54.41	12.40	54.24	24.43	3.06
35.08	7.99	34.97	15.75	1.97
30.78	7.02	30.69	13.82	1.73

Tabella 3.7: Risultati a confronto per l'opzione call europea con il modello di Black e Scholes e quello di Jump Diffusion, con valori di $\lambda = 1.2$; $\lambda = 10$; $\lambda = 15$; $\lambda = 30$.

sicuramente dovuto all'incorporazione dei salti nel modello jump diffusion, il quale tiene conto di piccoli movimenti giornalieri aleatori e di natura diffusiva; sebbene il coefficiente di volatilità usato sia il medesimo per i due metodi, è proprio il valore "salto" che incide in maniera forte. A differenza del modello di Black e Scholes, in quello jump diffusion sono stati aggiunti alcuni dati utili per il calcolo del processo di Poisson; uno di questi è il valore del parametro λ, pari al numero di salti che prevediamo possano manifestarsi nel periodo di tempo preso in considerazione e che in questo caso ipotizziamo pari a 1,2; 10; 15; 30. Per verificare la correttezza del nostro modello basterà assumere $\lambda = 0$ e verrà dimostrato che in realtà se il numero di salti fosse nullo saremmo di fronte ad un semplice modello di Black e Scholes. I salti non sono altro che alterazioni improvvise del prezzo del mercato.

Si vogliono mostrare ora alcuni esempi concreti di salti avvenuti nell'andamento dei prezzi in momenti di crisi inaspettata, come al esempio il recentissimo crollo della Banca Monte dei Paschi di Siena. Nella prima figura (fig.3.6) mostriamo un esempio rappresentativo di jump, ossia il momento in cui il prezzo subisce in incremento improvviso verso l'alto o verso il basso, mentre nella figura 3.7 vediamo l'esempio concreto del crollo dei prezzi del titolo azionario della Banca MPS:

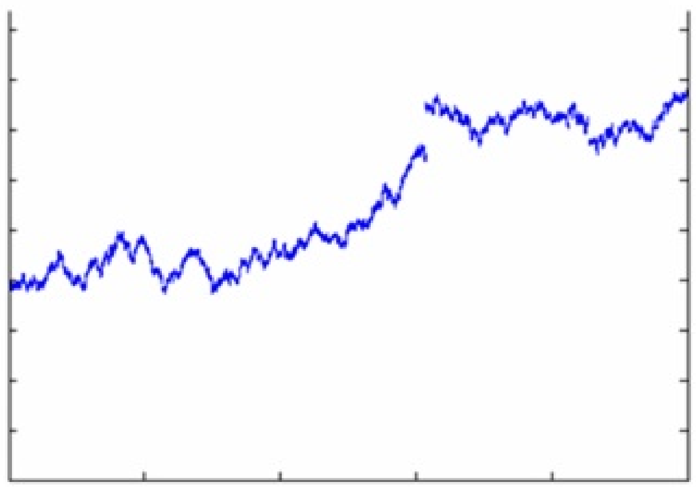

Figura 3.6: Esempio grafico di un jump. Dispensa a cura di Matthias Schu. *Partial integro differential equations (PIDE) occuring in Jump-Diffusion option pricing models.* University of Trier - Germany. Dipartimento di Matematica.

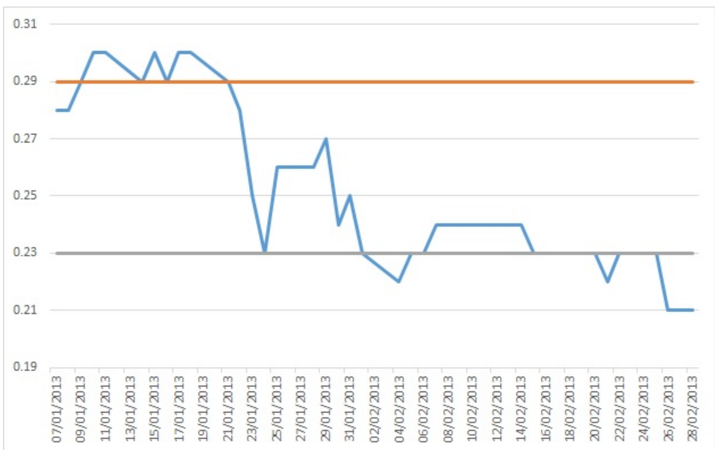

Figura 3.7: Esempio del crollo dei prezzi avvenuto per la Banca Monte Paschi di Siena.

Con la figura successiva (fig.3.8) mostriamo graficamente come avviene la costruzione del modello jump diffusion tramite i grafici del trend del prezzo azionario sommato alla rappresentazione del moto brownniano geometrico e al processo composto di poisson; alla fine arriveremo alla rappresentazione dell'andamento con jump visto nella figura 3.6.

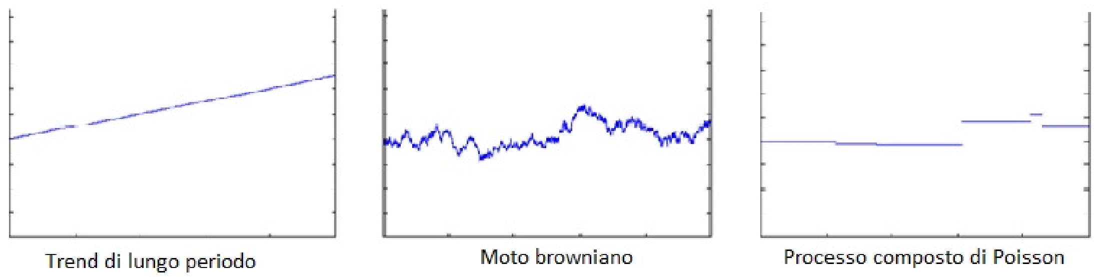

Figura 3.8: Processo rappresentativo per costruire un andamento con jump. Dispensa a cura di Matthias Schu. *Partial integro differential equations (PIDE) occuring in Jump-Diffusion option pricing models.* University of Trier - Germany. Dipartimento di Matematica.

3.6 Differenze e comparazioni

E' possibile affermare che un modello tra quelli presentati in questo lavoro sia la miglior approssimazione per la valutazione dei prezzi di un'opzione tramite l'utilizzo dei dati reali? In realtà questa domanda potrebbe avere una risposta affermativa, in quanto per mezzo del modello di Black e Scholes, ad esempio, abbiamo potuto notare una certa congruenza con i dati di mercato realmente verificatosi. Purtroppo però non è sempre così, infatti se così fosse saremo tutti dei veggenti e le previsioni per il futuro sarebbero sempre perfette. Punto a sfavore di questi modelli è il fatto che usano dei dati storici, perciò passati, per fare delle previsioni sui valori futuri; l'utilizzo dei dati passati non è un metodo attendibile che ci può dare una previsione corretta perchè non tiene conto di quello che potrebbe accadere, come ad esempio un crollo di borsa o un rialzo improvviso dei prezzi. Un esempio di parametro storico utilizzato è la volatilità usata per il calcolo dei modelli; come detto nei capitoli precedenti, la volatilità può essere storica, quindi calcolata sui dati passati, oppure implicita, ossia una misura volta al futuro.

La presenza dei salti fa sì che venga assunto un rischio maggiore da chi vende il contratto, che richiede un premio per il rischio. Ci si aspettano dei valori migliori per i modelli che incorporano la variabilità del salto, in quanto si va ad incrementare la complessità del modello cercando di fornire una stima migliore. Anche l'utilizzo dei processi di Lèvy e di Poisson ci aiutano nella miglior riproduzione dei valori finali.

Capitolo 4

Modelli jump diffusion per opzioni americane

In questo capitolo verranno trattate le applicazioni del modello diffusivo a salti alla valutazione delle opzioni americane.
Come già spiegato in precedenza, la differenza tra il caso delle opzioni europee e quello delle opzioni americane, riguarda il periodo temporale in cui è possibile esercitare il diritto intrinseco nell'opzione.

4.1 Il caso delle opzioni americane

Il caso delle opzioni americane è differente da quello delle opzioni europee, e la valutazione di questa tipologia di opzioni risulta più difficile. La caratteristica principale di questo tipo di opzioni sta nel fatto che esse possono essere esercitate durante la loro vita, in ogni istante temporale tra il loro acquisto e la loro scadenza, e non solo al termine, potendo così dal luogo ad un esercizio anticipato.

Infatti se si è in possesso di un'opzione call ed il prezzo di un titolo sottostante cresce, può risultare possibile e conveniente esercitare la call acquistando il sottostante al prezzo di esercizio per poi rivenderlo al prezzo di mercato. In questo caso, l'aumento del prezzo del sottostante fa aumentare il valore dell'opzione, avendo così la possibilità di vendere l'opzione e di incassare la differenza di prezzo tra acquisto e vendita come nel caso di un normale titolo.

Si rende perciò necessario conoscere quando sia il momento ottimale per esercitare l'opzione: infatti il problema sta proprio nel quando vi sia convenienza all'esercizio anticipato.

Innanziatutto è noto che un'opzione call americana scritta su un titolo che non paga dividendi, non avrà convenienza ad essere esercitata prima della scadenza ed avrà quindi lo stesso valore di un opzione call europea (C_E); Vediamo ora il perché.

Nel caso in cui avessimo una call americana (C_A) con scadenza 'T' e volessimo tenerla fino alla scadenza, avremo un valore pari al $\max(S_T - K, 0)$; se, invece, decidessimo per l'ipotesi di esercizio anticipato al tempo t, dove $0 < t < T$, il valore sarà:

$$S_T - e^{r(T-t)}K. \tag{4.1}$$

Ipotizzando che r sia > 0, dove r è il tasso d'interesse privo di rischio, e che $e^{r(T-t)}$ sia anch'esso maggiore di uno, avremo che:

$$S_T - e^{r(T-t)}K \leq max(S_T - K, 0) \tag{4.2}$$

di conseguenza si evince che non ci sarà convenienza all'esercizio anticipato di una call americana senza dividendi, pertanto varrà la pena tenerla fino a scadenza. Il suo valore a scadenza sarà pari a quello di un'opzione europea che invece prevede l'esercizio solo al termine del contratto, pertanto in questa ipotesi possiamo dire che vale la seguente uguaglianza:

$$C_A = C_E.$$

Risulta differente il caso dell'opzione con dividendi (D).

In tal caso può esserci convenienza d'esercizio, per l'opzione americana, appena prima dello stacco dei dividendi, in quanto dopo lo stacco dei dividendi il valore del titolo sottostante si abbasserà, facendo diminuire anche quello dell'opzione. La formula[1] analitica di valutazione, considerando un numero generico di dividendi, di questa tipologia d'opzione è la seguente:

$$C_A = (S_0 - De^{-rt})[\Phi(b_1) + \Phi_2(a_1 - b_1; -\sqrt{t_1/T})] -$$

$$Ke^{-rT}[\Phi(b_2 e^{-r(T-tD)} + \Phi_2(a_2 - b_2; -\sqrt{t_1/T})] + D^{e-rt1}\Phi(b_2) \tag{4.3}$$

in cui i valori a_1, a_2, b_1 e b_2 sono così calcolati:

$$a_1 = \frac{log[(S_0 - De^{-rt})/K] + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}; \qquad a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{4.4}$$

$$b_1 = \frac{log[(S_0 - De^{-rt})/S_1] + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}; \qquad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{4.5}$$

dove

- $\Phi_2(a, b, \rho)$ è la funzione di distribuzione normale bi-variata;
- S_1 è il prezzo del titolo sottostante, il cui valore è calcolabile risolvendo l'equazione: $C = S + D - K$. Nel caso in cui ci trovassimo nel momento dello

[1] Dispensa a cura di Paolo Pianca. *Opzioni su titoli con dividendi: proprietà e tecniche di valutazione.* Università Ca' Foscari di Venezia. Dipartimento di Matematica Applicata.

stacco del primo dividendo la formula sarebbe pari a $C = S_1 + D_1 - K$.

Il caso delle opzioni americane, comprende non solo le opzioni di tipo call ma anche le opzioni put. L'esercizio anticipato di un'opzione americana put senza lo stacco dei dividendi sul titolo sottostante potrebbe essere vantaggioso, in questo caso, a differenza delle call; questo perchè viene sfruttata la possibilità di investire un ammontare pari alla differenza $(K - S_t)$, che potrebbe rendere un importo maggiore rispetto al possesso dell'opzione fino a scadenza.

4.2 Cenni ed esempi

Il valore delle opzioni americane non è facilmente calcolabile ed è per questo motivo che in questo paragrafo illustreremo brevemente alcune approssimazioni ottenute da diversi ricercatori.

4.2.1 L'Approssimazione di Barone - Adesi e Whaley

Con questa approssimazione, studiata da Barone - Adesi e Whaley[2] nel 1987, si vogliono prezzare le opzioni americane, sia put che call, che pagano un dividendo continuo (d). Il valore dell'opzione con facoltà di esercizio anticipato, che porterebbe ad un vantaggioso guadagno (eventuale) rispetto all'esercizio a scadenza, viene rappresentato dalle seguenti formule. Per quanto riguarda le opzioni americane call:

$$C_A(S,K,T) = \begin{cases} C_E(S,K,T) + a_2(S/S_1)^{q_2}, & \text{se } S < S_1 \\ S - K, & \text{se } S \geq S_1 \end{cases} \tag{4.6}$$

[2]BARONE-ADESI, G. & WHALEY, R. *Efficient Analytic Approximation of American Option Values.* Journal of Finance. Vol. 42. 1987.

dove si definisce con S_1 il valore sopracitato al quale l'opzione call deve venire esercitata.

Gli altri valori che troviamo nella formula (4.6) sono:

$$a_2 = \frac{S_1 1 - e^{-dT} N[d_1(S_1)]}{q_2}$$

$$q_2 = \frac{1 - n + \sqrt{(n-1)^2 + 4k}}{2}$$

$$g_1(S) = \frac{log(S/K) + [(r-d) + \sigma^2/2]T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$k = \frac{2r}{\sigma^2(1 - e^{-rT})}$$

$$n = \frac{2(r-d)}{\sigma^2}.$$

Il valore di S_1, inoltre, può essere calcolato iterativamente risolvendo questa equazione:

$$S_1 - K = C_d(S_1, K, T) + \{1 - e^{-dT} N[d_1(S_1)]\}/q_2$$

in cui il valore C_d è pari a

$$C_d(S_1, K, T) = Se^{-dT} N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_1 - \sigma\sqrt{T}).$$

Per quanto riguarda le opzioni put americane, invece, abbiamo una formula diversa in quanto si ragionerà in termini di abbassamento del prezzo per avere un guadagno.

$$P_A(S, K, T) = \begin{cases} P_E(S, K, T) + a_1(S/S_2)^{q_1}, & \text{se } S > S_2 \\ K - S, & \text{se } S \leq S_2 \end{cases}$$

dove S_2 è il valore sotto al quale l'opzione deve venire esercitata e si prova risolvendo questa equazione:

$$K - S_2 = P_d(S_2, K, T) + \{1 - e^{-dT} N[-d_1(S_2)]\}/q_1$$

in cui P_d è dato da

$$P_d(S_2, K, T) = -Se^{-dT} N(-d_1) + Ke^{-rT} N(-d_1 + \sigma\sqrt{T})$$

e

$$a_1 = -\frac{S_2 1 - e^{-dT} N[-d_1(S_2)]}{q_1}$$

$$q_1 = \frac{1 - n - \sqrt{(n-1)^2 + 4k}}{2}.$$

4.2.2 Il problema della frontiera libera

La valutazione delle opzioni americane viene fatta durante la vita del contratto d'opzione. Essa avviene perciò in un determinato istante temporale t, per valutare se ci troviamo di fronte ad un valore ottimo per l'esercizio dell'opzione. Come fare a capirlo? È per questo motivo che introduciamo l'argomento di questo paragrafo, il problema della frontiera libera.

Come affermano Yan e Hanson nel loro articolo: *'American put option pricing for stochastic-volatility, jump diffusion models*[3]*'*, il prezzo di un opzione put americana può essere specificato come segue:

$$P^{(A)}(S(t), V(t), t, K, T) = sup_{\tau \in \mathcal{T}(t,T)}[E[e^{-r(\tau - t)} \max[K - S(\tau), 0] | F_t]]$$

nel dominio $\mathcal{D}$ in cui $(s, t)|(0, \infty)x[0, T]$, dove K è definito come prezzo d'esercizio, T è la scadenza e $\tau(t, T)$ sono epoche (τ) in un certo intervallo di tempo $(t \leq \tau \leq T)$.

[3]G.YAN, F.B. HANSON, *American put option pricing for stochastic-volatility, jump diffusion models.*, National Science Fondation, 2005.

Una volta definita la formula principale per la valutazione delle opzioni put, passiamo a definire l'argomento principale di questo paragrafo. Al tempo t esiste un valore S^* che segna il confine tra due regioni, la regione di continuazione e la regione di esercizio ottimale; il prezzo d'esercizio ottimale è il valore che le separa ed è un valore variabile nel tempo che si denota con il simbolo:

$$s = S^* = S^*_{(t)} \ per \ t \in [0, T];$$

dove 's' indica la frontiera libera; che separa il dominio $\mathcal{D}$ in due regioni.
Nella regione di continuazione (C) è ottimale detenere le opzioni, (sempre in riferimento all'articolo di Yan e Hanson), solo nel caso in cui 's' sia maggiore al prezzo del sottostante al tempo 't', infatti

$$se \ \ s > S^*_{(t)} \text{ allora } P^{(A)}(s, v, t, K, T) > max(K - s, 0);$$

in tal caso il valore di P_A (put americana) avrà lo stesso valore di un'opzione P_E (put europea).
Nel caso in cui ci si trovi nella regione di esercizio ottimale, invece, si dovrà procedere con l'esercizio dell'opzione put americana nel caso opposto in cui S sia minore o uguale a prezzo del sottostante al tempo 't', per cui

$$se \ \ s \leq S^*_{(t)} \text{ allora } P^{(A)}(s, v, t, K, T) = max(K - s, 0).$$

L'opzione put americana soddisfa un'equazione integro-differenziale alle derivate parziali simile a quella delle opzioni europee:

$$0 = \frac{\partial P_A}{\partial t}(s, v, t, K, T) + \mathcal{A}[P_A](s, v, t, K, T)$$

$$\equiv \frac{\partial P_A}{\partial t} + (r - \lambda \overline{J}) s \frac{\partial P_A}{\partial s} + k_v(0_v - v)\frac{\partial P_A}{\partial v}$$

$$+\frac{1}{2}vs^2\frac{\partial^2 P_A}{\partial s^2}+\rho\sigma_v vs\frac{\partial^2 P_A}{\partial s\partial v}+\frac{1}{2}\sigma_v^2 v$$

$$\frac{\partial^2 P_A}{\partial v^2}-rP_A+\lambda\int_{-\infty}^{\infty}(P_A(se^q,v,t,K,T)$$

$$-P_A(s,v,t,K,T))\phi_Q(q)dq$$

per (s,t) appartenente alla regione di continuazione (C).

Nell'articolo di Yan e Hanson viene esplicitato un problema legato alla frontiera libera, definito come segue:

$$0=\frac{\partial P_A}{\partial t}(s,v,t,K,T)+\mathcal{A}[P_A](s,v,t,K,T)$$

nel caso in cui *(s,t)* appartengano alla regione di continuazione; mentre

$$0>\frac{\partial P_A}{\partial t}(s,v,t,K,T)+\mathcal{A}[P_A](s,v,t,K,T),$$

nel caso in cui (s,t) appartengano alla regione di esercizio.

Ricordiamo comunque che non si conosce mai a priori il momento in cui è più conveniente l'esercizio dell'opzione, cosiccome non è noto a priori il prezzo del sottostante $S^*(t)$ come funzione del tempo, con (s,t) appartenente alla regione d'esercizio $\equiv [0,S^*(t)][0,T]]$.

Oltre a trovare il valore delle opzioni americane bisogna altresì stabilire se è ottimale esercitare o meno un'opzione sulla base del valore del sottostante, ed è proprio di questo che si occupa il problema della frontiera libera, nel quale esiste un valore S^*, in un istante di tempo t, che segna il confine fra le due regioni sopracitate, quella di continuazione e quella d'esercizio ottimale, dove il valore che le separa è il prezzo d'esercizio ottimale.

4.3 Modelli diffusivi a salti per opzioni americane

La valutazione delle opzioni americane in un contesto come quello dei processi jump diffusion risulta essere molto più difficile rispetto a quella delle opzioni europee. Il problema a cui si vuole dare soluzione è quello della valutazione di un'opzione americana e la sua risoluzione può essere ottenuta nel seguente modo, tramite un'equazione integro-differenziale[4]:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{ss}(S,t) + (r - q - \lambda \sum_{i=1}^{m} \pi_i k_i) S V_s(S,t) - (r+\lambda)V(S,t) - V_t(S,t) =$$

$$-\lambda \sum_{i=1}^{m} \pi_i V((1+k_i)S,t) \tag{4.7}$$

dove π_i è la probabilità che si verifichi un salto nel prezzo del sottostante con un'ampiezza pari a k_i, e V(s,t) è il valore di un'opzione. Esistono diversi modelli che possono essere utilizzati per l'approssimazione del prezzo delle opzioni americane; alcuni di questi sono ad esempio il modello di Bates e il modello delle Linee, inoltre si può far riferimento a paper[5] di alcuni ricercatori per arrivare a questa approssimazione. In questa tesi, come vedremo nel seguente paragrafo, entreremo nel particolare studiando il modello proposto da Kou (2002).

4.3.1 Il modello di Kou

Nel capitolo precedente abbiamo visto il modello diffusivo a salti di Merton, focalizzandoci sulle opzioni europee senza dividendi, mentre in questo paragrafo vogliamo delineare gli aspetti principali di un altro modello di tipo jump - diffu-

[4]Dispensa a cura di Paolo Pianca. *Sulla valutazione delle opzioni americane.* Università Ca' Foscari di Venezia. Dipartimento di Matematica Applicata. 2000

[5]Si veda: Y.d'HALLUIN, P.A.FORSYTH, G.LABAHN. *A penalty method for american options with jump diffusion processes.* Jan.8 2004. Numerische Mathematik.; D.E.WEEKS, D.GRANT, G.VORA. *Simulation and the early excercise option problem.* J. of Financial Engeneering - Vol 5 N.3. Sept.1996.

sion: il modello di Kou double exponential jump - diffusion[6].

Proposto nel 2002 da Kou, professore della "Columbia University", questo processo può portare ad un'approssimazione analitica per opzioni americane in un determinato intervallo temporale. La dinamica del prezzo segue questa forma:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sqrt{v_t} dW_t^1 + (\sum_{i=1}^{N(t)} (V_i - 1)) \tag{4.8}$$

dove v_t è la volatilità stocastica del processo, in cui si ha

$$dv_t = K_v(\theta - v_t)dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^2;$$

W_t^1 è il processo di Wiener,

$$dN_t = \begin{cases} 1, & \text{con probabilità pari a } \lambda dt \\ 0, & \text{con probabilità } (1 - \lambda dt); \end{cases}$$

mentre con il simbolo V_i si denota una successione di variabili aleatorie non negative $i.i.d.$ (identicamente ed indipendentemente distribuite) tali che $Y = log(V)$, in cui la distribuzione del salto ha densità pari alla seguente funzione:

$$f_{Kou}(Y) = p \cdot \lambda_+ e^{-\lambda + Y} 1_{\{Y>0\}} + (1 - p) \cdot \lambda_- e^{\lambda - Y} 1_{\{Y<0\}}.$$

La condizione $\lambda_+ > 1$ serve ad assicurare che il prezzo del sottostante abbia un valore atteso finito, inoltre consideriamo il parametro $0 < p < 1$ come la probabilità di un salto verso l'alto e quindi $1 - p$, di conseguenza, sarà la probabilità che un

[6]KOU, S.G.; WANG, HUI. *Option pricing under a double exponential jump diffusion model.* Management Science. 2004.

salto avvenga verso il basso. Pertanto

$$Y = log(V) = \begin{cases} \xi^+, & \text{con } prob.\ pari\ a\ p \\ -\xi^-, & \text{con } prob\ \{(1-p) = q\} \end{cases}$$

dove le variabili ξ sono variabili aleatorie esponenziali con media rispettivamente pari a $\frac{1}{\lambda^+}$ e $\frac{1}{\lambda^-}$. La formula (4.8) può essere riscritta più semplicemente nel seguente modo:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW_t + \delta(\sum_{i=1}^{N(t)}(V_i - 1)). \tag{4.9}$$

La funzione caratteristica del modello di Kou è

$$E[e^{iuX_t}] = exp\{t(i\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + iu\lambda[\frac{p}{\eta_1 - iu} - \frac{1-p}{\eta_2 + iu}])\}. \tag{4.10}$$

Nel paper di Kou, inoltre, viene affermato che sotto la misura di probabilità neutrale al rischio, il prezzo del sottostante S(t) segue il processo ‘double exponential jump diffusion’ (ossia con distribuzione doppiamente esponenziale), come visto nella formula (4.8):

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (r - \lambda\zeta)dt + \sigma dW(t) + d\left(\sum_{i=1}^{N(t)}(V_i - 1)\right). \tag{4.11}$$

La con redditività è pari a $X(t) = log(\frac{S_t}{S_0})$ ed è data dalla seguente formula:

$$X(t) = (r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\zeta)t + \sigma W(t) + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \ X(0) = 0.$$

In questa equazione con il simbolo W(t) individuiamo il moto browniano sotto la misura neutrale al rischio: ($\mathbf{P}$); con N(t) (dove t $\geq$ 0) riconosciamo il processo di Poisson con intensità λ, mentre V sarà pari a e^Y.

Altro valore fondamentale è ζ, definito dalla seguente formula:

$$\zeta = \mathbf{E}[V] - 1 = \frac{p \cdot \eta_1}{\eta_1 - 1} + \frac{q \cdot \eta_2}{\eta_2 + 1} - 1; \tag{4.12}$$

qui i valori di p e q assumono dei significati che abbiamo già incontrato: non sono altro che p e *(1-p)*, ossia le probabilità che il salto si verifichi verso l'alto o verso il basso, e come già detto in precedenza senza la parte 'salto' il modello risulta semplicemente come un modello con moto browniano geometrico.

Il modello di Kou è rappresentato da una distribuzione asimmetrica, perciò si colgono meglio gli skews e gli smiles[7] nella volatilità implicita. A differenza del modello di Merton (1976), in cui erano presenti solamente tre parametri $(\lambda; \mu; \sigma)$, nel modello di Kou ce ne sono quattro $(\lambda;\ p;\ \lambda_+;\ \lambda_-)$; il modello risulta essere, in questo modo, più flessibile e perciò più adattabile per un modello diffusivo a salti.

L'utilizzo del modello di Kou considera esclusivamente il prezzo dell'opzione europea, ed è per questo motivo che risulta essere di semplice comprensione. Nel caso in cui avessimo un'opzione put americana senza dividendi la sua risoluzione avverrebbe allo stesso modo, come se dovessimo calcolare il valore di una call americana con dividendi.

Per procedere con il calcolo dell'approssimazione del modello sarà necessario calcolare in precedenza il prezzo dell'opzione put europea, ricavare il prezzo storico del sottostante S e la maturity t, con probabilità che in t il prezzo del sottostante sia più basso del prezzo d'esercizio.

Nel caso in cui $S_0 \equiv S_0(t) \in (0, K)$ sia la soluzione unica dell'equazione, si avrà:

$$C_\beta K - D_\beta[S_0 + P_E(S_0, t)] = (C_\beta - D_\beta)Ke^{-rt}\mathbf{P}^{S_0}[S(t) \leq K].$$

I valori presenti in questa formula sono:

- $C_\beta = \beta_3\beta_4(1 + \varepsilon_2)$

[7]Si veda il par. 3.1.3.

- $D_\beta = \varepsilon_2(1+\beta_3)(1+\beta_4)$
- P_E =valore dell'opzione put europea con caratteristiche analoghe;
- $S_0 \equiv S_0(t)\epsilon(0, K)$
- $P^S \leq [S(t)K]$ è la probabilità che il prezzo del sottostante in t sia inferiore od uguale al prezzo d'esercizio.
- $\beta_3 \equiv \beta_{3,\frac{r}{z}}$ −con $0 < \beta_{1,\alpha} < \lambda_+ < \beta_{2,\alpha} < \infty$
- $\beta_4 \equiv \beta_{4,\frac{r}{z}}$ −con $0 < \beta_{3,\alpha} < \lambda_+ < \beta_{4,\alpha} < \infty$

Utile ai nostri calcoli successivi sarà questa funzione di approssimazione $\mathcal{F}$, per il prezzo di un'opzione put americana approssimato nella seguente maniera:

$$\mathcal{F}(S,t) = \begin{cases} P_E(S,t) + \alpha S^{-\beta 3} + \gamma S^{-\beta 4}, & \text{se } S \geq S_0 \\ K - S, & \text{se } S \leq S_0 \end{cases} \tag{4.13}$$

dove:

$$\alpha = \frac{S_0^{\beta_3}}{\beta_4 - \beta_3}\beta_4 K - (1+\beta_4)[S_0 + P_E(S_0,t)] + Ke^{-rt}P^{S_0}[S(t) \leq K] > 0$$

$$\gamma = \frac{S_0^{\beta_4}}{\beta_3 - B_4}\beta_3 K - (1+\beta_3)[S_0 + P_E(S_0,t)] + Ke^{-rt}P^{S_0}[S(t) \leq K] > 0$$

4.4 Alcuni esempi applicativi

Per mostrare meglio la logica sottostante al modello visto in precedenza (modello di Kou) abbiamo bisogno di un esempio applicativo con dei dati reali. Nei prossimi paragrafi ne vedremo un esempio a confronto con il modello privo di salti, il modello binomiale, che verrà introdotto paragrafo seguente.

4.4.1 Il modello binomiale

In questo paragrafo introdurremo un altro metodo di valutazione delle opzioni: gli alberi binomiali[8]. Questa tecnica permette una valutazione su reticolo, tramite l'approssimazione del processo statistico log-normale dei titoli azionari, in cui l'arco temporale di riferimento, che sarà un periodo da 0 a T, verrà suddiviso in t intervalli di ampiezza pari a $\delta t = \frac{T}{t}$. Ad ogni intervallo il valore dell'azione S potrà assumere due possibili valori, uno in aumento ed uno in diminuzione, a seconda di come sarà l'andamento del mercato:

$$f(n) = \begin{cases} S_0 u, & \text{se } S \text{ aumenta con probabilità } p \\ S_0 d, & \text{se } S \text{ diminuisce con probabilità } \textit{1-p} \end{cases}$$

dove con u e d si indicano rispettivamente il fattore di rialzo e quello di ribasso. Il procedimento per il calcolo è iterativo ed è sempre lo stesso ad ogni stadio, vediamo ora graficamente un esempio esemplificativo (fig.4.1): nel quale individuiamo due

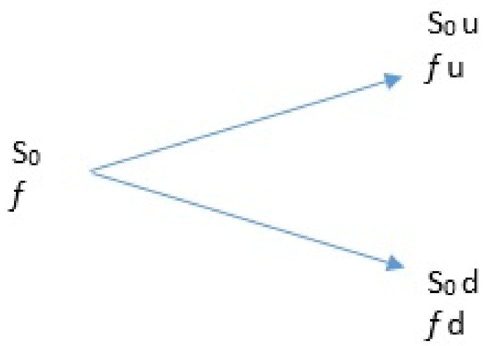

Figura 4.1: Esempio di modello binomiale ad uno stadio.

valori: f che sta ad indicare il valore del prezzo dell'opzione, e S che indica il prezzo del sottostante al tempo zero; nel primo stadio se il prezzo dell'azione (S) sale, per mezzo del fattore di rialzo (u) allora il valore finale dell'opzione sarà fu; mentre,

[8]HULL J.C., (2009). "Opzioni, futures e altri derivati". (7) Pearson, Prentice Hall.

viceversa, se il prezzo del titolo (S) scende per mezzo del fattore di ribasso (d), il valore finale dell'opzione sarà *fd*.

Esistono inoltre due condizioni che devono valere affinché il metodo di valutazione sia efficace:

- il valore atteso di S in $(0, \delta t)$ dev'essere pari alla seguente uguaglianza:

$$(S(\delta t)) = p\ uS_0 + (1-p)\delta S_0 = S_0 e^{(r\delta t)}$$

  con una probabilità
$$p = \frac{e^{(r\delta t)} - d}{u - d};$$

- la varianza dell'azione in δt è:

$$(S(\delta t)^2) = S_0^2[p\ u^2 + (1-p)d^2] = S_0^2 e^{(2r+\sigma^2)\delta t}.$$

Tramite queste formule è possibile determinare i valori di p, u e d (anche se non in maniera univoca) in cui media e varianza di $S(\delta t)$ del processo binomiale discreto coincidono con quelle del processo continuo.

L'albero binomiale può possedere più stadi e perciò ad ogni stadio si deve utilizzare il valore del sottostante appartenente a quel nodo.
Il procedimento per il calcolo dell'opzione viene svolto a ritroso per verificare ad ogni stadio se è conveniente l'esercizio anticipato. Si parte pertanto dal payoff finale al tempo T, quando il prezzo dell'opzione in ogni nodo è noto, dopodiché si usa un processo iterativo per trovare i valori dell'opzione nei diversi nodi; se indichiamo con f il valore dell'opzione e ne ricaviamo i valori in ogni stadio (i,j) tramite la formula (4.14):

$$V'_{i,j} = max[I_{i,j}, S_{i,j} - K]; \quad i = 0, 1, 2, ...n-1; \;\; j = 0, 1, 2, ...i. \tag{4.14}$$

In questa formula il valore dell'opzione americana $V'_{i,j}$ è calcolato come massimo fra il valore intrinseco $I_{i,j}$[9] ed il valore attualizzato del valore atteso dei nodi (i+1,j) e (i+1,j+1); tramite l'utilizzo di questa formula si procede a ritroso fino al tempo *t=0*, in modo da ottenere tutti i valori fino a quello iniziale.

In questo caso per dare un esempio pratico alle nostre definizioni teoriche, ci avvarremmo del software "DerivaGem", che ci proporrà il risultato finale dell'opzione put implementandolo con i dati che appaiono nella tabella 4.1; inseriremo pertanto i valori sotto indicati del prezzo d'esercizio, il valore della volatilità e del tasso di interesse privo di rischio, il tempo alla scadenza ed il prezzo del sottostante; assumendo che il titolo non paghi dividendi.

S	3,82
K	3,60
σ	46,50%
r	7,50%
Scadenza	19/04/2013

Tabella 4.1: Dati utilizzati per l'approssimazione di Kou.

Successivamente verrà chiesto al programma "DerivaGem" di calcolare il risultato della put americana sotto tali ipotesi, ottenendo l'albero binomiale a 500 stadi di cui ne vediamo una breve rappresentazione nella Figura 4.2 dove al nodo iniziale troviamo i valori riguardo la data del 01/03/2013; in ogni nodo ci sono due numeri, quello in alto rappresenta il prezzo del titolo sottostante, mentre quello sotto è il prezzo dell'opzione nello stesso istante temporale. In corrispondenza di ognuno di essi si deve valutare se l'esercizio anticipato risulta conveniente, nel caso in cui i valore intrinseco dell'opzione sia maggiore del valore calcolato.

Questo modello discreto su reticolo, reiterato per 500 periodi, ci consente la valutazione dell'opzione put americana.

---

[9]

$I_{i,j} = \dfrac{pV'_{i+1,j+1} + (1-p)V'_{i+1,j}}{r_h}$; dove r_hè il tasso di capitalizzazione di ogni sottoperiodo considerato.

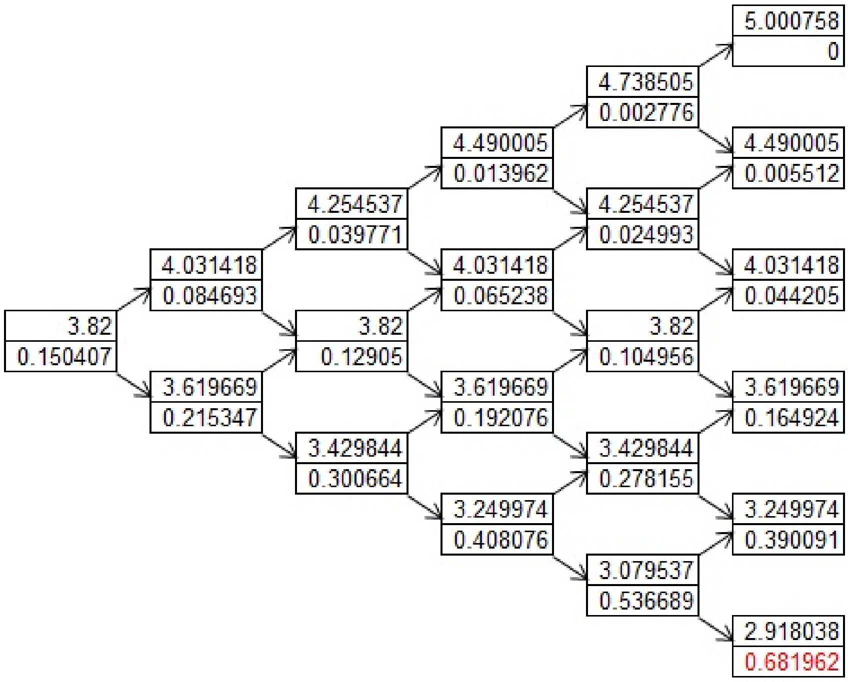

Figura 4.2: Risultati del modello binomiale a 500 stadi.

4.4.2 L'applicazione del modello di Kou

L'ultimo metodo che vedremo è quello proposto da Kou[10] per prezzare un'opzione americana includendo l'eventualità che possano esserci dei salti; questo modello verrà confrontato con il modello binomiale nell'ambito della tipologia di opzioni americane, cioè esercitabili in un qualsiasi momento della loro vita.
Kou propose questo modello, un'estensione del metodo utilizzato da Barone-Adesi e Whaley [11], modificando quello di Merton e considerando dei salti con una distribuzione *double exponential*.

Per valutare empiricamente questo modello utilizzeremo la serie di dati 'Unicredit' per il mese di marzo 2013, che riporteremo nel grafico 4.3.

[10]KOU, S.G.; WANG, HUI, (2002). *Option pricing under a double exponential jump diffusion model*. Management Science.
[11]Si veda: BARONE-ADESI G., WHALEY R.E., *Efficient analytic approximation of american option values*. The journal of finance - Jun 1987.

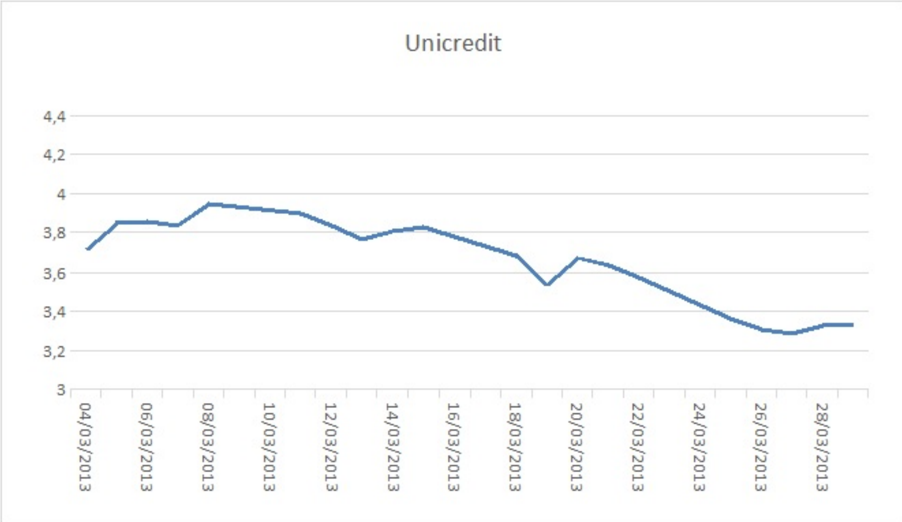

Figura 4.3: Andamento del prezzo del sottostante del titolo Unicredit - mese di marzo 2013.

L'approssimazione che useremo è la seguente:

$$\mathcal{F}(S,t) = \begin{cases} P_E(S,t) + \alpha S^{-\beta 3} + \gamma S^{-\beta 4}, & \text{se } S \geq S_0 \\ K - S, & \text{se } S \leq S_0 \end{cases}$$

dove:

$$\alpha = \frac{S_0^{\beta_3}}{\beta_4 - \beta_3} \beta_4 K - (1 + \beta_4)[S_0 + P_E(S_0, t)] + Ke^{-rt} P^{S_0}[S(t) \leq K] > 0$$

$$\gamma = \frac{S_0^{\beta_4}}{\beta_3 - B_4} \beta_3 K - (1 + \beta_3)[S_0 + P_E(S_0, t)] + Ke^{-rt} P^{S_0}[S(t) \leq K] > 0.$$

Essa verrà implementata in un foglio di lavoro Excel. Utilizzando un tasso privo di rischio pari al 2% ed una volatilità pari al 46,50% (ricavati dal sito di Borsa Italiana), dati utilizzati come esempio per valutare il modello di Kou per un opzione molto vicina alla scadenza, mostriamo nella tabella 4.2 la procedura pratica che abbiamo utilizzato per il calcolo dell'approssimazione. In questa tabella riprendiamo le formule viste in precedenza, dove per alpha e gamma indicheremo i valori della formula α e γ.(qui sopra)

Tabella 4.2: Calcoli per la valutazione dell'approssimazione di Kou, usando un'opzione in scadenza il 19/04/2013 e con K = 3.6.

Epoca di valutazione	Tempo a scadenza	$z = 1 - e^{-rt}$	St	EuPut	r/z	Beta3	Beta4	Alpha	Gamma	Kou	K-S	Modello binomiale
01/03/2013	0,1342465753	0,27%	3,82	0,16	745,89841%	0,85	0,86	-1390,063	1414,122	2,07	-0,22	0,16
04/03/2013	0,1260273973	0,25%	3,72	0,18	794,47868%	0,72	0,88	-60,522	82,474	2,41	-0,12	0,18
05/03/2013	0,1232876712	0,25%	3,85	0,14	812,11152%	0,67	0,89	-45,344	68,092	2,28	-0,25	0,14
06/03/2013	0,1205479452	0,24%	3,86	0,13	830,54586%	0,63	0,9	-34,045	56,111	2,20	-0,26	0,13
07/03/2013	0,1178082192	0,24%	3,84	0,13	849,83760%	0,59	0,91	-25,789	47,710	2,46	-0,24	0,13
08/03/2013	0,1150684932	0,23%	3,95	0,10	870,04800%	0,54	0,92	-21,570	44,076	2,38	-0,35	0,1
11/03/2013	0,1068493151	0,21%	3,90	0,11	936,89779%	0,42	0,94	-11,280	32,365	2,74	-0,30	0,11
12/03/2013	0,104109589	0,21%	3,84	0,12	961,52666%	0,38	0,94	-9,021	29,373	2,93	-0,24	0,12
13/03/2013	0,101369863	0,20%	3,77	0,14	987,48682%	0,34	0,95	-7,199	26,811	3,14	-0,17	0,14
14/03/2013	0,098630137	0,20%	3,81	0,13	1014,88922%	0,3	0,96	-6,154	25,795	3,19	-0,21	0,13
15/03/2013	0,095890411	0,19%	3,83	0,12	1043,85746%	0,27	0,96	-5,222	24,769	3,27	-0,23	0,12
18/03/2013	0,0876712329	0,18%	3,69	0,16	1141,62529%	0,17	0,98	-2,793	20,946	3,78	-0,09	0,12
19/03/2013	0,0849315068	0,17%	3,54	0,22	1178,41964%	0,15	0,98	-2,071	19,296	4,09	0,06	0,22
20/03/2013	0,0821917808	0,16%	3,68	0,16	1217,66694%	0,12	0,98	-1,942	19,771	3,99	-0,08	0,16
21/03/2013	0,0794520548	0,16%	3,64	0,17	1259,62095%	0,1	0,99	-1,562	19,071	4,13	-0,04	0,19
22/03/2013	0,0767123288	0,15%	3,58	0,19	1304,57168%	0,08	0,99	-1,220	18,335	4,28	0,02	0,18
25/03/2013	0,0684931507	0,14%	3,37	0,31	1461,00023%	0,04	1,00	-0,505	16,479	4,74	0,23	0,19
26/03/2013	0,0657534247	0,13%	3,31	0,35	1521,83355%	0,03	1,00	-0,363	16,050	4,86	0,29	0,35
27/03/2013	0,0630136986	0,13%	3,29	0,36	1587,95673%	0,02	1,00	-0,273	15,848	4,92	0,31	0,35

La tabella 4.3 ci propone i valori del prezzo dell'opzione put americana calcolati giorno dopo giorno.

Data	**Appr. Kou**	**K-S**
01/03/2013	2.06244024	-0.22
04/03/2013	2.421353629	-0.12
05/03/2013	2.294938957	-0.25
06/03/2013	2.213956167	-0.26
07/03/2013	2.46843599	-0.24
08/03/2013	2.392176317	-0.35
11/03/2013	2.755086784	-0.3
12/03/2013	2.946286016	-0.24
13/03/2013	3.154009347	-0.17
14/03/2013	3.202783308	-0.21
15/03/2013	3.281984745	-0.23
18/03/2013	3.792107499	-0.09
19/03/2013	4.097794071	0.06
20/03/2013	3.992564999	-0.08
21/03/2013	4.130811005	-0.04
22/03/2013	4.287792476	0.02
25/03/2013	4.744466035	0.23
26/03/2013	4.865433247	0.29
27/03/2013	4.924230827	0.31
28/03/2013	0.326822853	0.27

Tabella 4.3: Valori giornalieri calcolati mediante l'approssimazione di Kou.

In base all'ipotesi che S sia maggioe o uguale a S_0, oppure che S sia minore od uguale a S_0, condizione vista in precedenza nella formula (4.13), si ricavano due valori per l'approsimazione di Kou. Inoltre è possibile fare un confronto con i valori dell'albero binomiale nella tabella 4.2 e considerando ad esempio il valore del giorno 01/03/2013, vediamo che il valore della put americana calcolato per mezzo dell'albero binomiale è pari a 0.16, mentre il valore calcolato con l'approssimazione di Kou risulta pari a 2.06 con $S \geq S_0$, e -0,2 con $S \leq S_0$; dato che in data 01/03 S_0 era maggiore di S_t si farà riferimento al valore -0.2. Sono due le considerazioni che faremo a riguardo: la prima interessa la scelta dei valori dell'approssimazione cioè fino alla data del 20/03 sarà opportuno considerare i valori nella colonna di destra (K-S) della figura 4.3, mentre dal 20/03 al 28/03 si potrà utilizzare il "valore di Kou" (Appr.Kou) in quanto $S \geq S_0$; la seconda considerazione riguarda la discrepanza fra il modello di Kou e il metodo binomiale con un numero di nodi pari a 500. Avremmo comunque una stima migliore nel caso in cui utilizzassimo dei parametri reali stimati e facessimo una valutazione con un numero di nodi maggiore. Un ultimo commento può essere fatto per quanto riguarda gli alberi binomiali utilizzati nel nostro contesto per la valutazione delle opzioni americane put riguarda il loro valore finale che sarà uguale a quello di un'opzione put europea, poichè l'ultima possibillità di esercizio è per entrambe le tipologie la scadenza.

Il modello proposto da Kou (2002) presenta una distribuzione asimmetrica e riesce a cogliere in modo migliore rispetto ad altri modelli il fenomeno degli smile nella volatillità, come già affermato in precedenza, sebbene il modello binomiale risulti essere molto più utilizzato.

Conclusioni

In questo lavoro è stato esaminato il caso dei modelli jump diffusion a confronto con altri modelli più classici come il modello di Black e Scholes e il modello degli alberi binomiali. In primo luogo è stata presentata la teoria riguardante i derivati, con particolare attenzione alle opzioni, utilizzate nei modelli proposti. In secondo luogo sono stati descritti i modelli di Black e Scholes ed il modello jump diffusion (Merton 1976), per le opzioni di tipo europeo, mentre per le opzioni di tipo americano è stata descritta un'altra tipologia di modelli: quello di Kou (2002) ed il modello più classico degli alberi binomiali a più stadi. Quest'ultimo permette di cogliere meglio gli "smile" presenti nella volatilità e quindi dovrebbe portare a delle previsioni migliori o per lo meno più realistiche.

Il primo modello che abbiamo utilizzato è stato quello di Black e Scholes, modello classico e molto usato per la valutazione delle opzioni europee. Con il modello jump diffusion viene introdotta la variabilità del salto, ossia una ipotetica variazione del prezzo in un certo istante temporale che porta ad alterazioni finali dei valori attesi. Per tale modello si è reso necessario lo studio del processo di Poisson, poiché essendo un processo di conteggio ci aiuta a capire e a descrivere i salti del modello, che possono verificarsi in un certo arco temporale. Questo secondo metodo dovrebbe rendersi molto utile proprio perché, tramite la distribuzione di Poisson, si vuole cercare di stimare un prezzo finale più corretto ed in linea con il mondo reale, dove è possibile che accadano degli eventi inattesi e di conseguenza che il prezzo del sottostante di un titolo possa manifestare delle variazioni notevoli e repentine in rialzo o in ribasso.

Per quanto riguarda la valutazione delle opzioni put americane invece sono stati utilizzati altri due modelli. Il primo è il metodo binomiale per il quale la procedura di valutazione delle opzioni americane che viene applicata è a ritroso; cioè si parte dal nodo finale e si procede all'indietro fino ad arrivare al nodo iniziale, per verificare se l'esercizio anticipato è conveniente.

Il secondo è il metodo di Kou, con il quale ricaviamo dei valori approssimati in base ai valori che possa assumere S_t rispetto a S_0. L'utilizzo di questa distribuzione ha reso possibile la stima dei valori per le opzioni put americane con salti, altrimenti difficilmente calcolabili. Tuttavia, ricordiamo che si tratta di un'approssimazione il cui risultato dovrebbe cogliere con maggior precisione il fenomeno dei 'jumps', ma non è detto che ciò si verifichi nel modo atteso.

Riprendendo alcuni passi del libro "*Il cigno nero*" (2008) di Taleb N., si ricorda che non esistono modelli giusti o sbagliati in assoluto. I modelli che vogliono dimostrarsi più realistici e meglio adattabili al mondo reale hanno necessariamente bisogno di più parametri, rischiando così di rendere i calcoli troppo difficili e rischiando di cadere nell'errore di stima sbagliata.

Appendice: riferimenti normativi

Presentiamo in questa appendice i riferimenti normativi per quanto riguarda la tipologia di derivati dei warrant e successivamente quella dei covered warrant e dei certificates. Gli articoli che riporteremo sono stati tratti dal *Capo 5* del "Regolamento dei mercati organizzati e gestiti da borsa italiana S.p.A."(reperibile direttamente dal sito: *www.borsaitaliana.it*), per quanto riguarda i derivati warrant, mentre al *Capo 7* per quanto concerne le altre due tipologie.

A1: I Warrant

"**Art. 2.2.14. Definizione di warrant**.

1 Per warrant si intende quello strumento finanziario che conferisce al detentore la facoltà di sottoscrivere (warrant per sottoscrivere) o di acquistare (warrant per acquistare) o di vendere (warrant per vendere), alla o entro la data di scadenza, un certo quantitativo di azioni (azioni di compendio) contro versamento di un importo prestabilito o da stabilire secondo criteri prefissati nel caso di warrant per sottoscrivere o per acquistare e, viceversa, incassando un importo prestabilito o da stabilire secondo criteri prefissati nel caso di warrant per vendere.

Nel caso di emissione di warrant per l'acquisto di azioni, le stesse devono risultare depositate in una gestione speciale, vincolate irrevocabilmente al servizio degli emittenti warrant, presso un soggetto sottoposto a vigilanza prudenziale.

Nel caso di emissione di warrant per la vendita di azioni, il controvalore complessivo dei fondi necessari per l'acquisto delle azioni di compendio deve essere posto in deposito vincolato al servizio degli emittenti warrant, presso un soggetto sottoposto a vigilanza prudenziale oppure deve essere costituita una garanzia incondizionata e irrevocabile per pari importo rilasciata da un soggetto sottoposto a vigilanza prudenziale."

"**Art. 2.2.15. Requisiti degli emittenti di warrant**.

1. Possono essere ammessi alla quotazione i warrant di emittenti che soddisfino il requisito di cui all'articolo 2.2.1, commi 1, 2, 3, 4 e 5. Si applica, inoltre, l'articolo 2.2.5, comma 4.

2. Borsa Italiana può ammettere alla quotazione warrant che si riferiscano ad azioni di compendio negoziate in un mercato regolamentato, a condizione che:

   a) se le azioni di compendio sono emesse dal medesimo emittente, questi soddisfi i requisiti di cui ai commi 7 e 10 del precedente articolo 2.2.1;

   b) se le azioni di compendio sono emesse da un terzo, quest'ultimo soddisfi i requisiti di cui ai commi 1, 2, 3, 4, 5, 7 e 10 del precedente articolo 2.2.1 e abbia i bilanci sottoposti a revisione contabile ai sensi del comma 4, dell'articolo 2.2.5.

3. Nel caso in cui le azioni di compendio siano negoziate in un mercato regolamentato diverso da quelli gestiti da Borsa Italiana, l'emittente i warrant dovrà altresì:

- dimostrare la disponibilità in Italia delle informazioni sui prezzi fatti registrare dalle azioni di compendio nel mercato principale nel quale dette azioni sono quotate;
- dimostrare che, ove le azioni di compendio siano emesse da un terzo, quest'ultimo sia assoggettato ad una disciplina concernente le informazioni da mettere a disposizione del pubblico e dell'Autorità di controllo sostanzialmente equivalente a quella vigente in Italia;
- dimostrare che, ove le azioni di compendio siano emesse da un terzo, risultino disponibili in Italia tutte le informazioni rilevanti rese pubbliche dall'emittente terzo nel mercato principale di quotazione delle proprie azioni.

4. Per gli strumenti finanziari emessi da Borsa Italiana i requisiti di cui al presente articolo sono verificati dalla Consob."

"**Art. 2.2.16. Requisiti dei warrant.**

1. Per l'ammissione alla quotazione, i warrant devono avere i seguenti requisiti:

   a) avere una circolazione autonoma;

   b) essere riferiti ad azioni di compendio già negoziate in un mercato regolamentato o oggetto di contestuale provvedimento di ammissione;

   c) le azioni derivanti dall'esercizio dei warrant dovranno, per esplicita previsione regolamentare, essere rese disponibili per la negoziazione entro il decimo giorno di borsa aperta del mese successivo a quello di presentazione della richiesta di esercizio;

   d) essere diffusi presso gli investitori non professionali e/o presso gli investitori professionali in misura ritenuta adeguata da Borsa Italiana per soddisfare l'esigenza di un regolare funzionamento del mercato;

e) avere delle caratteristiche chiare ed inequivocabili che consentono una correlazione tra il prezzo dello strumento finanziario e il prezzo dell'azione di compendio;

2. Borsa Italiana richiede che sia prevista a livello regolamentare l'effettuazione di rettifiche in occasione di eventi di natura straordinaria che riguardano l'emittente le azioni derivanti dall'esercizio dei warrant. Le rettifiche devono essere informate a metodologie di generale accettazione e tendere a neutralizzare il più possibile gli effetti distorsivi dell'evento.

3. Per gli strumenti finanziari emessi da Borsa Italiana i requisiti di cui al presente articolo sono verificati dalla Consob."

A2: I Covered Warrant e I Certificates

"**Art. 2.2.21. Requisiti degli emittenti covered warrants o i certificates.**

1. Possono essere ammessi a quotazione i covered warrant e i certificates emessi dai seguenti soggetti:

    a) società o enti nazionali o esteri, sottoposti a vigilanza prudenziale;

    b) Stati o enti sovranazionali;

    c) società o enti per i quali i rapporti obbligatori connessi all'emissione vengano garantiti, in modo incondizionato e irrevocabile, da un soggetto diverso (garante), appartenente alle categorie di cui alle lettere a) e b).

2. Nel caso di cui al comma 1, lettera c), i requisiti e gli adempimenti di cui alla presente Parte posti in capo all'emittente i covered warrant o i certificates si intendono riferiti al garante dell'emissione.

3. Gli emittenti i covered warrant o i certificates, ad eccezione di quelli di cui al comma 1, lettera b), debbono soddisfare i seguenti ulteriori requisiti:

    a) possedere un patrimonio di vigilanza minimo di almeno 25 milioni di euro;

    b) possedere sistemi di gestione e controllo dei rischi che siano conformi alle disposizioni di vigilanza prudenziale a cui sono sottoposti e comunque comunicati a Borsa Italiana;

    c) avere pubblicato e depositato, conformemente al diritto nazionale, i bilanci, anche consolidati, degli ultimi due esercizi annuali, di cui almeno l'ultimo corredato di un giudizio della società di revisione redatto secondo le modalità di cui all'articolo 156 del Testo Unico della Finanza. (continua...)

4. Nel caso in cui gli emittenti i covered warrant o i certificates siano stati oggetto di rating sul merito di credito da parte di un'agenzia di rating indipendente locale o internazionale nei 12 mesi antecedenti la domanda di ammissione, tale rating o il relativo aggiornamento, se pubblici, dovranno essere comunicati a Borsa Italiana, indicando anche l'eventuale rating attribuito alla singola emissione. Tali informazioni saranno diffuse al mercato nell'avviso in cui si stabilisce la data di inizio delle negoziazioni.

5. Borsa Italiana può, al fine di valutare l'idoneità dell'emittente i covered warrant o i certificates, prendere in considerazione la passata esperienza dell'emittente in materia di covered warrant, certificates o strumenti finanziari simili, e può richiedere al medesimo, indicazioni sulle strategie di copertura del rischio che intende adottare con riguardo all'emissione."

"**Art. 2.2.22 . Attività sottostante**.

1. Possono essere ammessi a quotazione i covered warrant e i certificates riferiti alle seguenti attività sottostanti:

   a azioni di emittenti diversi dall'emittente i covered warrant o i certificates, negoziate in mercati regolamentati in Italia o in un altro Stato, che presentino requisiti di elevata liquidità;

   b titoli di Stato negoziati su mercati regolamentati, che presentino requisiti di elevata liquidità;(. . .)"

"**Art. 2.2.23. Informativa sulle attività sottostanti (. . .)**"

1. Qualora l'attività sottostante sia costituita da strumenti finanziari di cui all'articolo 2.2.22, comma 1, lettera a), ammessi alle negoziazioni in un mercato regolamentato in un altro Stato, l'emittente i covered warrant o i certificates deve dimostrare la disponibilità in Italia di tutte le informazioni rilevanti rese pubbliche dall'emittente l'attività sottostante nel mercato principale di

quotazione, nonchè dei prezzi fatti registrare dagli strumenti finanziari nel mercato principale di quotazione con un adeguato grado di aggiornamento.

2. Nei casi di cui al *comma 1* Borsa Italiana si riserva di richiedere all'emittente i covered warrant o i certificates di dimostrare che gli emittenti gli strumenti finanziari sottostanti sono assoggettati ad una disciplina concernente le informazioni da mettere a disposizione del pubblico e dell'Autorità di controllo sostanzialmente equivalente a quella vigente in Italia.

3. Qualora l'attività sottostante sia costituita dalle attività di cui all'articolo 2.2.22, comma 1, lettere b), c), d), e), f) e g) l'emittente i covered warrant o i certificates deve dimostrare la disponibilità in Italia delle informazioni continue ed aggiornate sui prezzi delle suddette attività sottostanti. In relazione alle attività di cui alla lettera f) l'emittente i covered warrant o i certificates deve altresì fornire la metodologia di calcolo e di gestione degli indici o dei panieri.

"**Art. 2.2.24. Requisiti dei covered warrants e dei certificates**.

1. Per l'ammissione alla quotazione, ciascun covered warrant o certificates deve soddisfare le seguenti condizioni:

   a) le caratteristiche dello strumento devono essere chiare ed inequivocabili e consentono una correlazione tra il prezzo dello strumento finanziario e il prezzo del valore sottostante;

   b) limitatamente ai covered warrant avere scadenza non inferiore a 3 mesi, nel caso in cui sulla medesima attività sottostante sia stato introdotto da Borsa Italiana un prodotto derivato, e comunque non superiore a 5 anni dalla data in cui è stata completata la documentazione da allegare alla domanda di ammissione a quotazione. Borsa Italiana può ammettere alla quotazione covered warrant aventi scadenza superiore a

5 anni, su richiesta motivata dell'emittente, qualora sussistano informazioni sufficienti ai fini della determinazione del prezzo dello strumento stesso;

c) avere le seguenti caratteristiche tecniche:

   (a) limitatamente ai covered warrant e ai certificates appartenenti ai segmenti e alle classi individuati da Borsa Italiana nelle Istruzioni, la parità multiplo, così come definita nell'articolo 1.3, deve essere pari a 0,1 qualora l'attività sottostante sia costituita da azioni italiane negoziate nei mercati regolamentati organizzati e gestiti da Borsa Italiana e 0,0001 qualora il sottostante sia costituito da indici gestiti da Borsa Italiana o da società con le quali Borsa Italiana abbia stipulato appositi accordi;

   (b) l'esercizio a scadenza è riconosciuto automaticamente per i covered warrant in the money e per i certificates; al possessore del covered warrant o del certificates dovrà comunque essere concessa la facoltà di rinuncia attraverso apposita comunicazione all'emittente entro l'orario stabilito nelle Istruzioni;

d) nel caso di covered warrant o certificates su titoli azionari negoziati nei mercati regolamentati organizzati e gestiti da Borsa Italiana, il numero complessivo di azioni sottostanti la singola emissione non può al momento della presentazione della domanda di ammissione superare il 2% del numero totale di azioni in circolazione del medesimo titolo. Borsa Italiana si riserva tuttavia la facoltà di prevedere una percentuale diversa in relazione alle caratteristiche del titolo azionario sottostante;

e) nel caso di covered warrant o certificates su attività sottostanti di cui all'articolo 2.2.22, comma 1, lettera a), e), f) e g), Borsa Italiana richiede che sia prevista a livello regolamentare l'effettuazione di rettifiche in occasione di eventi di natura straordinaria che riguardano l'attività sottostante. Le rettifiche devono essere informate a metodologie di generale accettazione e tendere a neutralizzare il più possibile gli effetti distorsivi dell'evento. L'emittente i covered warrant o i certificates dovrà inoltre impegnarsi a comunicare tali rettifiche a Borsa Italiana, ai fini della diffusione al mercato, con congruo anticipo rispetto alla data in cui le rettifiche diverranno efficaci;

f) nel caso di covered warrant o certificates che prevedono la liquidazione monetaria, la modalità di fissazione del prezzo di liquidazione deve essere tale da ridurre il rischio di andamenti anomali nei prezzi dell'attività sottostante e di conseguenza il prezzo di liquidazione deve essere, di norma, espressione di una quantità significativa di volumi scambiati dell'attività sottostante. Nel caso in cui l'attività sottostante sia costituita da azioni italiane negoziate nei mercati regolamentati organizzati e gestiti da Borsa Italiana, il prezzo di liquidazione è pari rispettivamente al prezzo di riferimento dello strumento finanziario sottostante il giorno precedente quello di scadenza nell'ipotesi di esercizio a scadenza e al prezzo di riferimento dello strumento finanziario sottostante il giorno di esercizio nell'ipotesi di esercizio anticipato. Nel caso in cui l'attività sottostante sia costituita da indici gestiti da Borsa Italiana o da società con le quali Borsa Italiana abbia stipulato appositi accordi, il prezzo di liquidazione è pari rispettivamente al valore dell'indice calcolato sui prezzi di apertura degli strumenti finanziari che lo compongono nel giorno di scadenza nell'ipotesi di esercizio a scadenza e al valore dell'indice calcolato sui prezzi di apertura degli strumenti finanziari che lo compongono il giorno successivo a quello di esercizio nell'ipotesi di esercizio anticipato.

2. In ogni caso Borsa Italiana si riserva il diritto di rifiutare l'ammissione a quotazione di covered warrant o certificates al fine di tutelare la stabili-

tà e il regolare funzionamento del mercato delle attività sottostanti ad essi connesse."

"**Art. 2.2.25. Liquidazione dei covered warrants e dei certificates in caso di esercizio**.

1. Qualora l'attività sottostante sia costituita dagli strumenti finanziari di cui all'articolo 2.2.22, comma 1, lettere a) e b) negoziati su mercati regolamentati organizzati e gestiti da Borsa Italiana, la modalità di liquidazione dei covered warrant o dei certificates a seguito di esercizio anticipato o a scadenza, può avvenire, coerentemente con quanto indicato nel prospetto di quotazione, mediante consegna fisica dell'attività sottostante o tramite liquidazione monetaria.

2. Per tutte le altre categorie di attività sottostanti è consentita esclusivamente la modalità di liquidazione monetaria.

3. L'emittente i covered warrant o i certificates stabilisce le modalità con cui il detentore del warrant comunica la volontà di effettuare l'esercizio anticipato o a scadenza nonché i tempi e le modalità con cui si effettua la liquidazione dell'attività sottostante a seguito dell'esercizio."

"**Art. 2.2.26. Impegni degli emittenti i covered warrant o i certificates(. . .)**"

1. L'emittente i covered warrant o i certificates si impegna a esporre in via continuativa su tutte le serie quotate proposte in acquisto e vendita a prezzi che non si discostino tra loro in misura superiore al differenziale massimo indicato nelle Istruzioni (obblighi di spread), per un quantitativo almeno pari al lotto minimo di negoziazione dei covered warrant o dei certificates e secondo la tempistica specificata nelle Istruzioni. Borsa Italiana, in relazione alle caratteristiche della singola emissione, si riserva di prevedere i suddetti obblighi di quotazione per un quantitativo più. L'emittente i covered warrant

o i certificates si impegna a esporre in via continuativa su tutte le serie quotate proposte in acquisto e vendita a prezzi che non si discostino tra loro in misura superiore al differenziale massimo indicato nelle Istruzioni (obblighi di spread), per un quantitativo almeno pari al lotto minimo di negoziazione dei covered warrant o dei certificates e secondo la tempistica specificata nelle Istruzioni. Borsa Italiana, in relazione alle caratteristiche della singola emissione, si riserva di prevedere i suddetti obblighi di quotazione per un quantitativo più elevato nell'Avviso di inizio delle negoziazioni.

2. Borsa Italiana indica nelle Istruzioni i casi in cui gli obblighi di spread di cui al comma 1 non si applicano, anche con riferimento a specifici comparti o segmenti di negoziazione, tenuto conto, fra l'altro, della tipologia di covered warrant o certificates e delle modalità di negoziazione dell'attività sottostante.

3. Borsa Italiana, almeno due volte l'anno, rivede i quantitativi di cui al comma 1; eventuali modifiche dei quantitativi sono comunicate all'emittente e al mercato mediante Avviso con congruo anticipo rispetto alla data in cui le stesse diventano efficaci.

4. Su richiesta dell'emittente, Borsa Italiana può sospendere gli obblighi di quotazione di cui al precedente comma 1, su una o più serie di una stessa emissione di covered warrant o certificates alle condizioni indicate nelle Istruzioni oppure consentire l'immissione delle quotazioni senza avvalersi della funzionalità di cui all'articolo 4.2.3, comma 7, qualora ricorrano motivi tecnici che non ne consentano l'utilizzo.

5. L'obbligo di cui al precedente comma 1 può essere soddisfatto anche da un soggetto terzo a ciò specificamente incaricato (specialista) dall'emittente i covered warrant o i certificates. In tal caso, l'eventuale cessazione del rapporto con lo specialista per qualsiasi causa deve essere comunicata per iscritto a

Borsa Italiana secondo le modalità indicate nelle Istruzioni. L'emittente è tenuto in ogni caso a garantire la continuità della funzione di specialista e a comunicare tempestivamente a Borsa Italiana il nuovo incarico eventualmente conferito, elevato nell'Avviso di inizio delle negoziazioni.

Bibliografia

[1] BARONE-ADESI, G. & WHALEY, R., (1987), *Efficient Analytic Approximation of American Option Values*, Journal of Finance.

[2] BASSO A., ELLERO A., PIANCA P. (2000), *The Jump-diffusion return model: maximum likelihood estimation and applications to the Italian market*, Rivista Rendiconti per gli studi economici.

[3] BORSA ITALIANA S.P.A., “Regolamento dei mercati organizzati e gestiti da Borsa Italiana S.p.A.”, Capo 5/7.

[4] BORRA S., DI CIACCIO A., (2008) “Statistica: metodologie per le scienze economiche e sociali”, McGraw Hill.

[5] COX J.C., ROSS S.A., RUBINSTEIN M., (1977) *Option Pricing: A Simplified Approach*, Journal of Financial Economics, vol. 3.

[6] CRACK FALCON T., (2004), “Basic black - scholes: Option pricing and trading”, Investment bank.

[7] DUPIRE B., (1994), “Pricing with a smile”, (7), Risk.

[8] HULL J.C., (2009), “Opzioni, futures e altri derivati”, (7) Pearson, Prentice Hall.

[9] KINGMAN J.F.C., (1993), “Poisson Processes”, Clarendon press.

[10] KOU, S.G., WANG, HUI, (2002), *Option pricing under a double exponential jump diffusion model.* Management Science.

[11] MARTIRE R., (2007), "Credit derivatives. Fondamenti teorici e modalità di pricing", UNI Service.

[12] MERTON. R.C., (1976), *Option pricing when undelying stock returns are discontinuous*, Journal of financial Economics.

[13] OLDANI C., (2010), "I derivati finanziari - Dalla Bibbia alla Enron", Franco Angeli.

[14] OKSENDAL B., SULEM A., (2005), "Applied stochastic control of jump diffusions", Springer.

[15] SHREVE E.S., (2008), "Stochastic calculus for finance II", Springer.

[16] Dispensa a cura di Paolo Pianca, *Opzioni su titoli con dividendi: proprietà e tecniche di valutazione*, Università Ca' Foscari di Venezia. Dipartimento di Matematica Applicata.

[17] Dispensa a cura di Paolo Pianca, (2000), *Sulla valutazione delle opzioni americane*, Università Ca' Foscari di Venezia. Dipartimento di Matematica Applicata.

[18] ROSS. S.M., (1983), "Stochastic processes", Wiley.

[19] RUBINSTEIN M., (2005), *Derivati : Futures, opzioni e strategie dinamiche*, Il Sole 24 Ore, XV.

[20] WILMOTT P., HOWISON S., DEWYNNE J., (1995), *The mathematics of financial derivatives : a student introduction*, Cambridge university press, XIII.

[21] YAN G., HANSON F.B., (2005), *American put option pricing for stochastic volatility, Jumps diffusion models*, National science foundation.