Università
Ca'Foscari
Venezia

Corso di Laurea Magistrale in
Economia e Finanza

Tesi di Laurea

Metodi di gestione e ottimizzazione di portafoglio tramite Risk Parity

Relatore
Ch. Prof. Marco CORAZZA

Correlatrice
Ch.ma Prof.ssa Silvia FAGGIAN

Laureando
Tommaso MIANI
Matricola 892627

Anno Accademico
2023 / 2024

Sommario

Il seguente elaborato si pone l'obiettivo di esaminare e valutare la strategia di asset allocation definita Risk Parity. Essa individua e assegna equamente il rischio alle diverse classi di attività, alternativamente all'approccio tradizionale di Markowitz che si concentra sulla stima dei rendimenti attesi e delle covarianze.

Esaminando prima la strategia di ottimizzazione media-varianza e in seguito l'approccio Risk Parity, si procederà ad un confronto tra le più comuni strategie di asset allocation per determinare i punti di forza e debolezza di ognuna di esse.

Si farà riferimento a diversi criteri valutativi, quali l'indice di Sharpe, il rendimento, la volatilità e il drawdown massimo. Modellata la strategia tramite R e studiate le misure di rischio più conosciute, se ne analizzeranno i pro, i contro, e il valore che esse assumono per i portafogli costruiti.

L'analisi dei risultati indicherà qual è la strategia che risulta più adatta all'investitore e come la strategia risk parity possa essere influenzata da fattori come la leva finanziaria, il ribilanciamento, le variabili macroeconomiche e i tassi di interesse.

Indice

Elenco delle figure

Introduzione

Ogni asset manager, sia che operi per individui che per istituzioni, deve essere in grado di allocare le risorse e compiere decisioni di investimento coerenti con gli obiettivi del cliente. Nonostante spesso si limiti ad ottenere un rendimento positivo, è opportuno capire che, seguendo il principio cardine della teoria finanziaria, ogni tipo di investimento comporta un rischio, e il rendimento è proporzionale al rischio che si vuole assumere.

La strategia e la costruzione del portafoglio di investimento sono forse le sfide più difficili e frequenti nel settore della gestione degli asset. Ogni giorno, milioni di investitori in tutto il mondo cercano di massimizzare il loro investimento coerentemente con i loro obiettivi finanziari più importanti: investire per il pensionamento, comprare una casa, pagare l'università o semplicemente ottenere rendimenti superiori a un determinato indice di mercato. L'obiettivo è quindi quello di costruire oggi dei portafogli che possano consentire il raggiungimento dei risultati finanziari di cui si ha bisogno in futuro. Harry Markowitz, economista, nel 1952 all'età di 24 anni con la pubblicazione dell'articolo "Portfolio Selection" [15], ha segnato una pietra miliare nella teoria del portafoglio introducendo l'approccio di allocazione del portafoglio basato sulla relazione media-varianza. Considerato il padre della Moderna Teoria del Portafoglio (MPT), Markowitz è stato il primo studioso a riconoscere che diversi livelli di rischio sono associati a diversi portafogli ottimali a seconda delle preferenze di rischio-rendimento degli investitori. Il suo approccio basato sulla media-varianza è stato rivoluzionario in quanto ha fornito agli studiosi e ai gestori degli asset un quadro quantitativo intuitivo da adottare. Precedentemente al lavoro di Markowitz, i gestori degli investimenti consideravano come portafoglio ottimale quello che massimizzasse il rendimento atteso. Dal momento che è enormemente difficile allocare in modo ottimale un portafoglio che si pone questi obiettivi, gli investitori dovrebbero riconsiderare la distribuzione delle loro risorse tra investimenti alternativi per costruire un portafoglio più diversificato. Inoltre Markowitz sosteneva che gli investitori, quando allocano il loro patrimonio, dovrebbero essere interessati solo a due elementi distinti ma interrelati: il rendimento atteso di un investimento e il rischio dello stesso. La relazione media-varianza consente di definire un trade-off per definire il portafoglio ottimale dell'investitore. Infatti, esiste una relazione diretta uno a uno tra la varianza e il rendimento di un investimento. Gli investitori avversi al rischio saranno disposti a rinunciare a un po' di rendimento in cambio di portafogli più sicuri, mentre le persone propense al rischio vorranno massimizzare il rendimento atteso a prescindere dalla varianza. Markowitz sosteneva che gli unici portafogli efficienti sono quelli che per ogni dato livello di volatilità, hanno il rendimento atteso più alto possibile. L'insieme di tutti questi portafogli costituisce la cosiddetta "frontiera efficiente": qua gli investitori individuano le loro scelte di investimento in base alle loro specifiche preferenze di rischio-rendimento. Nel corso del primo capitolo verrà richiamata la teoria introdotta da Markowitz e, nei successivi, si introdurrà una strategia di allocazione del portafoglio denominata Risk Parity. Il confronto con gli altri portafogli permetterà di avere un'idea precisa sul tipo di allocazione di portafoglio che si adatta meglio all'investitore.

Capitolo 1

Richiami alla teoria di portafoglio di Markowitz

1.1 Introduzione alla problematica

La Modern Portfolio Theory è l'approccio introdotto da Markowitz che ha ottenuto consenso a livello globale. Si basa sulla valutazione delle scelte razionali di portafoglio dei consumatori e sul principio del trade-off tra rischio, rendimento e diversificazione. Le ipotesi sottostanti al modello sono che:

- i costi di transazione o tasse sono assenti;
- i titoli sono perfettamente divisibili (mercati frictionless);
- gli investitori sono price-takers e il loro comportamento non influenza la distribuzione di probabilità dei rendimenti;
- le vendite allo scoperto sono ammesse (short sales) senza restrizioni;
- gli agenti hanno conoscenza della distribuzione di probabilità dei rendimenti r_i con $i = 1, ..., N$.

Realisticamente parlando sviluppare un modello che si basi sulle ipotesi appena descritte lo renderebbe di fatto inapplicabile in quanto, seppur sia facilmente interpretabile nella teoria, i problemi da affrontare sono matematicamente di difficile applicazione. Alcuni modelli euristici tentano di risolvere queste problematiche tramite tecniche di approssimazione.

La teoria sviluppata da Markowitz è una declinazione del modello di consumo classico. Quest'ultimo si basa sulla massimizzazione delle quantità di beni e servizi acquistabili $q_1, ..., q_N$ dati i loro prezzi $p_1, ..., p_N$. Può essere formalizzato come segue:

$$max\ q_1, ..., q_N \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} q_i p_i = M \\ q_i \geq 0\ i = 1...N \end{cases}$$

Assumere che lo sviluppo sia istantaneo e che il consumo rappresenti la totalità della ricchezza di un individuo, esclude il risparmio e, conseguentemente, non vi sono investimenti rendendo quindi il modello non realistico. L'estensione del modello statico del consumo prende nome come teoria dell'investimento.

L'idea di portafoglio ideata da Markowitz si sviluppa invece in due istanti temporali: il primo è quello in cui il portafoglio viene creato (T) e, conseguentemente, quello in cui il portafoglio viene liquidato (T+1). All'istante T, noti i prezzi sul mercato, il consumatore decide in quali attività investire considerando un prezzo futuro ignoto in T+1. Questa estensione fa sì che vi sia incertezza nell'investimento. In realtà, è più verosimile pensare che il portafoglio venga revisionato periodicamente: i modelli di revisione statica si propongono di affrontare esattamente questo aspetto.

Di seguito si farà riferimento alle seguenti notazioni: X_i sono le scelte di investimento presenti nel portafoglio con peso x_i e R_i sono i loro rendimenti, r_i e σ_i^2 sono rispettivamente la media e la varianza dei rendimenti e $\sigma_{i,j} = \rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j$ la covarianza.

1.2 Formalizzazione del concetto di rendimento e varianza

Il rendimento è calcolato come la variazione in percentuale del prezzo dell'asset, ossia:

$$R_{\%\Delta t} = \frac{P_t + D_{(t-\Delta t,t]} - P_{t-\Delta t}}{P_{t-\Delta t}} \tag{1.2}$$

In finanza, si utilizza maggiormente il rendimento logaritmico, il quale é un'approssimazione lineare del rendimento netto

$$R_{ln,\Delta t} = ln\Big(\frac{P_t + D_{(t-\Delta t,t]}}{P_{t-\Delta t}}\Big) \tag{1.3}$$

Il portafoglio finanziario può essere considerato un'attività "sintetica", partendo dall'universo di titoli, dalle caratteristiche desiderate e non presenti nel mercato. Formalmente, è un vettore $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_N]$. Data una certa ricchezza di partenza che si decide di investire, cioè il risparmio dopo il consumo corrente, con N differenti titoli disponibili è possibile costituire un portafoglio. La quantità di denaro investita nell'asset *n-esimo* può essere espressa come una parte del totale, in quanto la somma dei pesi è sempre 1 [1]:

$$\sum_{n=1}^{N} x_n X_n = 1 \tag{1.4}$$

I modelli cercano di individuare i pesi di ogni titolo con l'obiettivo di massimizzare l'utilità dall'investimento e minimizzare il rischio dato che i prezzi futuri sono incerti.

Il rendimento del portafoglio è una media ponderata dei tassi di rendimento dei vari titoli. Per ognuno dei titoli comprati, la redditività del titolo entra nel portafoglio in base alla percentuale in esso investita:

[1] Se le vendite allo scoperto sono permesse è possibile avere pesi x_i negativi

$$R_p = \sum_{i=1}^{N} x_i R_i \tag{1.5}$$

Si tratta di una somma pesata di variabili casuali quindi è essa stesso una variabile casuale di cui è possibile calcolare il momento primo e secondo.

Il consumatore decide, sulla base dei rendimenti, quanto e dove vuole investire. L'investitore considera l'utilità media dei rendimenti attesa perché non può considerare l'utilità di ogni rendimento. Il rendimento atteso del portafoglio è una media ponderata dei rendimenti attesi:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{N} x_i r_i \tag{1.6}$$

Dal punto di vista finanziario la varianza viene considerata come un'indicazione sulla rischiosità dell'investimento. La varianza non è una media ponderata delle varianze delle singole attività, ma è la somma delle varianze e delle covarianze.

$$Var(R_p) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} x_i x_j \sigma_{i,j} \tag{1.7}$$

con $\sigma_{i,j} = \rho_{i,j}\,\sigma_i \sigma_j$ e dove $\rho_{i,j} = [-1,1]$ è il coefficiente di correlazione di Pearson. La stessa formula può essere riscritta come segue:

$$Var(R_p) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} x_i x_j \rho_{i,j}\,\sigma_i \sigma_j \tag{1.8}$$

Normalmente, come indicatore di sintesi, si utilizza la radice della varianza, ovvero la deviazione standard (la volatilità). Poichè il quadrato delle deviazioni dalla media è sempre positivo, la deviazione standard è la misura della distanza media della singola osservazione dal valore medio.

La covarianza tra due variabili (x_i, x_j) misura la relazione di dipendenza tra i due titoli di un portafoglio. Se x tende ad essere positiva quando y è positiva la covarianza è positiva, se x tende ad essere negativa quando y è positiva la covarianza è negativa, se x non dimostra una particolare tendenza ad assumere valori positivi o negativi quando y è positiva la covarianza è zero. Per ogni titolo ci sono $N-1$ covarianze da calcolare. Questa unità di misura del rischio considera la dimensione dell'oggetto: per misurare la dipendenza sganciandosi dal fattore di dimensionalità si utilizza l'indice di correlazione lineare, o indice di Pearson.

$$Cov(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x_i})(x_j - \overline{x_j}) \tag{1.9}$$

Il coefficiente di correlazione tra due variabili (x_i, x_j) è il rapporto tra la covarianza e il prodotto delle deviazioni standard. Esso può assumere valori compresi tra -1, indicando perfetta correlazione negativa, e +1, indicando perfetta correlazione positiva.

$$Corr(x_i, x_j) = \rho_{i,j} = \frac{Cov(x_i, x_j)}{\sigma_i \sigma_j} \tag{1.10}$$

Il metodo di Markowitz può essere applicato sotto l'ipotesi di rendimenti normali. Generalmente però le distribuzioni sono asimmetriche con code più grosse di una normale (fat tails). L'ipotesi di normalità dei rendimenti garantisce che la probabilità di qualsiasi deviazione positiva sopra la media sia uguale a quella di una deviazione negativa della stessa entità, inoltre è una distribuzione "stabile": quando le attività con rendimenti normalmente distribuiti vengono mescolate per costruire un portafoglio, anche il rendimento del portafoglio è distribuito normalmente. Inoltre, si incorre ad una semplificazione in quando è necessario stimare solo due parametri (media e deviazione standard) per ottenere le probabilità degli scenari futuri. Infine, quando costruiamo portafogli di titoli, è opportuno tenere conto della dipendenza statistica dei rendimenti tra i titoli e quando i titoli sono distribuiti normalmente, la relazione statistica tra i rendimenti può essere riassunta con un unico coefficiente di correlazione.

1.3 L'utilità attesa dell'investitore

Quando c'è incertezza non è possibile massimizzare l'utilità dell'investimento, ma si cercherà di massimizzare il suo valor medio cioè l'utilità attesa. La funzione di utilità esprime le preferenze del consumatore per il rischio.

Le assunzioni alla base del criterio della massimizzazione dell'utilità attesa sono che ad ogni stato di natura è possibile assegnare una probabilità p_i ed esiste una funzione di utilità Von Neumann-Morgenstern pari a $U(X)$ e tale che:

$$E[U(X)] = V(r_X, \sigma_X^2) \tag{1.11}$$

$$\frac{\delta V(r_X, \sigma_X^2)}{\delta r_X} > 0 \tag{1.12}$$

$$\frac{\delta V(r_X, \sigma_X^2)}{\delta^2 r_X} < 0 \tag{1.13}$$

Gli investitori massimizzano il valore atteso della funzione di utilità Von Neumann-Morgenstern.

Inoltre, la funzione di utilità di riferimento in ambito di selezione del portafoglio è quella quadratica, la quale garantisce che l'utilità aumenta all'aumentare del rendimento atteso, fino ad un massimo oltre il quale gli investitori preferiscono meno a più. Si assume che la distribuzione di probabilità dell'utilità sia una $N(\mu, \sigma^2)$ in modo tale che questa dipenda solamente dal primo e dal secondo momento[2].

La funzione di utilità quadratica utilizzata da Markowitz nel suo modello è rappresentata dall'equazione seguente:

$$U(R_P) = R_P - \frac{a}{2} R_P^2 \tag{1.14}$$

[2]L'unica funzione di utilità il cui valore atteso è funzione di media e varianza è la quadratica; per tutte le altre compare o l'asimmetria (momento 3°) o la curtosi (momento 4°).

in cui il parametro a rappresenta l'avversione al rischio[3].

Graficamente è rappresentata dalle curve di indifferenza, sulle quali si trovano le combinazioni di rendimento atteso e di deviazione standard che mantengono l'utilità del consumatore invariata. Per un individuo avverso al rischio, la curva di indifferenza è crescente e convessa in quanto l'utilità dell'investitore aumenta all'aumentare del rendimento atteso ma, a parità di guadagno, sceglierà l'investimento con rischio più basso. Quindi, all'aumentare di σ, deve aumentare $E(R_p)$ affinché l'utilità rimanga invariata.

L'allocazione ottimale del capitale dipende dal rischio-rendimento offerto dal portafoglio rischioso e dalle preferenze dell'investitore nei confronti del rischio. Dato il rendimento atteso e la varianza del portafoglio, gli investitori scelgono l'allocazione degli asset tali per cui sia massimizzata la loro funzione di utilità.

Tra tutti i portafogli efficienti, l'investitore sceglierà quello che massimizza la propria funzione di utilità. Il punto di tangenza tra la funzione di utilità e la frontiera efficiente è il portafoglio da scegliere. Il portafoglio ottimo lo troveremo pertanto massimizzando la funzione di utilità.

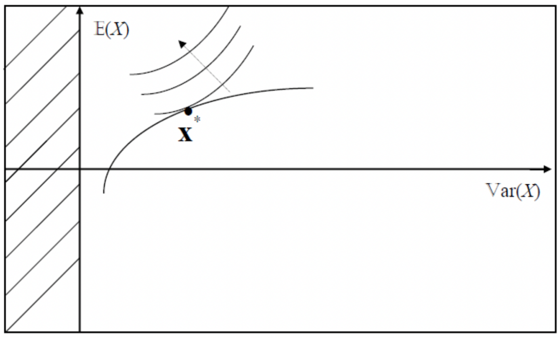

Figura 1.1: Punto di tangenza tra la curva dell'utilità attesa e la frontiera efficiente

In merito a quanto appena discusso, merita attenzione il seguente approfondimento. La semplificazione di Markowitz di realizzare una frontiera efficiente espressa

[3]Chi è indifferente al rischio ha a=0.

solo in termini di media e varianza attraverso una funzione di utilità quadratica, assume che le distribuzioni di probabilità congiunte dei rendimenti di tutti gli investitori nel mercato devono essere ellittiche [4], a prescindere dalla funzione di utilità di ogni singolo. Si tratta di un'assunzione molto forte nella realtà, perchè i mercati si comportano come vogliono e l'investitore agisce da price taker.

Ogni investitore può usare la funzione di utilità che più desidera [5], ma se vuole veramente minimizzare il rischio deve utilizzare la quadratica, pena un errore di valutazione del portafoglio.

1.4 Principio di scelta basato sul criterio media-varianza

Markowitz intuisce che sono due i principi che si possono sempre applicare a un investitore: preferisce i rendimenti alti rispetto a quelli bassi e preferisce che i rendimenti di cui sopra siano il meno possibile incerti ed instabili. Il suo modello risponde alle necessità di un investitore razionale, il quale per definizione non è propenso al rischio. In accordo con il modello media–varianza proposto dallo studioso, un investitore razionale sceglierà il titolo sul quale si aspetterà il massimo rendimento per un dato livello di rischio, o, in alternativa, sceglierà quello caratterizzato dalla minore incertezza sul rendimento per un dato target di rendimento. Nella sua formulazione classica, Markowitz, sceglie il valore atteso (e quindi la media) del tasso di rendimento come proxy del rendimento atteso e la varianza dello stesso come misura del rischio.

[4] Dire che una distribuzione è ellittica significa che "tagliandola a fette" e considerandone le curve di livello, queste sono ellittiche. Sono ellittiche ad esempio, la Normale o la t di Student con varianza finita.

[5] Risulta impensabile anche imporre a tutti gli investitori la medesima funzione di utiità di tipo quadratico.

Il principio media-varianza afferma che ad un rendimento maggiore corrisponde una volatilità maggiore. Dati due portafogli, $E(r_1) \geq E(r_2)$ corrisponde a $\sigma_1 \geq \sigma_2$. Il portafoglio 1 domina 2 se $E(r_1) \geq E(r_2)$ e $\sigma_1 \leq \sigma_2$ e almeno una disuguaglianza è stretta (per escludere l'indifferenza tra i due), ovvero quando uno presenta un rendimento inferiore ed una volatilità maggiore.

Un portafoglio si definisce efficiente se non è possibile ottenere un maggior rendimento se non ricorrendo a della varianza maggiore. Gli investitori razionali, che preferiscono avere di più piuttosto che meno e che sono avversi al rischio, sceglieranno, secondo questo ragionamento, tutti quei portafogli che stanno nella cosiddetta frontiera efficiente, la quale è definita come l'insieme di tutti i portafogli efficienti.

Il principio di scelta basato su media e varianza parte dal presupposto per cui ogni singolo investitore tenderà a massimizzare la propria funzione di utilità, che sarà caratterizzata da un particolare valore di avversione al rischio. Markowitz propone di fissare un rendimento atteso $r_p = \pi$ e di risolvere un sistema che minimizzi la funzione di rischio (la varianza) investendo tutte le risorse a disposizione per ottenere il rendimento desiderato π:

$$min\ \sigma^2 \tag{1.15}$$

$$s.t. \begin{cases} R_p = \pi \\ \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \end{cases}$$

Allo stesso modo, il problema può essere riscritto con le matrici

$$min\ x'Vx \tag{1.16}$$

$$s.t. \begin{cases} x'r = \pi \\ x'e = 1 \end{cases}$$

dove x è il vettore dei pesi del portafoglio, V è la matrice varianza covarianza e e è il vettore colonna degli 1.

1.5 Concetto di diversificazione e di portafoglio equi-pesato

I portafogli composti da pochi titoli possono essere soggetti ad alti livelli di rischio. La varianza all'interno di un portafoglio può essere ridotta aggiungendo a quest'ultimo un numero maggiore di assets: la diversificazione riduce sia la varianza ma anche il rendimento totale atteso.

Nello stimare i rendimenti attesi e le varianze dei rendimenti azionari dai dati passati, solitamente si assume che ogni osservazione abbia la stessa probabilità .Il portafoglio equipesato è un portafoglio naïve in cui ogni asset entra con peso pari a $x_i = \frac{1}{N}$ $i = 1...N$, per cui il rendimento, la varianza e la covarianza del portafoglio sono:

$$E(R_p) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{1.17}$$

$$Var(R_p) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\sigma_{i,j}}{N(N-1)} \tag{1.18}$$

$$Cov(x_i, x_j) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x_i})(x_j - \overline{x_j}) \tag{1.19}$$

Nella formula della varianza, $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\sigma_i^2 = \bar{\sigma}_i^2(N)$ rappresenta la media delle varianze dei rendimenti e $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\sigma_{i,j}}{N(N-1)} = \bar{\sigma}_{i,j}\,(N)$ rappresenta la media delle covarianze. Perciò la varianza del portafoglio può essere anche espressa come:

$$\sigma_P^2 = \frac{1}{N}\bar{\sigma}_i^2(N) + \frac{N-1}{N}\bar{\sigma}_{i,j}\,(N) \tag{1.20}$$

Quando la covarianza media tra i rendimenti dei titoli è zero la varianza del portafoglio può essere annullata. All'aumentare di n, $\bar{\sigma}_i^2(N)$ diminuisce.

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_P^2 = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{N}\bar{\sigma}_i^2(N) + \frac{N-1}{N}\bar{\sigma}_{i,j}(N) \right) = \bar{\sigma}_{i,j}(N) \tag{1.21}$$

Ogni titolo apporta rischio al portafoglio sotto forma di due elementi: varianza e covarianza. Queste due dipendono anche dalla numerosità dei titoli presenti nell'universo gestibile. Pertanto, quando i rendimenti dei titoli non sono correlati la diversificazione riduce il rischio di portafoglio.

Se $\rho = 0$ la varianza di portafoglio si avvicina a zero quando N aumenta, quindi è bene che la numerosità di assets sia elevata, così che la parte di rischio idiosincratica si annulli e rimanga solo la covarianza media di tutti i titoli, ovvero il rischio sistematico. Per $\rho > 0$ la varianza di portafoglio rimane positiva e per $\rho = 1$, la varianza di portafoglio è uguale a σ^2 indipendentemente da n, dimostrando che la diversificazione non è di alcun beneficio. Più in generale, man mano che n diventa sempre più grande la varianza si avvicina a $\rho\sigma^2$.

Più in generale è bene avere un numero elevato di attività in cui investire perché se tende ad infinito la parte di rischio specifico del portafoglio titoli sparisce e l'unico rischio di portafoglio rimane la covarianza media tra tutti i titoli cioè la media del rendimento sistematico che non è eliminabile. Inoltre, il rendimento degli asset non è influenzato dalla correlazione tra i rendimenti: a parità di altre condizioni si preferirà sempre aggiungere al portafoglio asset con correlazione bassa o, meglio ancora, negativa. Secondariamente, poichè il rendimento atteso del portafoglio è la media ponderata dei suoi rendimenti attesi, mentre la sua deviazione standard è inferiore alla media ponderata delle deviazioni standard componenti, i portafogli di assets non perfettamente correlati offrono sempre un vantaggio di diversificazione.

1.6 La frontiera efficiente

La frontiera efficiente è la frontiera di tutti i portafogli efficienti in senso media-varianza. Per costruirla sono necessarie delle ipotesi fortemente irrealistiche: non esistono costi associati all'acquisto ed alla vendita delle attività finanziarie; non esiste tassazione sui guadagni derivanti dall'acquisto e dalla vendita delle attività finanziarie; ogni attività rischiosa è perfettamente divisibile; sono ammesse le vendite allo scoperto di ogni attività rischiosa; gli agenti economici conoscono i momenti primi ed i momenti secondi dei rendimenti di ogni attività finanziaria; le azioni degli agenti economici di acquisto e di vendita delle attività finanziarie non influenzano le distribuzioni di probabilità dei rendimenti delle attività finanziarie.

Il "Global minimum variance portfolio" è il portafoglio che ha la minor varianza tra tutti quelli disponibili all'interno della frontiera. Tutti i portafogli che si trovano sulla frontiera sopra a questo, forniscono le migliori combinazioni rischio-rendimento e quindi sono candidati per il portafoglio ottimale. La parte della frontiera che si trova al di sopra del portafoglio globale a varianza minima è chiamata frontiera efficiente e l'investitore razionale deve tenere in considerazione solo i portafogli della parte superiore, mentre tutti quelli nella parte inferiore sono dominati secondo il principio media varianza.

Per descrivere analiticamente i portafogli della frontiera efficiente risulta necessario risolvere un problema di ottimizzazione vincolata: si tratta di una minimizzazione del rischio del portafoglio considerando il rendimento desiderato ed i vincoli di bilancio e di non negatività, cioè che sia investito tutto il capitale disponibile e che non vengano aperte operazioni corte.

Formalmente, è possibile indicare:

- $\mathbf{r}$ il vettore $\mathbf{r} = (r_1, ..., r_N)$ che contiene tutti i rendimenti rendimenti attesi formato da rendimenti diversi tra loro. Nella teoria di portafoglio generalizzata per n asset, si chiede che tutti i rendimenti dei vari titoli R_i $i = 1...N$ siano variabili casuali non degeneri, cioè con un rischio $\sigma_i^2 > 0.$;

- $\mathbf{V}$ la matrice quadrata di varianza-covarianza $N \cdot N$ nel caso di soli titoli rischiosi o $(N+1)\cdot(N+1)$ quando è presente un asset risk free, non singolare e definita positiva [6];
- $\mathbf{e}$ il vettore (colonna) degli 1;
- $\mathbf{x}$ il vettore (colonna) dei pesi del portafoglio contenente i pesi di ciascun titolo nel portafoglio;
- π il rendimento desiderato dall'investitore.

La derivata seconda parziale della varianza del titolo rispetto ad ogni asset deve essere positiva e ciò assicura che la funzione sia convessa:

$$\frac{\delta^2 x'Vx}{\delta x_i^2} = 2\sigma_i^2 \tag{1.22}$$

Date le condizioni imposte, i problemi di ottimizzazione ammetteranno un'unica soluzione.

Nel caso in cui tutti gli asset di un portafoglio siano rischiosi, il problema di ottimizzazione vincolata risulta essere il seguente:

$$\begin{array}{c} min \\ x_{x_1,\dots x_N} \end{array} \mathbf{x'Vx} \tag{1.23}$$

$$s.t. \begin{cases} \mathbf{x'r} = \pi \\ \mathbf{x'e} = 1 \end{cases}$$

[6] Che V sia positiva definita significa che ha la forma di una parabola; mentre che sia non singolare significa che non si può invertire la matrice quadrata perché il suo determinante è zero. Si chiede qui che si possa invertire con determinante diverso da 0. Il significato finanziario: il determinante di una matrice quadrata è zero sono quando c'è dipendenza lineare tra le righe o le colonne, quindi i titoli che possono essere replicati non sono considerati, quindi chiedere che la matrice debba essere non singolare significa chiedere che all'interno dell'insieme degli assi non ci devono essere titoli con una struttura di rischio replicabile con un'altra struttura di rischio

La soluzione è data da x, il vettore delle quote d'investimento in ogni asset pari a:

$$x^* = \frac{(\gamma V^{-1}r - \beta V^{-1}e)\pi + (\alpha V^{-1}e - \beta V^{-1}r)}{\alpha\gamma - \beta^2} \tag{1.24}$$

con

$$\alpha = \mathbf{r'V^{-1}r};$$

$$\beta = \mathbf{r'V^{-1}e} = \mathbf{e'V^{-1}r}$$

$$\gamma = \mathbf{e'V^{-1}e}$$

$$E(R_p) = \pi \tag{1.25}$$

$$Var(R_p) = \frac{\gamma\pi^2 - 2\beta\pi + \alpha}{\alpha\gamma - \beta^2} \tag{1.26}$$

$$\sigma(R_p) = \left(\frac{\gamma\pi^2 - 2\beta\pi + \alpha}{\alpha\gamma - \beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.27}$$

La frontiera efficiente nel caso in cui vi siano più di due titoli in portafoglio risulta essere una parabola nel piano media-varianza, ed un'iperbole nel piano media-deviazione standard. Le coordinate del vertice nel piano media-varianza sono $\left(\sigma^2_{P,v} = \frac{1}{\gamma}; r_{P,v} = \frac{\beta}{\gamma}\right)$ e quelle nel piano media-deviazione standard sono $\left(\sigma^2_{P,v} = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}; r_{P,v} = \frac{\beta}{\gamma}\right)$.

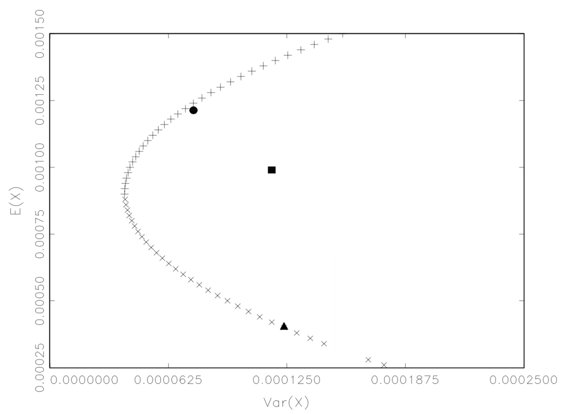

Figura 1.2: Frontiera efficiente nel piano media-varianza

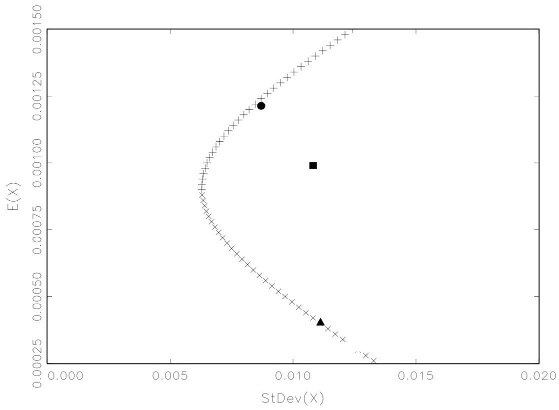

Figura 1.3: Frontiera nel piano media-deviazione standard

Sino ad ora è stata ipotizzata l'assenza di vincoli relativi alle vendite allo scoperto. Il problema di ottimizzazione, considerando anche il vincolo di non negatività, è esattamente lo stesso: si chiede di minimizzare la varianza, considerando i vincoli di bilancio, di rendimento e di non negatività.

$$\underset{x_{x_1,\dots x_{N+1}}}{min} \quad \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} \tag{1.28}$$

$$s.t. \begin{cases} \mathbf{x}'\mathbf{r} = \pi \\ \mathbf{x}'\mathbf{e} = 1 \\ x_i \geq 0, \ i = 1, ..., N+1 \end{cases}$$

Mentre i primi due vincoli sono singoli, il terzo è necessario aggiungerlo per ogni titolo, quindi oltre ai primi due sono presenti anche altri $N + 1$. Inoltre, in questo vincolo c'è una disuguaglianza il che rende il problema più difficile da gestire.

1.7 Critiche alla Modern Portfolio Theory

Le assunzioni di fondo al modello di Markowitz, che non sono veritiere nella realtà riguardano vari aspetti. Primo di questi, l'assunzione per cui gli investitori siano razionali e cerchino di massimizzare il rendimento mentre minimizzano il rischio.

Risulta infondato lo stesso criterio media varianza, per cui gli investitori sono disposti ad accettare maggiori quantità di rischio solo se queste sono compensate da un incremento del rendimento. Ancora, l'MPT assume che gli investitori dispongano di perfetta informazione nel mercato, ma in realtà esistono molte asimmetrie informative. Un'altra assunzione è quella per cui gli investitori possono prendere a prestito un numero illimitato di risorse al tasso risk free e che non esistano i costi di transazione, e chiaramente non è così. L'assunzione di base è che mercati siano efficienti, cosa che è ben lontana dalla realtà dei fatti.

Quando si parla di di critiche alla moderna teoria di portafoglio, quindi, ci si riferisce a delle evidenze empiriche sistematiche che si rilevano dalle serie temporali dei rendimenti. Queste evidenze empiriche ricorrenti in tutti i mercati ed in tutti i periodi vengono chiamate "fatti stilizzati".

Questi fatti stilizzati sono principalmente tre: la distribuzione di frequenza empirica dei rendimenti è asimmetrica, è leptocurtica cioè che la stragrande maggioranza delle distribuzioni dei rendimenti ha un picco verso l'altro nell'istogramma e non segue la distribuzione normale, e sono presenti le fat tails, ovvero il fenomeno per cui la probabilità degli eventi di coda è maggiore di quella che descriverebbe una normale.

I fatti stilizzati danno evidenza al fatto che si sta applicando il modello sbagliato: di fatto quando si applica il modello di Markowitz si assume che la distribuzione vera sia data da una normale, quando in realtà la distribuzione empirica è diversa.

I problemi appena elencati ci permettono quindi di identificare il modello ideato sui concetti di ottimizzazione media-varianza come un modello che si basa principalmente sull'utilizzo di input passati ed erroneamente normalizzati. Si suppone che tali input siano in grado di fornire stime su rendimenti, rischi e correlazioni future e questo porta inevitabilmente a compiere degli errori nel processo di costruzione del portafoglio. Sarebbe opportuno stimare un parametro di errore come differenza tra il valore reale assunto dal parametro e la sua stima e, di conseguenza, costruire dei portafogli che considerino dei probabili cambiamenti nel corso del tempo. Si otterrebbe così che ogni portafoglio sulla frontiera efficiente non venisse più rappresentato da un singolo punto, bensì da un'area. Il problema alla base quindi non è tanto la correttezza o meno del modello, bensì come vengono considerati gli input senza considerare una possibile inesattezza degli stessi.

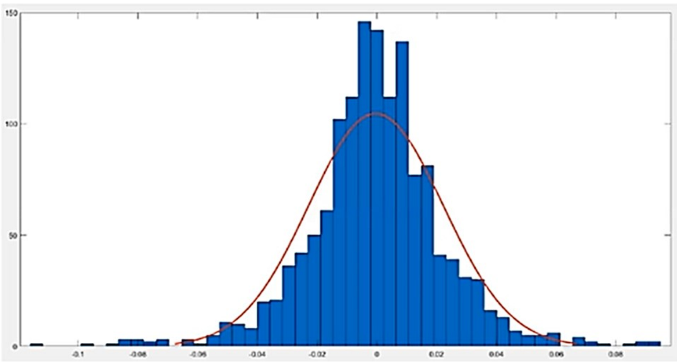

Figura 1.4: Distribuzione normale rappresentata dalla linea rossa ed evidenze empiriche rappresentate dall'istogramma

Capitolo 2

Risk Parity

2.1 Introduzione

Come trattato nella sezione 1.7, l'implementazione di un modello di ottimizzazione di portafoglio basato sula Modern Portfolio Theory presenta delle criticità principalmente dovute all'analisi errata degli input. Basti pensare come, nel solo 2022, un classico portafoglio 60% azionario e 40% obbligazionario abbia subito ingenti perdite dovute principalmente all'inversione della correlazione tra i due asset che compongono tale portafoglio. Come riporta il report di The Clifton Group [20], il 90% del rischio del tradizionale portafoglio 60/40 è concentrato sulla componente azionaria. Questa analisi deriva dal fatto che, storicamente, se consideriamo come misura di rischio la deviazione standard, le azioni hanno registrato una volatilità maggiore di oltre tre volte quella delle obbligazioni.

Se i rendimenti attesi per le azioni e i titoli a reddito fisso fossero adeguati ai rispettivi livelli di rischio, allora il rendimento in eccesso atteso dalle azioni sarebbe uguale al rendimento in eccesso atteso dai titoli a reddito fisso come descritto dalla teoria del CAPM e della Security Market Line. Questo però, nella pratica, risulta poco coerente in quanto la relazione rischio-rendimento non è lineare, ma decresce all'aumentare del rischio come visibile dalla linea blu della figura 2.1. In altre parole, se una classe di attività fosse in grado di fornire rendimenti aggiustati al rischio maggiori, si creerebbe un eccesso di domanda per tale classe di attività. In risposta a questa domanda crescente, le forze del libero mercato entrerebbero in gioco per ristabilire l'equilibrio, rimuovendo eventuali vantaggi.

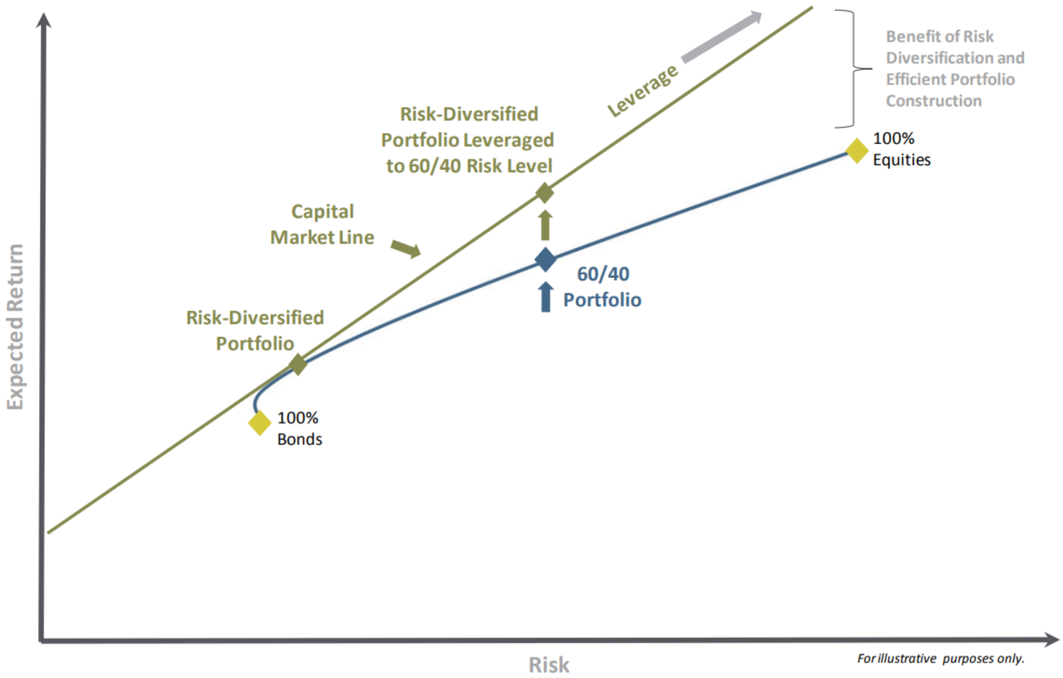

Figura 2.1: Security Market Line e frontiera efficiente

Se si accetta l'idea che il contributo al rischio di ogni asset class sia equivalente, allora un portafoglio diversificato tale per cui ognuna delle asset class contribuisce in egual modo al rischio, permetterebbe di creare un portafoglio i cui rendimenti corretti al rischio sono sicuramente superiori rispetto a un tradizionale portafoglio 60/40. Questo punto è rappresentato come il portafoglio "Risk-Diversified" nella figura 2.1. Tuttavia, includerebbe assegnazioni significative ad attività a basso rischio e a basso rendimento atteso, come i titoli obbligazionari. Di conseguenza, potrebbero non essere soddisfatte le aspettative di rendimento della maggior parte degli investitori a lungo termine. Questi investitori compensano la carenza di rendimento atteso spostandosi verso portafogli composti da una quota maggiore di attività più rischiose rinunciando ai benefici della diversificazione.

Cresce quindi l'esigenza di costruire un modello che non si basi più sulla sola relazione media-varianza degli asset, bensì che parta dalla gestione del rischio delle diverse asset class che compongono il portafoglio. Nascono quindi le prime strategie di allocazione delle risorse che si basano primariamente sullo studio del rischio e vengono appunto definite Risk-Based.

Tra queste, la strategia Risk Parity, come viene spiegato nel report "Cardinality-constrained risk parity portfolios" [8] di Hassan T. Anis e Roy H. Kwon, esplora l'idea di utilizzare un approccio che consiste nell'allocazione degli strumenti attribuendo a ciascuno di essi la stessa contribuzione al rischio complessivo del portafoglio.

L'obiettivo diventa quindi quello di studiare una strategia allocativa che restituisca un rendimento aggiustato per il rischio maggiore invertendo quindi quelli che sono gli step classici della teoria di portafoglio moderna.

2.2 Contribuzione al rischio

L'ottimizzazione di portafoglio tramite risk parity si pone come obiettivo quello di identificare i pesi dei portafogli affinchè ogni asset class contribuisca in modo equo al rischio complessivo di portafoglio. Per approfondire il concetto di contribuzione al rischio, è opportuno richiamare il teorema della funzione omogenea di Eulero come descritta nell'articolo *"General sparse risk parity portfolio design via successive convex optimization"* [12]. Definito con N il numero di asset, $r \in R^N$ il rendimento, $\mu \in R^N$ il vettore media e w il capitale totale da allocare, è possibile definire la funzione di rischio $f(w)$ tale per cui la contribuzione al rischio di ogni asset class del portafoglio sia quantificabile. Il teorema quindi suppone che, data la funzione $f : R^N \setminus \{0\} \rightarrow R$ continuamente differenziabile, allora la funzione f è positiva e omogenea di grado uno se e solo se soddisfa la seguente condizione:

$$f(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{N} w_i \frac{\partial f}{\partial w_i} \tag{2.1}$$

con w_i vettore di pesi e $\frac{\partial f}{\partial w_i}$ derivata parziale di f rispetto a w_i.

Per comprendere meglio l'equazione (2.1), consideriamo la definizione di funzione omogenea di grado uno. Una funzione f è detta omogenea di grado uno se per ogni $t > 0$ e ogni w nel suo dominio si verifica:

$$f(tw) = t \cdot f(w)$$

In altre parole, il prodotto tra tutti gli elementi di w per uno stesso fattore t equivale al prodotto tra il valore della funzione f per lo stesso fattore t.

Quindi, quando si applica questo teorema al contesto della risk contribution e dei portafogli risk parity, la funzione di misura del rischio $f(w)$ è omogenea di grado uno se il contributo al rischio di ciascun asset $(w_i \frac{\partial f}{\partial w_i})$ rappresenta una parte proporzionale del rischio totale $f(w)$.

Alcune delle misure di rischio soddisfano il teorema di Eulero (2.1) direttamente, per esempio il VaR e il CVaR, mentre altre indirettamente, come la varianza. Infatti, se viene considerata la radice quadrata della varianza (quindi la deviazione standard), si soddisfa la condizione di positiva omogeneità introdotta prima e approfondita nel capitolo 3.5.

Come descritto nell'articolo *"Risk parity versus other μ-free strategies: a comparison in a triple view"* [3], è possibile trasporre i concetti appena analizzati individuando due concetti fondamentali di contribuzione al rischio:

- contribuzione marginale: indica l'effetto marginale al rischio di portafoglio di una variazione infinitesimale del peso di un asset. Considerando un portafoglio di N asset con peso w_i, volatilità σ_i e covarianza σ_{ij}, con i e j asset class, il rischio marginale $MRisk_i$ si può esprime come:

$$MRisk_i = \lim_{\Delta w_i \to 0} \frac{\rho(w_1, ..., w_i + \Delta w_i, ..., w_N) - \rho(w_1, ..., w_i, ..., w_N)}{\Delta w_i} \tag{2.2}$$

con Δw_i incremento di w_i e ρ misura di rischio generica. Se si considera tale incremento di w_i infinitesimale, si può scrivere che:

$$\rho(w_1, ..., w_i + \Delta w_i, ..., w_N) = \rho(w_1, ..., w_i, ..., w_N) + \Delta w_i \frac{\partial \rho}{\partial w_i}$$

Considerando la misura di rischio come deviazione standard, è possibile esprimere il concetto di contributo marginale come segue. Considerato un portafoglio tradizionale composto da solo due asset A e B i cui pesi sono w_A e w_B, e $\rho_{A,B}$ indice di correlazione, la volatilità del portafoglio risulta essere:

$$\sigma_P = \sqrt{(\sigma_A w_A)^2 + (\sigma_B w_B)^2 + 2\sigma_A \sigma_B w_A w_B \rho_{A,B}} \tag{2.3}$$

La contribuzione marginale M_Risk_A è la derivata prima parziale:

$$M\_Risk_{\sigma A} = \frac{\partial \sigma_P}{\partial w_A} = \frac{2\sigma_A^2 w_A + 2\sigma_A \sigma_B w_B \rho_{A,B}}{2\sqrt{(\sigma_A w_A)^2 + (\sigma_B w_B)^2 + 2\sigma_A \sigma_B w_A w_B \rho_{A,B}}}$$

$$= \frac{\sigma_A^2 w_A + \sigma_A \sigma_B w_B \rho_{A,B}}{\sqrt{(\sigma_A w_A)^2 + (\sigma_B w_B)^2 + 2\sigma_A \sigma_B w_A w_B \rho_{A,B}}}$$

$$= \frac{\sigma_A^2 w_A + cov_{A,B} w_B}{\sqrt{(\sigma_A w_A)^2 + (\sigma_B w_B)^2 + 2\sigma_A \sigma_B w_A w_B \rho_{A,B}}} \tag{2.4}$$

Analogamente, la contribuzione marginale M_Risk_B è:

$$M\_Risk_{\sigma B} = \frac{\partial \sigma_P}{\partial w_B} = \frac{2\sigma_B^2 w_B + 2\sigma_A \sigma_B w_B \rho_{A,B}}{2\sqrt{(\sigma_A w_A)^2 + (\sigma_B w_B)^2 + 2\sigma_A \sigma_B w_A w_B \rho_{A,B}}}$$

$$= \frac{\sigma_B^2 w_B + \sigma_A \sigma_B w_B \rho_{A,B}}{\sqrt{(\sigma_A w_A)^2 + (\sigma_B w_B)^2 + 2\sigma_A \sigma_B w_A w_B \rho_{A,B}}}$$

$$= \frac{\sigma_B^2 w_B + cov_{A,B} w_A}{\sqrt{(\sigma_A w_A)^2 + (\sigma_B w_B)^2 + 2\sigma_A \sigma_B w_A w_B \rho_{A,B}}} \tag{2.5}$$

Generalizzando, nel caso di un portafoglio composto da i strumenti, il contributo marginale $MRisk$ si può scrivere come:

$$MRisk_i = \frac{\partial \sigma_P}{\partial w_i} = \frac{w_i {\sigma_i}^2 + \sum_{j \neq i}^{N} w_j \sigma_{ij}}{\sigma_P} \tag{2.6}$$

- contribuzione totale: definita anche come rischio componente, è una misura della quantità di rischio complessiva del portafoglio attribuita alla presenza di un'attività specifica w_i e corrisponde al prodotto tra il peso dell'attività e il suo rischio marginale:

  Si consideri nuovamente un portafoglio composto da due asset A e B. La *Risk Contribution RC* del titolo A è:

$$RC_{\sigma A} = w_A \cdot \frac{\partial \sigma_P}{\partial w_A} = \frac{\sigma_A^2 w_A^2 + cov_{A,B} w_A w_B}{\sqrt{(\sigma_A w_A)^2 + (\sigma_B w_B)^2 + 2\sigma_A \sigma_B w_A w_B \rho_{A,B}}} \tag{2.7}$$

La *Risk Contribution RC* del titolo B è:

$$RC_{\sigma B} = w_B \cdot \frac{\partial \sigma_P}{\partial w_B} = \frac{\sigma_B^2 w_B^2 + cov_{A,B} w_A w_B}{\sqrt{(\sigma_A w_A)^2 + (\sigma_B w_B)^2 + 2\sigma_A \sigma_B w_A w_B \rho_{A,B}}} \tag{2.8}$$

Generalizzando, nel caso di un portafoglio composto da i strumenti, il contributo totale del titolo $i - esimo\ RC_{\sigma A}$ si può scrivere come:

$$Risk\_contribution_i = w_i \cdot \frac{\partial \sigma_P}{\partial w_i} = w_i \cdot \frac{w_i {\sigma_i}^2 + \sum_{j \neq i}^{N} w_j \sigma_{ij}}{\sigma_P} \tag{2.9}$$

La rischiosità del portafoglio σ_P è la somma delle contribuzioni al rischio dei singoli asset e può essere definita anche come $TotalRiskContribution$:

$$\sigma_P = TRC_P = \sum_{i=1}^{N} RC_{\sigma i} = \sum_{i=1}^{N} w_i \frac{\partial \sigma_i}{\partial w_i} \tag{2.10}$$

Si può definire il contributo percentuale $RC_i(\%)$ al rischio di portafoglio come:

$$RC_i(\%) = \frac{RC_i}{\sigma_P} = \frac{w_i \cdot \frac{\partial \sigma_P}{\partial w_i}}{\sigma_P} \tag{2.11}$$

Si consideri per esempio un portafoglio di investimento composto da tre strumenti A, B e C con pesi, rendimenti e volatilità come rappresentato in tabella

2.1 [1]. Da una prima analisi, si potrebbe pensare che il rischio del portafoglio sia maggiormente concentrato nel titolo A il cui peso risulta essere pari al 60%.

Asset class	Rendimento medio ann.	Deviazione standard ann.	Pesi
A	1,98%	3,55%	60%
B	10,63%	17,08%	20%
C	6,33%	13,68%	20%
Portafoglio	4,58%	6,27%	100%

Tabella 2.1: Composizione del portafoglio

Applicando i principi descritti prima, è possibile calcolare il contributo marginale e il contributo al rischio del portafoglio. I risultati sono descritti in tabella 2.2. È possibile notare come, nonostante il titolo A abbia un peso pari al 60%, contribuisce solo al 26,66% del rischio di portafoglio mentre i titoli B e C hanno un contributo rispettivamente del 44,65% e 29,69% nonostante entrambi pesino solo il 20%.

È inoltre importante osservare che il contributo totale pari a 6,27% rispetta l'equazione (2.10) e corrisponde alla volatilità complessiva del portafoglio.

Asset class	Contributo marginale	Contributo totale	Contributo totale %
A	0,02787	1,672%	26,66%
B	0,13690	2,738%	43,65%
C	0,09313	1,863%	29,69%
Portafoglio		6,27%	100%

Tabella 2.2: Contribuzione al rischio delle diverse asset class

[1] L'analisi si è svolta considerando degli indici di correlazione tra i vari asset: $\rho_{A,B} = 0{,}5$, $\rho_{A,C} = 0{,}4$, $\rho_{B,C} = 0{,}2$

2.3 Il portafoglio ERC

Nel perseguire una strategia di ottimizzazione di portafoglio tramite l'approccio del Risk Parity, è opportuno formalizzare un modello che consenta la determinazione dei pesi dei diversi asset. È necessario introdurre il concetto di portafoglio ERC (Equal Risk Contribution), cioè quel portafoglio che prevede un contributo al rischio uguale per tutte le asset class.

Partendo dal presupposto che molti degli investitori non possono assumere posizioni corte sui mercati finanziari, è necessario considerare due vincoli principali. Considerato w_i come peso dell'$i - esimo$ strumento, le due condizioni sono:

$$\begin{aligned} &0 \leq w_i \leq 1 \\ &\sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Sulla base delle premesse appena descritte e come descritto nel report *"On the properties of equally-weighted risk contributions portfolios"* di *Maillard, Roncalli, Teiletche* (2.3), il problema si può scrivere matematicamente come segue:

$$w_i^* = \Big\{ w_i \in [0{,}1], \sum x_i = 1; w_i \cdot \frac{\partial \sigma_P}{\partial w_i} = w_j \cdot \frac{\partial \sigma_P}{\partial w_j} \ \forall i, j \Big\} \tag{2.13}$$

La condizione cardine alla base della strategia *ERC* è quindi che la *Risk Contribution* definita in equazione (2.9) sia uguale per tutti gli N asset in portafoglio. L'individuazione dei pesi ottimi si traduce quindi in un problema di ottimizzazione vincolata come quelli descritti nel capitolo 1, e si può scrivere come segue:

$$min \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \Big(w_i \cdot \frac{\partial \sigma_P}{\partial w_i} - w_j \cdot \frac{\partial \sigma_P}{\partial w_j} \Big)^2 \tag{2.14}$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \\ 0 \leq w_i \leq 1 \end{cases}$$

Il portafoglio ERC sarà quel portafoglio che renderà nulla l'equazione (2.14).

Riprendendo l'esempio del portafoglio composto dai titoli A, B, C con le caratteristiche di rendimento, deviazione standard e correlazione descritte in tabella 2.1, il portafoglio ERC è quel portafoglio i cui pesi dei singoli asset minimizzano l'equazione (2.14). La soluzione è riportata nelle tabelle 2.3 e 2.4.

Asset class	Rendimento medio ann.	Deviazione standard ann.	Pesi
A	1,98%	3,55%	65,65%
B	10,63%	17,08%	14,96%
C	6,33%	13,68%	19,39%
Portafoglio	4,12%	5,71%	100%

Tabella 2.3: Composizione del portafoglio

Asset class	Contributo marginale	Contributo totale	Contributo totale %
A	0,02899	1,903%	33,33%
B	0,12718	1,903%	33,33%
C	0,09813	1,903%	33,33%
Portafoglio		5,71%	100%

Tabella 2.4: Contribuzione al rischio delle diverse asset class

Il modello appena costruito, come visibile in tabella 2.4 presenta uguale contribuzione al rischio per ogni asset class (pari al 33,33%). Il titolo A, essendo quello meno rischioso, nell'esempio precedente contribuiva solamente al 26,66% del rischio del portafoglio. Nel modello ERC, come da aspettative, dovrà pesare il 65,65% per avere un contributo al rischio uguale a quello delle altre asset class. Anche gli altri due titoli hanno subito delle modifiche.

Il problema di minimizzazione vincolata si semplifica notevolmente nel caso in cui tutte le asset class presentino a coppie uguale correlazione. In questo caso il portafoglio ERC avrà titoli con un peso proporzionale all'inverso della deviazione standard come descritto di seguito.

$$w_i = \frac{1/\sigma_i}{\sum_{i=1}^{N} 1/\sigma_i} \tag{2.15}$$

2.4 Leva Finanziaria e Ribilanciamento

2.4.1 Il ruolo della leva finanziaria

Un ruolo fondamentale nel contesto di ottimizzazione di portafoglio tramite Risk Parity riguarda l'applicazione della leva finanziaria.

Come analizzato nel capitolo 2.3, spesso il portafoglio ERC presenta un'alta concentrazione nei titoli che registrano meno volatilità in quanto tali asset, generalmente, hanno un contributo marginale al rischio inferiore rispetto agli altri strumenti finanziari. Per esempio, facendo nuovamente riferimento all'esempio in tabella 2.3, affinchè l'uguaglianza (2.13) sia verificata, il titolo A deve avere un peso pari al 65,65%, mentre i titoli B e C rispettivamente del 14,96% e 19,39%. Questo comporta che, spesso, ci sia un'alta concentrazione su pochi strumenti che compongono il portafoglio.

L'applicazione delle leva finanziaria diventa quindi determinante in quanto, mantenendo il contributo al rischio dei vari asset costante, è possibile aumentare in maniera lineare il rischio e il rendimento del portafoglio. La figura 2.1 evidenzia come il portafoglio ERC riesca a traslare mantenendosi in prossimità della Security Market Line grazie all'uso della leva finanziaria.

A conferma di quanto appena descritto, si considerino nuovamente i tre strumenti descritti nell'esempio precedente in tabella 2.3. Se si avesse la possibilità di operare tramite la leva finanziaria, si potrebbero ottenere i risultati di seguito riportati nelle tabelle 2.5 e 2.6. È opportuno notare che all'aumentare della leva finanziaria il rapporto rendimento-rischio è lineare e i contributi al rischio dei singoli strumenti sono uguali e costanti.

Asset class	Rendimento medio ann.	Deviazione standard ann.	Pesi
A	1,98%	3,55%	98,47%
B	10,63%	17,08%	22,44%
C	6,33%	13,68%	29,09%
Portafoglio	6,18%	8,56%	150%

Tabella 2.5: Composizione del portafoglio in leva 1:1,5

Asset class	Rendimento medio ann.	Deviazione standard ann.	Pesi
A	1,98%	3,55%	131,29%
B	10,63%	17,08%	29,93%
C	6,33%	13,68%	38,78%
Portafoglio	8,24%	11,42%	200%

Tabella 2.6: Composizione del portafoglio in leva 1:2

Le ipotesi appena considerate sono valide a livello teorico e nel caso in cui si assuma che l'investitore possa operare a margine senza costi. I vantaggi di operare tramite questa strategia, infatti, decrescono all'aumentare del costo del debito e tale beneficio è positivo fintanto che il rendimento del portafoglio risulta maggiore del costo del debito stesso. Ovviamente operare a leva comporta dei rischi e la strategia appena riportata può apportare contributi positivi solamente nel caso in cui si applichi ad un portafoglio ben costruito e diversificato.

2.4.2 L'importanza del ribilanciamento

Il ribilanciamento di portafoglio risulta particolarmente rilevante nel contesto della strategia Risk Parity: è un processo cruciale per mantenere l'asset allocation desiderata e gestire efficacemente il rischio nel tempo. Come già evidenziato, i pesi delle diverse asset class vengono determinati con l'obiettivo che esse contribuiscano in modo equivalente al rischio complessivo del portafoglio. Tuttavia, questi pesi possono variare nel tempo a causa dei cambiamenti nei rendimenti delle asset class e dei loro profili di rischio.

Ribilanciare il portafoglio coinvolge quindi la vendita e l'acquisto di titoli per riportare i pesi alle percentuali desiderate ed è fondamentale per mantenere l'integrità dell'allocazione degli asset. Questo processo è guidato dalla necessità di adattarsi alle dinamiche di mercato che possono causare variazioni nei rendimenti e nei profili di rischio delle diverse asset class nel portafoglio.

Il concetto cardine applicato alla strategia risk parity è quello del ritorno alla media dei rendimenti degli asset. Nel contesto della gestione del portafoglio, il concetto di mean reversion può essere applicato sia alle singole asset class, come descritto nel testo *"Mean Reversion in Stock Prices"* di *J. Poterba e L. Summers* [11], che all'intero portafoglio, influenzando le decisioni di allocazione degli investimenti e il processo di rebalancing.

La mean reversion gioca quindi un ruolo cruciale: quando le asset class nel portafoglio hanno rendimenti divergenti nel breve periodo, il ribilanciamento mira a riportare i pesi alla loro allocazione target. La strategia di "buy low, sell high" nel rebalancing è in linea con la teoria della mean reversion perchè si cerca di capitalizzare sugli eccessi di rendimento temporanei.

L'utilizzo di questa strategia nella gestione del portafoglio offre una prospettiva a lungo termine e aiuta gli investitori a prendere decisioni informate basate sulla tendenza degli asset a tornare verso i loro valori medi storici. L'implementazione di strategie di mean reversion contribuiscono a ottimizzare l'allocazione degli investimenti e a migliorare la resilienza del portafoglio nel tempo come descritto nel testo *"A Non-Random Walk Down Wall Street"* di *Andrew W. Lo e A. Craig MacKinlay* [1].

2.4.3 Il diversification return

Osservati quindi i principali obiettivi della leva finanziaria e del ribilanciamento di portafoglio, è necessario cercare di quantificare i vantaggi che potrebbero apportare al portafoglio.

Edward Qian, nel documento intitolato *"Diversification Return and Leveraged Portfolios"* [16], ha sviluppato la formula matematica 2.16 specificamente per analizzare la diversification return di un portafoglio che fa uso di leverage in un contesto di risk parity. La formula riflette l'interazione complessa tra il leverage, il rendimento del portafoglio e la varianza del rendimento.

$$r_d = Lr_d^s + \frac{1}{2}(L - L^2)\sigma_S^2 \tag{2.16}$$

con:

- r_d: Diversification Return. Rappresenta il rendimento aggiuntivo
- L: Coefficiente di leva finanziaria. Indica il grado di leverage applicato al portafoglio
- r_d^s: Rendimento del portafoglio con i pesi aggiustati al valore di L. Rappresenta il rendimento del portafoglio dopo aver applicato il leverage
- σ_S^2: Varianza del rendimento del portafoglio

La prima parte della formula rappresenta il contributo positivo al diversification return derivante dall'applicazione del leverage, mentre la seconda indica il contributo negativo causato dal leverage stesso e dall'amplificazione del rischio.

Edward Qian [16], inoltre, spiega che sussiste una relazione tra i vantaggi derivanti dall'uso del leverage e l'indice di correlazione degli asset presenti nel portafoglio. La riduzione di tale valore si traduce in maggiori benefici nell'impiego del leverage e, pertanto, diventa cruciale la costruzione di un portafoglio che non solo si basi sulla teoria del risk parity, ma che abilmente associ strumenti finanziari con bassa o addirittura negativa correlazione. Il grafico riportato in figura 2.2 visualizza la relazione tra il livello di leva del portafoglio e il diversification return considerando diversi valori dell'indice di correlazione.

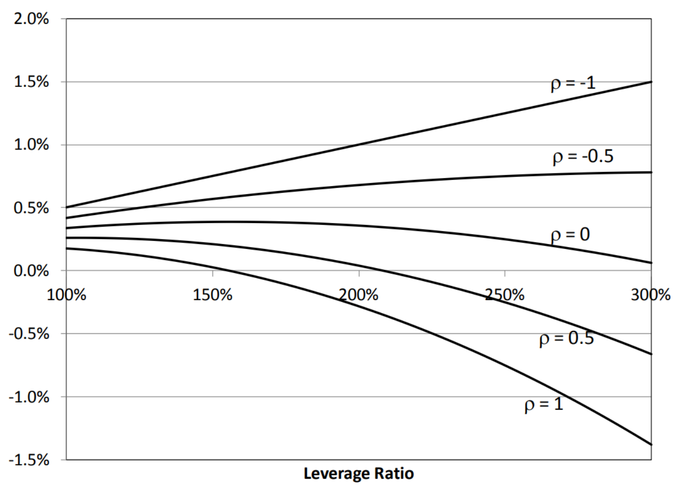

Figura 2.2: Benefici dell'applicazione della leva finanziaria in relazione all'indice di correlazione del portafoglio

Queste conclusioni sono intrinsecamente legate al concetto di ribilanciamento e ai costi associati a tale pratica. I benefici potenziali derivanti dall'applicazione di queste ottimizzazioni, quindi, sarebbero significativi soltanto nell'ambito delle ipotesi precedentemente delineate.

2.5 Determinazione del portafoglio

Prima di determinare i pesi ottimi di un portafoglio di investimento che adotta la strategia risk parity, è essenziale individuare le asset class che soddisfano le condizioni analizzate nel capitolo precedente: maggiore è la diversificazione delle asset class e minore la loro correlazione, maggiori saranno i benefici derivanti dall'applicazione di questa strategia.

È quindi fondamentale comprendere primariamente dal punto di vista qualitativo il comportamento dei principali strumenti finanziari in specifici contesti macroeconomici. Un'analisi dettagliata in tal senso è stata condotta da *Ray Dalio*, fondatore di *Bridgewater Associates*, uno dei più grandi hedge fund al mondo. Nel suo testo "*The All Weather Story*" [5], Dalio scompone i principali cambiamenti di mercato in fattori chiave esaminando il comportamento delle diverse asset class.

A tale analisi, che verrà approfondita più avanti, si associano anche gli studi condotti da *E. Qian* che, come descritto nel testo *Risk Parity Fundamentals* [17], ricerca i principali driver di mercato individuando tre macro-categoria di premio al rischio: equity risk premium, interest rate risk premium, inflation risk premium.

L'Equity Risk Premium rappresenta il rendimento atteso aggiuntivo che gli investitori si attendono per il solo fatto di detenere un portafoglio di asset azionari rispetto a un investimento privo di rischio, come ad esempio i titoli di stato considerati risk-free. In altre parole, è la compensazione che gli investitori chiedono per assumere il rischio associato agli investimenti in azioni, poiché tali investimenti sono suscettibili a fluttuazioni di prezzo e volatilità maggiori rispetto a quelli privi di rischio.

L'Interest Rate Risk Premium, o premio per il rischio di tasso di interesse, rappresenta la compensazione aggiuntiva che gli investitori richiedono per detenere investimenti sensibili alle variazioni dei tassi di interesse. In altre parole, è il rendimento extra che gli investitori cercano per compensare il rischio associato alle fluttuazioni dei tassi di interesse. Questo premio si manifesta quando gli investitori richiedono un rendimento superiore su strumenti finanziari, per esempio le obbligazioni, che sono influenzati dai movimenti dei tassi di interesse. Poiché i tassi di interesse possono variare nel tempo, l'Interest Rate Risk Premium riflette il compenso aggiuntivo che gli investitori richiedono per accettare il rischio di variazioni nei rendimenti dei loro investimenti legati ai tassi di interesse.

L'Inflation Risk Premium, o premio per il rischio di inflazione, è la compensazione aggiuntiva che gli investitori richiedono per coprire il rischio di perdita di potere d'acquisto derivante da variazioni dell'indice dei prezzi al consumo o dall'andamento generale dell'inflazione. In altre parole, rappresenta il rendimento supplementare richiesto dagli investitori per proteggersi dalla potenziale erosione del valore reale del loro capitale a causa dell'aumento dei livelli di inflazione. Quando si detengono investimenti finanziari, come obbligazioni o altre forme di reddito fisso, l'inflazione può ridurre il potere d'acquisto futuro degli interessi e del capitale restituito. Di conseguenza, gli investitori richiedono un premio per il rischio di inflazione per preservare il valore reale del loro investimento nel tempo. Questo premio riflette la percezione degli investitori riguardo al possibile impatto dell'inflazione sui rendimenti futuri e la loro volontà di compensare tale rischio mediante un rendimento superiore.

È essenziale notare che i rendimenti delle singole asset class dipendono dall'esposizione ai fattori di rischio appena descritti. Alcuni strumenti finanziari "ibridi" presentano implicitamente un'esposizione a più fattori di rischio, per esempio i "corporate bond" sono esposti sia al rischio di variazione dei tassi di interesse che a quello specifico azionario.

Ray Dalio, come spiegato nel testo "*The All Weather Story*" [5], individua due principali driver di mercato che riassumono le osservazioni appena descritte: le aspettative sulla crescita economica e quelle relative al tasso di inflazione. Individua quindi i quattro scenari macroeconomici rappresentati in figura 2.3:

- Inflazione superiore alle aspettative - *inflation rising* -

- Inflazione inferiore alle aspettative - *inflation falling* -
- Crescita superiore alle aspettative - *growth rising* -
- Decrescita superiore alle aspettative - *growth falling* -

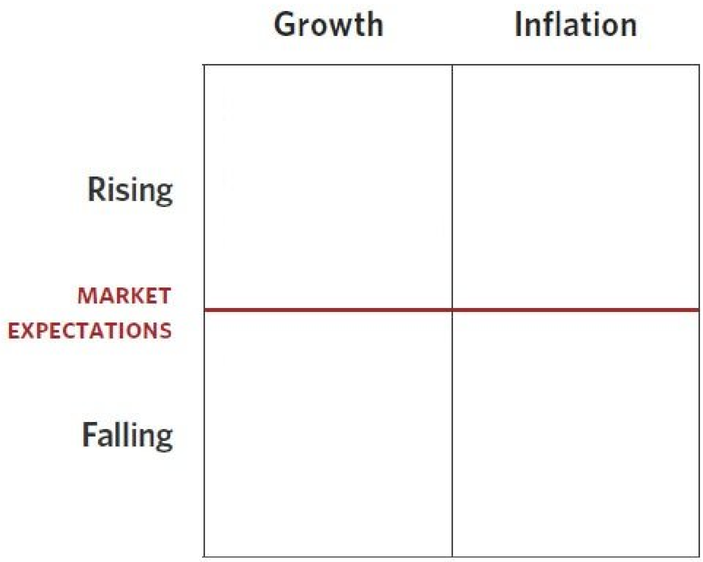

Figura 2.3: I quattro scenari economici [5]

Applicare il modello risk parity e allocare in egual misura il rischio di portafoglio negli scenari apppena descritti consentirebbe di avere un'asset allocation robusta e immune a shock inattesi.

La determinazione delle variabili macroeconomiche da interpretare come driver risulta quindi di fondamentale importanza. L'equazione input-output Keynesiana fornisce il quadro teorico per comprendere la dipendenza del PIL dagli investimenti, dai consumi, dalla bilancia dei pagamenti e dalla spesa pubblica, ma l'interrogativo principale è comprendere se alcune di queste variabili possano essere considerate ridondanti e, di conseguenza, comprese all'interno di una variabile più generale. La letteratura economica suggerisce una semplificazione dell'analisi, concentrandosi su due variabili macroeconomiche fondamentali: la produzione, rappresentata dal

Gross Domestic Droduct (GDP), e il tasso di inflazione. Tale approccio mira a facilitare l'analisi delle dinamiche di mercato in relazione a queste variabili chiave.

Diventa quindi opportuno individuare come i diversi tipi di asset rispondano alle variazioni inattese dei due driver di mercato appena citati.

In un contesto di aumento del GDP superiore alle attese, gli investitori sposteranno i capitali verso asset che possano beneficiare della crescita economica:

- Azioni di settori ciclici: le aziende in questi settori possono aumentano i loro margini di profitto (tecnologia, industria, beni di consumo discrezionali)
- Azioni small-mid cap: azioni a piccola e media capitalizzazione performeranno bene in contesti di crescita economica
- Commodities: aumenta la domanda di materie prime come metalli industriali, energetiche e da costruzione
- Bond High Yield: le imprese hanno maggiori probabilità di generare flussi di cassa robusti, riducendo il rischio di default
- Valute di economie in crescita: valute dei paesi in via di sviluppo o in espansione economica

In un contesto di variazione del GDP inferiore alle aspettative, contrariamente, gli investitori si orienteranno verso asset class che tendono a mostrare resistenza in periodi di crescita economica più debole:

- Bond High Quality: Titoli di stato con rating alto e bond corporate con alto rating tendono a essere meno sensibili alle fluttuazioni economiche
- Azioni di settori difensivi: azioni relative a beni di consumo di base (alimentari, servizi, prodotti per la cura personale, ecc.)
- Bond Inflation Linked e metalli preziosi: potrebbero offrire una protezione contro il rischio futuro di aumenti dei prezzi dovuti a politiche espansive

In merito a shock inattesi superiori alle aspettative del tasso di inflazione, gli investitori cercheranno asset che storicamente hanno dimostrato una maggiore resilienza o performance positiva in periodi di inflazione elevata. Alcuni degli asset che potrebbero performare meglio in queste circostanze sono:

- Beni tangibili: beni fisici come metalli preziosi (come l'oro e l'argento) o beni reali come immobili
- Azioni di settori difensivi: azioni relative a beni di consumo di base (alimentari, prodotti per la cura personale, ecc.)
- Bond Inflation Linked: obbligazioni indicizzate all'inflazione che offrono protezione diretta contro l'aumento dei prezzi (i rendimenti sono legati all'indice dei prezzi al consumo)
- Valute forti o obbligazioni monetarie a breve termine: valute di paesi forti fungono da riserva di valore

In un contesto di variazione dell'inflazione inferiore alle aspettative, gli investitori tendono a spostarsi verso:

- Bond: titoli di stato e obbligazioni corporate a tasso fisso a media-lunga scadenza
- Azioni di settori ciclici (tecnologia, industria, beni di consumo discrezionali)

La figura 2.4, proposta dalla *Bridgewater Associates*, riassume schematicamente quanto appena descritto rappresentando gli asset che traggono maggiore vantaggio in relazione alle variabili macroeconomiche di riferimento.

Partendo quindi dall'analisi più generale condotta da Qian e analizzando più in dettaglio il comportamento dei singoli strumenti ai diversi scenari, è possibile individuare quali siano gli asset che devono essere considerati per sviluppare un

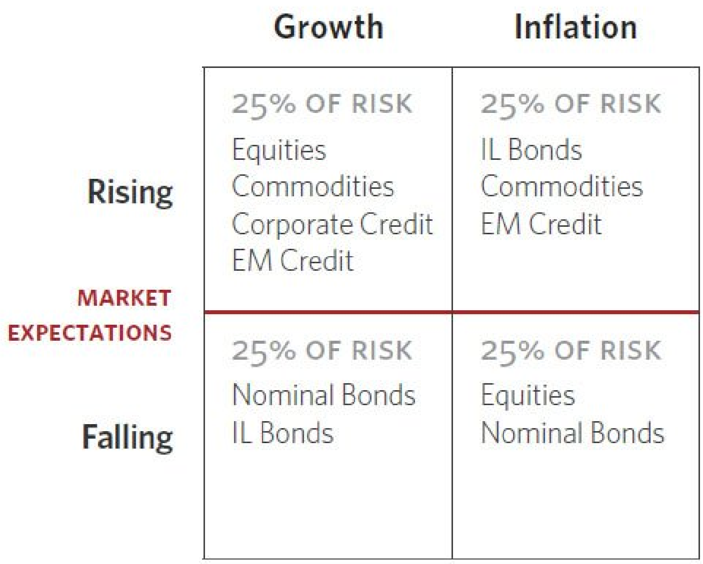

Figura 2.4: Allocazione degli asset tramite il modello del risk parity [5]

portafoglio di tipo risk parity. Riassumendo, *«è come detenere quattro singoli portafogli che abbiano lo stesso rischio, ed ognuno di questi abbia performance positive in un determinato contesto»* [5].

Sulla base delle premesse appena descritte si individuano i seguenti asset cardine:

- Azioni a grande capitalizzazione: resilienti in almeno due contesti macroeconomici
- Azioni a piccola-media capitalizzazione: contribuiscono in contesti di crescita superiore alle attese
- Bond nominali a media-lunga scadenza: resilienti in scenari di crescita e inflazione inferiori alle attese
- Commodities/oro: efficaci in almeno due contesti macro-economici
- Bond monetari a breve termine e Inflation Linked Bond: fondamentali in scenari ad alta inflazione

Associando ad ognuno degli scenari prima descritti il 25% del rischio complessivo, e tenendo a mente le tre categorie di premio al rischio prima elencate, è possibile individuare qualitativamente i pesi dei singoli asset come descritti in tabella 2.7.

	GDP ↑	GDP ↓	Infl. ↑	Infl. ↓	Rischio ponderato
Rischio	25%	25%	25%	25%	100%
Azioni grande cap.	33,33%	0%	0%	33,33%	16,67%
Azioni piccola cap.	33,33%	0%	0%	33,33%	16,67%
Bond nominali	0%	100%	0%	33,33%	33,33%
Bond monetari	0%	0%	33,33%	0%	8,33%
IL Bond	0%	0%	33,33%	0%	8,33%
Oro	33,33%	0%	33,33%	0%	16,7%
Totale	100%	100%	100%	100%	100%

Tabella 2.7: Composizione dei portafogli in base al contesto macroeconomico e rischi ponderati teorici degli strumenti che compongono il portafoglio complessivo

I pesi ponderati sono stati individuati come sommatoria dei prodotti tra i singoli pesi dell'asset nel contesto economico considerato e il rischio del singolo portafoglio (25%).

È opportuno precisare che il portafoglio appena costruito rappresenta un portafoglio che si fonda su presupposti teorici e che quindi, in un contesto reale, potrebbe subire delle modifiche.

Analizzati quindi i diversi strumenti e la composizione del portafoglio dal punto di vista principalmente qualitativo, è opportuno procedere a svolgere un'analisi quantitativa osservandone il comportamento passato come descritto nel capitolo 3.

2.6 Critiche al Risk Parity

Il modello Risk Parity, nonostante presenti i vantaggi prima descritti, assume anche alcune criticità che ne limitano l'efficacia. Alcune delle principali criticità sono le seguenti:

- Stima delle volatilità e delle correlazioni: la strategia si basa sull'idea che la volatilità storica e le correlazioni tra le asset class siano rappresentative del futuro. Tuttavia, le stime di volatilità e correlazione possono essere soggette a errori di stima, volatilità estreme (shock di mercato) o cambiamenti strutturali. Questi errori possono portare a una distribuzione del rischio meno precisa. Inoltre le correlazioni tra asset class non sono stabili nel tempo e possono cambiare drasticamente in periodi di stress di mercato. Durante le crisi finanziarie, ad esempio, le correlazioni tendono ad aumentare, riducendo i benefici della diversificazione su cui si basa la strategia Risk Parity.

- Sovraesposizione alle asset class meno volatili: gli asset meno volatili spesso vengono sovrappesati per equilibrare il rischio. Questo può portare a una concentrazione eccessiva in asset con bassi rendimenti attesi, come i titoli di stato a breve termine, riducendo il rendimento complessivo del portafoglio.

- Presenza di un titolo sottoperformante: il modello analizzato, costruito tramite un approccio macroeconomico, prevede che, generalmente, almeno un'asset class subisca delle sottoperformance rispetto al resto del portafoglio. Questo può essere causato da fattori macroeconomici specifici che influenzano negativamente determinati settori.

- Cambiamento della volatilità: la strategia assume implicitamente che i regimi di volatilità rimangano stabili nel tempo. Tuttavia, i mercati finanziari attraversano spesso cambiamenti, con periodi di alta e bassa volatilità. Un modello che non viene adattato per tenere conto di questi cambiamenti, può risultare inefficace.

La strategia Risk Parity ad oggi risulta essere un'ottima metodologia di allocazione del portafoglio dovuta in particolare dalla sua capacità di promuovere la diversificazione e ridurre la dipendenza dai rendimenti attesi. Per ovviare ai limiti appena descritti, le analisi che verranno condotte prevederanno l'utilizzo di una finestra rolling: le stime saranno aggiornate e questo consentirà di costruire portafogli più robusti e adattabili alle condizioni di mercato variabili.

Capitolo 3

Analisi del modello e confronto con altre strategie

Al fine di esaminare approfonditamente il portafoglio Risk Parity, è necessario condurre un'indagine anche di tipo quantitativo.

Nel seguente capitolo, quindi, si procederà a svolgere un'analisi empirica della strategia introdotta nelle sezioni precedenti, procedendo a confrontarla con altri modelli maggiormente conosciuti quali il Global Minimum Variance, 60%/40% (Azioni e Obbligazioni) e 100% Azioni.

3.1 Il portafoglio Risk Parity

Come anticipato nel precedente capitolo, è opportuno condurre un'analisi più approfondita per avere una visione dettagliata delle caratteristiche e dei rischi associati a ciascuno strumento incluso nel portafoglio.

3.1.1 Analisi e scelta degli strumenti

A tale scopo, di seguito si riassumono i principali strumenti finanziari considerati in tabella 2.7, unitamente al relativo contributo al rischio percentuale $RC_i(\%)$ (eq. 2.11):

- Azioni a grande capitalizzazione (16,67%)
- Azioni a piccola/media capitalizzazione (16,67%)
- Bond nominali a media/lunga scadenza (33,33%)
- Bond monetari a breve scadenza (8,33%)
- Bond legati all'inflazione (8,33%)
- Oro (16,67%)

Per condurre una trattazione completa e comprendere come il portafoglio si è comportato in un contesto reale, è necessario fare riferimento a indici di mercato o, in alternativa, a ETF. Gli ETF (Exchange-Traded Fund), sono strumenti finanziari progettati per replicare l'andamento di un determinato indice o di un paniere di asset in modo preciso ed affidabile. Nel caso in questione, si farà riferimento ai seguenti indici di mercato e ETF:

- Indice S&P500 USD (Azioni a grande capitalizzazione)
- Indice Russel2000 USD (Azioni a piccola/media capitalizzazione)
- Amundi Euro Government Bond 10-15Y UCITS ETF Acc EUR (Bond nominali a media/lunga scadenza)
- iShares $ Treasury Bond 1-3yr UCITS ETF USD Acc B USD (Bond monetari a breve scadenza)

- Lyxor UCITS EuroMTS Inflation Linked Investment Grade DR EUR (Bond legati all'inflazione)

- XAU/USD - Gold Spot US Dollar (Oro)

Relativamente alle quotazioni degli indici/ETF considerati, i dati saranno acquisiti dalla nota piattaforma *Investing.com* [10].

Inoltre, trattandosi di un modello costruito per investitori europei, è cruciale elaborare i dati relativi al rendimento di ciascuno strumento finanziario in Euro, facendo quindi riferimento al tasso di cambio EUR/USD. Viene escluso da tale modifica il bond monetario a breve termine la cui funzione è anche quella di esporsi al Dollaro.

Per valutare le performance degli strumenti nel contesto dell'analisi storica, è stato adottato un orizzonte temporale di oltre 12 anni, compreso tra il 25 settembre 2011 e il 31 dicembre 2023. Durante questo periodo, sono stati calcolati i rendimenti logaritmici settimanali come metrica di valutazione. I rendimenti degli strumenti espressi in euro sono stati determinati sommando al rendimento nativo settimanale di ciascuno strumento la variazione logaritmica del tasso di cambio euro/dollaro.

Tuttavia, va tenuto presente che i dati individuati potrebbero non essere esaustivi per un'analisi completa in quanto la strategia risk parity prevede la costruzione di un portafoglio che sia resiliente in contesti economici diversi, e questo richiede l'osservazione del suo comportamento attraverso cicli economici differenti. Le informazioni disponibili sono limitate e, sebbene un periodo di analisi di oltre 10 anni possa offrire una visione preliminare, un'analisi approfondita richiederebbe dati su un arco temporale più ampio.

L'analisi, inoltre, si è condotta considerando una finestra mobile di 100 settimane al fine di dare maggiore peso alle relazioni tra i diversi strumenti escludendo dinamiche remote.

3.1.2 Costruzione del modello

Individuati i rendimenti logaritmici settimanali degli strumenti, si calcolano le deviazioni standard e le matrici di correlazione considerando una finestra mobile di 100 settimane. Come anticipato, per avere un'analisi dal 25 settembre 2011 al 31 dicembre 2023, è necessario considerare i dati dal 25 ottobre 2009, cioè 100 settimane prima. Si procede calcolando le matrici di covarianza e moltiplicando ognuna di esse per il vettore dei pesi individuando così il rischio marginale degli asset per ogni osservazione. Il vettore risultante riflette la combinazione lineare delle covarianze tra gli asset, ponderata per i loro pesi. Si calcola quindi la rischiosità totale del portafoglio come prodotto tra il vettore dei pesi, la sua trasposta e la matrice di covarianza. Il marginal risk è il rapporto tra il rischio marginale di ogni strumento pesato e il rischio totale di portafoglio. Il prodotto tra il marginal risk appena determinato e il peso dello strumento evidenzia la risk contribution dell'asset.

In notazione matriciale, si può riscrivere come:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial \sigma}{\partial w_i} &= \sum_{i=1}^{n} w_i \left(\frac{\mathbf{\Sigma w}}{\sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{\Sigma w}}} \right)_i \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{\Sigma w}}} \sum_{i=1}^{n} w_i (\mathbf{\Sigma w})_i \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{\Sigma w}}} \mathbf{w}^T \mathbf{\Sigma w} \\ &= \sigma(\mathbf{w})\end{aligned} \tag{3.1}$$

con $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrice di covarianza, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ vettore dei pesi tale per cui $\mathbf{w}^T 1 = 1$ e $\sigma(\mathbf{w}) = \sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{\Sigma w}}$.

Determinato quindi il Marginal Risk dei singoli strumenti, è necessario costruire una funzione obiettivo espressa come quadrato della differenza tra il rischio marginale dell'i-esimo strumento e il relativo rischio teorico x_i definito in tabella 2.7. L'espressione di seguito riportata consente di individuare i pesi ideali di ogni strumento:

$$min \sum_{i=1}^{N} \left(w_i \cdot \frac{\partial \sigma_P}{\partial w_i} - x_i \right)^2 \tag{3.2}$$

con x_i contribuzione teorica dell'i-esimo strumento. I risultati ottenuti sono riportati nella figura 3.1. Si evidenzia l'evoluzione dei pesi (espressa in percentuale) dei singoli strumenti dall'inizio del periodo considerato. È singolare la variazione relativa ai bond monetari a breve termine che, in un contesto caratterizzato da alta volatilità come quello dal 2020 al 2022, hanno garantito una stabilità maggiore al portafoglio.

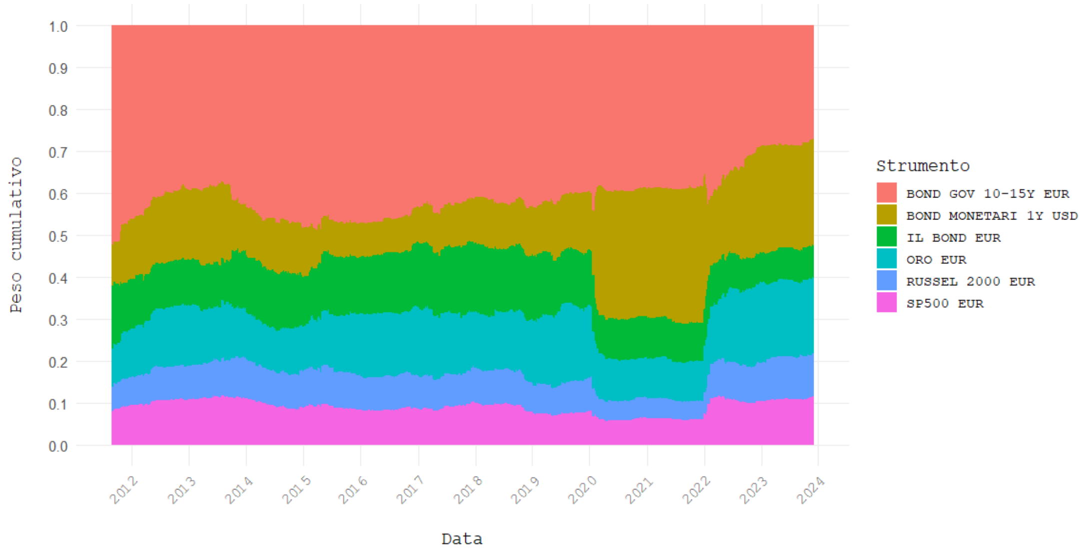

Figura 3.1: Confronto pesi del portafoglio Risk Parity

La figura 3.2 evidenzia la scomposizione della deviazione standard del portafoglio negli strumenti che compongono il portafoglio. La somma delle Risk Contribution dei singoli strumenti determina la rischiosità complessiva del portafoglio. È opportuno evidenziare come, secondo i principi del portafoglio Risk Parity, considerato un istante temporale t, la Risk Contribution degli strumenti è mantenuta costante secondo quanto descritto in tabella 2.7.

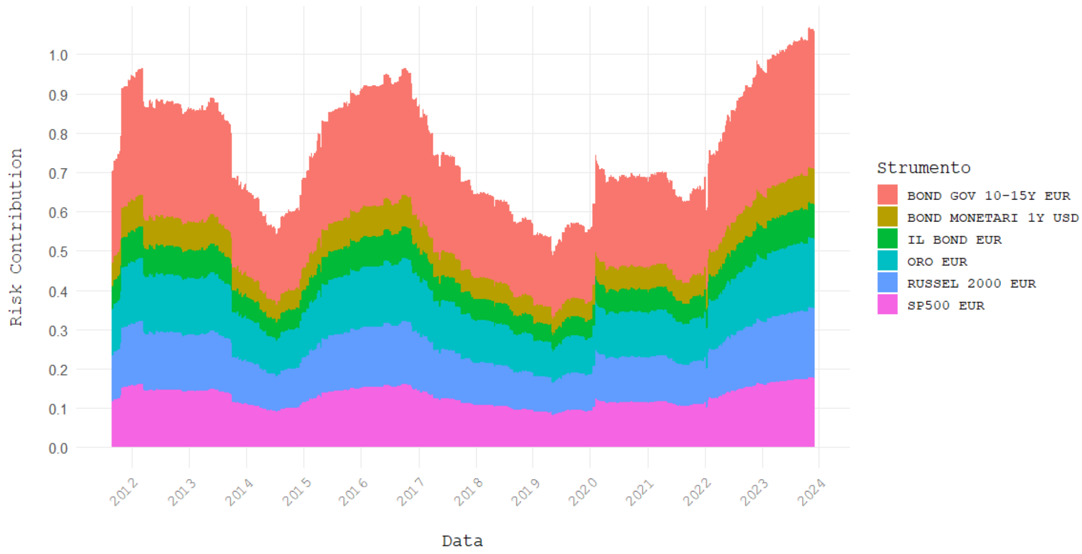

Figura 3.2: Scomposizione della Deviazione Standard del portafoglio Risk Parity

Un'analisi fondamentale per comprendere le caratteristiche del portafoglio in oggetto viene rappresentata anche dallo studio della correlazione tra gli strumenti. Essa permette di descrivere la relazione che sussiste tra variabili consentendo quindi di valutare come gli asset si muovano rispetto agli altri all'interno del portafoglio. L'analisi condotta in figura 3.3 analizza la correlazione di ogni strumento con il portafoglio stesso. L'obiettivo è quindi quello di individuare quali siano gli asset che abbiano aumentato l'efficienza del portafoglio complessivamente. L'oro e i bond monetari a breve termine sono gli strumenti che hanno registrato correlazione minore. In un periodo ad alta volatilità come quello del 2020-2021, i bond monetari a breve termine hanno avuto un ruolo fondamentale, risultando incorrelati con il resto del portafoglio. Nella rappresentazione in figura 3.3 si è applicato un adattamento tramite metodo LOESS al fine di migliorare la visualizzare di dati con rumore o variabilità eccessiva per evidenziare meglio i pattern e le tendenze sottostanti.

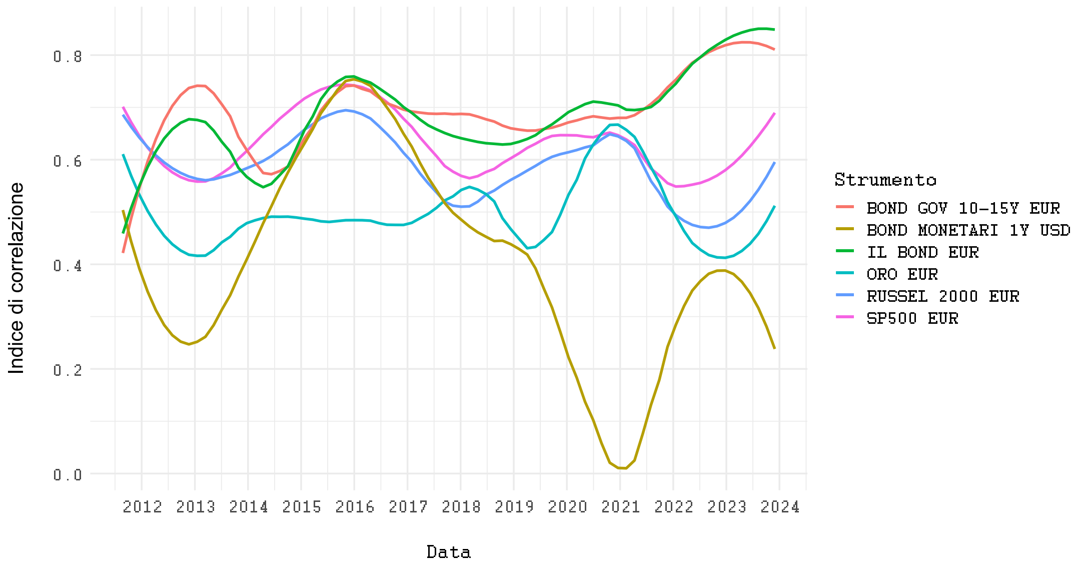

Figura 3.3: Correlazione degli strumenti rispetto al portafoglio. Adattamento tramite metodo LOESS (Local Polynomial Regression Fitting)

3.2 Confronto e Analisi

Come anticipato, il confronto tra differenti approcci di allocazione degli asset è un elemento cruciale nell'ambito della gestione di portafoglio. Risulta quindi necessario esaminare e confrontare il modello costruito tramite la strategia Risk Parity con alcuni degli approcci più conosciuti.

L'analisi, quindi, prevede un confronto tra quattro tipologie di portafoglio:

- Risk Parity
- Global Minimum Variance (GMV)
- 60% Azioni, 40% Obbligazioni
- 100% Azioni

È opportuno precisare che la diversificazione dell'allocazione degli asset è un aspetto fondamentale nella gestione del portafoglio in quanto influisce direttamente sul profilo rischio-rendimento del portafoglio stesso. Le quattro allocazioni presentano molteplici differenze. Per esempio, il modello "60-40", ha dimostrato la sua efficacia soprattutto durante il periodo 2016-2020, ma è cruciale valutare se tale approccio possa essere ottimale in contesti più complessi e mutevoli. L'approccio totalmente azionario, diversamente, mira a massimizzare il rendimento comportando un elevato livello di rischio. Diventa quindi opportuno capire quale sia la migliore strategia e se possa essere appropriata per gli investitori sulla base dell'orizzonte temporale e della tolleranza al rischio. Il modello che come approccio sembra essere più coerente alla filosofia Risk Parity è il Global Minimun Variance Portfolio: entrambi mirano a studiare il rischio ma, mentre il modello proposto si pone come obiettivo quello di mantenere la rischiosità degli asset in costante equilibrio,il GMV ha come scopo quello di individuare il portafoglio che minimizzi la volatilità complessiva.

È necessario quindi analizzare alcune metriche fondamentali, quali Rendimento, Drawdown, Deviazione Standard, rapporto Rendimento/Rischio, che consentono di avere una visione completa sui punti di forza e criticità di ogni modello.

3.2.1 Rendimento

Le figure 3.4 e 3.5 confrontano i rendimenti dei portafogli considerati: nella prima viene rappresentata l'evoluzione di un capitale pari a 10.000€ mentre, nella seconda, si confrontano i rendimenti annualizzati. Come da aspettative, le performance delle quattro strategie sono positivamente correlate al rischio che l'investitore assume: a maggiore rischio corrisponde maggiore rendimento. Il modello Risk Parity, differentemente dalle altre strategie, ha avuto rendimento negativo solo nel corso del 2022. La tabella 3.1 riassume i dati appena citati. Il portafoglio Risk Parity si posiziona meglio del Global Minimun Variance, ma peggio rispetto a un portafoglio azionario e 60-40. Risulta opportuno considerare anche il rischio associato ad ogni modello, come definito nel capitolo 3.2.2.

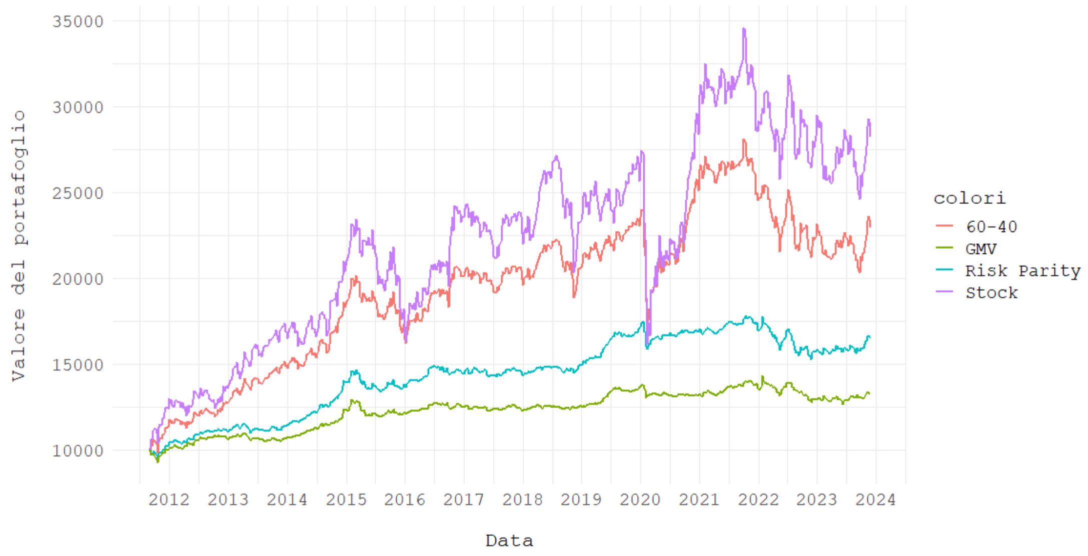

Figura 3.4: Confronto rendimento portafogli stimando un capitale iniziale di 10.000€

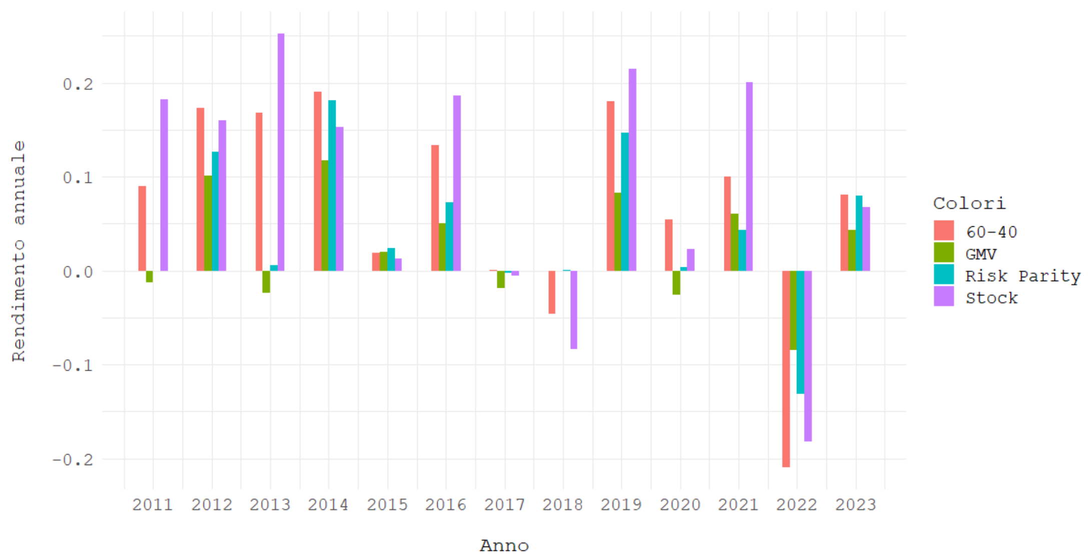

Figura 3.5: Confronto rendimento annuale portafogli

3.2.2 Rischio

Secondo la teoria di Markowitz, il rischio di un portafoglio può essere ben approssimato dallo studio della varianza e deviazione standard. Tuttavia, nonostante vengano definite come misure di rischio tradizionali (o classiche), è più corretto definirle come misure di dispersione statistica adattate per misurare un rischio finanziario. Nasce quindi l'esigenza di definire nuove misure di rischio che guardino le caratteristiche finanziarie del rischio, e non quelle statistiche. Queste misure saranno approfondite nei capitoli successivi in quanto, in questo capitolo, si farà riferimento ancora al rischio definito da Markowitz analizzando nel corso degli anni come i portafogli si sono comportati: si farà quindi riferimento al massimo drawdown e alla deviazione standard.

In contesti ad alta volatilità come quello tra il 2020 e il 2022, i portafogli più rischiosi hanno subito ingenti perdite: nel medesimo periodo, come rappresentato in figura 3.13, mentre il portafoglio azionario registrava un drawdown del 40%, il portafoglio Risk Parity solamente del 10%. È possibile osservare tale evidenza anche dall'analisi della deviazione standard dei portafogli (figura 3.7): i portafogli Risk Parity e Global Minimun Variance hanno registrato in media una volatilità pari al 20-30% rispetto agli altri portafogli.

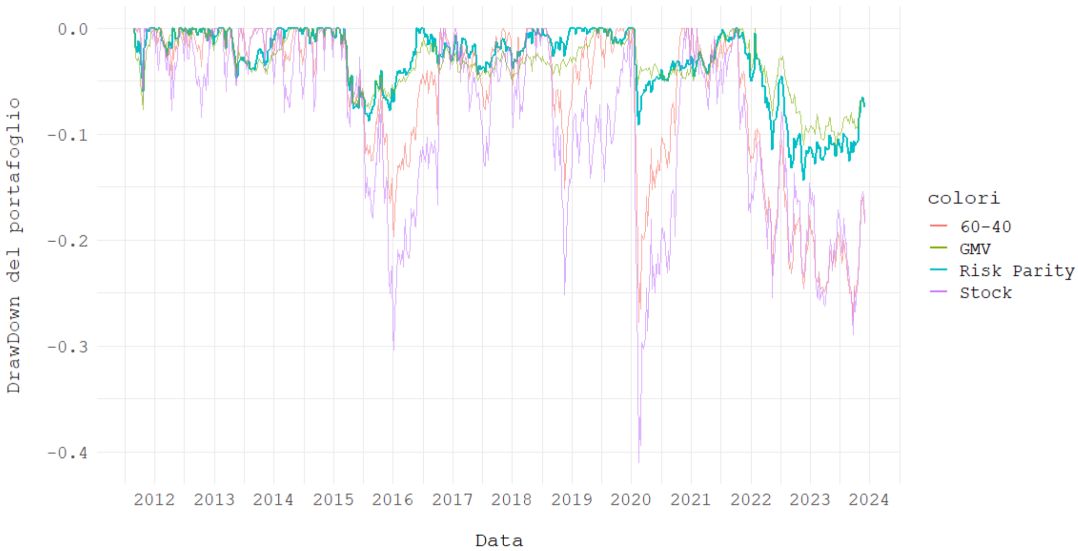

Figura 3.6: Confronto drawdown portafogli

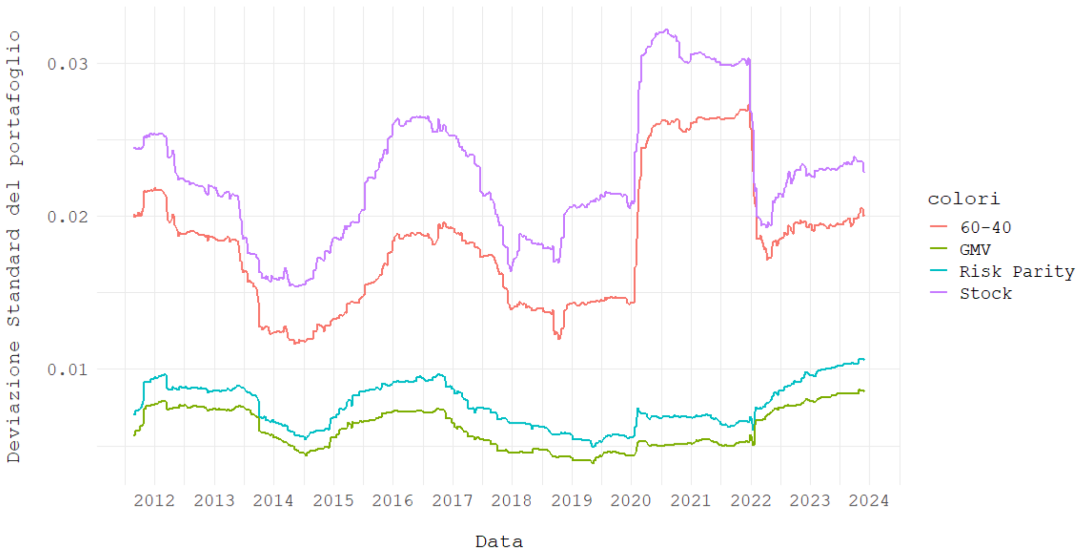

Figura 3.7: Confronto deviazione standard portafogli

3.2.3 Rendimento/Rischio

Nel contesto degli investimenti finanziari, il rapporto rendimento/rischio rappresenta un concetto fondamentale che consente agli investitori di prendere decisioni razionali. Questo rapporto si focalizza sull'equilibrio tra la potenziale ricompensa di un investimento, espressa dal suo rendimento, e il grado di incertezza o rischio associato a tale investimento.

In generale, l'obiettivo degli investitori è di massimizzare il rendimento atteso del loro portafoglio, cercando al contempo di mantenere il rischio a livelli accettabili. Questo equilibrio è cruciale perché gli investitori tendono a essere avversi al rischio e desiderano evitare grandi perdite.

Il concetto di rendimento/rischio può essere affrontato da diverse prospettive, che includono sia metriche qualitative che quantitative. Tra le metriche quantitative più comunemente utilizzate vi sono il rendimento atteso, la varianza o la deviazione standard del rendimento, e misure di rischio come il Value at Risk (VaR) o il Conditional Value at Risk (CVaR) che verranno in seguito approfondite.

La tabella 3.1 riassume i dati precedentemente analizzati indicando anche il rapporto tra il rendimento e la deviazione standard. Ad unità di rischio, il modello costruito tramite Risk Parity risulta essere il portafoglio migliore. Il Global Minimum Variance, nonostante risulti il migliore in termini di rischio, ha un ritorno atteso per unità di deviazione standard inferiore rispetto al modello analizzato e al 60-40.

A tale analisi è possibile aggiungere due metriche fondamentali nell'ambito della valutazione delle prestazioni degli investimenti e della gestione del rischio: l'indice di Sharpe e l'indice di Sortino.

L'indice di Sharpe valuta il rapporto tra il rendimento atteso del portafoglio al netto del tasso Risk Free, e la deviazione standard. Considerando un tasso Risk Free medio risultante dalla media dei tassi dei Bond degli Stati Uniti a 1 anno nel medesimo periodo di analisi (pari quindi all'1,19%), l'indice di Sharpe relativo al portafoglio Risk Parity risulta maggiore (RP 0,50; GMV 0,23; Stock 0,36; 60-40 0,43).

L'indice di Sortino è simile all'indice di Sharpe ma considera come misura di rischio il Downside Risk, esprimibile come massimo drawdown. Anche in questo caso il modello Risk Parity, congiuntamente al modello 60-40, presenta un valore maggiore rispetto al GMV e al portafoglio azionario. (RP 0,21; GMV 0,10; Stock 0,19; 60-40 0,21).

Modello	Rend	max DD	Dev Std	Rend/DevStd
Risk Parity	4,37%	-14,31%	6,00%	0,73
GMV	2,33%	-11,46%	5,01%	0,47
Stock	8,83%	-41,03%	21,11%	0,42
60-40	7,00%	-27,75%	13,42%	0,52

Tabella 3.1: Metriche riassuntive Rischio Rendimento

3.3 Costruzione del portafoglio Risk Parity classico tramite R

La seguente sezione si propone di illustrare il processo di costruzione di un portafoglio Risk Parity tramite l'utilizzo del linguaggio di programmazione R. Per eseguire questa analisi vengono utilizzati diversi pacchetti, tra cui il pacchetto "riskParityPortfolio" realizzato da *"J. V. de M. Cardoso"* e *"D. P. Palomar"*[14] facente riferimento agli studi condotti nel 2015 dai ricercatori *"Y. Feng"* e *"D. P. Palomar"*[7].

Il codice si articola nelle seguenti fasi:

1. Preparazione e acquisizione dei dati: Vengono installati e caricati i pacchetti

necessari, e vengono definiti i ticker degli strumenti finanziari in analisi. Successivamente, vengono estratti i prezzi storici dei ticker dal motore di ricerca finanziario "Yahoo Finance" compresi nel periodo di analisi.

2. Calcolo dei rendimenti: Si fa riferimento ai rendimenti settimanali.

3. Analisi del rischio: Viene calcolata la deviazione standard dei rendimenti e la matrice di correlazione dei rendimenti.

4. Determinazione dei pesi ottimali del portafoglio: Utilizzando una finestra mobile di un numero definito di settimane, si calcolano i pesi ottimali settimanali del portafoglio per avvicinarsi alla contribuzione obiettivo di rischio definita.

5. Visualizzazione e valutazione dei risultati: In output si visualizzano il barplot del rischio degli strumenti in portafoglio, l'andamento del rendimento ipotetico dell'investimento nel tempo e alcune statistiche base quali la media e la deviazione standard dei rendimenti.

È possibile apportare modifiche nella scelta degli strumenti finanziari sostituendo i tickers e definire la contribuzione obiettivo (la cui somma deve essere pari a 1). Se si vuole considerare il rendimento degli strumenti in valuta Euro (come da grafico e analisi precedente) è opportuno sostituire le prime 36 righe del listato 3.1 con il listato 3.2.

```
1 # install.packages("quantmod")
2 # install.packages("tidyverse")
3 # install.packages("riskParityPortfolio")
4 # install.packages("PerformanceAnalytics")
5
6 library(quantmod)
7 library(tidyverse)
8 library(riskParityPortfolio)
9 library(PerformanceAnalytics)
```

```

citation("riskParityPortfolio")

# Funzione per estrarre i rendimenti
get_returns <- function(tickers, start_date, end_date) {
  returns_list <- lapply(tickers, function(ticker) {
    data <- getSymbols(Symbols = ticker, src = "yahoo", from = start_date, to = end_date, auto.assign = FALSE)
    returns <- dailyReturn(Ad(data))
    #returns <- weeklyReturn(Ad(data))
    colnames(returns) <- ticker
    return(returns)
  })
  returns_df <- do.call(merge, returns_list)
  returns_df <- na.omit(returns_df)
  return(returns_df)
}

# Parametri
tickers <- c("^SPX", "^RUT", "EM1015.MI", "CSBGU3.MI", "MTIX.L", "^XAU")
tickers_adj <- gsub("\\^", "", tickers) # si rimuove l'apice agli indici
start_date <- "2009-11-01"
end_date <- "2023-12-31"
risk_contributions <- c(0.1667, 0.1667, 0.333, 0.0833, 0.0833, 0.167)  # Contributi al rischio desiderati (somma = 1)

# Estrazione dei rendimenti
returns_df <- get_returns(tickers, start_date, end_date)
```

```
returns_df <- as.data.frame(returns_df) # Conversione in
    dataframe

# Deviazione standard
deviazione_standard <- returns_df %>%
  summarize_all(sd)

# Matrice di correlazione
corr <- cor(returns_df)

# Matrice di covarianza
Sigma <- cov(returns_df)

# Definizione della finestra mobile
rolling_window <- 500
total_observation <- nrow(returns_df)

# Determinazione dei pesi ottimi
pesi_ottimi <- list()
for (i in 1:(total_observation - rolling_window)) {
  rendimenti_rolling_window <- returns_df[i:(i +
      rolling_window),]
  Sigma <- cov(rendimenti_rolling_window)
  rpp_vanilla <- riskParityPortfolio(
    Sigma
    , b = risk_contributions
  )
  pesi_ottimi[[i]] <- round(rpp_vanilla$w, digits = 3)
}

pesi_ottimi_df <- do.call(rbind, pesi_ottimi)
```

```
RP_weights <- pesi_ottimi_df

# Visualizzazione del rischio del portafoglio
barplotPortfolioRisk(rpp_vanilla$w, Sigma)

# Rendimento (%) portafoglio
ptf_rend_rolling <- data.frame(
    pesi_ottimi_df*slice(returns_df, -(1:rolling_window)),
    Rendimento_ptf = rowSums(pesi_ottimi_df *
       slice(returns_df, -(1:rolling_window)))
)
ptf_rend_rolling <- rownames_to_column(ptf_rend_rolling, var
   = "Data")
ptf_rend_rolling$Data <- as.Date(ptf_rend_rolling$Data)

# Rendimento ipotetico investimento
investimento_iniziale <- 10000
ptf_rend_rolling$Rendimento_ipotetico <- cumprod(1 +
   ptf_rend_rolling$Rendimento_ptf) * investimento_iniziale

# Visualizzazione andamento portafoglio
ggplot() +
  geom_line(data = ptf_rend_rolling, aes(Data,
     Rendimento_ipotetico)) +
  labs(x = "Data", y = "Rendimento 10.000 EUR") +
  theme_minimal() +
  scale_x_date(date_breaks = "1 year", date_labels = "%Y") +
  scale_y_continuous(n.breaks = 10)
```

```r
# Rendimento e Deviazione Standard del portafoglio annualizzati
Return.annualized(ptf_rend_rolling, scale = 215)
sd.annualized(ptf_rend_rolling, scale = 215)
```

Listato 3.1: Analisi del portafoglio Risk Parity tramite R

```r
# install.packages("quantmod")
# install.packages("tidyverse")

library(quantmod)
library(tidyverse)

# Funzione per estrarre i prezzi
get_prices <- function(tickers, start_date, end_date) {
  prices_list <- lapply(tickers, function(ticker) {
    data <- getSymbols(Symbols = ticker, src = "yahoo", from = start_date, to = end_date, auto.assign = FALSE)
    prices <- Ad(data)
    colnames(prices) <- ticker
    return(prices)
  })
  prices_df <- do.call(merge, prices_list)
  prices_df <- na.omit(prices_df)
  return(prices_df)
}

# Parametri
tickers <- c("^SPX", "^RUT", "EM1015.MI", "CSBGU3.MI", "MTIX.L", "^XAU")
tickers_adj <- gsub("\\^", "", tickers) # Rimozione dell'apice dagli indici
```

```
start_date <- "2009-11-01"
end_date <- "2023-12-31"
risk_contributions <- c(0.1667, 0.1667, 0.333, 0.0833, 0.0833, 0.167)  # Contributi al rischio desiderati, devono sommare a 1

# Estrazione dei prezzi
prices_df <- get_prices(tickers, start_date, end_date)
prices_df <- as.data.frame(prices_df)

# Estrazione del tasso di cambio EUR/USD
exchange_rate <- get_prices("EURUSD=X", start_date, end_date)
colnames(exchange_rate) <- c("EURUSD")

# Allineamento delle date dei prezzi e del tasso di cambio
aligned_prices <- merge(prices_df, exchange_rate, by = "row.names", all = FALSE)
rownames(aligned_prices) <- aligned_prices$Row.names
aligned_prices <- aligned_prices[ , -1]

# Adeguamento dei rendimenti dei titoli
adjusted_prices <- aligned_prices %>%
  mutate(
    `X.SPX` = `X.SPX` * EURUSD,
    `X.RUT` = `X.RUT` * EURUSD,
    `MTIX.L` = `MTIX.L` * EURUSD,
    `X.XAU` = `X.XAU` * EURUSD
  )

adjusted_prices <- cbind(
  adjusted_prices %>%
```

```
    select(`X.SPX`, `X.RUT`, `MTIX.L`, `X.XAU`),
  aligned_prices %>%
    select(EM1015.MI, CSBGU3.MI)
)

# Calcolo dei rendimenti e ordinamento dell'output
returns_df_final <- as.data.frame(ROC(adjusted_prices, type
    = "discrete")[-1,])
columns_order <- c("X.SPX", "X.RUT", "EM1015.MI",
   "CSBGU3.MI", "MTIX.L", "X.XAU")
returns_df <- returns_df_final[ , columns_order]
```

Listato 3.2: Integrazione dei rendimenti in Euro

3.4 Varianti del modello classico

Si è visto come il modello Risk Parity costruito rappresenti il paradigma standard per la gestione del rischio del portafoglio. In un contesto di mercato caratterizzato da volatilità e incertezza, l'adozione di una strategia RP consente agli investitori di ridurre l'impatto di eventi avversi sul valore complessivo del portafoglio, mitigando così il rischio sistemico e migliorando la resilienza agli shock di mercato.

Tuttavia, nonostante la solidità concettuale del modello RP, esistono margini di ottimizzazione permettendone l'adattamento alle specifiche esigenze e preferenze degli investitori. Queste variazioni possono riguardare l'allocazione degli asset, la scelta dei parametri di rischio e rendimento, nonché l'implementazione di vincoli e preferenze individuali dell'investitore.

Prevalentemente, le principali modifiche al modello che si possono apportare riguardano l'allocazione degli asset, quindi la distribuzione del rischio, e l'utilizzo della leva finanziaria, nonchè l'applicazione di vincoli relativi all'esposizione a determinati strumenti.

3.4.1 Allocazione alternativa

Nel capitolo 3.1.1, è stato evidenziato come ciascun asset all'interno del portafoglio rivesta un ruolo cruciale, contribuendo in modo significativo alla sua composizione e alle sue performance complessive. In particolare, i Bond monetari a breve scadenza denominati in valute forti svolgono un ruolo specifico nell'esposizione del portafoglio a determinati fattori di rischio.

Questi bond offrono agli investitori un'esposizione ad una valuta considerata stabile, soprattutto in contesti caratterizzati da pressioni inflazionistiche. Tuttavia, la scelta di includere questi strumenti dipende dalle preferenze individuali dell'investitore e dal suo profilo di rischio. Un investitore maggiormente propenso al rischio potrebbe decidere di modificare la composizione del portafoglio sostituendo i Bond monetari con altri strumenti finanziari denominati nella stessa valuta forte, cioè il Dollaro.

Questa strategia di sostituzione mira a adeguare il portafoglio alle preferenze specifiche dell'investitore, consentendo una maggiore esposizione a strumenti finanziari considerati più adatti al suo profilo di rischio e alle sue aspettative di rendimento. Tuttavia, è importante considerare attentamente gli impatti potenziali di tali modifiche sulla diversificazione del portafoglio e sulla gestione complessiva del rischio, al fine di garantire una strategia di investimento equilibrata e coerente con gli obiettivi dell'investitore.

La costruzione di tale strategia prevede l'allocazione della quota destinata a bond a breve termine (in dollari), verso altre componenti del portafoglio più rischiose, quindi azioni a grande e piccola capitalizzazione e oro, senza copertura valutaria in euro. Per esempio, se la strategia Risk Parity prevede una quota di bond monetari pari al 10% e di azionario (Euro) del 15%, la nuova allocazione sarà 0% bond monetari, 10% azionario (Dollari) e il restante 5% azionario (Euro). L'obiettivo è quindi quello di mantenere costante l'esposizione in valute forti.

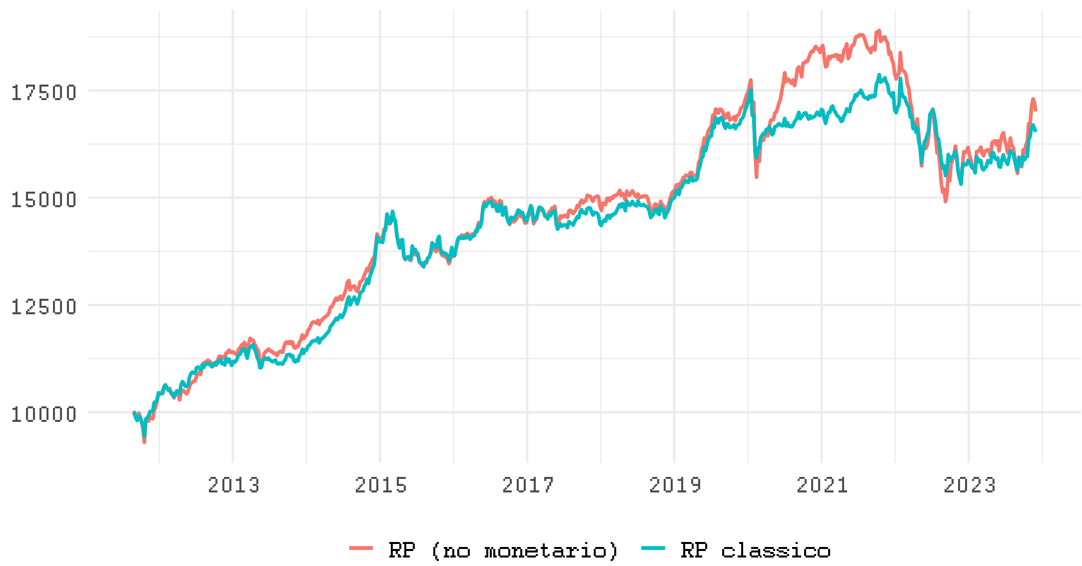

Figura 3.8: Confronto rendimento portafogli stimando un capitale iniziale di 10.000€

La figura 3.8 confronta graficamente le due strategie allocative ipotizzando l'andamento di un portafoglio dal 2012 al 2023. Il comportamento dei due portafogli, nonostante sembri simile in termini di rendimento, presenta alcune differenze in termini di volatilità e drawdown. La tabella 3.2 riassume le principali metriche confrontando le strategia appena descritte. In termini di drawdown, volatilità e quindi rapporto rendimento-rischio, il portafoglio Risk Parity classico risulta essere migliore.

Modello	Rend	max DD	Dev Std	Rend/DevStd
Risk Parity	4,37%	-14,31%	6,00%	0,73
RP alternativo	4,42%	-21,12%	7,04%	0,63

Tabella 3.2: Metriche riassuntive Rischio Rendimento

3.4.2 Applicazione della leva finanziaria

Nel capitolo 2.4 si sono descritti i benefici derivanti dall'applicazione della leva finanziaria, in particolar modo quando gli strumenti presentano correlazione bassa o negativa. Mantenendo costante il contributo al rischio dei diversi asset, è possibile aumentare linearmente il rischio e quindi il rendimento del portafoglio. Tali assunzioni risultano teoriche in quanto, in un contesto reale, è necessario considerare ulteriori parametri, per esempio il costo del debito.

Per comprendere le potenzialità della leva finanziaria, è possibile osservare il grafico 3.9 che confronta un portafoglio solo azionario con un portafoglio Risk Parity a leva 2,18, leva necessaria affinchè i rendimenti siano uguali. La tabella 3.3 riassume le metriche principali dei portafogli considerati. Ad essi viene aggiunto anche quello a leva 4,93, che è la leva necessaria per eguagliare il rendimento del portafoglio azionario considerando i costi del debito pari al 3%.

In un contesto realistico l'applicazione della leva finanziaria consente di ottenere dei benefici solamente se il costo del debito è inferiore rispetto al rendimento degli investimenti. Quindi, considerando tali costi, la leva massima affinchè il rapporto rendimento-rischio del portafoglio Risk Parity a leva e quello solamente azionario siano uguali, è pari al 2,23. In questo caso si otterrebbe un portafoglio il cui rendimento è pari al 5,64% e volatilità 13,50%.

Figura 3.9: Confronto portafoglio di un portafoglio Risk Parity la cui leva consente di ottenere il medesimo rendimento di un portafoglio azionario (esclusi i costi)

Modello	Rend	Dev Std	Rend/DevStd
Risk Parity	4,37%	6,00%	0,73
RP Leva 2,18	8,83%	13,15%	0,67
Stock	8,83%	21,11%	0,42
RP Leva 4,93 (-3% costo)	8,83%	29,75%	0,30

Tabella 3.3: Confronto portafoglio Risk Parity a leva

3.5 Estensioni al modello classico di selezione di portafoglio: misure di rischio moderne e coerenti

Le analisi prima condotte finalizzate alla valutazione e gestione del rischio di portafoglio hanno fatto riferimento a misure di rischio definite in letteratura come misurazioni classiche: la media e la varianza.

Tuttavia, con l'evoluzione del panorama finanziario e la crescente complessità dei mercati, è diventata sempre più evidente la necessità di integrare nuove misure di rischio che consentano di catturare aspetti trascurati dallo studio della sola varianza.

Nasce quindi il bisogno di introdurre misure di rischio moderne e coerenti che consentano di comprendere meglio la complessità dei mercati finanziari e di migliorare la capacità di gestire il rischio in modo efficace.

Applicando una strategia di investimento Risk Parity il cui obiettivo è quello di bilanciare il rischio tra le diverse componenti del portafoglio, l'analisi tramite misure di rischio più sofisticate rappresenta sicuramente un tassello fondamentale per comprendere meglio come vengono distribuite le risorse e la resilienza del portafoglio alle fluttuazioni del mercato. In questa prospettiva, il seguente capitolo si pone come obiettivo quello di esplorare le criticità al modello classico di selezione del portafoglio, presentando e analizzando le moderne misure di rischio.

Tali misure possono essere organizzate in tre macro famiglie:

- Le misure di rischio tradizionali o classiche, applicate da Markowitz nel suo modello: non sono propriamente misure di rischio ma misure di dispersione statistica e spesso vengono utilizzate in campo finanziario.

- Le misure di rischio moderne, per esempio il VaR: rappresentano il primo tentativo di costruire una misura di rischio finanziaria che guardi alle caratteristiche finanziarie del rischio e non alle sue caratteristiche statistiche.

- Le misure di rischio contemporanee e coerenti, comparse verso la fine degli anni '90: una misura di rischio moderna e coerente, in contesto finanziario, è una funzione utilizzata per quantificare il rischio di una posizione o di un portafoglio in modo da soddisfare determinate proprietà matematiche che garantiscono la coerenza e la razionalità delle decisioni di gestione del rischio.

Artzner, Delbaen, Eber e Heath (1999) (Coherent Measures of Risk) [2] definiscono che una misura di rischio è una funzione ρ che assegna un valore numerico a una variabile casuale X rappresentativa delle perdite future, quantificando il rischio associato a tali perdite.

Nonostante si tratti di un concetto soggettivo, è possibile determinare alcune caratteristiche che, per un investitore razionale, una misura di rischio è auspicabile possieda. Indicati come $\{R_1, \ldots, R_N\}$ un insieme di variabili casuali, per esempio i ritorni attesi derivanti da un investimento, è possibile definire una misura di rischio ρ moderna e coerente se rispetta le seguenti caratteristiche:

- monotonicità: se la condizione $R_x \leq R_y$ è sempre vera, allora $\rho(R_x) \leq \rho(R_y)$ per ogni coppia $x, y = 1, \ldots, N$, coerentemente con l'aspettativa che a ritorni attesi maggiori il rischio aumenti.

- varianza transizionale: l'introduzione di una variabile c (per esempio un titolo privo di rischio), riduce la misura di rischio di un ammontare α definito proporzionalmente alla quota allocata nel titolo privo di rischio[1]

$$\rho(R_x + c) = \rho(R_x) - \alpha \tag{3.3}$$

- convessità: si definisce convessa quella funzione per cui, preso il segmento che unisce due qualsiasi punti, esso si trova al di sopra della funzione stessa quindi, dati due rendimenti aleatori R_X ed R_Y ed un parametro $\theta \in [0; 1]$, vale la seguente relazione:

$$\rho(\theta R_X + (1 - \theta)R_Y) \leq \theta\rho(R_X) + (1 - \theta)\rho(R_Y) \tag{3.4}$$

  Una misura di rischio deve soddisfare tale relazione: un portafoglio diversificato deve essere meno rischioso della somma dei rischi di due distinti portafogli. La convessità è quindi implicita se sussistono due proprietà:

[1] La varianza non soddisfa la seguente proprietà in quanto: $Var(x + \alpha) = Var(x)$

– subaddittività: presi due titoli inseriti nel medesimo portafoglio, il rischio dei due titoli congiunti è minore o uguale alla somma del rischio dei titoli presi singolarmente[2]

$$\rho(R_X + R_Y) \leq \rho(R_X) + \rho(R_Y) \tag{3.5}$$

– positiva omogeneità: il rischio cresce linearmente rispetto alla quantità investiva. Per esempio, il rischio di un portafoglio che prevede l'investimento del doppio del capitale, è pari a due volte il rischio del portafoglio[3].

$$\rho(\alpha R_X) = \alpha \rho(R_X) \tag{3.6}$$

Come anticipato nel capitolo 2.2 e approfondito nel lavoro di *Von Neumann, Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior* [21], il legame che intercorre tra la teoria dell'utilità attesa ed una misura di rischio è esprimibile dalla seguente relazione d'ordine:

$$E[U(R_x)] \geq E[U(R_y)] \tag{3.7}$$

che implica la seguente:

$$\rho(R_x) \leq \rho(R_y) \tag{3.8}$$

L'equazione 3.7 indica che l'utilità attesa del rendimento del portafoglio R_x è maggiore o uguale all'utilità attesa del rendimento del portafoglio R_y. In altre parole, un investitore razionale preferisce R_x a R_y perché R_x offre una maggiore soddisfazione attesa secondo la funzione di utilità U.

L'implicazione 3.8 suggerisce che, se un portafoglio R_x è preferito a R_y in termini di utilità attesa, allora la misura di rischio di R_x dovrebbe essere inferiore a quella

[2]La varianza non è coerente con questa definizione

[3]La positiva omogeneità non è soddisfatta dalla varianza: $Var(\alpha Y) = \alpha^2 Var(Y)$. La deviazione standard soddisfa tale proprietà

di R_y. Questo riflette l'idea che un portafoglio considerato migliore dovrebbe comportare un minor rischio o, almeno, non superiore: questo consente di classificare tutte le possibili scelte ottime sulla frontiera efficiente.

L'adozione di misure di rischio moderne e coerenti deriva da una serie di accordi internazionali progettati per rafforzare la regolamentazione, la supervisione e la gestione del rischio nel settore bancario: i principi di Basilea. Questi principi si sono evoluti nel tempo introducendo approcci più sofisticati alla gestione del rischio. Negli accordi di Basilea II il Value at Risk (VaR, capitolo 3.5.1) assume un ruolo fondamentale per la gestione del rischio di mercato. Tuttavia Basilea III, sviluppato in risposta alla crisi finanziaria del 2007-2008, ha introdotto ulteriori metriche di rischio e requisiti più stringenti per garantire maggiore stabilità finanziaria all'intero sistema [6]. Si introducono misure supplementari come l'Expected Shortfall (ES, capitolo 3.5.3) che offrono valutazioni più accurate delle perdite in condizioni di stress.

3.5.1 Il Value at Risk

Il Value at Risk (VaR) è una misura di rischio ampiamente utilizzata per la quantificazione del rischio. Nonostante venga ampiamente citato negli accordi di Basilea II, si tratta di una misura di rischio non coerente.

Definito un livello di confidenza $\alpha \in [0; 1]$ e fissato un certo intervallo temporale noto come holding period, il VaR indica qual è la massima perdita potenziale in cui il portafoglio sottostante può incorrere nell' $\alpha\%$ dei casi ed in un arco temporale pari all'holding period.

Può essere calcolato tramite diversi approcci. I più conosciuti sono:

- il Risk Metrics Group Approach [18] introdotto da JP Morgan negli anni '90: assumendo che le distribuzioni dei rendimenti siano normali, vengono simulati scenari futuri tramite simulazioni Monte Carlo e, conseguentemente, viene selezionato il percentile appropriato alla distribuzione dei rendimenti simulati (per esempio il 5°, VaR(95%)) per rappresentare il VaR al livello di confidenza desiderato .

- il metodo storico: è un metodo di stima campionaria e prevede l'osservazione dei rendimenti storici ordinati dal peggiore al migliore. Il rendimento corrispondente al 5° percentile rappresenta la stima del VaR al 95%.

Formalmente, il VaR può essere definito come il negativo dell'infimo dei valori x per cui la probabilità che la perdita X sia minore o uguale a x è almeno ϵ:

$$Var_{\epsilon}(X) = -inf\{x|P(X \leq x) \geq \epsilon\} \tag{3.9}$$

con ϵ livello di confidenza (per esempio 95%).

La figura 3.10, elaborata tramite 10000 simulazioni Monte Carlo considerando un rendimento medio giornaliero pari allo 0.05% e una deviazione standard giornaliera dell'1%, evidenzia graficamente il VaR(95%).

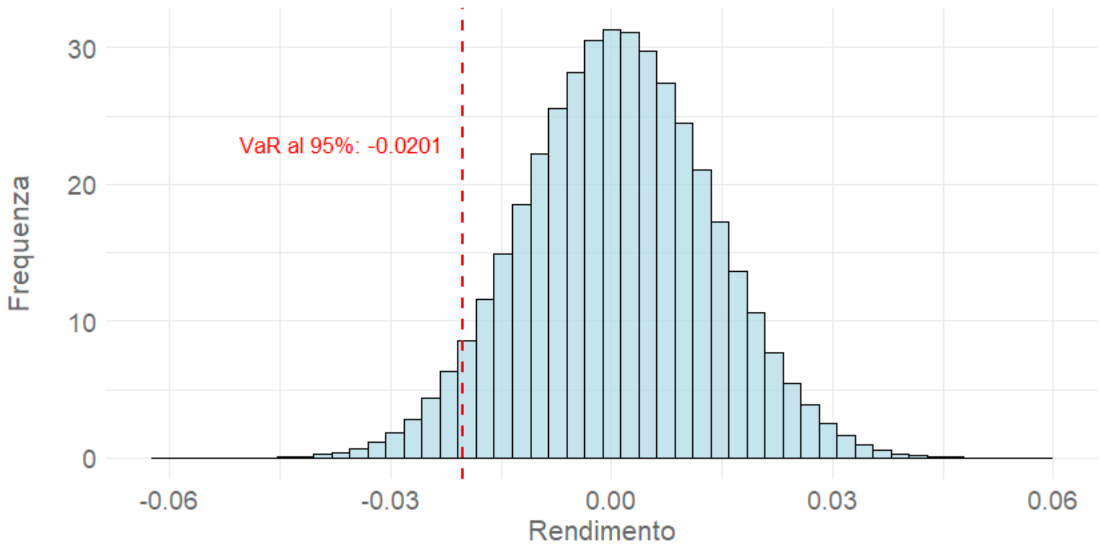

Figura 3.10: Rappresentazione grafica del Value at Risk (linea rossa) come (1- α)-esimo percentile della distribuzione dei rendimenti settimanali del portafoglio Risk Parity.

Nell'esempio appena descritto, per esempio, supponendo una soglia $\alpha = 5\%$ e un holding period pari a 100 giorni, al termine di tale periodo il portafoglio avrà registrato almeno nel 5% dei casi (cioè in almeno 5 giorni) una perdita pari o maggiore dello 0,0159%. Questa metrica ci fornisce un'indicazione sulla possibile perdita, ma non fornisce alcuna indicazione sull'entità delle perdite che eccedono tale soglia non fornendo informazioni in merito alla poissibile perdita massima effettiva. Ne consegue che due portafogli possono avere il medesimo VaR, seppur presentino livelli di perdite drammaticamente differenti.

Il VaR, quindi, si può dire che rispetti il principio della varianza transizionale, ma il limite è che a volte non è in grado di capire che i portafogli possono portare a rischi minori rispetto ad investire separatamente nei due titoli, ovvero non è in grado di riconoscere il beneficio della diversificazione, e quindi non rispetta il principio di subadditività ($Var_\epsilon(X+Y) > Var_\epsilon(X) + Var_\epsilon(Y)$). Sotto l'ipotesi aggiuntiva (errata) per cui i rendimenti si distribuiscano come una normale, il VaR soddisfa tutti e quattro gli assiomi e si comporta pertanto come una misura coerente.

Stima del VaR tramite Risk Metrics Approach

Come precedentemente introdotto, il modello Risk Metrics di J.P. Morgan è un framework utilizzato per la gestione del rischio di mercato sviluppato negli anni '90. Questo modello è stato uno dei primi tentativi di standardizzare il calcolo del Value at Risk (VaR).

La stima del VaR si divide in più fasi:

- Raccolta dei rendimenti storici: nella stima del VaR del modello Risk Parity sono stati utilizzati 641 rendimenti settimanali
- Stima della volatilità: viene utilizzato un modello di volatilità esponenzialmente ponderata (EWMA) per stimare la volatilità dei rendimenti:

$$\sigma_t^2 = (1-\lambda) r_{t-1}^2 + \lambda \sigma_{t-1}^2 \tag{3.10}$$

  con λ parametro di decadimento per controllare la velocità di adattamento della volatilità ai nuovi dati: se è vicino a 1 la volatilità si adatterà velocemente.

Nel contesto del modello RiskMetrics, λ è stato scelto empiricamente (pari a 0,94) per bilanciare la reattività del modello ai nuovi dati con la stabilità nel tempo della volatilità stimata. Questo consente al modello di rispondere rapidamente a nuovi eventi di mercato senza generare fluttuazioni eccessive nella stima della volatilità nel tempo.

- Costruzione della matrice di covarianza: nel caso in cui i dati in input siano rendimenti già aggregati (e non considerati come singoli asset che compongono il portafoglio) la matrice sarà pari a 1.
- Calcolo del VaR come quantile della distribuzione normale corrispondente al livello di confidenza desiderato.

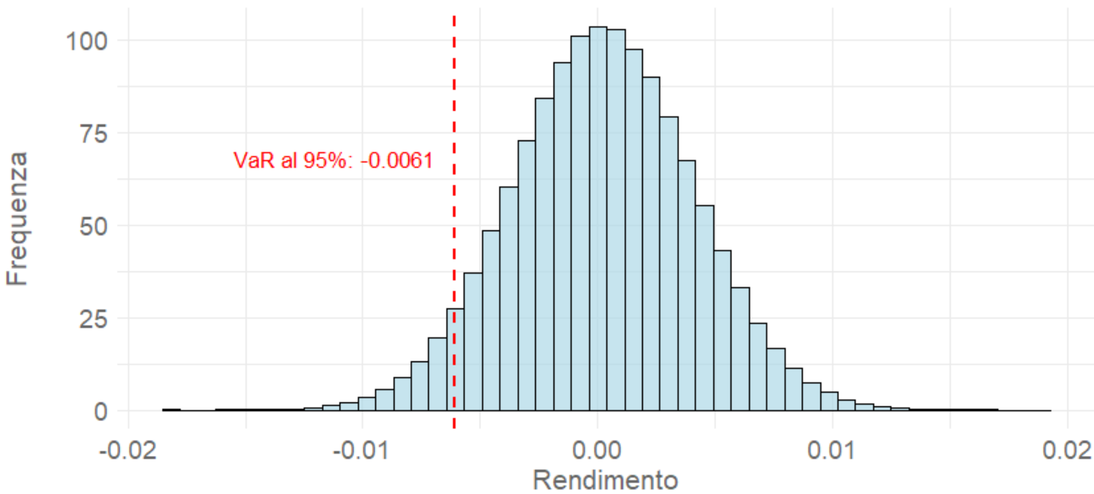

Figura 3.11: Stima del VaR(95%) dei rendimenti giornalieri del portafoglio Risk Parity (simulazione di 100000 rendimenti) tramite approccio Risk Metrics con fattore di decadimento λ pari a 0,94

Come visibile dalla figura 3.11, il VaR(95%) del portafoglio Risk Parity precedentemente costruito, è pari allo $-0{,}0061$. Simulando un livello di confidenza $\alpha = 0{,}001$, il VaR(99,9%) è pari allo $-0{,}0116$. Nella tabella 3.4 si confontano i VaR(95%) dei portafogli prima analizzati. Considerando quindi il VaR come misura di rischio, il portafoglio costruito tramite approccio Risk Parity assume valori molto simili al Global Minimum Variance. Coerentemente alle aspettative, i portafogli 60-40 e Azionario presentano un rischio superiore.

Modello	VaR(95%)	VaR(99.9%)
Risk Parity	-0,0061	-0,0116
GMV	-0,0047	-0,0089
Stock	-0,0133	-0,0256
60-40	-0,0073	-0,.0141

Tabella 3.4: Confronto VaR dei modelli tramite approccio Risk Metrics

Stima del VaR tramite metodo storico

L'approccio del calcolo del VaR con il metodo storico si basa sui dati storici effettivi dei rendimenti senza fare alcune assunzione sulla distribuzione dei rendimenti. Raccolti i dati, è opportuno ordinarli in ordine crescente: il VaR viene individuato come il rendimento che corrisponde al percentile desiderato. Esso è un valore empirico che rappresenta direttamente un punto nella distribuzione storica dei rendimenti. Non si tratta quindi di un valore derivato da una funzione di densità di probabilità teorica come avviene con l'approccio parametrico Risk Metrics.

Modello	VaR(95%)	VaR(99,9%)
Risk Parity	-0,0058	-0,0201
GMV	-0,0047	-0,0162
Stock	-0,0211	-0,0799
60-40	-0,0113	-0,0480

Tabella 3.5: Confronto VaR dei modelli tramite approccio di stima campionaria

Osservando i dati in tabella 3.5, il modello meno rischioso, coerentemente alle aspettative, è il Global Minimum Variance.

VaR: confronto tra approccio campionario e parametrico

Osservando i risultati ottenuti attraverso i due metodi di stima del VaR, emerge una differenza tra l'approccio parametrico (Risk Metrics) e quello campionario (storico). Questo confronto mette in luce diverse caratteristiche e vantaggi dei due metodi.

Il metodo campionario, basandosi esclusivamente sui dati storici effettivi senza fare alcuna assunzione sulla distribuzione dei rendimenti, risulta particolarmente coerente nel rappresentare la rischiosità reale del portafoglio. Questa caratteristica diventa evidente considerando i seguenti aspetti:

- Assenza di assunzioni sulla distribuzione: a differenza dell'approccio parametrico, che presuppone una distribuzione normale dei rendimenti, il metodo storico non richiede tali assunzioni. Questo rende il metodo campionario meno suscettibile a errori derivanti da distribuzioni di rendimenti non normali, che comunemente si manifesta nei mercati finanziari. I mercati, infatti, spesso mostrano rendimenti con code più pesanti (fat tails) rispetto a una distribuzione normale. Tale caratteristica viene gestita meglio tramite approccio storico che riflette direttamente le condizioni di mercato passate.

- Rappresentatività dei dati: facendo riferimento a un numero sufficiente di dati storici, il metodo campionario offre una rappresentazione più accurata e realistica della rischiosità del portafoglio. Il metodo campionario è in grado di catturare meglio la vera distribuzione empirica dei rendimenti, inclusi i periodi di alta volatilità e gli eventi di coda.

- Reattività agli eventi di mercato: nonostante l'approccio tramite Risk Metrics utilizzi un modello EWMA che garantisce una reattività ai nuovi dati di mercato tramite il fattore di decadimento λ, il metodo storico integra automaticamente tutti gli eventi di mercato passati senza necessità di parametri aggiuntivi. Il metodo campionario risponde in modo diretto e immediato agli shock di mercato che si sono verificati nel periodo di osservazione.

Esaminando le tabelle 3.4 e 3.5, si nota che i valori del VaR(95%) e del VaR(99,9%) calcolati tramite metodo campionario sono, in generale, più elevati rispetto a quelli ottenuti con l'approccio parametrico. Questo indica una stima più conservativa del rischio, coerente con l'idea che il metodo campionario cattura meglio le caratteristiche reali della distribuzione dei rendimenti, inclusi gli eventi estremi.

In conclusione, il VaR rappresenta sicuramente una misura di rischio alternativa alla varianza, tuttavia non considera l'intera distribuzione ma solo la parte a destra dell'intervallo di confidenza, ovvero il 95% della distribuzione (nel caso $\alpha = 5\%$). Non conoscendo il comportamento della distribuzione nel restante 5% dei casi si incorre nell'errore di sottostimare il rischio delle perdite inattese, ovvero degli eventi estremi. Questo costituisce il principale svantaggio dell'utilizzare il VaR come misura di rischio.

Nel tentativo di superare questi limiti sono state proposte altre misure di rischio, tra cui l'Expected Shortfall (ES) che risulta essere invece una misura coerente e verrà di seguito approfondita.

3.5.2 Misure di rischio contemporanee e coerenti

Nel contesto della gestione del rischio e dell'ottimizzazione di portafoglio è fondamentale utilizzare misure di rischio che siano coerenti, ovvero che rispettino le quattro caratteristiche fondamentali specificate nel capitolo 3.5. Due esempi di tali misure sono la Tail Conditional Expectation (TCE) e la Worst Conditional Expectation (WCE).

Tail Conditional Expectation (TCE)

La Tail Conditional Expectation, nota anche come TailVaR e spesso confusa con l'Expected Shortfall, è una misura di rischio che fornisce una stima delle perdite medie condizionate al fatto che queste superino una certa soglia, rappresentata dal

Value at Risk (VaR). Formalmente, la TCE al livello di confidenza α è definita come:

$$TCE_\alpha(X) = -E[X \mid X \leq -VaR_\alpha(X)] \tag{3.11}$$

Questa misura di rischio, spesso confusa con l'Expected Shortfall, è coerente poiché rispetta tutte le proprietà assiomatiche richieste.

La TCE, inoltre, può essere espressa come:

$$CVaR_\epsilon(X) = \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon VaR_p(X)\, dp \tag{3.12}$$

Questa formulazione implica che la TCE sia una media ponderata dei VaR per i diversi livelli di confidenza, fornendo una visione più completa del rischio rispetto al solo VaR.

Worst Conditional Expectation (WCE)

La Worst Conditional Expectation (WCE) è un'altra misura di rischio coerente, definita come:

$$WCE_\alpha(X) = -\inf\{E[X \mid A] \mid P[A] > \alpha\} \tag{3.13}$$

Dove inf indica l'estremo inferiore dell'insieme e $E[X \mid A] \mid P[A] > \alpha$ rappresenta la media delle perdite condizionata al verificarsi di un evento A la cui probabilità è maggiore di α. In altre parole, la WCE misura la peggiore perdita media possibile condizionata agli eventi con probabilità superiore a α.

A differenza della TCE, che si basa sulla distribuzione delle perdite, la WCE considera gli eventi specifici che portano alle perdite. Ciò richiede che l'investitore abbia una visione dettagliata degli scenari futuri e delle loro probabilità, rendendo la WCE più complessa da applicare nella pratica.

Confronto tra TCE e WCE

Entrambe le misure appena descritte tengono conto di “how bad is bad” poiché considerano la coda sinistra della distribuzione dei rendimenti, focalizzandosi sulle perdite estreme. Tuttavia, mentre la TCE può non soddisfare sempre la subadditività (per esempio in casi di distribuzioni non normali o di alta correlazione), la WCE soddisfa tutti gli assiomi di coerenza in ogni circostanza.

È importante notare che, sebbene la TCE sia generalmente più utilizzata per la sua relativa semplicità di calcolo e interpretazione, la WCE offre una prospettiva più rigorosa sulle perdite estreme, soprattutto in contesti in cui è possibile identificare chiaramente gli eventi avversi.

In termini di rischio associato, a parità di α, la TCE è sempre minore o uguale alla WCE. Tuttavia, ciò non implica che il rischio calcolato con la TCE sia sempre inferiore rispetto a quello con la WCE. Le due misure utilizzano scale di misurazione diverse e non sono direttamente comparabili per determinare quale portafoglio sia più rischioso. Pertanto, la scelta tra TCE e WCE dipende dal contesto specifico e dalle esigenze dell’investitore o del risk manager.

3.5.3 L’Expected Shortfall

I limiti del Value at Risk (VaR) hanno portato allo sviluppo di una nuova misura del rischio di mercato: l’Expected Shortfall (ES). Questa misura, basata sui metodi VaR, cerca di superarne i limiti, risultando in una misura di rischio coerente e più informativa. L’Expected Shortfall è definito come la media condizionata delle perdite superiori al VaR.

Dal punto di vista finanziario, l’Expected Shortfall rappresenta la perdita media considerando tutte le perdite oltre un certo valore soglia, rappresentato dal VaR. La formula dell’Expected Shortfall è:

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\left(E[X \mid X \leq x^{(\alpha)}] - x^{(\alpha)}\left(P[X \leq x^{(\alpha)}] - \alpha\right)\right) \tag{3.14}$$

dove $x^{(\alpha)}$ equivale al VaR_α con livello di confidenza α.

La formula considera la media dei valori oltre il livello di confidenza ($E[X \mid X \leq x^{(\alpha)}]$), alla quale viene sottratto un termine di correzione $x^{(\alpha)}(P[X \leq x^{(\alpha)}] - \alpha)$, significativo solo nel caso in cui $P[X \leq x^{(\alpha)}] > \alpha$. Nel caso in cui $P[X \leq x^{(\alpha)}] = \alpha$, il termine di correzione è pari a 0, come accade sempre nel caso di funzioni continue. Pertanto, il termine di correzione diventa rilevante solo nel caso di funzioni discontinue.

La funzione dell'ES è il valore medio delle realizzazioni superiori al VaR e, nel caso di variabili continue come generalmente è assunto per i rendimenti finanziari, la TCE coincide con il Conditional Value at Risk (CVaR).

La differenza principale tra VaR e Expected Shortfall è che, mentre il VaR indica la frequenza con cui le perdite superano un determinato ammontare pari al VaR stesso, non specificando di quanto, e quindi non fornendo alcuna misura della dimensione delle perdite che possano superarlo, l'Expected Shortfall rappresenta una media condizionata che considera solo le perdite superiori al VaR. Il VaR indica qual è la probabilità che si abbiano delle perdite superiori a un dato valore, mentre l'Expected Shortfall dice, se le perdite sono superiori al VaR, quale sarà la perdita media.

Nel caso di variabili casuali continue, come generalmente assunto per i rendimenti finanziari, l'Expected Shortfall coincide con un'altra misura di rischio coerente, il Conditional VaR (CVaR).

Operativamente, l'Expected Shortfall è ottenuto in questo modo: dopo aver deciso il livello di confidenza α, si ordinano le serie storiche in ordine decrescente e si prendono le ultime $\alpha\%$ osservazioni, considerando i peggiori $\alpha\%$ casi, e si calcola la media di tali osservazioni. Si ottiene quindi lo stimatore campionario dell'Expected Shortfall:

$$ES_{(\alpha)}(X) = -\frac{\sum_{t=1}^{W} x_{i:n}}{W} \tag{3.15}$$

3.6 Costruzione del portafoglio Risk Parity (Expected Shortfall) tramite R

La seguente sezione si propone di illustrare il processo di costruzione di un portafoglio Risk Parity considerando la misura di rischio Expected Shortfall tramite l'utilizzo del linguaggio di programmazione R.

Il codice si articola nelle seguenti fasi:

1. Estrazione dei Dati e Calcolo dei Rendimenti: Utilizzando la libreria 'quantmod', vengono estratti i dati storici degli strumenti finanziari dal motore di ricerca finanziario "Yahoo Finance".

2. Calcolo dell'Expected Shortfall (ES(99%)) e dei Pesi Ottimali: Per ogni finestra mobile, si calcola l'Expected Shortfall (ES) di ciascun asset utilizzando il metodo storico. In seguito si determinano i pesi ottimali per il portafoglio basati su una strategia Risk Parity con contributi al rischio definiti.

3. Visualizzazione: Si estrae un grafico a barre per visualizzare le ponderazioni finali di ciascun asset e viene simulato l'andamento di un ipotetico investimento di 10.000 EUR dalla prima data disponibile.

4. Analisi statistica del portafoglio: Il codice calcola la media e la deviazione standard dei rendimenti del portafoglio per fornire una misura del rendimento atteso e della volatilità.

Se si vuole considerare il rendimento degli strumenti in valuta Euro (come da grafico e analisi precedente) è opportuno fare riferimento al listato 3.2 per l'estrazione dei rendimenti.

```r
# install.packages("quantmod")
# install.packages("tidyverse")
# install.packages("PerformanceAnalytics")
# install.packages("xts")

library(quantmod)
library(PerformanceAnalytics)
library(tidyverse)
library(xts)

# Funzione per estrarre i rendimenti
get_returns <- function(tickers, start_date, end_date) {
  returns_list <- lapply(tickers, function(ticker) {
    data <- getSymbols(Symbols = ticker, src = "yahoo", from
       = start_date, to = end_date, auto.assign = FALSE)
    returns <- dailyReturn(Ad(data))
    #returns <- weeklyReturn(Ad(data))
    colnames(returns) <- ticker
    return(returns)
  })
  returns_df <- do.call(merge, returns_list)
  returns_df <- na.omit(returns_df)
  return(returns_df)
}

# Funzione per calcolare l'Expected Shortfall (ES)
calculate_ES <- function(returns_df, confidence_level =
    alpha) {
  ES_values <- apply(returns_df, 2, function(x) ES(x, p =
     confidence_level, method = "historical"))
  return(ES_values)
```

```
}

# Funzione per calcolare le ponderazioni basate sul Risk Parity con contribuzione al rischio definita
calculate_weights_custom_risk <- function(ES_values, risk_contributions) {
  total_risk_contribution <- sum(risk_contributions / ES_values)
  weights <- (risk_contributions / ES_values) / total_risk_contribution
  return(weights)
}

# Parametri
tickers <- c("^SPX", "^RUT", "EM1015.MI", "CSBGU3.MI", "MTIX.L", "^XAU")
tickers_adj <- gsub("\\^", "", tickers) # rimozione dell'apice agli indici
start_date <- "2009-11-01"
end_date <- "2023-12-31"
risk_contributions <- c(0.1667, 0.1667, 0.333, 0.0833, 0.0833, 0.167)  # Contribuzione al rischio, deve sommare a 1
alpha <- 0.99

# Estrazione dei rendimenti
returns_df <- get_returns(tickers, start_date, end_date)
returns_df <- as.data.frame(returns_df) # Conversione in dataframe

# Definizione della finestra mobile
```

```
rolling_window <- 500  # Puoi modificare la dimensione della
    finestra
total_observation <- nrow(returns_df)

# Determinazione dei pesi ottimi
pesi_ottimi <- list()
for (i in 1:(total_observation - rolling_window)) {
  returns_rolling_window <- returns_df[i:(i +
      rolling_window), ]

  # Expected Shortfall per la rolling window corrente
  ES_values <- calculate_ES(returns_rolling_window)

  # Individuazione dei pesi
  weights <- calculate_weights_custom_risk(ES_values,
      risk_contributions)

  pesi_ottimi[[i]] <- round(weights, digits = 3)
}

# Creazione dataframe con pesi ottimali
pesi_ottimi_df <- do.call(rbind, pesi_ottimi)
rownames(pesi_ottimi_df) <- NULL

# Visualizzazione delle ponderazioni finali
weights_df <- data.frame(Ticker = tickers, ES = ES_values,
    Risk_Contribution = risk_contributions, Weights =
    pesi_ottimi[[length(pesi_ottimi)]])
print(weights_df)

```

```
ggplot(weights_df, aes(x = Ticker, y = Weights, fill =
    Ticker)) +
  geom_bar(stat = "identity") +
  ggtitle("Ponderazioni del Portafoglio basate sul Risk
      Parity tramite ES") +
  xlab("Asset") +
  ylab("Ponderazione") +
  theme_minimal()

returns_df <- as.data.frame(returns_df)

# Rendimento portafoglio
ptf_rend_rolling_ES <- data.frame(pesi_ottimi_df *
    returns_df[(rolling_window + 1):total_observation, ],
                                     Rendimento_ptf =
                                         rowSums(pesi_ottimi_df *
                                         returns_df[(rolling_window
                                         + 1):total_observation, ]))
ptf_rend_rolling_ES <-
    rownames_to_column(ptf_rend_rolling_ES, var = "Data")
ptf_rend_rolling_ES$Data <- as.Date(ptf_rend_rolling_ES$Data)

# Rendimento ipotetico investimento
investimento_iniziale <- 10000
ptf_rend_rolling_ES$Rendimento_ipotetico <- cumprod(1 +
    ptf_rend_rolling_ES$Rendimento_ptf) *
    investimento_iniziale

# Confronto andamento portafoglio Risk Parity Classico e
    Expected Shortfall
ptf_merged <- ptf_rend_rolling %>%
```

```
    select(Data, Rendimento_ipotetico) %>%
    full_join(ptf_rend_rolling_ES %>% select(Data,
       Rendimento_ipotetico),
              by = "Data", suffix = c("_standard", "_ES"))

long_df <- ptf_merged %>%
  pivot_longer(cols = starts_with("Rendimento_ipotetico"),
               names_to = "Tipo_Rendimento",
               values_to = "Rendimento")

# Visualizzazione andamento portafogli
ggplot(long_df) +
  geom_line(aes(Data, Rendimento, color = Tipo_Rendimento),
     size = 1) +
  labs(x = "Data",
       y = "Valore del portafoglio") +
  theme_minimal(base_size = 14) +
  theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5, size = 20,
     family = "mono"),
        axis.title.x = element_text(margin = margin(t = 20),
           size = 16, family = "mono"),
        axis.text = element_text(size = 14, family = "mono"),
        axis.title.y = element_text(margin = margin(r = 20),
           size = 16, family = "mono"),
        legend.text = element_text(size = 14, family =
           "mono"),
        legend.title = element_text(size = 16, family =
           "mono")) +
  scale_x_date(date_breaks = "12 month", date_labels = "%Y")
     +
  scale_y_continuous(n.breaks = 10)
```

```

# Rendimento e Deviazione Standard del portafoglio annualizzati
Return.annualized(ptf_rend_rolling_ES, scale = 215)
sd.annualized(ptf_rend_rolling_ES, scale = 215)
```

Listato 3.3: Analisi del portafoglio Risk Parity tramite R considerando come misura di rischio l'Expected Shortfall

Confronto portafoglio Risk Parity: Media-Varianza e Expected Shortfall

L'approccio alla costruzione dei due portafogli tramite le due misure di rischio precedentemente analizzate, Media-Varianza nel primo caso e Expected Shortfall (99%) nel secondo, è stato il medesimo:

1. Estrazione dei rendimenti

2. Definizione della finestra mobile

3. Calcolo della misura di rischio

4. Individuazione del contributo al rischio dei singoli asset

5. Ponderazione e individuazione dei pesi ottimali

I risultati ottenuti, visibili dalle figure 3.12 e 3.13, risultano essere simili sia in termini di rendimento che di volatilità e drawdown.

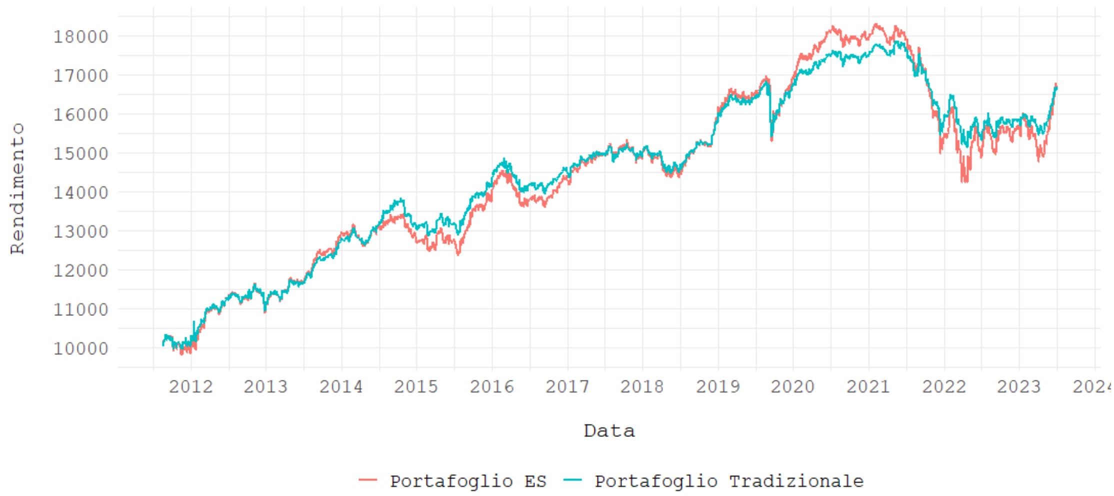

Figura 3.12: Confronto portafogli Risk Parity tradizionale e Risk Parity - Expected Shortfall

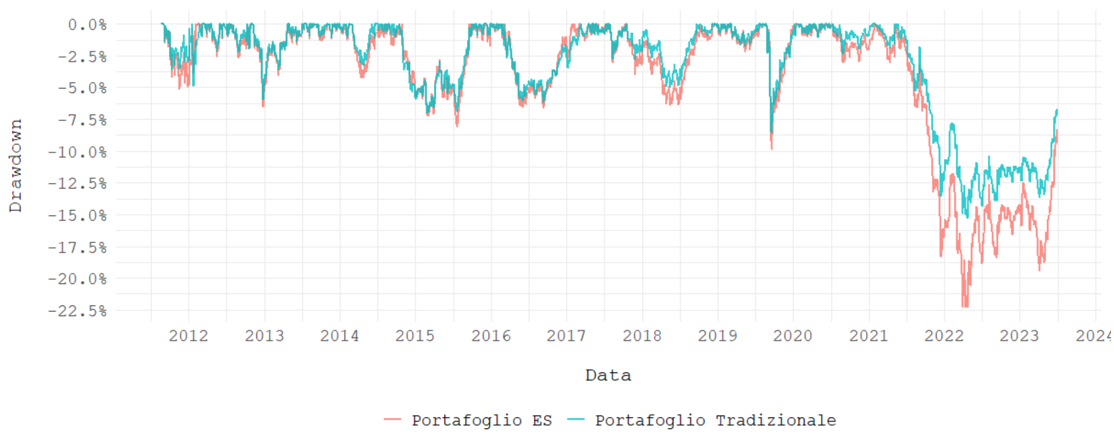

Figura 3.13: Confronto DrawDown portafogli Risk Parity tradizionale e Risk Parity - Expected Shortfall

Il portafoglio costruito considerando l'Expected Shortfall come misura di rischio risulta avere una volatilità annualizzate maggiore a fronte di un rendimento uguale. Interessante è lo studio del rapporto Rendimento/Deviazione Standard che premia il portafoglio Risk Parity costruito tramite approccio Media-Varianza. La tabella

3.6 riassume le principali metriche appena descritte.

Tale risultato poteva essere dedotto dallo studio delle figure 3.12 e 3.13: il portafoglio costruito tramite Expected Shortfall ha ottenuto un rendimento molto simile, ma in periodi di instabilità il Drawdown è risultato maggiore.

A completezza di tale confronto, non è sufficiente studiare solamente il rendimento e la volatilità ma è fondamentale analizzare anche il VaR e l'ES dei due portafogli costruiti. I dati, riportati in tabella 3.7, confermano che il portafoglio costruito considerando come misura di rischio l'Expected Shortfall risulta essere più rischioso.

Modello	Rend	Dev Std	Rend/DevStd
RP Media-Varianza	4,37%	6,00%	0,73
RP Expected Shortfall	4,38%	7,10%	0,62

Tabella 3.6: Confronto portafoglio Risk Parity a leva

Modello	VaR(95%)	ES(95%)	VaR(99.9%)	ES(99.9%)
RP Media-Varianza	-0,0061%	-0,0077%	-0,0116%	-0,0128%
RP Expected Shortfall	-0,0095%	-0,012%	-0,0181%	-0,0197%

Tabella 3.7: Confronto VaR e ES dei due portafogli costruiti con misure di rischio diverse

Codice R per la determinazione del Value at Risk e dell'Expected Shortfall tramite approccio Risk Metrics

```r
# Caricamento dei rendimenti del portafoglio in "dati"
dati <- ptf_rend_rolling %>% select(Risk_Parity_Rend =
    Rendimento_ptf)
head(dati)

```

```
# Normalizzazione dei rendimenti
mean_rendimenti <- mean(dati$Risk_Parity_Rend, na.rm = TRUE)
sd_rendimenti <- sd(dati$Risk_Parity_Rend, na.rm = TRUE)
dati$norm_rendimenti <- (dati$Risk_Parity_Rend -
    mean_rendimenti) / sd_rendimenti

# Parametri del modello Risk Metrics
alpha <- 0.95 # Livello di confidenza
lambda <- 0.94 # Fattore di decadimento

# Calcolo della volatilita
dati$volatility <- NA
dati$volatility[1] <- sd(dati$Risk_Parity_Rend, na.rm =
    TRUE)  # inizializzazione con la deviazione standard

for (i in 2:nrow(dati)) {
  dati$volatility[i] <- sqrt(lambda * (dati$volatility[i -
      1]^2) + (1 - lambda) * (dati$Risk_Parity_Rend[i - 1]^2))
}

# Simulazioni Monte Carlo
num_simulations <- 1000000
simulated_returns <- matrix(NA, nrow = num_simulations, ncol
    = 1)

for (i in 1:num_simulations) {
  simulated_returns[i] <- mean_rendimenti +
      dati$volatility[nrow(dati)] * rnorm(1)
}

# Calcolo del Value at Risk (VaR) dalle simulazioni
```

```
VaR_mc <- quantile(simulated_returns, probs = 1-alpha)

# Calcolo dell'Expected Shortfall (ES)
ES_mc <- mean(simulated_returns[simulated_returns <= VaR_mc])

# Stampa del VaR e dell'ES
cat("Value at Risk (VaR) al ", alpha*100, "% :",
    round(VaR_mc, 4), "\n")
cat("Expected Shortfall (ES) al ", alpha*100, "% :",
    round(ES_mc, 4), "\n")
```

Listato 3.4: Confronto VaR e ES del portafoglio selezionato

3.7 Una nota sulle distribuzioni Pareto-Lévy stabili in finanza

Le assunzioni condotte sinora si basano sull'assunzione che i rendimenti degli strumenti finanziari si distribuiscano come una normale. Un approccio più complesso ma ancor più dettagliato prevederebbe l'introduzione e applicazione di modelli che stimino le distribuzioni dei rendimenti più precisamente.

Le distribuzioni Pareto Levy stabili o Pareto stabili sono una famiglia di distribuzioni di probabilità concorrenti alla distribuzione normale per lo studio dei rendimenti[4].

Queste distribuzioni hanno le code grosse, quindi associano una probabilità degli eventi estremi più alta.

[4] Insieme alle Pareto stabili, in letteratura sono state proposte diverse alternative alla normale: c'è chi sostiene che la t di Student sia una buona alternativa alla normale perché rimane simmetrica e ha le code più grosse della normale.

Esistono quattro definizioni equivalenti che descrivono una variabile casuale stabile.

- La v.c X si definisce stabile se per ogni coppia di costanti $a, b > 0$, esistono altre 2 costanti $c > 0$ e $d \in R$, tali che $aX_1 + bX =^d cX + d$ in cui X_1, X_2, X_3 sono variabili casuali indipendentemente ed identicamente distribuite (iid) e d indica l'uguaglianza in distribuzione. Se due variabili casuali iid seguono una distribuzione stabile, allora una loro combinazione lineare seguirà la stessa distribuzione.

- La v.c X si definisce stabile se per ogni numero intero $n > 2$ esistono costanti $a_n > 0$ e $b_n \in R$ tali che $X_1 + X_2 + ... + X_n =^d a_nX + b_n$ in cui le X_n sono vv.cc. iid.

- Una variabile casuale si definisce stabile se ha un dominio di attrazione, cioè la media di variabili i.i.d. non stabili converge alla stabilità[5]. In altri termini se tutti i rendimenti di un anno che non sono proprio stabili, il loro valor medio diventa un valore stabile.

- L'ultima definizione di stabilità è l'espressione della loro funzione caratteristica.

Le distribuzioni Pareto Stabili sono caratterizzate da quattro parametri.

- Il parametro α, o indice di stabilità, fornisce indicazioni sulla curtosi quindi sulla grandezza delle code. Si tratta del parametro più importante: può variare da 0 a 2 e quando $\alpha = 2$ la distribuzione è gaussiana, mentre quando diminuisce l'area sotto le code aumenta.

[5]Questo concetto non è altro che una generalizzazione del Teorema del Limite Centrale

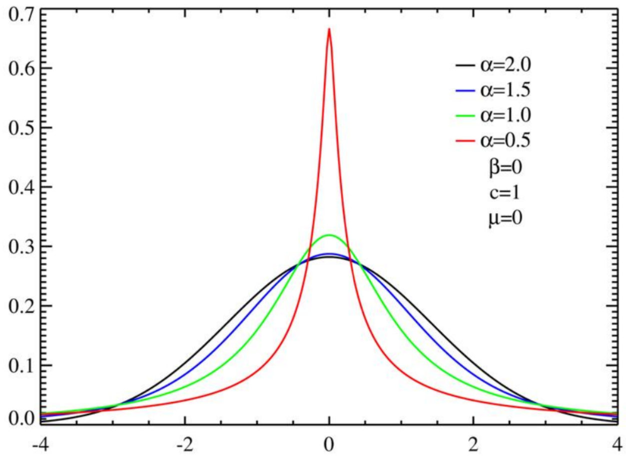

Figura 3.14: Comportamento della distribuzione al variare di α.

- Il parametro β esprime l'asimmetria;

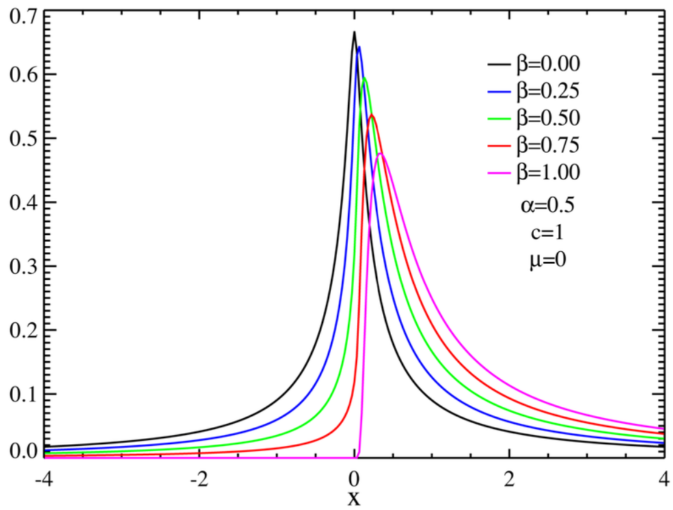

Figura 3.15: Comportamento della distribuzione al variare di βconsiderando solo l'asimmetria a destra. Nel caso di asimmetria a sinistra il comportamento è analogo, ma si concentra sull'altra coda.

- Il parametro μ, detto parametro di localizzazione, è l'equivalente della media.;
- Il parametro σ, detto parametro di scala, è legato alla dispersione o variabilità e può essere usato come misura per il rischio.

Capitolo 4

Conclusioni

In un'epoca di continui cambiamenti, incertezze economiche e mercati volatili, la gestione efficace del rischio è diventata più cruciale che mai. La ricerca di nuovi metodi di gestione del portafoglio riflette l'esigenza crescente di scoprire tecniche innovative per affrontare nuove sfide in un ambiente in rapida evoluzione come quello finanziario.

L'elaborato si propone quindi di analizzare in profondità il concetto di risk parity e la sua applicazione in tema di ottimizzazione di portafoglio, confrontandolo con altre strategie di investimento più comuni. Questo approccio si distingue per la sua capacità di bilanciare i rischi tra le varie asset class promuovendo una maggiore diversificazione e resilienza del portafoglio rispetto alle fluttuazioni economiche. È fondamentale osservare e studiare il passato, ma risulta ancor più importante capire quali siano i principali catalizzatori che muovono il mercato associando quindi ai modelli prettamente quantitativi anche un approccio macroeconomico più qualitativo.

Riassumendo quanto discusso, Markowitz ha dimostrato che la diversificazione del portafoglio contribuisce enormemente a ridurre il rischio complessivo e, introducendo un approccio di tipo risk parity, è possibile equilibrare i contributi al rischio dei diversi asset ottenendo quindi una distribuzione del rischio più omogenea e mitigando gli effetti negativi di eventi estremi. Il modello analizzato, inoltre, ha evidenziato come un approccio risk-based consenta una gestione più efficace anche in termini di rapporto rendimento-rischio: in periodi caratterizzati da alta volatilità tale approccio consente una maggiore stabilità e quindi un vantaggio significativo per gli investitori. Una leva finanziaria attentamente gestita, inoltre, può portare grandi benefici senza comprometterne l'integrità.

A conferire validità al modello sono state condotte diverse analisi, specialmente considerando le principali misure di rischio moderne e coerenti: il Value at Risk (VaR) e l'Expected Shortfall (ES). Tramite il linguaggio di programmazione R, sono stati modellati due portafogli: uno gestisce la varianza come misura di rischio, mentre il secondo l'Expected Shortfall. Nonostante il primo abbia ottenuto risultati superiori, sussiste grande somiglianza tra i due modelli.

In conclusione si può quindi dire che, per un investitore, l'adozione di una strategia risk parity può rappresentare una valida alternativa ai metodi tradizionali. Tuttavia, è cruciale considerare i costi associati alla gestione e implementazione dello stesso che possono richiedere un'attenta gestione quantitativa. Nonostante rappresenti sicuramente un significativo avanzamento nell'ambito dell'ottimizzazione del portafoglio e fornisca una soluzione equilibrata che tiene conto delle moderne esigenze di gestione del rischio, esso deve essere considerato come una prima fase ed è obbligo dell'investitore comprendere al meglio la strategia e gestirla anche in base alle proprie esigenze.

Bibliografia

[1] Andrew W. Lo e A. Craig MacKinlay. «A Non-Random Walk Down Wall Street». In: ().

[2] Philippe Artzner et al. «Coherent Measures of Risk». In: *Mathematical Finance* 9 (lug. 1999), pp. 203–228. DOI: 10.1111/1467-9965.00068.

[3] Maria Debora Braga. «Risk parity versus other µ-free strategies: a comparison in a triple view». In: *Investment Management and Financial Innovations* ().

[4] Bridgewater. In: *The All Weather Strategy - 4Q09*.

[5] Bridgewater. «The All Weather Story». In: URL: https://www.bridgewater.com/research-and-insights/the-all-weather-story.

[6] Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria. *Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems*. https://www.bis.org/publ/bcbs189.htm. 2010.

[7] Y. Feng e D. P. Palomar. «Successive Convex Optimization Methods for Risk Parity Portfolio Design». In: *IEEE Transactions on Signal Processing* 63.19 (2015), pp. 5285–5300. URL: https://doi.org/10.1109/TSP.2015.2452219.

[8] Roy H. Kwon Hassan T. Anis. «Cardinality-constrained risk parity portfolios». In: *Elsevier* ().

[9] Darryll Hendricks. «Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data». In: *FEDERAL RESERVE BANK of NEW YORK (FRBNY) ECONOMIC POLICY REVIEW* (1996), pp. 39–70.

[10] «Investing.com». In: URL: https://www.investing.com/.

[11] Lawrence Summers James Poterba. «Main Reversion in Stock Prices: Evidence and Implications». In: ().

[12] Daniel P. Palomar Linlong Wu Yiyong Feng. «General sparse risk parity portfolio design via successive convex optimization». In: *Elsevier* ().

[13] Thomas J. Linsmeier e Neil D. Pearson. «Value at Risk». In: *Financial Analysts Journal* 56.2 (2000), pp. 47–67. DOI: 10.2469/faj.v56.n2.2343. eprint: https://doi.org/10.2469/faj.v56.n2.2343. URL: https://doi.org/10.2469/faj.v56.n2.2343.

[14] J. V. de M. Cardoso e D. P. Palomar. «riskParityPortfolio: Design of Risk Parity Portfolios». In: R package version 0.2.2. 2021. URL: https://CRAN.R-project.org/package=riskParityPortfolio.

[15] Harry Markowitz. «Portfolio Selection». In: *The Journal of Finance* 7.1 (1952), pp. 77–91. ISSN: 00221082, 15406261. URL: http://www.jstor.org/stable/2975974 (visitato il 29/08/2024).

[16] Edward Qian. *Diversification Return and Leveraged Portfolios*.

[17] Edward Qian. «Risk Parity Fundamentals». In.

[18] RiskMetrics Group. *RiskMetrics™ – Technical Document*. Rapp. tecn. JP Morgan, 1996.

[19] Jerome Teiletche Sebastien Maillard Thierry Roncalli. «On the properties of equally-weighted risk contributions portfolios». In: ().

[20] Paul Bouchey Thomas Lee Andrew Spellar. «Understanding Risk Parity». In: *The Clifton Group* ().

[21] John Von Neumann e Oskar Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1944.