



Università
Ca' Foscari
Venezia

DIPARTIMENTO DI ECONOMIA

Corso di Laurea Magistrale in Economia e Finanza

Tesi di Laurea

**Distribuzioni Stabili nei modelli di Portafoglio:
Applicazione di Misure Coerenti di Rischio a
Due Code e PSO**

Relatore:

Prof. Marco Corazza

Candidato:

Pietro Baldo

Matricola 974364

anno accademico 2023/2024

Indice

1	Teoria di selezione del portafoglio	3
1.1	Il Modello Media-Varianza	3
1.1.1	Pilastri della Modern Portfolio Theory	4
1.2	Criticità del modello Mean-Variance	10
1.2.1	Assunzioni	10
1.2.2	Modellazione dei rendimenti	12
	Errori nella stima dei parametri	12
	Ipotesi distributive sottostanti	13
1.2.3	Misura di rischio	15
1.3	Misure di rischio coerenti	16
1.3.1	Assiomi di coerenza	16
1.3.2	Misure di rischio coerenti classiche	20
2	Elementi del modello di selezione del portafoglio	24
2.1	Misura di rischio coerente a due code	24
2.1.1	Definizione e proprietà	25
2.1.2	Analisi di coerenza	27
2.2	Particle Swarm Optimization	29
2.2.1	Elementi dell'algoritmo	30
2.3	Il modello Corazza - Fasano - Gusso	34
2.3.1	Presentazione del modello	35

3	Distribuzioni stabili	39
3.1	Introduzione alle distribuzioni stabili	39
3.2	Definizione e proprietà di una distribuzione stabile	40
3.3	Parametri di una distribuzione stabile	42
3.4	Analisi empirica	46
4	Il Modello di selezione del portafoglio	51
4.1	specificazione del modello	51
4.1.1	Sistema dei vincoli e misura di rischio	52
4.1.2	Integrazione delle distribuzioni stabili	54
4.2	Applicazione pratica al FTSE MIB	56
4.2.1	Dataset	56
4.2.2	Intervallo temporale considerato	58
4.2.3	Parametri dell'algoritmo	61
4.2.4	Risultati ottenuti	63
	Output del modello	64
	Confronto con modelli alternativi	68
	Confronto per diversi valori del parametro p	71
A	Codice Matlab per l'analisi empirica relativa al capitolo 2	79
B	Codici Matlab per l'algoritmo risolutivo	82
B.1	Distribuzioni Stabili	82
B.2	Distribuzioni Normali	91
B.3	Distribuzioni Campionarie	99
	Bibliografia	108

Introduzione

In un contesto finanziario come quello attuale, caratterizzato da dinamiche di mercato in costante evoluzione, l'adozione di una modellistica capace di affrontare tali repentini cambiamenti risulta fondamentale per effettuare adeguate decisioni di investimento. In questo scenario, la teoria di portafoglio moderna ha assunto un'importanza sempre maggiore, riuscendo a fornire modelli e tecniche innovative adottate nel concreto dai principali operatori finanziari.

I notevoli progressi compiuti negli ultimi anni in questa disciplina sono prevalentemente legati al superamento delle criticità dei modelli classici, primo tra tutti il modello Mean-Variance introdotto da H. Markowitz nel suo studio del 1952, "Portfolio Selection". L'obiettivo principale di questa tesi è proporre un approccio innovativo al problema della selezione statica del portafoglio, attraverso l'implementazione di alcuni elementi della teoria giudicati efficaci nel parziale superamento di tali criticità. Nello specifico, questi elementi sono individuabili in i) una misura di rischio coerente a due code, proposta da Chen and Wang (2008), per una corretta rappresentazione del rischio finanziario in entrambe le code della distribuzione dei rendimenti; ii) un algoritmo risolutivo per l'ottimizzazione non vincolata, che permette di risolvere problemi "complessi" tramite una buona approssimazione della soluzione in tempi di calcolo ragionevoli; iii) l'applicazione di distribuzioni Pareto Levy Stabili, generalmente ritenute più adeguate alla modellazione dei rendimenti di titoli finanziari rispetto alle classiche forme distributive (Gaussiana).

Il presente elaborato è suddiviso in quattro capitoli; nel primo capitolo

si presenterà una rapida disamina del problema di selezione di portafoglio, con riferimento al modello Mean Variance. In particolare, dopo un'iniziale descrizione degli elementi caratterizzanti tale modello, ci si focalizzerà sulle criticità che esso incorpora e che fanno emergere la necessità di sviluppare nuovi approcci. Il capitolo si concluderà con una descrizione delle misure di rischio coerenti, introdotte da Artzner et al. (1999), che forniscono un importante strumento per la gestione del rischio nel contesto finanziario moderno.

Il secondo capitolo sarà incentrato principalmente sulla descrizione degli elementi che caratterizzano il modello proposto, basato su una misura di rischio coerente a due code e sull'utilizzo dell' algoritmo risolutivo Particle Swarm Optimization. Il capitolo prevede inoltre l'analisi del modello proposto dai professori Corazza, Fasano e Gusso (2013), da cui il modello oggetto di questa tesi si ispira, condividendo di fatto la misura di rischio e la metodologia risolutiva.

Nel terzo capitolo si presenterà l'elemento innovativo di questo modello, rappresentato dalle distribuzioni Pareto Levy Stabili. In particolare, si entrerà nel dettaglio relativamente alla definizione e alle proprietà di tale strumento statistico, approfondendo inoltre l'analisi dei parametri caratterizzanti queste forme distributive. Il capitolo si concluderà con un'analisi di tipo empirico sull'applicazione di tali distribuzioni ai rendimenti finanziari, con un confronto riferito alle distribuzioni normali.

Il quarto ed ultimo capitolo sarà invece incentrato sulla presentazione del modello completo, focalizzandosi in particolare sul sistema di vincoli utilizzati e sul meccanismo di integrazione delle distribuzioni stabili all'interno dello stesso. Verrà infine presentata un'applicazione empirica del modello al mercato finanziario italiano in diverse finestre temporali comprese tra aprile 2014 e marzo 2024, focalizzandosi in particolare sui risultati ottenuti nei vari periodi di allenamento (*in sample*) e di test dei risultati (*out of sample*), e nel confronto con modelli alternativi costruiti prevedendo differenti ipotesi distributive.

Capitolo 1

Teoria di selezione del portafoglio

1.1 Il Modello Media-Varianza

Nel 1952, con la pubblicazione di "*Portfolio Selection*" nel *Journal of Finance*, Harry Markowitz introdusse un metodo rivoluzionario per la selezione dei portafogli d'investimento. Questo modello, basato sull'equilibrio tra rendimento atteso e rischio, ha trasformato radicalmente il modo in cui gli investitori allocano le proprie risorse. Contrariamente alle tecniche di selezione di portafoglio basata sul rendimento atteso scontato dei titoli finanziari (*stock picking*), Markowitz propose un approccio basato sul contributo al rendimento e al rischio, espresso in termini di varianza, che ogni titolo ha all'interno del portafoglio complessivo. In un contesto di selezione basato unicamente sul rendimento atteso attualizzato, la scelta dell'investimento ricade necessariamente nell'investire la totalità delle risorse disponibili nell'asset che presenta la redditività attesa maggiore. Questo non è più vero se il criterio di selezione si focalizza sul rendimento complessivo del portafoglio e, soprattutto, sul rischio dello stesso. L'intuizione fondamentale di Markowitz risiede nella riduzione della rischiosità complessiva del portafoglio tramite la diversificazione, ottenuta sfruttando le diverse correlazioni tra i rendimenti dei vari titoli presenti nel paniere. In questa prima parte dell'elaborato si procederà ad una rapida disamina

dei pilastri della letteratura, partendo dal concetto di portafoglio e dei parametri sui quali esso viene selezionato; si procederà con il sottolineare i punti di forza del modello a là Markowitz, concludendo con l'evidenziare le principali lacune che questo incorpora e che fanno sorgere la necessità di sviluppare nuovi approcci.

1.1.1 Pilastri della Modern Portfolio Theory

Per riprendere il modello di selezione del portafoglio proposto da Markowitz è necessario innanzitutto specificare quali sono gli obiettivi che questo intende raggiungere. In particolare, è opportuno sottolineare che lo scopo del modello (detto anche Mean-Variance) è quello di creare un'allocazione, ovvero di indicare quale porzione del capitale a propria disposizione investire in ciascuno degli asset disponibili in un dato paniere. Successivamente, è opportuno specificare che tale modello è un modello cosiddetto statico, cioè che viene costruito con un'ottica di investimento uniperiodale, dove non si prevedono tecniche di ribilanciamento periodico o di reinvestimento dei proventi realizzati nel tempo, ma si costruisce un portafoglio tale per cui, al tempo t , si abbia la migliore allocazione possibile per quelle che sono le esigenze dell'investitore.

Per quanto riguarda il tipo di investitore considerato nel contesto del modello Mean-Variance, è necessario assumere alcune caratteristiche particolari che definiscono il profilo degli investitori target per il modello di Markowitz. Questo modello infatti si basa sulla teoria dell'utilità attesa degli investitori, i quali presentano le seguenti caratteristiche:

- Avversione al rischio;
- Non sazietà, ovvero per i quali una ricchezza maggiore comporta sempre un'utilità superiore;
- Razionalità, ovvero capaci in ogni momento di compiere le scelte che comportano l'utilità maggiore possibile.

Queste tre caratteristiche sono necessarie poiché, in primo luogo, si devono definire le esigenze degli investitori da considerare in sede di costruzione del portafoglio. Nella selezione di portafoglio, si costruisce un sistema di vincoli per i quali le allocazioni efficienti sono quelle in cui, dato un certo livello di rendimento atteso, viene minimizzata la rischiosità complessiva del portafoglio, oppure viceversa, dato un certo livello di rischiosità, si massimizza il rendimento atteso complessivo¹. Essendo gli investitori soggetti avversi al rischio che puntano ad ottenere dei rendimenti, è necessario definire il *trade-off* ottimo tra rischiosità e redditività del portafoglio tramite una funzione di utilità che risulti:

- Una funzione crescente: Per il principio di non sazietà, l'utilità di $(X + 1)$ dollari è sempre maggiore dell'utilità di (X) dollari²;
- Una funzione marginalmente decrescente, cioè con crescita meno che proporzionale: Data l'avversione al rischio degli investitori, per $x_1 < x_2$ si avrà che $u(x_1 + \Delta x) - u(x_1) > u(x_2 + \Delta x) - u(x_2)$.

Queste caratteristiche vengono catturate dalla funzione di utilità proposta da Von Neumann and Morgenstern, nel contesto Mean-Variance dove il rischio è espresso tramite la varianza dei rendimenti. Questa viene espressa come:

$$E[U(X)] = V(r_x, \sigma_X^2).$$

Dopo aver definito il concetto di utilità attesa per gli investitori, e da cosa essa dipende, si prosegue introducendo più nello specifico il concetto di portafoglio. Per riprendere una definizione fornita dal professor Ingersoll, un portafoglio è lo strumento tecnico che trasferisce ricchezza da un periodo al successivo. Questo strumento è caratterizzato da un rendimento atteso e da una certa rischiosità, che come è stato più volte ribadito, in questo caso è misurata dalla varianza dei

¹Ingersoll (1987)

²Elton et al. (1991)

rendimenti. Il rendimento del portafoglio viene definito come una variabile casuale, combinazione lineare dei rendimenti attesi degli asset che lo compongono (anch'essi variabili casuali), e la percentuale di capitale investita in ciascuno di questi asset:

$$RP = x_1R_1 + \dots + x_NR_N = \sum_{i=1}^N x_iR_i$$

ed il suo valore atteso, ovvero il rendimento atteso, può essere espresso nel seguente modo:

$$E(R_P) = \sum_{i=1}^N x_i r_i = r_P$$

r_P viene anche espresso tramite notazione vettoriale come $\mathbf{x}'\mathbf{r}$. Questo risultato è facilmente ottenibile grazie alla proprietà di linearità dell'operatore valore atteso $E(\cdot)$. Per quanto riguarda la varianza, non sussiste la linearità osservata per il valore atteso, infatti la varianza della somma di variabili casuali non è data dalla somma delle varianze delle singole variabili casuali, poiché entra in gioco anche la covarianza. In particolare $\text{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j)$. Perciò, a livello di portafoglio si ottiene³:

$$\text{Var}(R_P) = \sum_{i=1}^N x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N x_i x_j \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j = \sigma_P^2$$

dove il termine $\rho_{i,j}$ indica l'indice di correlazione di Bravais-Pearson. Tale indice è considerato una misura standardizzata della dipendenza in quanto assume valori all'interno di un intervallo definito $[-1, +1]$, indipendentemente dalle unità di misura delle variabili originarie. Questa standardizzazione è il risultato della divisione della covarianza delle due variabili per il prodotto delle loro deviazioni standard. Da questa formulazione può essere immediatamente apprezzato il ruolo della correlazione

³si tralasciano i passaggi di derivazione del risultato, in quanto non utili allo scopo di questo elaborato

nella riduzione del rischio complessivo:

1. Il primo termine dell'equazione, $\sum_{i=1}^N x_i^2 \sigma_i^2$, rappresenta il contributo al rischio di ciascun asset nel portafoglio. Questo contributo è ponderato in base al quadrato della proporzione dell'asset nel portafoglio (x_i) e alla varianza individuale dell'asset (σ_i^2).
2. Il secondo termine, $2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N x_i x_j \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j$, riflette il rischio aggiuntivo (o la sua riduzione) che deriva dall'interazione tra diversi asset nel portafoglio. Questa interazione è misurata dai coefficienti di correlazione $\rho_{i,j}$.

Con riferimento al secondo termine, si sottolinea che se i coefficienti di correlazione sono inferiori a 1, si presenta la possibilità di ridurre il rischio. Quando gli asset non si muovono in maniera perfettamente sincronizzata, i rendimenti negativi di un asset possono essere compensati dai rendimenti positivi di un altro, riducendo così la variabilità complessiva dei rendimenti del portafoglio. Nel caso estremo in cui gli asset hanno una correlazione pari a -1, i termini di varianza derivanti dall'interazione si annullerebbero perfettamente, portando così alla potenziale eliminazione di questa componente di rischio.

Anche per σ_P^2 , è possibile la formulazione in notazione vettoriale: $\mathbf{x}'V\mathbf{x}$, dove V rappresenta la matrice di varianza-covarianza:

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,N-1} & \sigma_{1,N} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2,N-1} & \sigma_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{N-1,1} & \sigma_{N-1,2} & \cdots & \sigma_{N-1}^2 & \sigma_{N-1,N} \\ \sigma_{N,1} & \sigma_{N,2} & \cdots & \sigma_{N,N-1} & \sigma_N^2 \end{pmatrix}$$

A questo punto si può introdurre il problema matematico che si intende risolvere,

formalizzato come segue:

$$\min_{x_1, \dots, x_N} x'Vx$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x'r = \pi \\ x'e = 1 \end{cases}$$

Ovvero la minimizzazione della varianza di portafoglio, tenuto conto del vincolo di rendimento atteso desiderato: $x'r = \pi$, e del vincolo di investimento di tutto il capitale (vincolo di bilancio): $x'e = 1$, dove:

- x è il vettore (colonna) contenente le quote d'investimento in ciascuno degli N titoli disponibili;
- π rappresenta un valore costante obiettivo;
- e rappresenta un vettore di unità.

Risolvendo il precedente problema per ogni rendimento desiderato π , si otterrà la frontiera efficiente, ovvero l'insieme delle soluzioni ottime. Questa può essere rappresentata graficamente nel seguente modo:

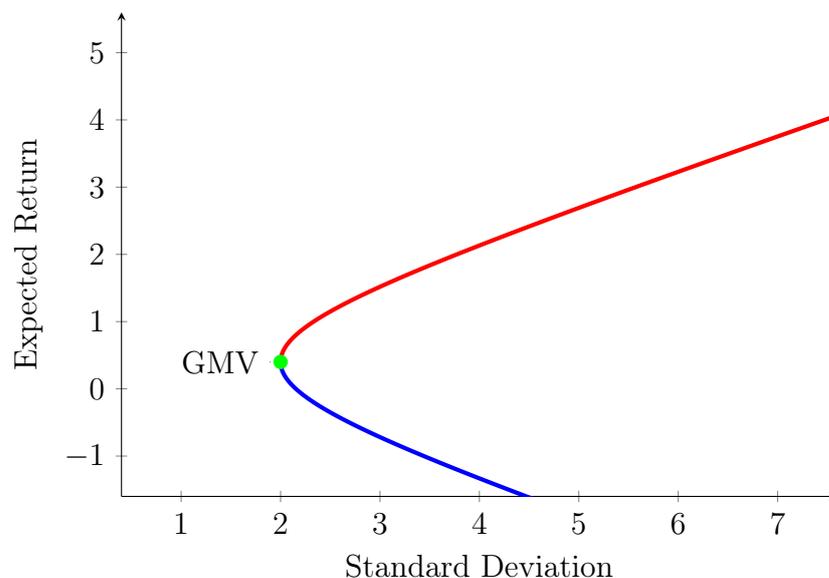


Figura 1.1: Frontiera efficiente con $N \geq 2$ asset rischiosi

Dove, il punto verde rappresenta il portafoglio a varianza minima globale (*Global Minimum Variance*), la linea rossa rappresenta la frontiera efficiente, e al di sotto della quale giacciono tutti i portafogli che vengono detti dominati in Media-Varianza, ovvero che a parità di varianza, hanno un rendimento inferiore di un portafoglio che giace sulla frontiera efficiente.

A questo punto si pone il problema di selezionare, tra i portafogli efficienti, quello più adatto alle esigenze dell'investitore. Questa non è una scelta banale, in quanto richiede agli investitori di specificare π , che in altri termini corrisponde a specificare il grado di avversione al rischio. Questo, soprattutto in un ambiente molto instabile come quello dei mercati finanziari, potrebbe risultare difficile; è probabile, infatti, che un investitore non riesca a specificare correttamente un rendimento coerente con le proprie preferenze, rischiando di assumere una dose di rischio superiore a quella effettivamente desiderata o di rinunciare ad una parte di rendimento. Per affrontare questo problema si richiama la teoria sull'utilità precedentemente introdotta, con la quale si modellizzano le preferenze degli investitori. In particolare si ricorda che le caratteristiche degli investitori considerati dalla Modern Portfolio Theory sono quelle di investitori avversi al rischio, e allo stesso tempo, alla ricerca di rendimenti, che presentano funzioni di utilità convesse. Qualora le funzioni di utilità degli investitori dipendessero solamente da varianza e rendimenti, ovvero dagli stessi input che richiede la frontiera efficiente, questi due elementi potrebbero essere combinati per ottenere il portafoglio ottimo, in particolare, si potrebbe sfruttare la tangenza tra una delle isocurve di utilità⁴ e la frontiera efficiente, incrociando così le esigenze degli investitori con le opportunità ottime disponibili. La famiglia di funzioni di utilità che presentano questa caratteristica, e sono quindi compatibili con l'approccio media-varianza, è quella dell'utilità quadratica, espressa dalla seguente

⁴le funzioni di utilità non sono rappresentate da una curva indipendente, ma da una serie di curve caratterizzate dalla stessa relazione dei fattori che le descrivono, ognuna associata a diversi livelli di utilità.

formulazione:

$$U(R_P) = R_P - \frac{a}{2}R_P^2,$$

dove, con $a > 0$

$$E[U(R_P)] = r_P - \frac{a}{2}(r_P^2 + \sigma_P^2)$$

Con la funzione di utilità quadratica si nota come l'utilità attesa dipenda dal rendimento atteso e dalla varianza del portafoglio, le stesse variabili considerate dal criterio media-varianza.

1.2 Criticità del modello Mean-Variance

Gli aspetti positivi ed innovativi che caratterizzano il modello Mean-Variance illustrato sono principalmente imputabili alla sua semplicità. Tramite l'utilizzo di solo due parametri, (media e varianza) si riesce ad ottenere un'allocazione efficiente che considera il fattore diversificazione, il tutto tramite la risoluzione di un problema per via analitica, che restituisce una e una sola soluzione. Questa relativa semplicità però rappresenta anche la causa dei principali limiti che questo modello incorpora, e che ha spinto la ricerca allo sviluppo di modelli alternativi che cercano di superare le criticità tramite la proposta di nuovi approcci.

1.2.1 Assunzioni

La prima famiglia di limiti che si intende trattare è quella relativa alle assunzioni che caratterizzano lo stato del mondo ipotizzato da Markowitz. In particolare si ipotizza un mondo con le seguenti caratteristiche⁵:

- Mercati cosiddetti *frictionless*⁶;

⁵Merton and Samuelson (1992)

⁶Mercati in cui non ci sono costi di transazione o tasse sulle plusvalenze, e in cui i titoli acquistabili sono perfettamente divisibili

- Investitori *price-taker*⁷;
- Vendite allo scoperto permesse per tutti i titoli e senza restrizioni (*short selling*⁸);
- Assenza di opportunità di arbitraggio⁹;
- Conoscenza, da parte dell'investitore, delle distribuzioni di probabilità dei rendimenti r_i con $i = 1, \dots, N$.

In particolare, con l'ipotesi di un mondo privo di frizioni, che comprendono costi di transazione e tassazione, si sta tralasciando un insieme di fattori che nella realtà hanno un enorme impatto e che, se non considerati, potrebbero erodere i rendimenti ottenuti tramite l'allocazione che non li considera. Allo stesso modo, la considerazione dei titoli come perfettamente divisibili rappresenta un altro particolare limite. Nella realtà, gli investimenti in titoli avvengono come multipli di lotti minimi di transazione, (cosiddetti round), e non è quindi permesso investire in frazioni di un asset. Questo contribuisce a limitare drasticamente lo spazio delle soluzioni e deve quindi essere considerato quando si mira ad un'applicazione pratica. Un altro fattore che deve essere preso in considerazione è legato alle vendite allo scoperto (*short selling*). Queste sono considerate sempre ammesse nel modello mean-variance, ma, come verificatosi nel corso della crisi legata al crollo del mercato immobiliare (2008), in periodi di instabilità finanziaria vengono spesso ristrette o vietate dagli enti regolatori dei mercati. Questo fattore risulta rilevante in quanto,

⁷Le azioni dell'investitore non possono cambiare i prezzi

⁸Le posizioni *short* sono utilizzate per "scommettere" nel ribasso del prezzo di un dato asset, che si ipotizza essere sopravvalutato dal mercato. Per farlo gli investitori prendono a prestito un certo titolo ad un istante t per un determinato periodo, e lo vendono sul mercato. Scaduto tale periodo essi procedono al riacquisto dello stesso asset (istante $t + 1$), con l'obiettivo di rendere il titolo prestato. In questo modo, se tale asset sarà sceso di valore, l'investitore avrà realizzato un guadagno dovuto alla differenza tra il prezzo al quale l'ha venduto (istante t) e quello alla quale l'ha riacquistato (istante $t + 1$). Per la loro particolare rischiosità, le vendite allo scoperto sono spesso limitate dalle autorità che regolano i mercati finanziari

⁹Tutti gli asset privi di rischio devono avere gli stessi tassi di rendimento

come evidenziato da Black and Litterman, nel caso questo vincolo non sia considerato, generalmente il modello mean-variance restituisce allocazioni pesantemente esposte verso posizioni *short* in alcuni titoli. Infine, assumere che gli investitori siano *price takers*, e quindi che non abbiano alcuna influenza sull'andamento dei mercati e dei prezzi degli asset in cui investono, equivale a non considerare tutti gli investitori istituzionali che invece rimangono i principali *player* dei mercati finanziari. Per affrontare questa serie di limiti la letteratura ha proposto numerosi modelli alternativi che risolvono una o più di queste criticità ¹⁰.

1.2.2 Modellazione dei rendimenti

La seconda serie di limiti che si intende considerare, verte principalmente sulla modellazione dei rendimenti degli asset, utilizzata per il modello mean-variance. In particolare si è visto ripetutamente come questo utilizzi solamente i primi due momenti per descrivere statisticamente i rendimenti degli asset nel paniere a disposizione. Questi parametri inoltre non sono i veri parametri, che non sono direttamente osservabili dagli investitori, ma stime ottenute dalle serie storiche dei rendimenti passati. Nel corso del tempo, la letteratura ha fornito numerose evidenze delle problematiche che questo approccio comporta.

Errori nella stima dei parametri

Una descrizione del problema di stima dei parametri può essere trovato nel lavoro di Black and Litterman (1992) in cui si evidenzia come, l'approccio basato sui dati storici, porti molto spesso a portafogli poco efficienti. Inoltre in Michaud (1989) si definisce l'ottimizzazione tramite approccio mean-variance come "*estimation-error maximizer*". Questo avviene perché, l'ottimizzazione alla Markowitz, tende a sovrappesare i titoli che presentano alti rendimenti attesi e correlazio-

¹⁰In particolare, si rimanda ai lavori Mansini and Speranza (1999) in relazione al problema dei lotti minimi di transazione, Lobo et al. (2007) per il problema dei costi di transazione e Mansini and Speranza (2005) per un approccio che considera entrambi i problemi

ni negative, che sono però quelle che generalmente comportano maggiori errori di stima. I problemi in questo senso derivano dal fatto che

1. I dati storici utilizzati per stimare la covarianza possono variare significativamente in base al periodo di tempo scelto, in particolare se tale periodo include crisi finanziarie o condizioni di mercato anomale. Queste stime potrebbero non riflettere accuratamente le dinamiche future del mercato;
2. L'ottimizzazione dei portafogli sulla base dei dati storici porta spesso all'*overfitting*. Ciò si verifica quando un modello è eccessivamente complesso e cattura il rumore dei dati come se fosse un vero modello sottostante. Tali modelli hanno buone prestazioni *in sample*, ma scarse fuori dal campione (*out of sample*);
3. I dati storici non considerano i cambiamenti futuri nelle politiche economiche, nelle dinamiche di mercato, nei comportamenti degli investitori e nel contesto macroeconomico in generale.

Ipotesi distributive sottostanti

In secondo luogo, la modellazione dei rendimenti presenta delle criticità derivanti dalle ipotesi distributive sottostanti. In particolare, nel modello mean-variance si assume la normalità delle distribuzioni dei rendimenti, che come evidenziato dalla letteratura, non sono sufficienti a descriverne le dinamiche osservabili sui mercati finanziari. Già verso la metà degli anni 60', con i lavori di Mandelbrot (1963) e Fama (1965), si iniziò a notare come le distribuzioni dei rendimenti azionari fossero caratterizzati da un certo grado di leptokurtosi ¹¹. Successivamente, si iniziò a prendere in considerazione anche la rilevanza dell'asimmetria: In Simkowitz and Beedles (1978) si rileva come le distribuzioni dei rendimenti azionari

¹¹Curve di distribuzione che presentano un "picco" più pronunciato e code più grosse rispetto ad una distribuzione gaussiana. Le implicazioni finanziarie risultano in una frequenza più elevata di osservazioni intorno alla media, e di osservazioni estreme (*outliers*) rispetto a quanto previsto da una distribuzione normale

tendano ad essere caratterizzate da una certa asimmetria, che, se positiva, rappresenta una certa misura di guadagno per gli investitori; inoltre viene evidenziato il ruolo della diversificazione nella riduzione, oltre che della volatilità del portafoglio, anche della sua eventuale asimmetria. In Kon (1984) viene studiata l'applicazione di diverse forme distributive nella modellazione dei rendimenti, tra cui anche le distribuzioni Pareto-Levy Stabili, e viene individuata la mistura di distribuzioni normali, quale miglior "*fit*" per rappresentare asimmetria e kurtosi tipiche dei titoli azionari. Infine in Peiro (1999) si evidenzia una tendenza rispetto ad asimmetrie nei rendimenti, condizionata però dall'ipotesi distributiva normale sottostante, già ampiamente rifiutata all'epoca.

Asimmetria (skewness) e kurtosi (kurtosis) sono concetti estremamente rilevanti nella teoria del portafoglio, non solo perché rappresentano misure di performance e rischio, in quanto momento terzo (pari) e quarto (dispari) di una distribuzione, ma anche perché offrono una visione più completa della distribuzione dei rendimenti degli asset. Gli investitori tendono a preferire asset con asimmetria positiva poiché ciò implica una maggiore probabilità di ottenere rendimenti superiori alla media; allo stesso modo, le distribuzioni con alta kurtosi sono associate a un rischio maggiore di eventi estremi, che possono essere sia positivi che negativi. La loro non considerazione nei modelli di portafoglio potrebbe dunque portare a tralasciare una certa quantità di informazione contenuta in questi dati. Per di più, si ricorda che, come evidenziato da Szegö (2005), la correlazione lineare può essere utilizzata come misura di dipendenza solo in caso di distribuzioni di probabilità caratterizzate da aree di densità distributive uguali ed ellittiche; e che le di funzioni di utilità quadratica sono utilizzabili solo in caso di distribuzioni simmetriche, che come si è visto non sono rappresentative delle serie storiche dei rendimenti, quantomeno nel breve termine.

1.2.3 Misura di rischio

L'ultimo punto critico rispetto al modello Mean-Variance che si affronta in questa sede è quello legato alla misurazione del rischio tramite la varianza. Gran parte dei problemi relativi a questo aspetto derivano strettamente da quanto esposto nella precedente sezione circa le ipotesi distributive dei rendimenti. In particolare, si è evidenziato come, in mancanza di simmetria nella distribuzione di probabilità, vengono a mancare le ipotesi necessarie all'utilizzo della varianza come misura adeguata del rischio. Nel caso di asimmetria positiva, ad esempio, minimizzare la varianza equivale a ridurre la possibilità di realizzare rendimenti superiori alla media, risultando in un'incompatibilità con le funzioni di utilità degli investitori, i quali valutano le perdite più gravemente rispetto alle realizzazioni di profitti equivalenti¹². Formalmente, questo problema emerge dalla natura statistica della varianza, che è quella di misura di dispersione, e che quindi non tiene in considerazione in alcun modo la differente rischiosità implicita in scostamenti positivi e negativi dalla media. Lo stesso Markowitz, in un lavoro successivo (1959) fa riferimento a questo problema, proponendo come alternativa la semi-varianza, che considera solo la dispersione dei rendimenti inferiori alla media, e che può essere espressa come di seguito:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\min(R_i - \mu, 0))^2$$

Questa misura di rischio però non considera un altro problema legato alla varianza, ovvero l'utilizzo del quadrato delle deviazioni dalla media. L'elevazione al quadrato delle deviazioni dalla media accentua l'effetto degli *outliers*, ciò significa che un'unica grande perdita o guadagno può influenzare in modo sproporzionato la misura del rischio, portando ad una potenziale sovrastima del livello di rischio.

¹²Si rimanda al lavoro di Kahneman and Tversky (2013) considerato pionieristico nel campo dell'economia comportamentale, che approfondisce il tema legato alle preferenze degli investitori e al modo in cui vengono prese le decisioni in situazioni "rischiose"

Nonostante i progressi nel comprendere e mitigare le limitazioni delle misure di rischio tradizionali come la varianza e la semi-varianza, la ricerca di misure che riflettano in modo più accurato e completo la natura del rischio finanziari rimane un tema centrale nella teoria di portafoglio moderna. Le misure di rischio tradizionali spesso non riescono a catturare pienamente la complessità e la dinamica dei mercati finanziari attuali, specialmente in contesti caratterizzati da elevata volatilità e eventi estremi, non considerati dai modelli classici.

1.3 Misure di rischio coerenti

In letteratura, il concetto di rischio finanziario e delle misure appropriate per descriverlo, è da sempre un tema di interesse particolarmente diffuso. Questo aspetto inoltre, ha assunto una particolare rilevanza anche in considerazione degli eventi legati alle crisi finanziarie osservate nel corso dei primi anni 2000, in cui i principali modelli di analisi del rischio dell'epoca hanno manifestato tutte le loro lacune. Una particolare attenzione in questo senso deriva dall'introduzione delle cosiddette misure di rischio coerenti, ovvero di funzioni di descrizione del rischio che rispettano determinati assiomi di coerenza, la cui introduzione si deve al lavoro di Artzner et al. (1999). Come di seguito approfondito, queste misure di rischio hanno assunto sempre più rilevanza, anche dal punto di vista normativo, entrando anche a far parte della regolamentazione che disciplina i requisiti di capitale delle istituzioni finanziarie, introdotta dagli accordi di Basilea (Basilea III).

1.3.1 Assiomi di coerenza

Prima di introdurre gli assiomi di coerenza occorre specificare cos'è una misura di rischio e da cosa è formata. Szegö definisce la misurazione del rischio equivalente a stabilire una relazione ρ tra lo spazio di variabili aleatorie X (ad

esempio i rendimenti di un dato insieme di investimenti) e un numero reale non negativo, cioè: $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$. Nel *paper* di Artzner et al. si sottolinea inoltre che lo spazio di variabili aleatorie X sul quale è preferibile focalizzarsi corrisponde alle sole realizzazioni future delle posizioni, e non nelle variazioni che si hanno tra le posizioni attuali e quelle future. In tal senso, la rischiosità delle realizzazioni future viene valutata in confronto ad un valore minimo considerato accettabile da un ente supervisore il quale ha l'onere di decidere se tale posizione possa essere assunta o meno.

Gli assiomi proposti dagli autori, che una misura di rischio deve soddisfare per poter essere definita coerente sono i seguenti:

1. **Invarianza transizionale:** investire una quantità a in un asset *risk free*, riduce il rischio complessivo di un portafoglio X in misura proporzionale ad a . Matematicamente, questo si esprime come segue:

$$\rho(X + a \cdot r) = \rho(X) - a$$

dove:

- $\rho(X)$ rappresenta la misura di rischio del portafoglio X ,
- a è l'ammontare del capitale investito nell'opzione priva di rischio,
- r è il rendimento dell'opzione priva di rischio.

Un'implicazione diretta di questo assioma è che aggiungendo al portafoglio una quantità $\rho(X)$ di asset *risk free*, il rischio totale del portafoglio diventa nullo, ovvero:

$$\rho(X + \rho(X)) = 0.$$

Questo dimostra che, secondo la misura di rischio ρ , aggiungendo un investimento sicuro pari esattamente alla misura di rischio del portafoglio X , si ottiene un portafoglio completamente privo di rischio.

2. **Subadditività.** La subadditività è intrinsecamente legata al concetto di diversificazione. Questo principio, infatti, stabilisce che il rischio complessivo di un portafoglio non può superare la somma dei rischi dei singoli asset. In termini matematici, questo può essere espresso come segue:

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y) \quad \forall \text{ portafoglio } X, Y.$$

Questa relazione mostra che il rischio di una combinazione di posizioni ($X+Y$) è al massimo uguale alla somma dei rischi delle posizioni singole, evidenziando così come la diversificazione possa effettivamente attenuare l'esposizione al rischio, o comunque non aumentarla.

3. **Positiva omogeneità:** Questo assioma stabilisce che per ogni scalare non negativo $\lambda \geq 0$ e per ogni portafoglio X , la misura di rischio ρ soddisfa la seguente proprietà:

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X).$$

Questa equazione esprime che la misura di rischio è direttamente proporzionale alla scala dell'investimento. Se l'ammontare del capitale investito nel portafoglio X aumenta di λ , il rischio misurato da ρ scala allo stesso modo.

4. **Monotonicità:** l'assioma della monotonicità implica che, per ogni portafoglio X e Y , se Y domina, in termini di rischiosità, X , allora la misura di rischio ρ dovrebbe soddisfare la seguente relazione:

$$\rho(Y) \leq \rho(X).$$

Cioè equivale ad affermare che in termini di misura di rischio ρ , Y è considerato sempre meno rischioso di (o tutt'al più tanto rischioso quanto) X .

Una misura di rischio perciò può essere definita coerente se rispetta congiuntamente tutti gli assiomi sopracitati. È interessante evidenziare come la varianza non risulti una misura che soddisfa questi requisiti. In particolare:

1. L'invarianza transizionale non è rispettata, infatti considerando un portafoglio costituito da un titolo rischioso e da un titolo a rendimento certo (con varianza pari a zero), il rischio del portafoglio è costituito esclusivamente dal rischio dell'asset rischioso, e la componente risk-free non mitiga la varianza del portafoglio in alcun modo.
2. La subadditività è rispettata, infatti, come anche precedentemente evidenziato, la varianza di un portafoglio è minore della somma delle varianza dei singoli titoli, per effetto dell'elevazione al quadrato della percentuale di allocazione del capitale in tale titolo (che essendo minore di 1, diminuisce con l'elevazione al quadrato).
3. La positiva omogeneità, anche in questo caso, non è rispettata: essendo questa, una misura quadratica, non rispetta la crescita lineare del rischio, anche se questo limite potrebbe essere aggirato considerando al suo posto la deviazione standard.
4. La monotonicità non viene rispettata, infatti la varianza non riesce a cogliere la relazione d'ordine sottostante poiché il suo ruolo compare solamente nella determinazione della frontiera efficiente, e la preferibilità di un portafoglio rispetto ad un altro dipende invece dalla soggettiva funzione di utilità dell'investitore.

1.3.2 Misure di rischio coerenti classiche

L'introduzione delle principali misure di rischio coerenti necessita il richiamo e la descrizione di un'ulteriore misura di rischio, non propriamente coerente, che funge da base per alcune misure di rischio coerenti tra le più popolari e utilizzate. La misura di rischio in questione è il **Value at Risk** (di seguito definito VaR). Il VaR è nato in risposta alla crisi finanziaria dell'87, internamente alla banca di investimento J.P. Morgan Chase & Co.¹³, per fornire uno strumento di analisi del rischio di mercato più efficace di quelli all'epoca esistenti. Matematicamente, il VaR, rappresenta il quinto (5°) percentile della distribuzione delle realizzazioni di un determinato asset (o portafoglio), e viene perciò definito una misura "*quantile based*". Il VaR al livello di confidenza α per una variabile casuale X viene definito come:

$$\text{VaR}_\alpha(X) = -\inf_x \{x \mid P(X \leq x) \geq \alpha\}$$

Formalmente, può essere interpretare come il minimo valore delle realizzazioni x tale per cui, la probabilità delle realizzazioni inferiore ad x sia minore di α ; in altre parole, rappresenta la perdita minore che si ipotizza verificarsi nel peggior $\alpha\%$ dei casi. Il VaR, presenta alcune proprietà delle misure di rischio coerenti, infatti:

- Si focalizza sulle perdite (coda di sinistra) e non è una misura di dispersione statistica;
- Traduce il rischio tramite un valore monetario (o in termini di valore che esprime la performance), rendendo più facile definire un *trade-off* tra rischio e performance.

Allo stesso modo, esso presenta alcune limitazioni e lacune rispetto alle misure coerenti:

¹³Si rimanda al documento "RiskMetrics" (Longerstaey and Spencer (1996))

- Il VaR non rispetta la Subadditività, poiché, in alcuni casi, si può osservare che: $\text{VaR}_\alpha(X + Y) > \text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y)$, cioè, il rischio insito nell'investimento in un portafoglio di due titoli talvolta può risultare maggiore della somma dei rischi derivanti dall'investimento separato nei singoli titoli. In altre parole, in alcuni casi il VaR non coglie il vantaggio dato dalla diversificazione, ma anzi la penalizza;
- Il VaR non fornisce alcuna indicazione di "*How Bad is Bad*", ovvero di quanto la perdita riscontrata nell' $\alpha\%$ dei casi si discosti dal VaR.

I primi esempi di misura di rischio coerente derivano direttamente dal lavoro di Artzner et al. (1999), nello stesso paper in cui si illustravano gli assiomi di coerenza. Nello specifico, si queste misure sono: **Tail conditional Expectation** (TCE), e **Worst Conditional Expectation** (WCE), e vengono definite come di seguito:

$$\text{TCE}_\alpha(X) \stackrel{def}{=} -\mathbb{E}[X \mid X \leq -\text{VaR}_\alpha(X)]$$

$$\text{WCE}_\alpha(X) \stackrel{def}{=} -\inf\{\mathbb{E}[X \mid A] \mid P[A] > \alpha\}$$

Entrambe sono due misure che utilizzano l'operatore valore atteso $\mathbb{E}(\cdot)$, applicato a diversi elementi:

- il TCE rappresenta il valore atteso delle realizzazioni (perdite) inferiori al VaR;
- il WCE rappresenta il peggior caso di perdita attesa, condizionatamente al fatto che si verifichino degli eventi (rappresentati da A), con una probabilità di realizzazione $P[A] > \alpha$.

Entrambe queste misure di rischio risultano coerenti e rispondono alla domanda: "*How Bad is Bad*", fornendo una dimensione di perdita attesa, ma allo stesso tempo incorporano alcuni limiti, nello specifico:

- il TCE può non soddisfare l'assioma di subadditività nel caso di distribuzioni non continue;
- il WCE è caratterizzato da scarsa applicabilità poiché richiede di conoscere a priori tutti gli eventi che possono avere un impatto sulle realizzazioni X , e soprattutto le probabilità ad essi associati (condizione nella pratica pressoché irrealizzabile).

Per i motivi sopra citati, queste misure di rischio non hanno avuto una grande applicazione pratica nella loro forma originale. In particolare, mentre il WCE ha visto un impiego principalmente limitato all'ambito teorico ed accademico, il TCE è stato utilizzato come base per quella che attualmente è la misura di rischio coerente principale, ovvero il **Conditional Value at Risk** (di seguito CVaR). La predisposizione di questa misura di rischio, chiamata anche Expected Shortfall, si deve a Rockafellar and Uryasev (2002), ed attualmente è una delle misure di rischio più utilizzate nel campo finanziario, anche a seguito della sua adozione nella normativa corrente in merito ai requisiti di capitale, che devono essere rispettati dalle istituzioni finanziarie (Basilea III). Il CVaR, per un livello di significatività pari ad $\alpha \in [0, 1]$, equivale alla media $\Phi_\alpha(x)$ della coda α della distribuzione di $z = f(x, y)$, dove la distribuzione in questione è definita dalla seguente funzione:

$$\Psi_\alpha(x, \zeta) = \begin{cases} 0 & \text{se } \zeta < \zeta_\alpha(x) \\ \frac{\Psi(x, \zeta) - \alpha}{1 - \alpha} & \text{se } \zeta \geq \zeta_\alpha(x) \end{cases}$$

dove $\zeta_\alpha(x)$ è pari al VaR_α associato al portafoglio x . Anche in questo caso, come nel TCE, si prendono in considerazione la media delle realizzazioni inferiori al VaR a livello di significatività α , però, il CVaR risulta sempre coerente, anche nell'eventualità di distribuzioni di probabilità discrete.

Nel corso del tempo, le misure di rischio coerenti hanno acquisito sempre maggiore importanza nell'ambito finanziario, dando vita a numerose varianti ed

evoluzioni delle misure esistenti, come ad esempio l'Entropic Value at Risk (Entropic VaR - Ahmadi-Javid (2012)). Attualmente, una nuova classe di misure di rischio in fase di sviluppo è quella delle misure di rischio a due code. Queste misure saranno approfondite nel capitolo seguente, in quanto rappresentano lo strumento selezionato per la predisposizione del modello proposto in questa tesi.

Capitolo 2

Elementi del modello di selezione del portafoglio

In questo capitolo si introdurranno gli elementi che caratterizzano il modello proposto e come questi risolvono alcune delle criticità dell'approccio mean-variance precedentemente introdotte.

2.1 Misura di rischio coerente a due code

Nel primo capitolo si è affrontato il tema della varianza come misura di rischio, evidenziando i problemi che ne limitano l'adeguatezza nella descrizione del rischio delle attività finanziarie. Successivamente sono state introdotte le misure di rischio coerenti, ovvero quelle misure che, rispettando determinati assiomi di coerenza, risultano più adatte a rappresentare la rischiosità dei titoli finanziari. In questa sezione si approfondirà la misura di rischio coerente introdotta nel lavoro di Chen and Wang (2008), che presenta la particolarità di non focalizzarsi solamente su una delle due code della distribuzione dei rendimenti, ma di considerare contestualmente sia la coda di destra che quella di sinistra.

Riprendendo il lavoro di Chen and Wang, la necessità di una misura di

rischio coerente a due code nasce dall'ipotesi secondo la quale le misure coerenti di tipo "quantile based", focalizzandosi esclusivamente sul *downside risk*, tralasciano una parte di informazione contenuta implicitamente nel potenziale *upside*, rendendo più instabile la stima del rischio rispetto ad una controparte in cui si considera l'intero dominio. Oltre a questo aspetto, viene segnalato anche che nelle misure "quantile based" il rischio corrisponde ad una combinazione lineare delle probabilità ponderate di perdite inferiori al VaR, senza tenere in considerazione che in presenza di distribuzioni non normali (come per i rendimenti) sono necessari differenti ordini di momenti per descrivere adeguatamente le informazioni in essa contenute. Al momento della pubblicazione del paper, l'unica misura a due code riscontrata dagli autori in letteratura era quella trattata da Hamza and Janssen (1998), nella quale il rischio viene misurato tramite la combinazione convessa di semivarianze dei rendimenti di portafoglio. La misura di rischio in questione, oltre a rappresentare linearmente il *trade - off* tra *upside* e *downside*, non rispetta gli assiomi di coerenza. Da qui la necessità di proporre una misura di rischio che tiene in considerazione tutti questi aspetti.

2.1.1 Definizione e proprietà

Entrando nel merito della definizione della misura di rischio, si assume come X la variabile aleatoria p -integrabile, appartenente allo spazio $L^p(\Omega, F, P)$ con $1 \leq p \leq \infty$, e rappresentante i payoff futuri (e quindi rischiosi in quanto aleatori). Dati $p \in [1, \infty)$ e $0 \leq a \leq 1$ si definisce la misura di rischio $\rho_{a,p} : L^p(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ come:

$$\rho_{a,p}(X) = a\|(X - E_Q[X])^+\|_1 + (1 - a)\|(X - E_Q[X])^-\|_p - E_Q[X]$$

dove:

- la norma di ordine 1: $\|(X - E_Q[X])^+\|_1$, rappresenta la variabile casuale che descrive la componente di *upside* rispetto al valore atteso $E_Q[X]$;

- la norma di ordine p : $\|(X - E_Q[X])^-\|_p$, rappresenta la variabile casuale che descrive la componente di *downside* rispetto al valore atteso $E_Q[X]$;
- a rappresenta il coefficiente di *trade-off* tra *upside* e *downside*.

Questa misura descrive la rischiosità da un punto di vista bilaterale, considerando sia i potenziali guadagni sopra la media, sia le potenziali perdite. Per farlo si avvale di norme di diverso ordine, che permettono di includere l'avversione al rischio dell'investitore (tramite il parametro p), e di ponderazioni differenti tra guadagni e perdite (tramite il parametro a). Per meglio specificare il significato e il ruolo di questi due parametri si evidenzia che:

- Il parametro a funge da fattore globale che bilancia linearmente le perdite e i guadagni potenziali. Un valore di a più vicino a 1 pone maggiore enfasi sui guadagni rispetto alle perdite, riflettendo un atteggiamento più ottimista o aggressivo verso l'investimento. Al contrario, un valore di a più vicino a 0 aumenta il peso dato alle perdite, indicando una maggiore avversione al rischio.
- Il parametro p è un fattore locale di controllo del rischio ed agisce in modo non lineare, impattando anche la forma distributiva delle perdite in termini di asimmetria e kurtosi. Nella pratica, p è tipicamente maggiore di 1, riflettendo la tendenza degli investitori a valutare più negativamente le perdite rispetto a quanto positivamente vengono valutati i guadagni.

Combinando questi due parametri, gli investitori hanno la possibilità di descrivere in maniera completa il rischio che intendono accettare, impostando $a = 0.5$ e $p = 1$ si ricade nella situazione di neutralità nei confronti del rischio. In base a queste caratteristiche, $\rho_{a,p}$ si dimostra essere non decrescente rispetto a p e non crescente rispetto ad a (monotona rispetto ad a e p).

2.1.2 Analisi di coerenza

La misura di rischio a due code analizzata presenta alcune similitudini con la famiglia di misure dette *Generalized Deviations* presentate in Rockafellar et al. (2006) in cui si discute la coerenza delle misure di deviazione sotto alcune ipotesi. In relazione a queste misure di rischio, Chen and Wang sottolineano che la misura di rischio a due code può essere vista come una combinazione convessa di misure di deviazione coerenti, rendendo coerente in questo modo anche la misura di rischio a due code. Più nello specifico, riprendendo anche a quanto presentato in Rockafellar et al. (2006), e appoggiandosi ad alcune proprietà delle norme rinvenibili in Johnson and Nysten (1991), si evidenzia l'analisi di coerenza della misura di rischio selezionata. Gli assiomi che una misura deve soddisfare per poter essere definita coerente si ricorda essere i seguenti:

1. Invarianza transizionale: $\rho(X + a \cdot r) = \rho(X) - a$.
2. Subadditività: $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y) \quad \forall$ portafoglio X, Y .
3. Positiva omogeneità: $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$.
4. Monotonicità: $\rho(Y) \leq \rho(X) \quad \forall X \leq Y$.

Invarianza transizionale : $\rho_{a,p}(X)$ soddisfa l'invarianza transizionale, poichè data:

$$\rho_{a,p}(X) = a\|(X - E_Q[X])^+\|_1 + (1 - a)\|(X - E_Q[X])^-\|_p - E_Q[X],$$

$$\|([X + c] - E_Q[X + c])\| = \|(X - E_Q[X])\|,$$

in quanto l'aggiunta di una costante trasla uniformemente la distribuzione dei rendimenti, senza implicazioni sulla deviazione. In questo modo:

$$\rho_{a,p}(X+c) = a\|(X - E_Q[X])^+\|_1 + (1-a)\|(X - E_Q[X])^-\|_p - E_Q[X] - c = \rho_{a,p}(X) - c$$

Subadditività : $\rho_{a,p}(X)$ soddisfa la subadditività poiché:

$$\rho_{a,p}(X+Y) = a\|([X+Y] - E_Q[X+Y])^+\|_1 + (1-a)\|([X+Y] - E_Q[X+Y])^-\|_p - E_Q[X+Y].$$

sfruttando la proprietà di subadditività implicita nelle norme, si ottiene:

$$\|(X + Y - E_Q[X] - E_Q[Y])\|_p \leq \|X - E_Q[X]\|_p + \|Y - E_Q[Y]\|_p.$$

Infatti, per la proprietà definita *triangle inequality*, la norma di una somma è sempre minore uguale alla somma di norme (dello stesso ordine). Di riflesso:

$$\rho_{a,p}(X + Y) \leq \rho_{a,p}(X) + \rho_{a,p}(Y).$$

Positiva Omogeneità : $\rho_{a,p}(X)$ soddisfa la positiva omogeneità poiché:

$$\begin{aligned} \rho_{a,p}(\lambda X) &= a\|(\lambda X - E_Q[\lambda X])^+\|_1 + (1-a)\|(\lambda X - E_Q[\lambda X])^-\|_p - E_Q[\lambda X] \\ &= a\|\lambda(X - E_Q[X])^+\|_1 + (1-a)\|\lambda(X - E_Q[X])^-\|_p - \lambda E_Q[X] \\ &= \lambda (a\|(X - E_Q[X])^+\|_1 + (1-a)\|(X - E_Q[X])^-\|_p - E_Q[X]) \\ &= \lambda \rho_{a,p}(X), \end{aligned}$$

Grazie alle proprietà del valore atteso e delle norme in termini di moltiplicazioni scalari.

Monotonicità : $\rho_{a,p}(X)$ soddisfa la monotonicità poiché, data la relazione:

$$\rho(Y) \leq \rho(X) \quad \forall X \leq Y.$$

Ne consegue che

$$\rho(X) \leq 0 \quad \forall 0 \leq X.$$

Se $X \geq Y$, dato $X = Y + Z$, con $Z > 0$; di conseguenza $\rho(X) \leq \rho(Y) + \rho(Z)$, si ottiene $\rho(X) \leq \rho(Y)$ qualora $\rho(Y) \leq 0$.

In base alle evidenze sopra riportate, è possibile affermare che $\rho_{a,p}(X)$ è considerabile una misura di rischio coerente.

2.2 Particle Swarm Optimization

In questa parte dell'elaborato, si presenta l'algoritmo risolutivo utilizzato nel modello proposto.

Il problema di selezione del portafoglio incorpora una notevole complessità dal punto di vista matematico. Il modello Mean-Variance, descritto nel primo capitolo, incorpora unicamente i vincoli relativi al rendimento atteso e all'investimento totale del capitale. Sebbene tale modello presenti già una notevole complessità, esso ammette una soluzione determinabile per via analitica. Questo non è più possibile dal momento in cui vengono introdotti ulteriori vincoli, necessari alla predisposizione di modelli più rappresentativi del mondo reale, quali ad esempio i vincoli di cardinalità, lotti minimi di transazione, tassazione e altre restrizioni¹. In questi casi, il problema di selezione diventa estremamente più complesso e non è più possibile la determinazione di una soluzione in forma chiusa, o quantomeno se pur possibile, non in un ragionevole lasso di tempo. La risoluzione di modelli che incor-

¹I vincoli in questione vengono definiti vincoli a variabili miste-intero

porano un sistema di vincoli simile viene definita un problema di programmazione matematica *NP-Hard*².

Generalmente, per risolvere problemi caratterizzati da tale complessità ci si avvale di algoritmi risolutivi che approssimano la soluzione ottima, determinando una soluzione "soddisfacente" in un tempo di calcolo ragionevole. In questo senso si distinguono due tipologie di algoritmi:

1. Euristiche: algoritmi che, dato uno specifico problema di ottimizzazione, "costruiscono" una soluzione ammissibile non necessariamente ottima ma, di solito, "vicina" alla soluzione ottima ed in tempi di calcolo "ragionevoli";
2. Meta-euristiche: algoritmi che, dato uno specifico problema di ottimizzazione, "approfondiscono" la ricerca della soluzione ottima nelle zone più "promettenti" dello spazio delle soluzioni.

Per la risoluzione del modello proposto in questa sede si farà ricorso alla Particle Swarm Optimization (PSO), una meta-euristica di ispirazione biologica per l'ottimizzazione non vincolata, la cui paternità si deve a Kennedy and Eberhart (1995). Questo algoritmo imita le dinamiche sociali osservate in natura, come quelle degli stormi di uccelli o dei banchi di pesci, che utilizzano un sistema di regole per coordinare la ricerca di risorse o la fuga dai predatori. Un aspetto cruciale della PSO è l'ipotesi della condivisione delle informazioni tra i membri del gruppo, che incrementa l'efficacia evolutiva e ottimizza la soluzione del problema proposto.

2.2.1 Elementi dell'algoritmo

Dal punto di vista pratico, l'algoritmo è costituito da una popolazione di particelle, le quali rappresentano possibili soluzioni al problema di ottimizzazione considerato. Ad ogni particella viene assegnato un valore rappresentante la "bontà" della soluzione corrispondente (*fitness value*), questo valore viene determinato

²Problemi "difficili" da risolvere almeno quanto quelli NP-completi Cook (2023)

tramite una specifica funzione di *fitness* che descrive il problema di ottimizzazione. Le particelle sono inoltre caratterizzate da una posizione, cioè un'indicazione sulla composizione della soluzione attuale e una velocità, ovvero di una misura dello spostamento rispetto alla posizione precedente. Lo spostamento delle particelle invece, dipende da tre specifici fattori:

1. la posizione attuale;
2. la miglior posizione ottenuta dalla singola particella;
3. la miglior posizione ottenuta in assoluto da una particella dello sciame.

Nell'algoritmo, l'aggiornamento di posizione e velocità avviene iterativamente, fino al termine delle iterazioni previste o alla soddisfazione di determinati criteri di arresto. Le funzioni che determinano tale aggiornamento sono le seguenti:

$$v_i^{k+1} = w^k \cdot v_i^k + c_1 R_1 (p_i^k - x_i^k) + c_2 R_2 (s^k - x_i^k)$$

$$x_i^{k+1} = x_i^k + v_i^{k+1}$$

Dove:

- i rappresenta la particella di riferimento;
- v e x rappresentano rispettivamente velocità e posizione della particella;
- k rappresenta l'iterazione corrente e $k + 1$ l'iterazione successiva;
- w^k è un coefficiente di inerzia che penalizza la velocità, rendendo "costoso" lo spostamento;
- c_1 è un coefficiente di sensibilità alla migliore direzione individuale (*cognitive acceleration coefficient*);

- c_2 è un coefficiente di sensibilità alla migliore direzione collettiva (*social acceleration coefficient*);
- R_1 e R_2 sono dei parametri aleatori generati secondo una distribuzione uniforme $[0, 1]$, che servono per esplorare lo spazio circostante i valori determinati dalla funzione;
- p_i è la miglior posizione mai raggiunta dalla particella i (*personal best*);
- s è la miglior posizione raggiunta in assoluto da una particella dello sciame (*global best*).

Alla posizione x_i^k , viene attribuito il valore di *fitness* $f(x_i^k)$ che ne determina la "bontà" tramite la funzione di *fitness* prescelta. Ad ogni iterazione dell'algoritmo si devono eventualmente aggiornare le migliori posizioni assunte dalla particella e dallo sciame, questo avviene nel seguente modo:

$$\text{Aggiornamento del } \textit{personal best} \begin{cases} p_i^{k+1} = p_i^k & \text{se } f(x_i^{k+1}) \geq f(p_i^k), \\ x_i^{k+1} = p_i^k & \text{se } f(x_i^{k+1}) < f(p_i^k). \end{cases}$$

$$\text{Aggiornamento del } \textit{global best} \begin{cases} s^{k+1} = s^k & \text{se } f(x_i^{k+1}) \geq f(s^k), \\ x_i^{k+1} = s^k & \text{se } f(x_i^{k+1}) < f(s^k). \end{cases}$$

Ovvero, se la i -esima particella presenta una posizione alla quale è associato un valore di *fitness* inferiore³ a quella di *personal best* o *global best*, ne assume rispettivamente il ruolo.

Un ostacolo relativo alla PSO, che impatta significativamente l'utilizzo di tale algoritmo nell'ambito dei problemi di selezione di portafoglio, dipende dai vin-

³La PSO è in realtà un algoritmo di minimizzazione, perciò una *fitness* inferiore indica una maggior vicinanza alla soluzione ottima globale

coli che questi problemi devono necessariamente includere per essere adeguatamente specificati. Come inizialmente accennato infatti, la PSO è un algoritmo per l'ottimizzazione non vincolata, che non comprende parametri di penalità per la limitazione dello spazio delle soluzioni. Questo limite può essere superato integrando il sistema dei vincoli necessario, direttamente all'interno della funzione obiettivo, e soppesandoli in modo tale da risultare prioritari per l'algoritmo, in modo tale che le soluzioni trovate siano quelle che in prima istanza rispettino il sistema dei vincoli, e in secondo luogo offrano una soluzione al problema di minimizzazione (*exact penalty method*). Si consideri l'esempio del problema di selezione di portafoglio tramite il modello Mean-Variance. In questo caso l'algoritmo è così composto:

- le particelle sono rappresentate da alcuni portafogli, che inizialmente vengono generati casualmente (o alternativamente in modo equipesato);
- le posizioni delle particelle corrispondono alle allocazioni dei titoli nei vari portafogli;
- la funzione obiettivo consiste nella minimizzazione della varianza di portafoglio, condizionatamente al rispetto dei vincoli di rendimento atteso e di investimento totale del capitale.

Tale funzione obiettivo viene perciò rappresentata nel seguente modo:

$$\min x_{(PSO)}^t V x_{(PSO)} + \frac{1}{\epsilon} \cdot (|x_{(PSO)}^T \mathbf{1} - 1| + |x_{(PSO)}^T R - R_p|)$$

Dove:

- $|x_{(PSO)}^T \mathbf{1} - 1|$ rappresenta la violazione del vincolo di investimento totale del capitale;
- $|x_{(PSO)}^T R - R_p|$ rappresenta la violazione del vincolo di rendimento desiderato;

- $\frac{1}{\epsilon}$ è un numero particolarmente grande (con ϵ particolarmente piccolo), necessario a porre la soddisfazione dei vincoli come prioritario nel processo di risoluzione.

Si fa notare che tale approccio considera la violazione dei vincoli e non i vincoli in sé; in questo modo, minimizzando la funzione, e di conseguenza anche le violazioni, si ottiene il rispetto degli stessi.

Dal momento della sua presentazione, la PSO è stata oggetto di numerose revisioni e modifiche, atte ad integrare soluzioni per la scelta dei parametri coinvolti, e per adattarsi ad utilizzi in svariati campi diversificati. Nella sezione successiva si propone la disamina di un modello di selezione di portafoglio, implementato tramite la PSO.

2.3 Il modello Corazza - Fasano - Gusso

Il modello che si presenterà in questa sezione potrebbe risultare particolarmente utile allo scopo di questo elaborato in quanto, rispetto al modello che si propone in questa tesi, condivide sia la misura di rischio che l'algoritmo risolutivo.

Nel dettaglio, il modello, presentato in Corazza et al. (2013), si pone come obiettivo quello di ben rappresentare la realtà non gaussiana del mondo finanziario tramite l'utilizzo della misura di rischio coerente a due code trattata in precedenza, con la possibilità di includere anche aspetti legati all'attitudine al rischio degli investitori. Inoltre, per fornire una descrizione più completa e realistica del problema di selezione del portafoglio, vengono inclusi vincoli a variabili miste-interi. Questi vincoli aggiungono sia concretezza sia una maggiore complessità al modello, rendendolo più rappresentativo delle condizioni reali del mercato finanziario. Tutti questi elementi rendono il problema di programmazione matematica associato *NP-Hard*, non lineare, non differenziabile e non convesso. Per risolvere tale problema,

gli autori utilizzano la Particle Swarm Optimization (PSO) in combinazione con il metodo delle penalità esatte, come trattato nella sezione precedente.

2.3.1 Presentazione del modello

Come già accennato, il modello in analisi è basato sulla misura di rischio coerente trattato alla sezione 2.1, la quale, dati $p \in [1, \infty)$ e $0 \leq a \leq 1$, può essere definita come:

$$\rho_{a,p}(X) = a\|(X - E_Q[X])^+\|_1 + (1 - a)\|(X - E_Q[X])^-\|_p - E_Q[X].$$

Dal punto di vista dei vincoli si considerano, oltre ai classici vincoli di rendimento desiderato e di investimento del capitale, anche il vincolo di cardinalità. Quest'ultimo infatti adatta molto bene un problema che riscontrano i gestori di fondi nella selezione del numero di asset da includere nei portafogli, che se troppo grande potrebbe risultare in numerose inefficienze, tra cui quella legata ai costi di transazione, che tramite questo vincolo vengono implicitamente considerati. Nella pratica viene impostata la condizione che ad ognuno degli asset selezionati non possa corrispondere una frazione troppo grande o troppo piccola del capitale:

$$K_d \leq \sum_{i=1}^N z_i \leq K_u, \quad \text{dove } 1 \leq K_d \leq K_u \leq N$$

con $z_i d \leq x_i \leq z_i u$, dove $0 \leq d \leq u \leq 1$. I parametri d e u rappresentano rispettivamente la minima e massima frazione del capitale allocabile in ogni asset e devono soddisfare la seguente relazione: $d \leq \frac{1}{K_d}$ e $u \geq \frac{1}{K_u}$.

Il problema di selezione di portafoglio viene quindi formalizzato come di seguito:

$$\begin{aligned}
 & \min_{X,Z} \quad \rho_{a,p}(R) \\
 & \text{s.t.} \quad \hat{R} \geq l \\
 & \quad \sum_{i=1}^N x_i = 1 \\
 & \quad K_d \leq \sum_{i=1}^N z_i \leq K_u \\
 & \quad z_i d \leq x_i \leq z_i u, \quad \text{con } i = 1, \dots, N, \\
 & \quad z_i(z_i - 1) = 0, \quad \text{con } i = 1, \dots, N.
 \end{aligned}$$

dove il primo vincolo, $\hat{R} \geq l$, rappresenta il rendimento desiderato, il secondo ($\sum_{i=1}^N x_i = 1$), rappresenta il vincolo di investimento del capitale, il terzo e quarto vincolo rappresentano il vincolo di cardinalità, e l'ultimo vincolo, $z_i(z_i - 1) = 0$, sancisce il carattere binario di $z_i[0, 1]$ e rappresenta una possibile formulazione del vincolo di integralità⁴

Alla luce della natura di problema non lineare, non convesso e a variabili miste-interi, che generalmente ammette numerosi minimi locali, la ricerca di un minimo globale viene "approssimata" tramite la risoluzione con la PSO, che permette una solvibilità in tempi di calcolo "ragionevoli", accompagnata in genere da un buon grado di precisione nella soluzione. Come specificato, si utilizza il metodo delle penalità esatte, come descritto nella sezione 2.2, per includere il sistema dei vincoli, considerati per tramite della loro violazione (in ottica di minimizzazione).

⁴tale vincolo non viene trattato nello specifico in quanto, come specificato dagli autori, al di fuori dello scopo del modello in analisi

La funzione obiettivo da minimizzare in questo modo diventa la seguente:

$$\begin{aligned}
 P(X, Z; \epsilon) = & \rho_{a,p}(R) + \frac{1}{\epsilon} \left[\max\{0, l - \hat{R}\} + \left| \sum_{i=1}^N x_i - 1 \right| \right. \\
 & + \max \left\{ 0, K_d - \sum_{i=1}^N z_i \right\} + \max \left\{ 0, \sum_{i=1}^N z_i - K_u \right\} \\
 & + \sum_{i=1}^N \max\{0, z_i d - x_i\} + \sum_{i=1}^N \max\{0, x_i - z_i u\} \\
 & \left. + \sum_{i=1}^N |z_i(1 - z_i)| \right]
 \end{aligned}$$

Ogni addendo all'interno della parentesi quadra rappresenta una possibile violazione dei vincoli considerati nel modello. Ad esempio, il termine $\max\{0, l - \hat{R}\}$ rappresenta la violazione del vincolo di rendimento desiderato. Questa formulazione restituisce il massimo tra 0 e la differenza tra il rendimento ottenuto dall'algoritmo e il rendimento desiderato. Minimizzando la funzione obiettivo, si riduce implicitamente tale differenza, cercando quindi di raggiungere il rendimento desiderato. Lo stesso ragionamento si applica agli altri termini che penalizzano le violazioni dei rispettivi vincoli:

- $\left| \sum_{i=1}^N x_i - 1 \right|$: penalizza la deviazione dalla condizione che la somma dei pesi degli asset sia pari a 1.
- $\max \left\{ 0, K_d - \sum_{i=1}^N z_i \right\}$ e $\max \left\{ 0, \sum_{i=1}^N z_i - K_u \right\}$: penalizzano rispettivamente se il numero di asset selezionati è inferiore al minimo K_d o superiore al massimo K_u .
- $\sum_{i=1}^N \max\{0, z_i d - x_i\}$ e $\sum_{i=1}^N \max\{0, x_i - z_i u\}$: penalizzano le violazioni dei limiti inferiore d e superiore u di allocazione per ciascun asset.

Minimizzando la funzione obiettivo complessiva $P(X, Z; \epsilon)$, il modello cerca di trovare una soluzione che soddisfi il più possibile tutti i vincoli imposti, assicurando così la conformità alle condizioni desiderate.

Il modello illustrato rappresenta una delle possibili applicazioni della PSO al problema di selezione di portafoglio. Come verrà approfondito capitolo 4, incentrato sulla descrizione del modello oggetto di questa tesi, si proporrà una variante al modello Corazza - Fasano - Gusso, che considera anche le distribuzioni stabili, ritenute generalmente più adatte alla rappresentazione statistica dei rendimenti azionari.

Capitolo 3

Distribuzioni stabili

3.1 Introduzione alle distribuzioni stabili

Nel primo capitolo, si è evidenziato come le ipotesi distributive alla base dei modelli classici presentino alcune limitazioni, soprattutto relative alla modellazione dei rendimenti tramite distribuzioni gaussiane. I principali problemi emersi derivano dalla rappresentazione di variabili casuali complesse, come i rendimenti degli asset, mediante una forma distributiva che considera solamente i primi due momenti. Questo approccio tende infatti a tralasciare una certa dose di informazione contenuta nei momenti di ordine superiore al secondo. Tale consapevolezza ha stimolato l'esplorazione di modelli matematici alternativi che possano gestire complessità oltre le ipotesi gaussiane.

Una di queste alternative, che incorpora una maggiore aderenza ai dati finanziari empirici, è rappresentata dalle distribuzioni stabili. A differenza delle distribuzioni normali, le distribuzioni stabili sono particolarmente adatte a descrivere dati caratterizzati da kurtosi e asimmetria, che, come evidenziato nel corso del precedente capitolo, sono caratteristiche comunemente riscontrabili nelle distribuzioni dei rendimenti finanziari. Dal punto di vista storico, la prima modellazione dei rendimenti azionari tramite distribuzioni normali è riscontrabile nell'opera visiona-

ria di Bachelier (1900), nella quale l'autore assimilava il comportamento casuale dei prezzi azionari al processo fisico di diffusione delle particelle nei liquidi o gas, seguendo il moto browniano. Questa distribuzione, nel corso degli anni si affermò come quella di riferimento per la modellistica in ambito finanziario, anche alla luce delle sue caratteristiche di semplicità. Successivamente, come già anticipato, questa prassi venne messa in discussione da Mandelbrot (1963) e Fama (1965), dove per la prima volta venne sottolineata la presenza di kurtosi nelle distribuzioni dei rendimenti osservabili nei mercati, e si propose come alternativa, le distribuzioni Pareto Stabili. In particolare, Mandelbrot si accorse inizialmente che la legge di distribuzione dei redditi proposta da Pareto si adattava molto bene alla descrizione di numerose altre variabili aleatorie, quali ad esempio le dimensioni delle aziende o delle città. La caratteristica peculiare di questo tipo di distribuzione è quella di comportarsi molto bene nella coda distributiva, cioè trattando adeguatamente gli eventi rari, pur presentando qualche "problema" nella parte centrale. Tramite la combinazione con le distribuzioni stabili proposte da Lévy (1925), Mandelbrot propose questa nuova famiglia di distribuzioni, che sotto determinate condizioni, si è rivelata essere particolarmente adatta per analizzare i rendimenti finanziari, specialmente per la gestione degli eventi estremi che le distribuzioni gaussiane tendono a sottovalutare.

3.2 Definizione e proprietà di una distribuzione stabile

In riferimento a queste distribuzioni, è opportuno procedere con l'analisi delle specificità che le contraddistinguono. Il primo aspetto rilevante è relativo alla definizione, che può avvenire secondo diverse modalità. Ripercorrendo l'analisi fornita nel lavoro di Nolan (2012), in cui si analizzano nel dettaglio le caratteristiche

di questi "strumenti", si possono individuare alcune proprietà che sono necessarie per la definizione di una distribuzione stabile:

1. Una variabile casuale X è stabile (o stabile in senso lato) se, per due variabili casuali X_1 e X_2 , indipendenti e identicamente distribuite a X , e per qualsiasi costante positiva $a, b > 0$, l'equazione:

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + d$$

è soddisfatta, con una costante positiva $c > 0$, e $d \in \mathbb{R}^1$. La variabile casuale è strettamente stabile (o stabile in senso stretto) se l'equazione sopra vale con $d = 0$ per ogni a e b . Una variabile casuale è simmetricamente stabile se è stabile e distribuita simmetricamente attorno a 0, ad esempio $X \stackrel{d}{=} -X$. L'interpretazione di questa proprietà è il mantenimento della forma distributiva anche in seguito all'addizione. Tale caratteristica, è propria anche delle variabili casuali Gaussiane, infatti le distribuzioni stabili sono una famiglia di distribuzioni, tra cui, sotto determinate caratteristiche, rientrano anche le normali.

2. Una variabile casuale, non degenere², X è stabile se e solo se, per ogni $n > 1$ esistono due successioni di costanti $c > 0$, e $d \in \mathbb{R}$, tali che:

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n$$

dove $X_1, X_2 \dots X_n$ sono variabili casuali *i.i.d.* (indipendenti e identicamente distribuite) a X . Anche questa è una proprietà in cui si determina il mantenimento della forma distributiva delle stabili sotto l'ipotesi di "somma" di variabili casuali stabili *i.i.d.*.

¹ $\stackrel{d}{=}$ indica l'uguaglianza in distribuzione

²Variabile casuale con varianza $\neq 0$, cioè diversa da una costante

3. Una variabile casuale non degenera Z è stabile se esiste un dominio di attrazione tale per cui, date due successioni di costanti $a_n > 0$, e $b_n \in \mathbb{R}$ e data una serie di variabili casuali $X_1, X_2 \dots X_n$ *i.i.d.*:

$$a_n(X_1 + X_2 + \dots + X_n) - b_n \xrightarrow{d} Z$$

³ per $n \rightarrow \infty$, cioè la somma normalizzata di un elevato numero di variabili casuali stabili converge in distribuzione verso una variabile casuale stabile (dominio di attrazione).

4. Una variabile casuale X è stabile se presenta la seguente equazione caratteristica:

$$\phi(u) = \begin{cases} \exp(-\gamma|u|^\alpha [1 - i\beta (\tan \frac{\pi\alpha}{2}) (\text{sign } u)] + i\delta u), & \alpha \neq 1 \\ \exp(-\gamma|u| [1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\text{sign } u) \log |u|] + i\delta u), & \alpha = 1 \end{cases}$$

dove la notazione diventa: $X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta, 1)$, in cui α, β, γ e δ sono i parametri della distribuzione, e l'intero 1 indica il tipo di parametrizzazione che si sta utilizzando⁴

3.3 Parametri di una distribuzione stabile

Con riferimento ai parametri esposti nell'equazione caratteristica si specificano i seguenti aspetti:

- $\alpha \in (0, 2]$, è detto **esponente caratteristico** o indice di stabilità, ed è definito in un dominio compreso tra 0 e 2. Insieme al parametro β , definisce la forma della distribuzione, ed è in qualche modo legato alla kurtosi, fornendo una misura dell'area sottesa (probabilità) le code della distribuzione. Valori

³ \xrightarrow{d} indica la convergenza in distribuzione

⁴sono possibili più di una parametrizzazione, in questa sede viene riportata la più diffusa

più bassi di α si traducono in code più pesanti, il che indica una maggiore probabilità di deviazioni estreme dalla mediana o dalla media. Per $\alpha < 2$, la varianza della distribuzione diventa infinita⁵, inoltre per $\alpha < 1$, anche la media diventa infinita. Nel caso di $\alpha = 2$ la varianza invece risulta finita. È interessante evidenziare che, sotto alcune ipotesi, anche le distribuzioni gaussiane sono stabili, ma limitatamente al caso in cui $\alpha = 2$. Dal punto di vista finanziario questo significa che assumere una distribuzione gaussiana, equivale a considerare la minore probabilità sottesa alle code di distribuzione (minore probabilità di accadimento di eventi estremi). Questo, in altre parole presuppone che nel considerare una distribuzione gaussiana si sta sistematicamente sottostimando il rischio.

- $\beta \in [-1, 1]$, è un parametro legato all'asimmetria, e, come anticipato, con il parametro α contribuisce a definire lo *shape* della distributiva. Si precisa inoltre che:

$$\beta \in [-1, 1] \begin{cases} \beta < 0 & \text{presuppone asimmetria negativa} \\ \beta = 0 & \text{presuppone simmetria} \\ \beta > 0 & \text{presuppone asimmetria positiva} \end{cases}$$

con $\beta = -1$ nel caso di completa asimmetria a sinistra, e $\beta = 1$ nel caso di completa asimmetria a destra

- $\gamma \in [0, +\infty)$ è un parametro di scala, che misura la dispersione della distribuzione di probabilità. Si specifica che è diverso dalla varianza, in quanto è lineare e non include l'effetto quadratico (si comporta in modo più simile alla deviazione standard). Dal punto di vista matematico, questo si presenta nell'equazione caratteristica delle variabili casuali stabili, come un coefficiente

⁵Non significa che il rischio è infinito, ma piuttosto che la varianza non è una buona misura di rischio

applicato all'esponenziale in cui si definisce la restante parte della funzione, amplificando più o meno la "velocità" con cui si determina l'ampiezza della distribuzione. È inoltre un parametro strettamente legato ad α , risultando in un effetto di γ mitigato, in presenza di α più grandi (vicini a 2), a causa della forma più ristretta della distribuzione e delle code più "sottili".

- $\delta \in \mathbf{R}$ è un parametro di locazione, che, nel caso di $\alpha \in [1, 2]$, coincide con il valore medio. Vale inoltre la proprietà secondo la quale, se si somma una costante k ad una variabile casuale X , questa verrà traslata orizzontalmente di k , senza intervenire su asimmetria o forma distributiva in generale:

$$X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \rightarrow X + k \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta + k)$$

con $k \in \mathbf{R}$.

Il suo utilizzo è legato all'adattamento del modello teorico ai dati reali, tramite l'allineamento con il valore medio osservato.

Un aspetto rilevante che riguarda le distribuzioni stabili è legato alle funzioni di densità di probabilità (pdf) e funzioni di densità cumulata (cdf). Queste importanti funzioni di sintesi della distribuzione infatti, nel caso di distribuzioni stabili non sono quasi mai esprimibili in forma chiusa, a causa dell'elevata complessità matematica che le caratterizza. Vi sono tuttavia tre casi particolari in cui questo è possibile, ovvero nel caso di distribuzioni Normali, Cauchy e Levy:

1. **Normale:** Una variabile casuale X si distribuisce come una Normale: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ se presenta la seguente funzione di densità di probabilità:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty.$$

Come già specificato, una distribuzione stabile che presenta un'esponente caratteristico pari a $\alpha = 2$, è assimilabile ad una normale.

2. **Cauchy:** Una variabile casuale X si distribuisce come una Cauchy: $X \sim \text{Cauchy}(\gamma, \delta)$ se presenta la seguente funzione di densità di probabilità:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (x - \delta)^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Come per la Normale, una distribuzione stabile può assumere la forma di una distribuzione Cauchy, nel caso in cui $\alpha = 1$ e $\beta = 0$.

3. **Lévy:** Una variabile casuale X si distribuisce come una Levy $X \sim \text{Lévy}(\gamma, \delta)$ se presenta la seguente funzione di densità di probabilità:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{1}{(x - \delta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2(x - \delta)}\right), \quad \delta < x < \infty.$$

Anche in questo caso, una distribuzione stabile può assumere la forma di una distribuzione Lévy, in particolare, nel caso in cui $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = 1$.

È interessante osservare le funzioni di densità di probabilità, per i casi riportati sopra, le quali appaiono nella seguente forma:

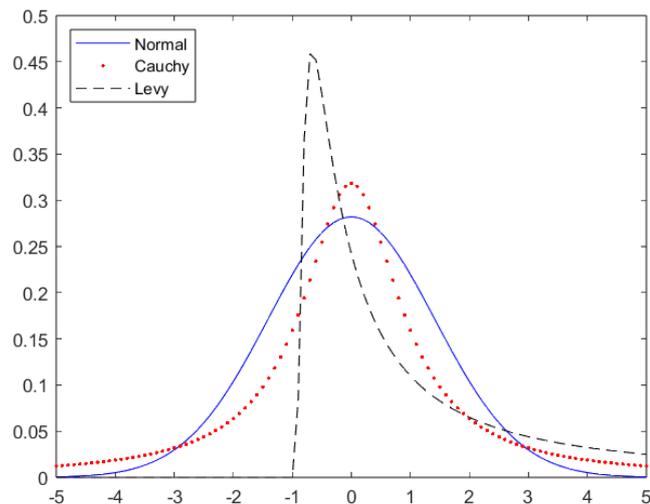


Figura 3.1: PDF per distribuzioni Normali, Cauchy e Lévy

3.4 Analisi empirica

Dopo aver illustrato le distribuzioni stabili e averne analizzato caratteristiche e proprietà, è interessante osservare nella pratica come queste si comportano nel campo finanziario. A questo scopo, si propone un'analisi condotta su cinque titoli del FTSE Mib, per i quali si sono calcolati i rendimenti (logaritmici) compresi tra il 31 marzo 2014 e il 14 maggio 2024. Sulle serie storiche ricavate, sono stati stimati i parametri delle distribuzioni stabili:

Titoli	alpha	beta	gamma	delta
Campari	1.7513159	-0.1300489	0.0092300	0.0009351
Enel	1.7387755	-0.0304720	0.0090616	0.0006656
Intesa San Paolo	1.6481827	-0.0517126	0.0109441	0.0008636
Leonardo	1.7061225	-0.0492279	0.0125931	0.0007861
Moncler	1.7504034	-0.0350927	0.0119153	0.0006956

Tabella 3.1: Parametri stabili, stimati per alcuni titoli del FTSE Mib tra marzo 2014 e maggio 2024

Come emerge dall'analisi dei parametri presentati nella Tabella 3.1, i valori di α oscillano tra 1.65 e 1.75, inferiori al valore soglia di 2, ovvero del valore dell'esponente caratteristico che presuppone la normalità delle distribuzioni. Questo conferma l'ipotesi di presenza di kurtosi nelle distribuzioni dei rendimenti, indicando una maggiore probabilità relativa agli eventi estremi rispetto a quella stimata tramite i modelli gaussiani. Altrettanto interessanti risultano le stime relative ai parametri β , per i quali si osservano valori distanti da 0 (ipotesi di simmetria), presentando in tutti e cinque i casi dei valori negativi che suggeriscono per i titoli in questione una tendenziale asimmetria a sinistra.

Per corroborare ulteriormente l'ipotesi di non normalità delle serie storiche proposte, si è svolto il test di Kolmogorov-Smirnov (Massey Jr (1951)), un test

particolarmente utilizzato per verificare l'ipotesi distributiva delle serie storiche. L'ipotesi nulla h_0 del test è che la serie storica segua una distribuzione normale. Qualora il test, sotto la voce *hypothesis*, restituisca un valore pari ad 1, si ottiene un rifiuto dell'ipotesi nulla al livello di significatività α ; alternativamente un valore pari a 0 equivale ad un non rifiuto della stessa. Di seguito i risultati:

Titoli	hypothesis	p-value	K-S Statistic	α
Campari	1	1.18×10^{-7}	0.0568	1%
Enel	1	1.31×10^{-9}	0.0640	1%
Intesa San Paolo	1	2.88×10^{-14}	0.0786	1%
Leonardo	1	6.14×10^{-10}	0.0651	1%
Moncler	1	7.64×10^{-6}	0.0492	1%

Tabella 3.2: K-S Test con significatività α all' 1% per cinque titoli del FTSE Mib

L'evidenza riscontrata indica, per tutti e cinque i casi analizzati, il rifiuto dell' ipotesi di normalità. Questo conferma quanto ipotizzato per mezzo dell'analisi condotta sui parametri di stabilità precedentemente illustrati.

Si propone infine un confronto grafico tra funzioni di densità di probabilità normali e stabili⁶, applicate all'istogramma dei dati campionari relativi ai rendimenti finanziari dei titoli considerati:

⁶la PDF delle distribuzioni stabili, non essendo derivabile il forma chiusa se non nei casi particolari precedentemente elencati, è stata stimata tramite la funzione di Matab per la determinazione della Kernel Density.

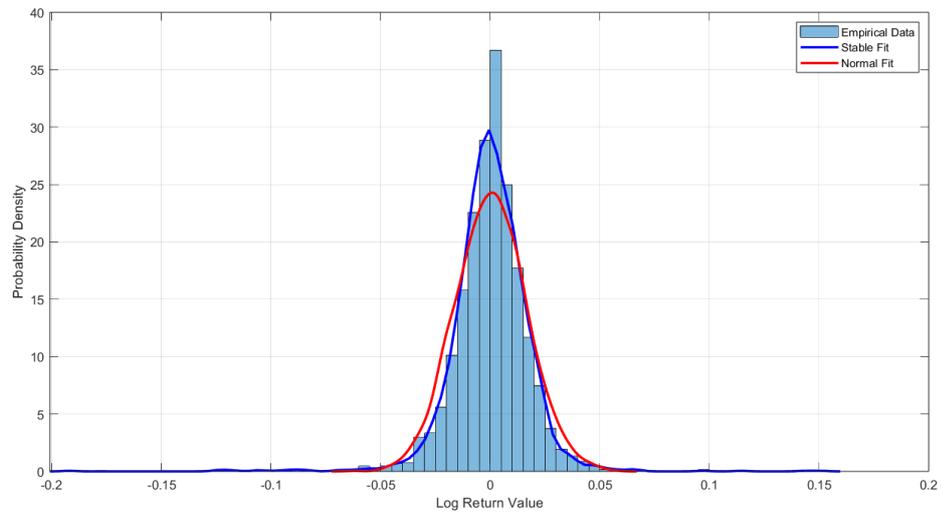


Figura 3.2: Confronto tra distribuzioni applicate ai rendimenti di Campari

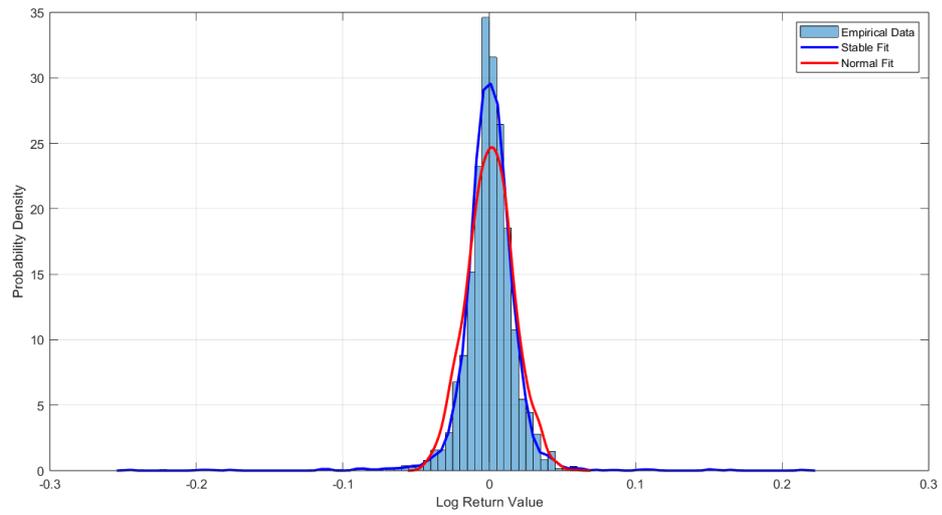


Figura 3.3: Confronto tra distribuzioni applicate ai rendimenti di Enel

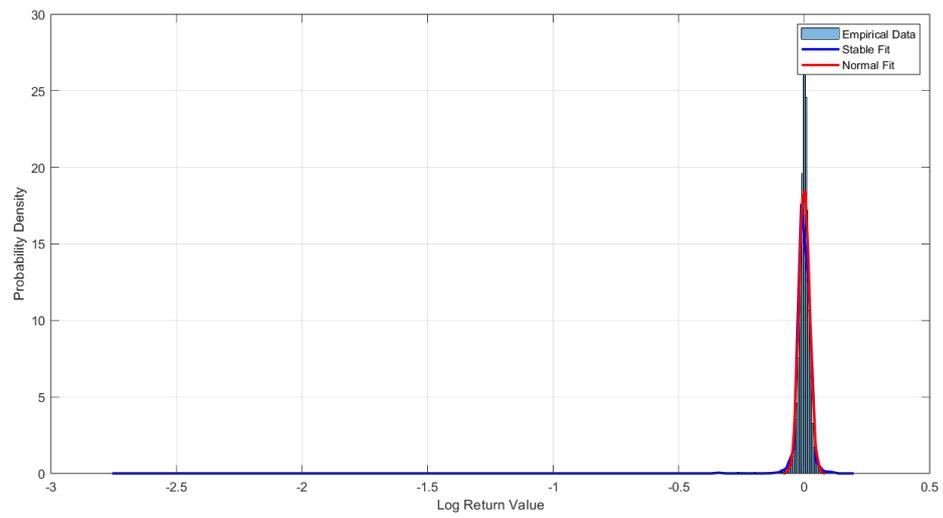


Figura 3.4: Confronto tra distribuzioni applicate ai rendimenti di Intesa San paolo

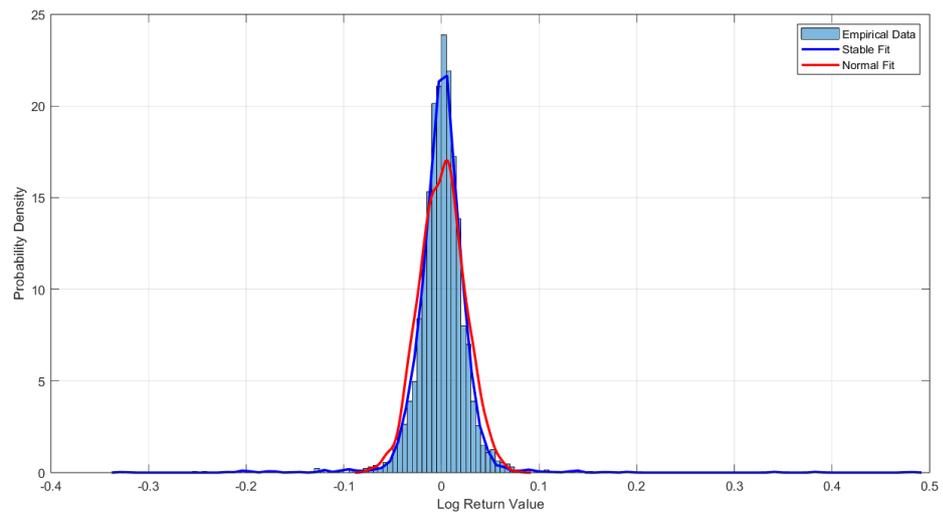


Figura 3.5: Confronto tra distribuzioni applicate ai rendimenti di Leonardo

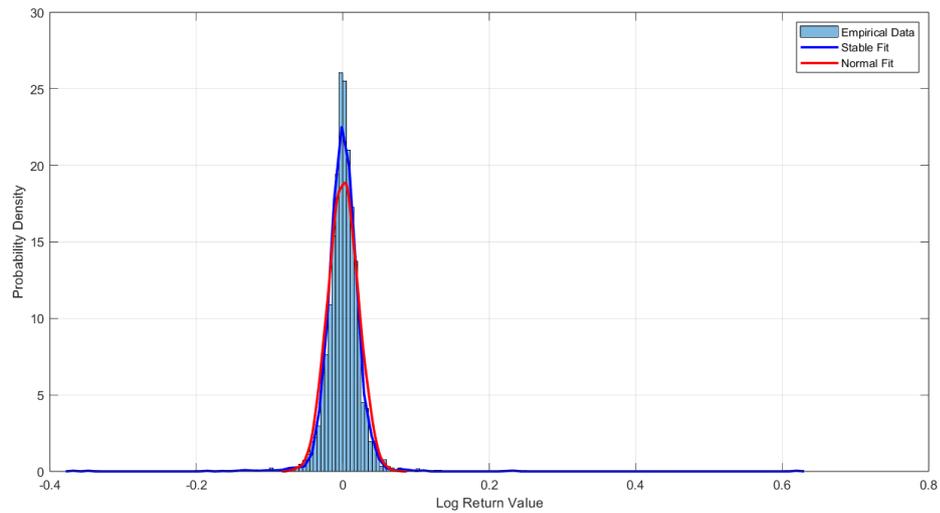


Figura 3.6: Confronto tra distribuzioni applicate ai rendimenti di Moncler

Attraverso l'analisi grafica si ha la conferma di come le distribuzioni stabili si adattino meglio rispetto alle distribuzioni normali alla modellazione dei rendimenti finanziari. Questo è dovuto al fatto che, le distribuzioni stabili, presentano una forma più leptocurtica, simile a quella dei dati campionari, caratterizzata da picchi più acuti e code più grosse. In particolare, le code delle distribuzioni stabili riescono a descrivere meglio le realizzazioni estreme dei rendimenti reali, cosa che le distribuzioni normali non riescono a fare completamente, tralasciando la parte più estrema dei dati.

Per la replicabilità delle analisi svolte si rimanda all'Appendice A, dove vengono esplicitati i codici utilizzati.

Capitolo 4

Il Modello di selezione del portafoglio

In questa terza e ultima parte dell'elaborato si propone una possibile implementazione del modello caratterizzato dagli elementi approfonditi dal punto di vista teorico nel corso dei precedenti capitoli. In particolare, verrà illustrato nel dettaglio il modello di selezione di portafoglio, analizzandone il comportamento nell'ambito di un'applicazione al mercato azionario italiano, durante il periodo compreso tra aprile 2014 e marzo 2024.

4.1 specificazione del modello

Nei capitoli precedenti si sono analizzati gli elementi caratterizzanti il meccanismo di selezione del portafoglio proposto. La novità che questo incorpora risiede principalmente nell'utilizzo di una misura di rischio coerente a due code e nell'integrazione delle distribuzioni stabili, che come si è visto, risultano più adatte ad una descrizione integrale della rischiosità insita nei portafogli composti da titoli azionari. Prima di procedere alla descrizione della modalità di implementazione di tali distribuzioni all'interno del modello, si procede a esplicitare la funzione di rischio e

il sistema di vincoli utilizzati.

4.1.1 Sistema dei vincoli e misura di rischio

Il sistema adottato in questa analisi, oltre ad avvalersi della funzione di rischio trattata nella sezione 2.1, comprende anche un sistema di vincoli relativamente semplice. Questo poiché l'obiettivo principale dell'analisi è incentrato non tanto sull'ottenimento di un modello il più realistico possibile, quanto più sullo studio dell'implementazione delle distribuzioni stabili e dell'effetto che queste comportano in termini di allocazioni. Nello specifico, il sistema di vincoli comprende:

- il vincolo di minimo rendimento desiderato, che in questa applicazione è stato impostato pari al 10% annuo;
- il vincolo di investimento di tutto il capitale (somma dei pesi dell'allocazione uguale a 1);
- il vincolo di non negatività dei pesi, che riflette la non ammissibilità delle vendite allo scoperto.

Con riferimento all'ultimo vincolo, questo è stato adottato anche in considerazione del periodo preso in esame, durante il quale si sono verificati alcuni eventi dal forte impatto macroeconomico, primo fra tutti la pandemia di COVID-19, che ha portato alcuni paesi, tra cui anche l'Italia, ad optare per una temporanea sospensione delle vendite allo scoperto¹.

Complessivamente, il modello, comprensivo dei vincoli, può quindi essere espresso nel seguente modo:

¹Delibera Consob n.21303 del 17 Marzo: Divieto temporaneo di assumere o incrementare posizioni nette corte su azioni negoziate sul mercato regolamentato MTA, ai sensi dell'articolo 20 del Regolamento UE n. 236/2012 del Parlamento europeo e del Consiglio del 14 marzo 2012

$$\begin{aligned}
 \min_{X,Z} \quad & \rho_{a,p}(X) = a\|(X - E_Q[X])^+\|_1 + (1 - a)\|(X - E_Q[X])^-\|_p - E_Q[X] \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^N x_i r_i \geq \pi \\
 & \sum_{i=1}^N x_i = 1 \\
 & x_i \geq 0 \quad \forall \quad i = 1 \dots N
 \end{aligned}$$

Questo problema presenta una considerevole complessità, che lo rende di fatto un problema *NP-Hard*. Per risolverlo, si è utilizzato la metaeuristica esposta nella sezione 2.2, ovvero la *Particle Swarm Optimization* (PSO), che come già specificato, essendo un meccanismo di risoluzione per l'ottimizzazione non vincolata, ha bisogno di una conversione dei vincoli internamente alla funzione obiettivo (*fitness function*), per tramite della loro violazione. La funzione obiettivo che l'algoritmo intende minimizzare assume quindi la seguente forma:

$$P(X; \epsilon) = \rho_{a,p}(X) + \frac{1}{\epsilon} \left[\max\{0, \pi - \sum_{i=1}^N x_i r_i\} + \left| \sum_{i=1}^N x_i - 1 \right| + \sum_{i=1}^N \max\{0, -x_i\} \right];$$

dove $\frac{1}{\epsilon}$ è un parametro di ponderazione che permette di penalizzare in via prioritaria le violazioni dei vincoli sopra citati.

La risoluzione di questo sistema attraverso la PSO prevede i seguenti passaggi: dopo un'iniziale generazione casuale dello sciame delle particelle, che nella pratica costituiscono possibili portafogli, l'algoritmo ricerca delle allocazioni differenti spostandosi nello spazio delle soluzioni nella direzione delle migliori allocazioni trovate in assoluto fino a quel momento (*global best*) e verso la miglior allocazione assunta localmente da tale particella (*personal best*), dove per migliore si intende un'allocazione alla quale è associato un valore di *fitness function* più basso.

4.1.2 Integrazione delle distribuzioni stabili

L'integrazione delle distribuzioni stabili avviene all'interno del ciclo iterativo che contraddistingue l'algoritmo. Tale integrazione avviene attraverso la stima dei parametri di stabilità (α , β , γ e δ) riferiti alla serie storica di portafoglio generata ad ogni iterazione. La serie storica in questione deriva dalla combinazione lineare dei rendimenti dei titoli del campione (FTSE MIB) nel periodo *in sample* (di allenamento del modello) e dall'allocazione ottenuta, corrispondente alla posizione della particella *global best*. Una volta stimati tali parametri, sempre all'interno dell'algoritmo, viene generata una serie storica teorica sulla base degli stessi, la cui distribuzione rappresenta la distribuzione stabile teorica del portafoglio. A questo punto si calcola la rischiosità implicita nell'allocazione ottenuta attraverso la misura di rischio coerente a due code, riferita al valore medio relativo a quest'ultima distribuzione teorica. Per meglio comprendere questo punto si illustrano i passaggi che subentrano nell'esecuzione dell'algoritmo:

1. Ogni particella viene inizializzata con una posizione casuale (allocazione dei pesi) e una velocità pari a zero;
2. Per ogni particella viene creata la serie storica dei rendimenti di portafoglio, calcolata come la combinazione lineare dei rendimenti giornalieri di ogni titolo per il relativo peso che questo assume nell'allocazione (posizione assunta dalla particella);
3. Sulla base di questa serie storica di portafoglio, vengono stimati i parametri di stabilità α , β , γ e δ ;
4. Viene quindi generata una nuova serie storica teorica in modo casuale, assumendo che questa si distribuisca stabilmente secondo i parametri precedentemente stimati. In questo modo si ottiene la distribuzione stabile teorica associata all'allocazione (posizione) assunta dalla particella;

5. Si calcola la media $\boldsymbol{\mu}$ di tale serie storica sintetica dei rendimenti;
6. Tale media $\boldsymbol{\mu}$ viene applicata come parametro di riferimento all'interno della misura di rischio da minimizzare:

$$\rho_{a,p}(X) = a\|(X - \boldsymbol{\mu})^+\|_1 + (1 - a)\|(X - \boldsymbol{\mu})^-\|_p - \boldsymbol{\mu}$$

7. Viene valutato il "costo" associato alla posizione della particella in base alla funzione di rischio che comprende la media della distribuzione stabile teorica.

Il processo descritto segue una logica iterativa: per ogni posizione aggiornata delle particelle, l'algoritmo stima le distribuzioni stabili ad ogni iterazione e da queste ne valuta la rischiosità associata, contenuta nella funzione obiettivo.

Lo stesso procedimento è stato adottato considerando la stima di distribuzioni normali, in modo da ottenere un modello alternativo direttamente confrontabile con quello proposto, che permette un'analisi prettamente incentrata sull'effetto apportato dalle ipotesi distributive. Le differenze in questo secondo approccio rispetto a quello descritto, risiedono solamente nella modalità di stima dei parametri, che non sono più α, β, γ e δ , ma media μ e varianza σ^2 , e nella generazione della serie storica sintetica a partire dai parametri stimati, che segue appunto una distribuzione normale.

Un terzo approccio utilizzato ai fini di confronto utilizza la PSO per minimizzare la funzione di obiettivo descritta alla sezione 4.1.1 senza alcuna stima di distribuzioni teoriche, spostando di fatto l'analisi sui dati campionari.

Per eventuali approfondimenti si rimanda all'appendice B in cui vengono esplicitati i codici Matlab utilizzati per le analisi svolte.

4.2 Applicazione pratica al FTSE MIB

4.2.1 Dataset

L'applicazione del modello a dati reali prevede un'analisi relativa ai titoli dell'indice FTSE MIB² che nel periodo compreso tra aprile 2014 e marzo 2024 hanno mantenuto costantemente un prezzo di quotazione. Non si sono quindi considerate i titoli "delistati" dall'indice³ e i titoli quotati nell'indice ad una data successiva al 1 aprile 2014. Per l'analisi si sono utilizzati i rendimenti logaritmici giornalieri, calcolati a partire dai prezzi aggiustati scaricati da Yahoo Finance, tramite la seguente formula:

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

dove P_t e P_{t-1} rappresentano rispettivamente i prezzi al tempo t e $t-1$. Questa scelta è dovuta alle proprietà della funzione logaritmica che permette l'additività temporale dei rendimenti in modo diretto, pur ben approssimando le variazioni percentuali. Il dataset risultante è quindi composto da 31 titoli e 2582 osservazioni giornaliere per ogni titolo, per i quali si sono stimati i valori di media e varianza (annualizzati) e i parametri di stabilità, calcolati per ogni titolo del campione:

²Benchmark del mercato azionario italiano, comprendente i 40 titoli dalla maggiore capitalizzazione di mercato, corretta per il flottante.

³Comprende sia i titoli usciti dal mercato quotato, sia i titoli che sono usciti dall'indice poiché sostituiti da altri con una capitalizzazione maggiore.

Ticker	Media	Varianza	Alpha	Beta	Gamma	Delta
A2A.MI	10,5%	0,0703	1,80254	-0,14860	0,01001	0,00085
AMP.MI	21,4%	0,0997	1,73878	-0,14231	0,01168	0,00142
AZM.MI	6,4%	0,1150	1,65609	-0,15015	0,01159	0,00117
BAMI.MI	-4,3%	0,2184	1,69701	-0,07752	0,01683	0,00048
BGN.MI	9,2%	0,0908	1,69301	-0,11889	0,01040	0,00099
BMED.MI	9,7%	0,0961	1,66707	-0,16000	0,01067	0,00136
BPE.MI	-0,2%	0,2115	1,64082	-0,00368	0,01546	-0,00002
BZU.MI	11,4%	0,0993	1,77382	0,00842	0,01191	0,00051
CPR.MI	12,7%	0,0644	1,75618	-0,14790	0,00927	0,00096
DIA.MI	11,8%	0,0935	1,69472	-0,03213	0,01075	0,00067
ENEL.MI	9,1%	0,0636	1,73655	-0,03146	0,00905	0,00063
ENI.MI	4,7%	0,0793	1,67382	-0,11102	0,00931	0,00081
ERG.MI	11,2%	0,0758	1,74043	0,03904	0,00988	0,00030
G.MI	9,2%	0,0581	1,61553	-0,04876	0,00777	0,00064
HER.MI	7,9%	0,0610	1,77635	-0,16910	0,00912	0,00086
IP.MI	15,2%	0,0920	1,74851	-0,10904	0,01142	0,00102
ISP.MI	9,4%	0,1109	1,64229	-0,04413	0,01093	0,00080
LDO.MI	13,3%	0,1364	1,70612	-0,03478	0,01257	0,00073
MB.MI	10,0%	0,1087	1,60816	-0,06797	0,01058	0,00092
MONC.MI	19,2%	0,1048	1,75153	-0,03760	0,01196	0,00073
PRY.MI	12,7%	0,0988	1,79889	-0,20250	0,01212	0,00123
REC.MI	17,4%	0,0737	1,77819	-0,05026	0,00993	0,00078
SPM.MI	-27,2%	0,3931	1,65608	0,04000	0,01653	-0,00079
SRG.MI	5,7%	0,0551	1,71215	-0,00025	0,00788	0,00046
STLAM.MI	22,4%	0,1466	1,67331	-0,03432	0,01320	0,00126
STMMI.MI	21,8%	0,1496	1,73684	-0,23478	0,01413	0,00201
TEN.MI	4,6%	0,1319	1,76039	0,01146	0,01337	0,00016
TIT.MI	-11,8%	0,1522	1,71409	0,09885	0,01323	-0,00072
TRN.MI	11,8%	0,0471	1,77320	-0,01148	0,00808	0,00060
UCG.MI	3,0%	0,1784	1,68344	-0,01809	0,01448	0,00020
UNI.MI	9,9%	0,1165	1,61485	-0,05997	0,01099	0,00072

Tabella 4.1: Dati finanziari annualizzati per i ticker del campione

Una prima osservazione che si può fare in relazione ai parametri di stabilità stimati riguarda principalmente i parametri α e β . In particolare, si può notare come i valori di α indichino un certo grado di kurtosi superiore a quello rilevabile in distribuzioni assimilabili alla gaussiana ($\alpha = 2$); inoltre, con riferimento al parame-

tro β , si può notare una preponderanza di valori negativi, indice di una tendenziale asimmetria verso la coda sinistra della distribuzione campionaria dei rendimenti.

4.2.2 Intervallo temporale considerato

L'analisi di portafoglio è stata suddivisa in quattro finestre temporali, ciascuna caratterizzata da un dataset *in sample* ovvero utilizzato per l'allenamento del modello, e un dataset *out of sample*, utilizzato per il test del modello. La dimensione del dataset *in sample* è stata determinata empiricamente in modo tale da garantire un numero sufficiente di osservazioni, necessarie ad un'adeguata stima dei parametri di stabilità, ed è pari a 5 anni per ogni finestra temporale. Le dimensioni del dataset *out of sample* è invece stata impostata pari a 2 anni, in modo da avere un'adeguata proporzione tra dati di allenamento e di test, che nell'ambito delle datascience è comunemente impostata a 70/80% per i dati *in sample* e 30/20% per quelli *out of sample* (Gholamy et al. (2018)).

Le finestre temporali così determinate sono le seguenti:

Finestra 1	inizio	fine	n. osservazioni
<i>In Sample</i>	01-apr-14	29-mar-19	1269
<i>Out of Sample</i>	01-Apr-19	31-Mar-21	507

Tabella 4.2: Dataset finestra temporale 1

Finestra 2	inizio	fine	n. osservazioni
<i>In Sample</i>	01-apr-15	31-mar-20	1270
<i>Out of Sample</i>	01-apr-20	31-mar-22	511

Tabella 4.3: Dataset finestra temporale 2

Finestra 3	inizio	fine	n. osservazioni
<i>In Sample</i>	01-apr-16	31-mar-21	1270
<i>Out of Sample</i>	01-apr-21	31-mar-23	514

Tabella 4.4: Dataset finestra temporale 3

Finestra 4	inizio	fine	n. osservazioni
<i>In Sample</i>	03-Apr-17	31-Mar-22	1268
<i>Out of Sample</i>	01-Apr-22	28-Mar-24	509

Tabella 4.5: Dataset finestra temporale 4

Si noti che il mercato azionario italiano durante il periodo in esame è stato influenzato da una combinazione di fattori di carattere geo-politico ed esogeno, con la conseguenza di un andamento caratterizzato da periodi di rallentamento, anche significativo, alternati a periodi di importante crescita. Si riporta di seguito il grafico rappresentante l'evoluzione dei prezzi (parametrizzati a 100) e dei rendimenti del FTSE MIB relativi al periodo considerato, con l'indicazione dell'inizio dei vari periodi *in sample* e *out of sample* di ogni finestra temporale:

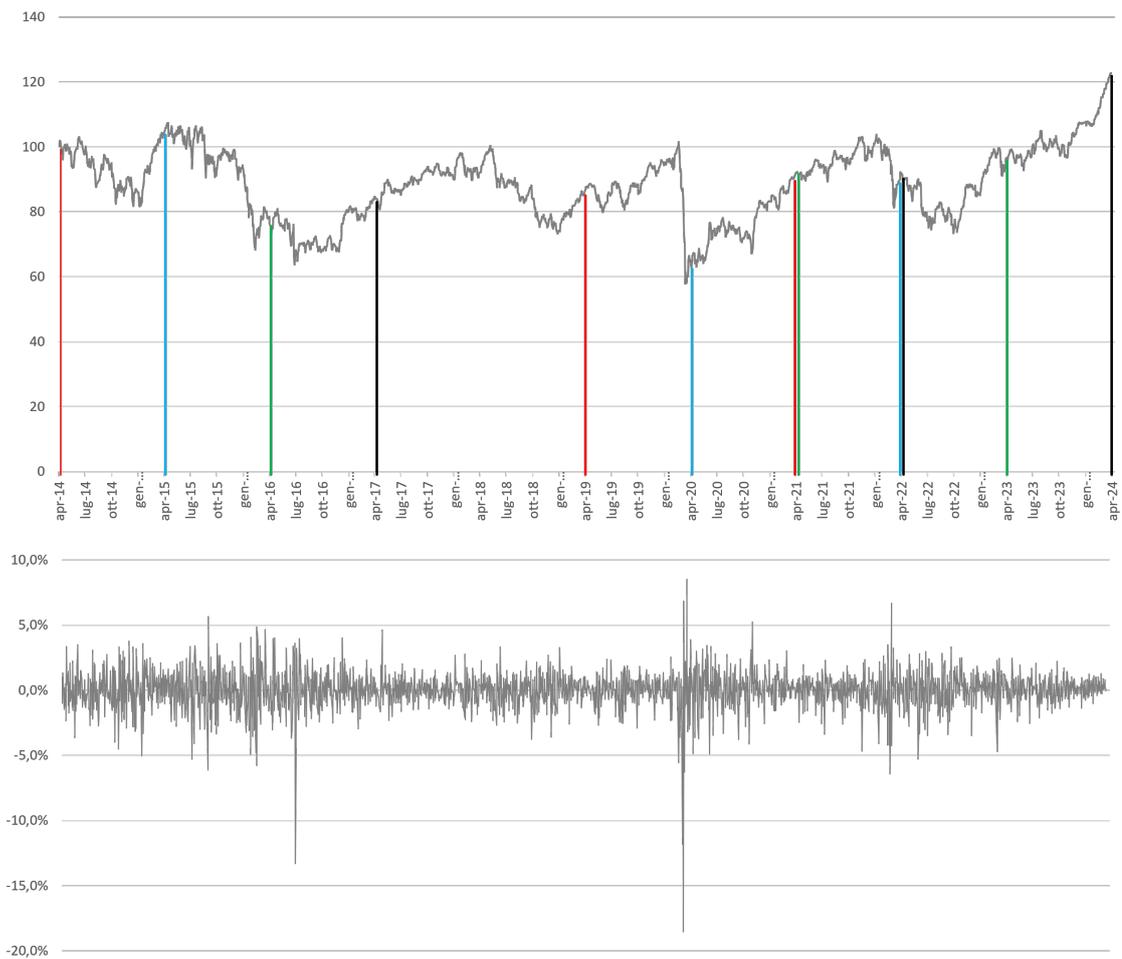


Figura 4.1: Evoluzione di prezzi e rendimenti dell'indice FTSE MIB tra aprile - 2014 e marzo - 2024

Osservando la figura 4.1, si possono identificare diverse fasi nell'andamento dei prezzi dell'indice:

- Una prima parte, tra aprile 2014 e ottobre 2016, caratterizzata da una significativa decrescita, probabilmente a causa degli strascichi dovuti alla precedente crisi del debito sovrano (2010-2012);
- Successivamente si può notare una crescita complessiva, prolungatasi fino al primo trimestre del 2020, seguita da un importante crollo conseguente al manifestarsi della pandemia da COVID-19 in Europa;

- Dal secondo trimestre del 2020 si evidenzia una sostanziale crescita, suddivisibile in due periodi, tra i quali intercorre un parziale rallentamento.

Le ipotesi che possono essere fatte con riferimento alle finestre temporali precedentemente specificate, vertono sulla tendenziale decrescita, o tutt'al più, stazionarietà dei prezzi nei periodi utilizzati per l'analisi *in sample*, contrariamente a quanto osservabile nei periodi *out of sample*, nei quali si può notare una complessiva stabilità e, in alcuni casi, una forte crescita (finestra 2 e 4). Questo aspetto è rilevante nell'ottica di un modello di selezione di portafoglio, poiché la divergenza tra campione di allenamento e di test potrebbe portare a risultati controintuitivi e non coerenti.

4.2.3 Parametri dell'algoritmo

Come già specificato, per la risoluzione del problema di selezione di portafoglio proposto si è utilizzato l'algoritmo Particle Swarm Optimization (PSO). Come approfondito nel capitolo 2 alla sezione 2.2, il funzionamento di tale algoritmo si basa su alcune relazioni che "spostano" iterativamente le particelle nello spazio delle soluzioni alla ricerca di un ottimo globale. Queste funzioni dipendono da alcuni parametri, la cui determinazione è fondamentale per una sufficiente convergenza verso tale risultato "ottimo". Richiamando le funzioni caratteristiche della PSO:

$$v_i^{k+1} = w^k \cdot v_i^k + c_1 R_1 (p_i^k - x_i^k) + c_2 R_2 (s^k - x_i^k)$$

$$x_i^{k+1} = x_i^k + v_i^{k+1}$$

I parametri dai quali dipendono sono i seguenti:

- C_1 rappresenta il coefficiente di accelerazione nel verso del miglior risultato trovato localmente dalla singola particella;
- C_2 rappresenta il coefficiente di accelerazione nel verso del miglior risultato trovato globalmente all'interno dello sciame;

- \mathbf{W}^k rappresenta il coefficiente inerziale che controlla come la velocità (t) viene influenzata dalla velocità precedente ($t - 1$).

Questi parametri determinano, in modi diversi, la dinamica della ricerca delle soluzioni a livello locale e globale. Generalmente, le tecniche di ricerca di tipo *population-based* prevedono una prima fase esplorativa, durante la quale lo sciame individua le potenziali soluzioni ottimali, seguita da una seconda fase che approfondisce tali soluzioni a livello locale. Per ottenere questo risultato, si possono scegliere empiricamente dei valori fissi da attribuire ai parametri elencati, oppure si possono rendere questi parametri variabili nel corso del ciclo iterativo, in modo da impostare queste diverse fasi della ricerca al fine di ottenere una maggiore convergenza verso una soluzione ottima.

Per la risoluzione del modello proposto, dopo aver testato entrambe le soluzioni, si è optato per l'utilizzo dei parametri variabili nel tempo, in quanto si è notata una convergenza migliore e più costante tra le varie prove effettuate. I meccanismi di evoluzione temporale utilizzati per i coefficienti di accelerazione e il coefficiente di inerzia sono diversi, ma entrambi sfruttano l'idea comune di variare il valore del coefficiente in misura proporzionale al numero di iterazioni massime ammesse dall'algoritmo.

Per il coefficiente di inerzia, è stato adottato l'approccio descritto in Corazza et al. (2013), utilizzando il seguente sistema:

$$w^k = w_{\max} + \frac{w_{\min} - w_{\max}}{K}k,$$

in cui k è l'iterazione corrente, K il numero massimo di iterazioni, e w_{\min} e w_{\max} sono i valori del coefficiente d'inerzia assunto in occasione rispettivamente della prima e ultima iterazione. Solitamente, ed anche in questo caso, si sono posti $w_{\min} = 0,9$ e $w_{\max} = 0,4$ (Tripathi et al. (2007)). Per i coefficienti di accelerazione invece, si è adottato il meccanismo illustrato in Ratnaweera et al. (2004), che prevede

la seguente soluzione:

$$c_1(k) = (c_{1,\min} - c_{1,\max}) \frac{k}{K} + c_{1,\max}$$

$$c_2(k) = (c_{2,\max} - c_{2,\min}) \frac{k}{K} + c_{2,\min}$$

dove anche in questo caso k rappresenta l'iterazione corrente, K il numero massimo di iterazioni, e c_{\min} e c_{\max} rappresentano i valori dei coefficiente di accelerazione assunti in occasione rispettivamente della prima e ultima iterazione. Come per il coefficiente inerziale, anche questi valori sono scelti arbitrariamente, e si sono utilizzati $c_{1,\max} = c_{2,\max} = 2,5$ e $c_{1,\min} = c_{2,\min} = 0,5$.

Un altro parametro molto importante, che però ha impatto sulla funzione di fitness, è il coefficiente ϵ , il quale determina il peso da attribuire alla risoluzione dei vincoli rispetto alla minimizzazione del rischio. In pratica, ϵ è un valore molto piccolo; quando posto a denominatore, genera un numero molto alto, rendendo la soddisfazione dei vincoli una priorità rispetto agli altri obiettivi. Nel caso specifico, è stato adottato un valore di ϵ pari a 0,0001, poiché si è dimostrato il più efficace nel garantire una *fitness* bassa con costanza, contestualmente ad un adeguato soddisfacimento dei vincoli.

Si specifica che i vari test eseguiti per la determinazione dei parametri sono stati svolti impostando un seme di casualizzazione, al fine di uniformare la componente aleatoria presente nei modelli e apportare migliorie sostanziali e mirate. Nella fase di determinazione dei risultati, invece, questo seme è stato rimosso per poter sfruttare appieno la casualità prevista all'interno dei modelli.

4.2.4 Risultati ottenuti

In questa sezione si presentano i risultati ottenuti dal modello in diversi scenari, confrontandoli con quelli dei modelli alternativi implementati con distri-

buzioni normali e campionarie (questi ultimi senza la stima di alcuna distribuzione teorica).

L'output presentato è composto dall'analisi delle performance del portafoglio nei periodi *in sample* ed *out of sample* per tutte e quattro le finestre temporali specificate precedentemente, misurato attraverso **rendimento medio annualizzato** nel periodo, **varianza annualizzata**, e **Sharpe Ratio**. Con riferimento a quest'ultimo indicatore di performance aggiustate per il rischio, che si ricorda essere calcolato come $S = \frac{(\mu-rf)}{\sigma}$, si specifica che come rendimento privo di rischio è stato scelto il tasso di rendimento sui titoli del tesoro americano a due anni, alla data di inizio del periodo *out of sample*, in modo da rendere le analisi coerenti nel tempo ed eliminare la componente legata al tasso di mercato⁴. Di seguito la tabella contenente il valore dei tassi *risk free* utilizzati nel calcolo dello Sharpe Ratio in ognuna delle quattro finestre temporali (di seguito definite w1, w2, w3 e w4).

	w1	w2	w3	w4
<i>risk-free</i>	2,33%	0,23%	0,17%	2,44%

Tabella 4.6: Tassi *risk free* per ognuna delle finestre temprali in esame

Output del modello

La prima batteria di test è stata effettuata impostando l'algoritmo con 20 particelle e 5000 iterazioni, e la funzione di rischio con $a = 0,5$ e $p = 1$ (neutralità al rischio), seguiti da un confronto con i modelli alternativi (Normale e Campionario). Si riporta di seguito la tabella contenente le metriche di performance riassuntive relative all'allocazione ottenuta dal modello in ognuna delle quattro finestre temporali, per i periodi *in sample* e *out of sample*. Viene inoltre specificato il valore di fitness associato ad ognuna delle allocazioni ottenute:

⁴Market Yield on U.S. Treasury Securities at 2-Year Constant Maturity: <https://fred.stlouisfed.org/series/DGS2>

Stabile	w1	w2	w3	w4
<i>In Sample</i>				
μ	7,35%	0,99%	8,33%	8,65%
σ	18,66%	23,31%	24,37%	21,11%
Sharpe	0,27	0,03	0,33	0,29
<i>Out of Sample</i>				
μ	13,3%	19,7%	11,8%	8,8%
σ	24,4%	21,5%	21,5%	19,2%
Sharpe	0,45	0,91	0,54	0,33
Fitness	0,9658	3,3574	0,5932	0,4583

 Tabella 4.7: Risultati con distribuzioni stabili per $p = 1$, $a = 0,5$ e $N = 5000$

Dai risultati ottenuti si può notare in generale una buona performance *out of sample*, con deviazioni standard leggermente inferiori (3 su 4) a quelle *in sample*, accompagnate da rendimenti medi superiori (4 su 4). Limitatamente alla seconda finestra, si osserva un rendimento medio *in sample* particolarmente basso, giustificato da un valore di *fitness* sostanzialmente più alto rispetto alle altre finestre, indice di una soluzione "meno ottima" rispetto a quella trovata negli altri tre casi. Relativamente alle allocazioni trovate, si può valutare la diversificazione che queste incorporano tramite l'indice di eterogeneità di Gini⁵, che viene utilizzata nella pratica finanziaria per misurare la concentrazione dei portafogli. Tale indice viene calcolato nel seguente modo:

$$I = 1 - \sum_{i=1}^N x_i^2$$

Dove N rappresenta il numero di titoli, e x_i rappresenta la percentuale di capitale allocata in ogni titolo.

⁵Gini (1914), misura di eterogeneità dove 100% rappresenta la massima diversificazione e 0% la massima concentrazione

Di seguito si riporta la tabella contenente le allocazioni ottenute dal modello in termini di percentuale di capitale investito in ogni titolo (ticker), per ognuna delle finestre temporali in esame. In fondo la specifica relativa ai relativi indici di concentrazione:

Ticker	w1	w2	w3	w4
A2A.MI	0,2%	2,7%	0,8%	4,7%
AMP.MI	1,7%	3,6%	0,6%	1,6%
AZM.MI	4,5%	0,1%	0,3%	0,1%
BAMI.MI	0,0%	0,3%	0,7%	0,3%
BGN.MI	2,7%	0,5%	0,9%	21,4%
BMED.MI	0,5%	0,4%	2,0%	0,8%
BPE.MI	1,4%	0,7%	2,2%	0,2%
BZU.MI	0,5%	3,7%	4,5%	4,9%
CPR.MI	3,1%	2,9%	0,2%	0,7%
DIA.MI	15,6%	3,8%	0,1%	1,0%
ENEL.MI	0,4%	0,6%	0,3%	9,6%
ENI.MI	1,1%	0,0%	0,1%	2,7%
ERG.MI	19,3%	1,1%	0,7%	4,3%
G.MI	8,2%	6,8%	50,3%	1,7%
HER.MI	0,1%	5,2%	1,1%	19,9%
IP.MI	2,7%	1,0%	0,1%	3,1%
ISP.MI	0,0%	0,4%	0,1%	2,6%
LDO.MI	1,4%	5,9%	0,1%	0,2%
MB.MI	2,1%	15,4%	0,6%	1,0%
MONC.MI	2,2%	17,4%	2,8%	1,9%
PRY.MI	8,4%	0,8%	0,0%	0,2%

Continua nella prossima pagina

Tabella 4.8 – continua dalla pagina precedente

Ticker	w1	w2	w3	w4
REC.MI	0,0%	3,4%	1,0%	1,4%
SPM.MI	6,5%	8,8%	0,7%	3,6%
SRG.MI	2,4%	2,3%	0,7%	2,0%
STLAM.MI	1,6%	1,8%	0,6%	2,2%
STMMI.MI	0,8%	0,8%	0,8%	3,1%
TEN.MI	2,2%	0,6%	24,2%	3,2%
TIT.MI	1,8%	0,9%	0,1%	1,0%
TRN.MI	4,7%	4,0%	0,7%	0,3%
UCG.MI	1,3%	2,7%	0,3%	0,0%
UNI.MI	2,3%	1,5%	2,4%	0,2%
Concentrazione	91,0%	91,6%	68,3%	89,1%

Tabella 4.8: Allocazioni ottenute nelle varie finestre temporali con 5000 iterazioni e 20 particelle

Quello che si nota relativamente alle allocazioni trovate è in generale una buona diversificazione, con l'eccezione della finestra 3, in cui si evidenzia una pesante esposizione verso i titoli G.MI (50,3%) e TEN.MI (24,2%), accompagnata da una restante allocazione molto frazionata.

Per quanto riguarda la convergenza della metaeuristica verso la soluzione ottima, di seguito si riportano i grafici relativi alla variazione del costo associato alle posizioni assunte dalle varie particelle ad ogni iterazione. Per una più agevole interpretazione si specifica che nei grafici la linea rossa rappresenta la *fitness* della particella *global best*, le linee nere rappresentano l'evoluzione della *fitness* per ogni le particelle dello sciame, e la linea blu rappresenta la *fitness* media dello sciame. È possibile osservare una prima fase più improntata all'esplorazione dello spazio

delle soluzioni, seguita da una progressiva convergenza dello sciame verso il *global best*. Questo fenomeno è particolarmente evidente nell'intervallo compreso tra le iterazioni 1000 e 2000, durante il quale si registra il maggior decremento del costo (*fitness*) associato alle varie posizioni assunte dalle particelle. Tale comportamento riflette l'obiettivo impostato dal settaggio dinamico dei parametri W^k , C_1 e C_2 , come precedentemente specificato.

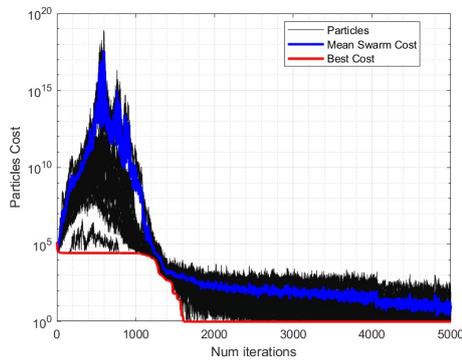


Figura 4.2: PSO finestra 1

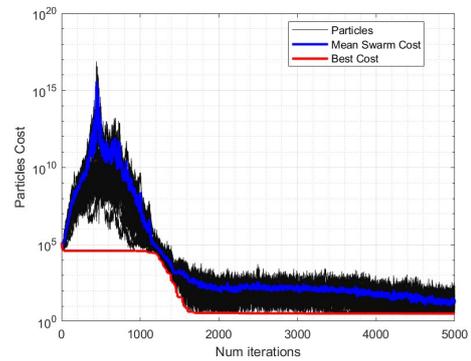


Figura 4.3: PSO finestra 2

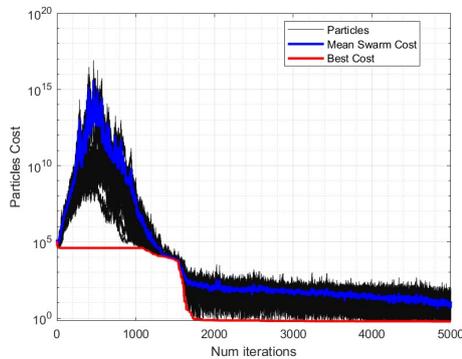


Figura 4.4: PSO finestra 3

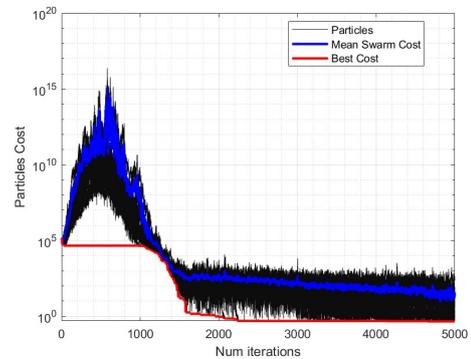


Figura 4.5: PSO finestra 4

Confronto con modelli alternativi

Relativamente al confronto con i modelli alternativi, si ricorda che per modello "normale" si intende il modello sviluppato sulla falsa riga di quello in esame, con la differenza che, in questo caso la distribuzione teorica applicata alla generazione della serie storia sintetica è gaussiana. Per modello "campionario" invece, si intende il modello al quale non è stata applicata alcuna distribuzione

teorica, risultando di fatto in un'analisi relativa alla distribuzione campionaria dei rendimenti di portafoglio. Di seguito i risultati ottenuti con gli stessi parametri utilizzati anche per il modello "stabile":

Normale	w1	w2	w3	w4
<i>In Sample</i>				
μ	12,56%	-1,26%	9,23%	7,65%
σ	17,77%	26,47%	22,20%	20,88%
Sharpe	0,58	-0,06	0,41	0,25
<i>Out of Sample</i>				
μ	9,5%	28,3%	2,6%	8,2%
σ	25,63%	25,40%	19,80%	20,39%
Sharpe	0,28	1,10	0,12	0,28
Fitness	0,0045	4,2937	0,2844	0,8608

Tabella 4.9: Risultati con distribuzioni normali per $p = 1$, $a = 0,5$ e $N = 5000$

Il confronto con il modello implementato tramite distribuzioni normali evidenzia una generale *underperformance* rispetto al modello basato su distribuzioni stabili, il quale in tre casi su quattro presenta un miglior Sharpe Ratio relativamente al periodo *out of sample*. In particolare questo risultato deriva da un rendimento medio superiore nel caso di distribuzioni stabili (3 su 4) accompagnato da deviazioni standard inferiori (3 su 4). Si può notare inoltre come il modello con le distribuzioni stabili restituisca dei risultati più costanti nei periodi considerati. Un altro aspetto rilevante risulta l'analisi a livello di finestra temporale, infatti anche in questo caso il secondo periodo presenta un rendimento medio *in sample* particolarmente basso (negativo), spiegato dal valore di *fitness* sostanzialmente superiore agli altri casi. Questo inoltre è anche l'unico caso in cui il modello "normale" supera in termini di Sharpe Ratio il modello "stabile". In considerazione di questo aspetto, si può

ipotizzare una maggiore complessità nello spazio delle soluzioni relative alla seconda finestra temporale, che rende più complicato il raggiungimento di una soluzione "ottima".

Campionario	w1	w2	w3	w4
<i>In Sample</i>				
μ	-1,27%	6,32%	7,87%	8,31%
σ	23,11%	22,75%	21,58%	24,59%
Sharpe	-0,16	0,27	0,36	0,24
<i>Out of Sample</i>				
μ	-1,0%	22,2%	-2,6%	22,4%
σ	28,10%	21,30%	22,31%	19,35%
Sharpe	-0,12	1,03	-0,13	1,03
Fitness	4,2959	1,3564	0,7837	0,6215

Tabella 4.10: Risultati con distribuzioni campionarie per $p = 1$, $a = 0,5$ e $N = 5000$

Spostando il confronto con il modello campionario (ovvero il modello sul quale non viene stimata alcuna distribuzione teorica), si può notare una certa instabilità dei risultati, specialmente nell'*out of sample*, con due finestre (w1 e w3) in cui si ottiene uno Sharpe Ratio negativo e le altre due (w2 e w4) in cui si ottiene uno Sharpe Ratio superiore all'unità⁶. Questo risultato può essere spiegato per tramite dell'analisi svolta sulle finestre temporali alla sezione 4.2.1, nella quale viene individuata una controtendenza nell'andamento del FTSE MIB con riferimento alle finestre 2 e 4, in cui si osservano trend di crescita nel periodo *out of sample*, diversamente da quanto osservabile per il periodo *in sample*. L'ipotesi che può essere avanzata a tal proposito è che, l'applicazione di distribuzioni teoriche (Stabili

⁶Uno Sharpe Ratio maggiore di 1 generalmente indica una buona performance, in cui l'extrarendimento è superiore al rischio (deviazione standard)

e Normali) implica una potenziale minor dipendenza dei risultati *out of sample* dal campione di test, che invece può verificarsi nel caso di distribuzioni campionarie.

Un aspetto importante da tenere in considerazione nel confronto tra il modello proposto (stabile) e i due modelli alternativi presentati riguarda il tempo di esecuzione richiesto dall'algoritmo. Mentre i due modelli alternativi hanno tempi di esecuzione relativamente brevi, con un tempo di circa 80 secondi per finestra temporale nel caso del modello "normale" e circa 15 secondi per finestra temporale per quello "campionario", il modello proposto richiede un tempo significativamente maggiore. La stima delle distribuzioni stabili e la successiva generazione di una serie storica per ogni particella ad ogni iterazione aumentano esponenzialmente la complessità del calcolo, risultando in un tempo di esecuzione per finestra temporale di circa 13500 secondi (circa 3 ore e 45 minuti).

Confronto per diversi valori del parametro p

Nella fase conclusiva dell'analisi si propone un confronto dei risultati ottenuti dal modello per diversi valori del parametro p . Si ricorda che tale parametro definisce l'ordine della norma degli scostamenti negativi rispetto alla media ($\|(X - \boldsymbol{\mu})^-\|_p$), caratterizzando la funzione di rischio coerente a due code $\rho_{a,p}(X)$. In sostanza, agisce come un fattore di controllo locale della rischiosità, riflettendo quanto gli investitori percepiscono negativamente una perdita rispetto ai benefici derivanti dai guadagni. I risultati derivano da un settaggio del modello in linea con le prove esposte in precedenza, prevedendo uno sciame composto da 20 particelle e un numero di iterazioni pari a 5000. L'output viene esposto in tabelle assimilabili a quelle precedenti, in cui si riportano le metriche di performance riassuntive relative all'allocazione ottenuta dal modello in ognuna delle quattro finestre temporali, per i periodi *in sample* e *out of sample* e il valore di fitness associato ad ogni allocazione ottenuta. Inoltre, per una maggiore comodità nel confronto, si ripropone il risultato ottenuto nel test iniziale ($p = 1$):

p = 1	w1	w2	w3	w4
<i>In Sample</i>				
μ	7,35%	0,99%	8,33%	8,65%
σ	18,66%	23,31%	24,37%	21,11%
Sharpe	0,27	0,03	0,33	0,29
<i>Out of Sample</i>				
μ	13,3%	19,7%	11,8%	8,8%
σ	24,4%	21,5%	21,5%	19,2%
Sharpe	0,45	0,91	0,54	0,33
Fitness	0,9658	3,3574	0,5932	0,4583

Tabella 4.11: Risultati del modello per per $p = 1$, $a = 0,5$ e $N = 5000$

p = 1.5	w1	w2	w3	w4
<i>In Sample</i>				
μ	9,53%	0,21%	14,46%	13,07%
σ	18,95%	22,94%	22,73%	20,67%
Sharpe	0,38	-0,00	0,63	0,51
<i>Out of Sample</i>				
μ	15,1%	29,1%	9,4%	7,7%
σ	25,21%	20,07%	22,74%	17,91%
Sharpe	0,51	1,44	0,41	0,29
Fitness	0,1690	3,6766	-0,0070	-0,0505

Tabella 4.12: Risultati del modello per $p = 1.5$, $a = 0,5$ e $N = 5000$

p = 2	w1	w2	w3	w4
<i>In Sample</i>				
μ	3,74%	6,60%	11,42%	7,52%
σ	20,73%	22,71%	22,13%	22,52%
Sharpe	0,07	0,28	0,51	0,23
<i>Out of Sample</i>				
μ	6,3%	31,5%	4,2%	8,6%
σ	26,90%	22,23%	19,05%	22,65%
Sharpe	0,15	1,41	0,21	0,27
Fitness	2,3245	1,2187	-0,0109	0,8921

 Tabella 4.13: Risultati del modello per $p = 2$, $a = 0,5$ e $N = 5000$

p = 5	w1	w2	w3	w4
<i>In Sample</i>				
μ	5,16%	0,76%	3,32%	6,56%
σ	25,18%	23,29%	24,80%	24,09%
Sharpe	0,11	0,02	0,13	0,17
<i>Out of Sample</i>				
μ	8,7%	27,5%	-3,5%	18,7%
σ	31,66%	21,42%	23,70%	19,93%
Sharpe	0,20	1,27	-0,15	0,82
Fitness	1,7895	3,4155	2,4426	1,1997

 Tabella 4.14: Risultati del modello per $p = 5$, $a = 0,5$ e $N = 5000$

Si noti che nelle tabelle 4.12 e 4.13 in alcuni casi si ottengono dei valori di *fitness* negativi. Questo può essere spiegato dal rendimento *in sample* superiore

al 10% (vincolo di rendimento minimo desiderato), oltre che da una buona soddisfazione degli altri vincoli e ad un'effettiva minimizzazione della misura di rischio $\rho_{\alpha,p}(X)$.

Analizzando l'evoluzione dei risultati all'incrementare del parametro p si osserva un progressivo peggioramento delle performance *out of sample*. Nello specifico:

- Per $p = 1.5$ si evidenzia una performance *out of sample* simile a quella ottenuta con $p = 1$. In metà dei casi, lo Sharpe Ratio risulta superiore, mentre nell'altra metà si dimostra inferiore. È interessante notare come anche in questo caso, la seconda finestra temporale (**w2**) presenta un rendimento medio *in sample* significativamente basso, contestualmente ad un valore di *fitness* particolarmente più alto rispetto alle altre finestre temporali, come già osservato in precedenza relativamente al caso di p . Sebbene i risultati siano assimilabili a quelli ottenuti per $p = 1$, nel caso di $p = 1.5$ la performance *out of sample* talvolta risulta inferiore a quella *in sample* (2 su 4) rispetto al caso di $p = 1$ (0 su 4), e in generale mostra una maggiore incostanza nel corso delle varie finestre temporali.
- Per $p = 2$, in metà dei casi lo Sharpe Ratio risulta inferiore rispetto a $p = 1$, mentre nell'altra metà si dimostra superiore. Rispetto ai casi precedenti ($p = 1$ e $p = 1.5$), le performance *out of sample* si dimostrano caratterizzate da una maggior variabilità, con un caso (**w2**) in cui si ottiene uno Sharpe Ratio superiore all'unità e i restanti 3 casi (**w1**, **w3** e **w4**) in cui lo stesso risulta inferiore rispetto agli stessi periodi nel caso di $p = 1$ e $p = 1.5$. In generale le performance *out of sample* risultano inferiori a quelle *in sample*, o comunque lontane, in termini di rendimento medio, dal rendimento minimo desiderato del 10% (3 su 4).

- Per $p = 5$ si osserva una situazione simile a quella osservata per $p = 2$, ma caratterizzata da un'ancor più elevata variabilità riferita alle varie finestre temporali. Le performance *out of sample*, in 3 casi su 4 appaiono migliori di quelle *in sample*, che però risultano particolarmente scarse. Le stesse performance *out of sample* risultano inoltre peggiori in 3 casi su 4 nel confronto con $p = 1$ e $p = 1.5$, e in 2 casi su 4 nel confronto con $p = 2$. Si evidenzia inoltre il risultato relativo alla finestra **w3**, in cui si ottiene uno Sharpe Ratio negativo, dovuto ad un rendimento medio anch'esso negativo.

In considerazione di quanto osservato, si evidenzia che, con riferimento al dataset utilizzato e alle caratteristiche precipue del modello in esame, è ragionevole ipotizzare un peggioramento delle performance *out of sample* all'aumentare del valore del parametro p .

Conclusione

Nel presente elaborato si è perseguito un duplice obiettivo: fornire un possibile approccio alla risoluzione del problema di selezione statica di portafoglio e studiare il comportamento delle distribuzioni Pareto Levy Stabili nel contesto di un'applicazione a tale problema. Dopo una panoramica iniziale della teoria esistente, riferita in particolare al modello Mean Variance e alle criticità che lo caratterizzano, si sono approfonditi gli elementi inclusi nel modello in questione, volti al superamento di tali criticità. Nello specifico, si sono trattati nel dettaglio: i) le misure di rischio coerenti, in particolare la misura di rischio a due code inclusa nel presente approccio; ii) la metodologia risolutiva adottata per affrontare un problema caratterizzato da una complessità di tipo "NP-Hard", che di fatto non permette una soluzione in forma chiusa e iii) le distribuzioni Pareto Levy Stabili e le proprietà che le contraddistinguono, con particolare *focus* sul confronto con le distribuzioni Gaussiane nella modellazione ai rendimenti dei titoli finanziari. Nella parte finale dell'elaborato (capitolo 4), si è esposta l'analisi empirica svolta sui dati del mercato finanziario italiano (FTSE MIB), sviluppata nell'ambiente Matlab, specificando nel dettaglio la costruzione del modello in ogni sua parte, il funzionamento dell'algoritmo e l'utilizzo nell'analisi pratica svolta.

I risultati ottenuti evidenziano una buona performance del modello, il quale, utilizzando lo specifico settaggio dei parametri dell'algoritmo descritto nel capitolo, mostra una performance relativa al campione *out of sample* (campione di test) superiore a quelle ottenute nel campione *in sample* (campione di allenamento) in

tutte le finestre temporali considerate.

Si è poi confrontato il modello descritto con due modelli alternativi, sviluppati in parallelo a quello che include le distribuzioni stabili, ma caratterizzati da ipotesi distributive differenti, in particolare quella normale e quella campionaria (senza applicazione di alcuna distribuzione teorica). I risultati ottenuti in questa analisi evidenziano una potenziale superiorità del modello "stabile", il quale in tre finestre temporali su quattro supera in termini di Sharpe Ratio il modello "normale", e in due casi su quattro quello campionario, il quale però dimostra una maggiore instabilità dei risultati.

Infine si sono analizzati i risultati ottenuti dal modello per diversi valori di p , ovvero quel parametro della misura di rischio a due code che determina in qualche modo l'avversione al rischio specifica dell'investitore. Quello che si è potuto notare è che, al crescere dei valori associati a p , il modello restituisce risultati progressivamente peggiori o comunque più instabili. In base a questi risultati è ragionevole assumere che il modello funzioni "bene" solamente nell'ipotesi (irrealistica) di neutralità al rischio degli investitori.

Alcuni possibili sviluppi futuri per approfondire ulteriormente l'analisi condotta in questo modello riguardano la misura di rischio utilizzata. Una possibile variante potrebbe ad esempio prevedere l'applicazione delle distribuzioni stabili a misure di rischio coerenti di tipo *quantile based*, come ad esempio il Conditional Value at Risk (CVaR), per sfruttare appieno l'informazione contenuta nella specifica forma distributiva. Un'altra eventuale implementazione di un modello basato sulle distribuzioni stabili potrebbe invece includere la minimizzazione di quei parametri che, in tali distribuzioni, sono indicatori di rischiosità ovvero α e γ , contestualmente ad una massimizzazione dei parametri indicatori di performance (β e δ).

Per concludere, il modello proposto in questa tesi può rappresentare un punto di partenza promettente per lo sviluppo di modelli che integrano la modellazione dei rendimenti finanziari tramite distribuzioni stabili. Questo, in un contesto

finanziario in continua evoluzione nonché caratterizzato da significativa instabilità, potrebbe rappresentare un interessante strumento, utile ai *practitioners* nella gestione degli investimenti.

Appendice A

Codice Matlab per l'analisi empirica relativa al capitolo 2

```
1 clear ;
2 rng('shuffle');
3
4 % import dati
5 logReturns = table2array(readtable('5StabLogR.xlsx'));
6 [n_rend, numvar] = size(logReturns);
7
8 % nome dei titoli (per grafici)
9 stocks = ["Campari", "Enel", "Intesa San Paolo", "Leonardo", "Moncler
10           "];
11 % K-S Test (https://it.mathworks.com/help/stats/kstest.html#
12           namevaluepairarguments)
13 normalizedLogReturns = (logReturns - mean(logReturns)) ./ std(
14           logReturns); % normalizzazione
15 h = zeros(numvar, 1); % inizializzazione del vettore ipotesi
16 p = zeros(numvar, 1); % inizializzazione dei p-values
17 ksstat = zeros(numvar, 1); % inizializzazione delle statistiche
```

```

17 for i = 1:numvar
18     [h(i), p(i), ksstat(i),cv(i)] = kstest(normalizedLogReturns(:, i)
19     ,"Alpha",0.01); % K-S test per ogni variabile
20     KS(i).test = [h(i), p(i), ksstat(i)];
21 end
22 % fit delle distribuzioni stabili e normali
23 for i = 1:numvar
24     stime(i).stable = fitdist(logReturns(:,i), 'Stable');
25     stime(i).norm = fitdist(logReturns(:,i), 'Normal');
26
27     % generazione di serie storiche sui parametri stimati
28     Gen(i).S = random('Stable', stime(i).stable.alpha, stime(i).stable
29     .beta, stime(i).stable.gam, stime(i).stable.delta, [1, n_rend]);
30     Gen(i).N = random('Normal', stime(i).norm.mu, stime(i).norm.sigma,
31     [1, n_rend]);
32 end
33 %https://it.mathworks.com/help/stats/ksdensity.html
34 % grafici
35 for k = 1:numvar
36     figure('Position', [100, 100, 1200, 600]);
37     histogram(logReturns(:,k), 'Normalization', 'pdf', 'FaceAlpha',
38     0.5);% istogramma dati campionari
39     hold on;
40
41     % Kernel density
42     [f, xi] = ksdensity(Gen(k).S, 'Support', 'unbounded'); % grafico
43     della dis stabile
44     plot(xi, f, 'b-', 'LineWidth', 2);
45
46     [g, yi] = ksdensity(Gen(k).N, 'Support', 'unbounded');% grafico
47     della dis normale

```

```

44     plot(yi, g, 'r', 'LineWidth', 2);
45
46     hold off;
47     title(sprintf('Confronto tra distribuzioni applicate a %s', stocks
(k)));
48     xlabel('Log Return Value');
49     ylabel('Probability Density');
50     legend('Empirical Data', 'Stable Fit', 'Normal Fit');
51     grid on;
52 end
53
54 % grafici di Cauchy, Normale e Levy (fonte Matlab mathworks)
55 pd_norm = makedist('Stable', 'alpha', 2, 'beta', 0, 'gam', 1, 'delta', 0);
56 pd_cauchy = makedist('Stable', 'alpha', 1, 'beta', 0, 'gam', 1, 'delta', 0);
57 pd_levy = makedist('Stable', 'alpha', 0.5, 'beta', 1, 'gam', 1, 'delta', 0);
58
59 x = -5:.1:5;
60 pdf_norm = pdf(pd_norm, x);
61 pdf_cauchy = pdf(pd_cauchy, x);
62 pdf_levy = pdf(pd_levy, x);
63
64 figure(6)
65 plot(x, pdf_norm, 'b-');
66 hold on
67 plot(x, pdf_cauchy, 'r. ');
68 plot(x, pdf_levy, 'k—');
69 %title('Compare Stable Distributions pdf Plots')
70 legend('Normal', 'Cauchy', 'Levy', 'Location', 'northwest')
71 hold off

```

Appendice B

Codici Matlab per l'algoritmo risolutivo

B.1 Distribuzioni Stabili

```
1 clear
2 close all
3 clc
4 %rng(9)
5 %% GLOBAL PARAMETERS
6
7 NUM_PARTICLES = 20;
8 MAX_ITER = 5000;
9 W = 0.7298;
10 Wmax = 0.9;
11 Wmin = 0.4;           % inertia coefficient
12 WDAMP = 0.99;        % damping inertia coefficient
13 C1 = 1.49618;        % personal acceleration coefficient
14 C2 = 1.49618;% global acceleration coefficient
15 C1max = 2.5;
16 C1min = 0.5;
17 C2max = 2.5;
```

Appendice B

```
18 C2min = 0.5;
19 a = 0.5;           % trade off losses and gains
20 p = 1;           % absolute risk aversion
21 epsilon = 0.0001;
22
23 %% LOADING DATA
24
25 rendimenti = table2array(readtable("FTSEMib_logR"));
26 [D, M] = size(rendimenti); % D: days | M: assets
27 % Inizializzazione parametri portafoglio
28 %oos = 1291; % Numero di rendimenti out of sample ultimi 2 anni)
29 %iis = D - oos; % Numero di rendimenti in sample
30
31 % Window 1
32 % ris = rendimenti(1:1269,:); %rendimenti in sample
33 % roos = rendimenti(1270:1776,:);% rendimenti out of sample
34 % iis = 1269;
35
36 % Window 2
37 % ris = rendimenti(254:1524,:); %rendimenti in sample
38 % roos = rendimenti(1525:2035,:);% rendimenti out of sample
39 % iis = 1270;
40 %
41 % Window 3
42 ris = rendimenti(508:1778,:); %rendimenti in sample
43 roos = rendimenti(1779:2292,:);% rendimenti out of sample
44 iis = 1270;
45
46 %
47 %% Window 4
48 % ris = rendimenti(767:2035,:); %rendimenti in sample
49 % roos = rendimenti(2036:2545,:);% rendimenti out of sample
50 % iis = 1268;
```

Appendice B

```
51
52 annuo = 1/10; % rendimento annuo desiderato
53 giornaliero = (1+annuo)^(1/252) - 1; % rendimento giornaliero
    desiderato
54 rf = 0.0239; % Bund 10y 30.06.2023 (da decidere il tasso appropriato
    e scaricarlo direttamente)
55 rfd = (1+rf)^(1/252)-1; % risk free giornaliero per sharpe ratio
56 Wind = 3;
57 tic
58 %% INITIALIZATION OF PSO
59
60 % creo degli oggetti, ovvero delle variabili che contengono delle
    propriet
61 % e per noi rappresentano le particelle, definite da: posizione,
    velocit ,
62 % cost (ovvero rischio nel nostro caso) e pbest.
63
64 contatore_stop = 0; % Inizializzazione contatore per lo stop
65 previous_best_cost = 0; % Inizializzazione confronto per stop
66
67 disp('initializing the particles') % disp per check codice
68 for i = 1:NUM_PARTICLES
69
70     % definisco la posizione iniziale della particella assegnando
71     % un'allocazione iniziale random e poi attribuendola alla
    posizione
72     % della particella
73     weights = rand(M,1);
74     particles(i).position = weights;
75
76     % definisco la velocit della particella (inizialmente non
    essendosi
77     % spostata inizializzata a zero)
```

```

78     particles(i).velocity = zeros(M,1);
79     disp("Particles: " + num2str(i)); % disp per check codice
80     ptf = ris*particles(i).position; % creazione della serie storica
      di ptf
81     stime_stable = fitdist(ptf, 'Stable'); % stima parametri della
      distribuzione stabile
82     % mu = stime_stable.delta; % salvataggio parametro di locazione (
      media) per confronto nella two sided
83     StabGen = random('Stable', stime_stable.alpha, stime_stable.beta,
      stime_stable.gam, stime_stable.delta, [1, iis]);
84     mu = mean(StabGen);
85     % definisco la funzione di costo ovvero la risk function, che
      dipende
86     % dai vari parametri che poi entrano in gioco
87     particles(i).cost = [obj_fun(a,p,epsilon ,giornaliero ,ris ,mu,
      particles(i).position)];
88
89     % definisco il pbest intermini di posizione (che inizialmente
90     % l'allocazione iniziale) e di costo ovvero del rischio associato
      a tale
91     % funzione
92     particles(i).best.position = particles(i).position;
93     particles(i).best.cost = particles(i).cost;
94 end
95
96 % definisco il gbest in termini di posizione (che rappresentata
97 % dall'allocazione della particella migliore in termini di costo,
      ovvero di
98 % rischio (vincolato) pi basso
99 global_best.position = particles(1).best.position;
100 global_best.cost = particles(1).best.cost;
101
102 %% MAIN LOOP PSO

```

```

103
104 disp("initializing main loop") % disp per check codice
105 best_costs = zeros(MAX_ITER,1); % Niter X 1
106 mean_swarm_cost = zeros(MAX_ITER,1); % creazione del costo (rischio)
    medio dello sciame
107 for n_iter = 2:MAX_ITER
108     swarm_cost = zeros(NUM_PARTICLES,1);
109
110     %W = (Wmax-Wmin)*(MAX_ITER-n_iter)/MAX_ITER+Wmin;
111     W = Wmax-(Wmax - Wmin)*(n_iter/MAX_ITER);
112     C1 = (C1min - C1max)*(n_iter/MAX_ITER)+C1max;
113     C2 = (C2max - C2min)*(n_iter/MAX_ITER)+C2min;
114
115     for i=1:NUM_PARTICLES
116
117         % Aggiornamento velocit
118         particles(i).velocity = W * particles(i).velocity + ...
119             C1 * rand(M,1) .* (particles(i).best.
position - particles(i).position) + ...
120             C2 * rand(M,1) .* (global_best.
position - particles(i).position);
121
122         % Aggiornamento posizioni
123         particles(i).position = particles(i).position + particles(i).
velocity;
124
125         % stima parametro locazione della dist. stabile
126         ptf = ris*particles(i).position;
127         stime_stable = fitdist(ptf, 'Stable');
128         % mu = [stime_stable.delta];
129         StabGen = random('Stable',stime_stable.alpha, stime_stable.
beta, stime_stable.gam, stime_stable.delta, [1, iis]);
130         mu = mean(StabGen);

```

```

131
132
133     % Valutazione della particella (rischio)
134     particles(i).cost = [particles(i).cost; obj_fun(a,p,epsilon ,
giornaliero ,ris ,mu, particles(i).position)];
135
136     % Aggiornamento pbest
137     if particles(i).cost(end) < particles(i).best.cost
138         particles(i).best.position = particles(i).position;
139         particles(i).best.cost = particles(i).cost(end);
140
141     % Aggiornamento gbest
142     if particles(i).best.cost < global_best.cost
143         global_best.position = particles(i).best.position;
144         global_best.cost = particles(i).best.cost;
145     end
146 end
147 swarm_cost(i) = particles(i).cost(end);
148 end
149
150 % salvataggio best cost
151 best_costs(n_iter) = global_best.cost;
152
153     % Check per equivalenza
154     if global_best.cost == previous_best_cost
155         contatore_stop = contatore_stop + 1;
156     else
157         contatore_stop = 0; % Reset del contatore se cambia il
best_cost
158     end
159     previous_best_cost = global_best.cost; % Aggiornamento del
parametro di confronto per iterazione successiva
160

```

Appendice B

```
161 % Particella media (in termini di costo), per visualizzazione sul
grafico
162 mean_swarm_cost(n_iter) = mean(swarm_cost);
163 mean_rendimento = mean(ris*global_best.position);
164
165 % creazione visiva dello storico delle iterazioni per il gbest
166 disp("Iteration: " + num2str(n_iter) + " | Best cost: " +
best_costs(n_iter) + ...
167 " | Mean cost: " + mean_swarm_cost(n_iter) + " | Mean
rendimento global best: " + mean_rendimento + " | W " + W+ " |C1 "
+ C1 +" |C2 " + C2)
168
169 % rallentamento del peso inerziale nel corso delle iterazioni
170 % if W > Wmin
171 % W = W*WDAMP;
172 % else
173 % W = Wmin;
174 % end
175 % Stop al raggiungimento di n iterazioni uguali
176 % if n_iter >= MAX_ITER * 0.66 && contatore_stop >= MAX_ITER*
177 % disp("Raggiunta condizione di stop")
178 % break;
179 % end
180 end
181
182 %% RESULTS VISUALIZATION
183
184 S_fig = figure(1);
185 hold on;
186 % Creazione di un array vuoto per i manici
187 h = gobjects(3, 1);
188
189 % Disegno delle particelle
```

Appendice B

```
190 for i = 1:NUM_PARTICLES
191     h(1) = plot(particles(i).cost, 'linewidth', 0.1, 'Color', [0.05,
        0.05, 0.05], 'LineStyle', '-');
192 end
193
194 % Disegno del costo medio dello swarm
195 h(2) = plot(mean_swarm_cost(2:end), 'Linewidth', 2, 'Color', 'blue');
196
197 % Disegno del miglior costo
198 h(3) = plot(best_costs(2:end), 'LineWidth', 2, 'Color', 'red');
199
200 % Parametri del grafico
201 grid on; grid minor; box on;
202 xlabel("Num iterations");
203 ylabel("Particles Cost");
204 set(gca, 'YScale', 'log') % Imposta la scala logaritmica per l'asse Y
205
206 % Aggiunta della legenda con colori corrispondenti
207 legend(h, ["Particles", "Mean Swarm Cost", "Best Cost"], 'Location', '
        best');
208 hold off;
209
210 % Salvataggio del grafico come immagine JPG
211 saveas(S_fig, 'PSO_Stabil_w3a05p1.jpg');
212 %% OUT OF SAMPLE ANALISYS & COMPARISON
213 final_allocation = global_best.position; % M X 1
214
215 portafoglio_iis = ris*final_allocation; % 1 X M
216 media_iis = mean(portafoglio_iis); % 1 X 1 (giornaliero)
217 varianza_iis = var(portafoglio_iis');
218 sharpe_iis = (media_iis - rfd)/sqrt(varianza_iis);
219
220 portafoglio_oos = roos*final_allocation; % 1 X M
```

Appendice B

```
221 media_oos = mean(portafoglio_oos); % 1 X 1 (giornaliero)
222 varianza_oos = var(portafoglio_oos');
223 sharpe_oos = (media_oos - rfd)/sqrt(varianza_oos);
224
225 disp("          In Sample | Out of Sample")
226 disp("Media:          "+ media_iis+ " | " + media_oos)
227 disp("Varianza:       "+ varianza_iis+ " | " + varianza_oos)
228 disp("Sharpe ratio:   "+ sharpe_iis+ " | " + sharpe_oos)
229 toc
230
231
232 save("FTSEMib_2S_Sw3a05p1","ris","Wind","NUM_PARTICLES","MAX_ITER","W
    ", "WDAMP", "Wmin", "Wmax", "C1", "C2", "a", "p", "epsilon", "rf", "annuo", "
    particles", "best_costs", "global_best")
233 %% OBJECTIVE FUNCTION
234
235 function cost = obj_fun(a,p,epsilon,giornaliero,R,mu,x)
236     mean_r = mean(R,1);
237     [D] = size(R,1);
238     diff_r = R-mu; % se si vuole il rischio espresso come scostamenti
    positivi e negativi dei rendimenti dalla media, sostituire mu con
    mean_r
239     risk_twosided = a * norm(sum((diff_r.*(diff_r>0))*x)/D,1) + (1-a)
    * norm(sum((diff_r.*(diff_r<0))*x)/D,p) - mu; % 1 e p definiscono l
    'ordine della norma
240     vincolo1 = abs(sum(x)-1);
    % violazione di budget
241     vincolo2 = max(0,-(mean_r*x - giornaliero));
    % performance constraint
242     vincolo3 = sum(max(0,-x));
    % short selling constraint
243
244     cost_vincoli = 1/epsilon * (vincolo1 + vincolo2 + vincolo3);
```

```

245     cost = risk_twosided + cost_vincoli;
246 end

```

B.2 Distribuzioni Normali

```

1 clear
2 close all
3 clc
4 %rng(9)
5 %% GLOBAL PARAMETERS
6
7 NUM_PARTICLES = 20;
8 MAX_ITER = 5000;
9 W = 0.7298;
10 Wmax = 0.9;
11 Wmin = 0.4;           % inertia coefficient
12 WDAMP = 0.99;        % damping inertia coefficient
13 C1 = 1.49618;        % personal acceleration coefficient
14 C2 = 1.49618;        % global acceleration coefficient
15 C1max = 2.5;
16 C1min = 0.5;
17 C2max = 2.5;
18 C2min = 0.5;
19 a = 0.5;             % trade off losses and gains
20 p = 1;               % absolute risk aversion
21 epsilon = 0.0001;
22
23 %% LOADING DATA
24
25 rendimenti = table2array(readtable("FTSEMib_logR.xlsx"));
26 [D, M] = size(rendimenti); % D: days | M: assets
27 % Inizializzazione parametri portafoglio
28 % oos = 1291; % Numero di rendimenti out of sample ultimi 2 anni)

```

Appendice B

```
29 % iis = D - oos; % Numero di rendimenti in sample
30
31
32 %% Window 1
33 % ris = rendimenti(1:1269,:); %rendimenti in sample
34 % roos = rendimenti(1270:1776,:);% rendimenti out of sample
35 % iis = 1269;
36 %%
37 % Window 2
38 % ris = rendimenti(254:1524,:); %rendimenti in sample
39 % roos = rendimenti(1525:2035,:);% rendimenti out of sample
40 % iis = 1270;
41 %%
42 %% Window 3
43 % ris = rendimenti(508:1778,:); %rendimenti in sample
44 % roos = rendimenti(1779:2292,:);% rendimenti out of sample
45 % iis = 1270;
46 %%
47 %%
48 %% Window 4
49 % ris = rendimenti(767:2035,:); %rendimenti in sample
50 % roos = rendimenti(2036:2545,:);% rendimenti out of sample
51 % iis = 1268;
52
53 C_ini = 100; % capitale iniziale
54 annuo = 1/10; % rendimento annuo desiderato
55 giornaliero = (1+annuo)^(1/252) - 1; % rendimento giornaliero
    desiderato
56 rf = 0.0239; % Bund 10y 30.06.2023 (da decidere il tasso appropriato
    e scaricarlo direttamente)
57 rfd = (1+rf)^(1/252)-1; % risk free giornaliero per sharpe ratio
58 Wind = 2;
59 tic
```

```

60 %% INITIALIZATION OF PSO
61
62 % creo degli oggetti, ovvero delle variabili che contengono delle
    propriet
63 % e per noi rappresentano le particelle, definite da: posizione,
    velocit,
64 % cost (ovvero rischio nel nostro caso) e pbest.
65
66 contatore_stop = 0; % Inizializzazione contatore per lo stop
67 previous_best_cost = 0; % Inizializzazione confronto per stop
68
69 disp('initializing the particles') % disp per check codice
70 for i = 1:NUM_PARTICLES
71
72     % definisco la posizione iniziale della particella assegnando
73     % un'allocazione iniziale random e poi attribuendola alla
    posizione
74     % della particella
75     weights = rand(M,1);
76     particles(i).position = weights;
77
78     % definisco la velocit della particella (inizialmente non
    essendosi
79     % spostata    inizializzata a zero)
80     particles(i).velocity = zeros(M,1);
81     disp("Particles: " + num2str(i)); % disp per check codice
82     ptf = ris*particles(i).position; % creazione della serie storica
    di ptf
83     stime_norm = fitdist(ptf, 'Normal'); % stima parametri della
    distribuzione normale
84     % mu = [stime_norm.mu]; % salvataggio parametro di locazione (
    media) per confronto nella two sided
85     NormGen = random('Normal', stime_norm.mu, stime_norm.sigma, [1, iis

```

```

    ]);
86     mu = mean(NormGen);
87
88     % definisco la funzione di costo ovvero la risk function, che
      dipende
89     % dai vari parametri che poi entrano in gioco
90     particles(i).cost = [obj_fun(a,p,epsilon ,giornaliero ,ris ,mu,
      particles(i).position)];
91
92     % definisco il pbest intermini di posizione (che inizialmente
93     % l'allocazione iniziale) e di costo ovvero del rischio associato
      a tale
94     % funzione
95     particles(i).best.position = particles(i).position;
96     particles(i).best.cost = particles(i).cost;
97 end
98
99 % definisco il gbest in termini di posizione (che rappresentata
100 % dall'allocazione della particella migliore in termini di costo,
      ovvero di
101 % rischio (vincolato) pi basso
102 global_best.position = particles(1).best.position;
103 global_best.cost = particles(1).best.cost;
104
105 %% MAIN LOOP PSO
106
107 disp("initializing main loop") % disp per check codice
108 best_costs = zeros(MAX_ITER,1); % Niter X 1
109 mean_swarm_cost = zeros(MAX_ITER,1); % creazione del costo (rischio)
      medio dello sciame
110 for n_iter = 2:MAX_ITER
111     swarm_cost = zeros(NUM_PARTICLES,1);
112

```

```

113 % W = (Wmax-Wmin)*(MAX_ITER-n_iter)/MAX_ITER+Wmin;
114 W = Wmax-(Wmax - Wmin)*(n_iter/MAX_ITER);
115 C1 = (C1min - C1max)*(n_iter/MAX_ITER)+C1max;
116 C2 = (C2max - C2min)*(n_iter/MAX_ITER)+C2min;
117
118 for i=1:NUM_PARTICLES
119
120 % Aggiornamento velocità
121 particles(i).velocity = W * particles(i).velocity + ...
122 C1 * rand(M,1) .* (particles(i).best.
position - particles(i).position) + ...
123 C2 * rand(M,1) .* (global_best.
position - particles(i).position);
124
125 % Aggiornamento posizioni
126 particles(i).position = particles(i).position + particles(i).
velocity;
127
128 % stima parametro locazione della dist. normale
129 ptf = ris*particles(i).position;
130 stime_norm = fitdist(ptf, 'Normal');
131 % mu = [stime_norm.mu];
132 NormGen = random('Normal', stime_norm.mu, stime_norm.sigma, [1,
iis]);
133 mu = mean(NormGen);
134
135 % Valutazione della particella (rischio)
136 particles(i).cost = [particles(i).cost; obj_fun(a,p,epsilon,
giornaliero,ris,mu,particles(i).position),];
137
138 % Aggiornamento pbest
139 if particles(i).cost(end) < particles(i).best.cost
140 particles(i).best.position = particles(i).position;

```

```

141         particles(i).best.cost = particles(i).cost(end);
142
143         % Aggiornamento gbest
144         if particles(i).best.cost < global_best.cost
145             global_best.position = particles(i).best.position;
146             global_best.cost = particles(i).best.cost;
147         end
148     end
149     swarm_cost(i) = particles(i).cost(end);
150 end
151
152 % salvataggio best cost
153 best_costs(n_iter) = global_best.cost;
154
155 % Check per equivalenza
156 if global_best.cost == previous_best_cost
157     contatore_stop = contatore_stop + 1;
158 else
159     contatore_stop = 0; % Reset del contatore se cambia il
best_cost
160 end
161 previous_best_cost = global_best.cost; % Aggiornamento del
parametro di confronto per iterazione successiva
162
163 % Particella media (in termini di costo), per visualizzazione sul
grafico
164 mean_swarm_cost(n_iter) = mean(swarm_cost);
165 mean_rendimento = mean(ris*global_best.position);
166
167 % creazione visiva dello storico delle iterazioni per il gbest
168 disp("Iteration: " + num2str(n_iter) + " | Best cost: " +
best_costs(n_iter) + ...
169     " | Mean cost: " + mean_swarm_cost(n_iter) + " | Mean

```

```

    rendimento global best: " + mean_rendimento)
170
171 % rallentamento del peso inerziale nel corso delle iterazioni
172 % if W > Wmin
173 %     W = W*WDAMP;
174 % else
175 %     W = Wmin;
176 % end
177
178 %% Stop al raggiungimento di 20 iterazioni uguali
179 % if n_iter >= MAX_ITER * 0.66 && contatore_stop >= 500
180 %     disp("Raggiunta condizione di stop")
181 %     break;
182 % end
183 end
184
185 %% RESULTS VISUALIZATION
186
187 N_fig = figure(1);
188 hold on;
189 % Creazione di un array vuoto per i manici
190 h = gobjects(3, 1);
191
192 % Disegno delle particelle
193 for i = 1:NUM_PARTICLES
194     h(1) = plot(particles(i).cost, 'linewidth', 0.1, 'Color', [0.05,
195         0.05, 0.05], 'LineStyle', '-');
196
197 % Disegno del costo medio dello swarm
198 h(2) = plot(mean_swarm_cost(2:end), 'Linewidth', 2, 'Color', 'blue');
199
200 % Disegno del miglior costo

```

Appendice B

```
201 h(3) = plot(best_costs(2:end), 'LineWidth', 2, 'Color', 'red');
202
203 % Parametri del grafico
204 grid on; grid minor; box on;
205 xlabel("Num iterations");
206 ylabel("Particles Cost");
207 set(gca, 'YScale', 'log') % Imposta la scala logaritmica per l'asse Y
208
209 % Aggiunta della legenda con colori corrispondenti
210 legend(h, ["Particles", "Mean Swarm Cost", "Best Cost"], 'Location', '
        best');
211 hold off;
212
213 % Salvataggio del grafico come immagine JPG
214 saveas(N_fig, 'PSO_Normal_w1a05p1.jpg');
215 %% OUT OF SAMPLE ANALISYS & COMPARISON
216 final_allocation = global_best.position; % M X 1
217
218 portafoglio_iis = ris*final_allocation; % 1 X M
219 media_iis = mean(portafoglio_iis); % 1 X 1 (giornaliero)
220 varianza_iis = var(portafoglio_iis');
221 sharpe_iis = (media_iis - rfd)/sqrt(varianza_iis);
222
223 portafoglio_oos = roos*final_allocation; % 1 X M
224 media_oos = mean(portafoglio_oos); % 1 X 1 (giornaliero)
225 varianza_oos = var(portafoglio_oos');
226 sharpe_oos = (media_oos - rfd)/sqrt(varianza_oos);
227
228 disp("                In Sample | Out of Sample")
229 disp("Media:          "+ media_iis+ " | " + media_oos)
230 disp("Varianza:       "+ varianza_iis+ " | " + varianza_oos)
231 disp("Sharpe ratio:   "+ sharpe_iis+ " | " + sharpe_oos)
232 toc
```

```

233
234 save("FTSEMib_2S_Nw1a05p1","ris","Wind","NUM_PARTICLES","MAX_ITER","W
    " ,"WDAMP","Wmin","Wmax","C1","C2","a","p","epsilon","rf","annuo","
    particles","best_costs","global_best")
235 %% OBJECTIVE FUNCTION
236
237 function cost = obj_fun(a,p,epsilon,giornaliero,R,mu,x)
238     mean_r = mean(R,1);
239     [D] = size(R,1);
240     diff_r = R-mu; % se si vuole il rischio espresso come scostamenti
    positivi e negativi dei rendimenti dalla media, sostituire mu con
    mean_r
241     risk_twosided = a * norm(sum((diff_r.*(diff_r>0))*x)/D,1) + (1-a)
    * norm(sum((diff_r.*(diff_r<0))*x)/D,p) - mu; % 1 e p definiscono l
    'ordine della norma - mu*x
242     vincolo1 = abs(sum(x)-1);
    % violazione di budget
243     vincolo2 = max(0,-(mean_r*x - giornaliero));
    % performance constraint
244     vincolo3 = sum(max(0,-x));
    % short selling constraint
245
246     cost_vincoli = 1/epsilon * (vincolo1 + vincolo2 + vincolo3);
247     cost = risk_twosided + cost_vincoli;
248 end

```

B.3 Distribuzioni Campionarie

```

1 clear
2 close all
3 clc
4 %rng(9)
5 %% GLOBAL PARAMETERS

```

Appendice B

```
6
7 NUM_PARTICLES = 20;
8 MAX_ITER = 5000;
9 W = 0.7298;
10 Wmax = 0.9;
11 Wmin = 0.4;
12 WDAMP = 0.99;           % damping inertia coefficient
13 C1 = 1.49618;          % personal acceleration coefficient
14 C2 = 1.49618;          % global acceleration coefficient
15 C1max = 2.5;
16 C1min = 0.5;
17 C2max = 2.5;
18 C2min = 0.5;
19 a = 0.5;               % trade off losses and gains
20 p = 1;                 % absolute risk aversion
21 epsilon = 0.0001;
22
23 %% LOADING DATA
24
25 rendimenti = table2array(readtable("FTSEMib_logR.xlsx"));
26 [D, M] = size(rendimenti); % D: days | M: assets
27 % Inizializzazione parametri portafoglio
28 % oos = 1291; % Numero di rendimenti out of sample ultimi 2 anni)
29 % iis = D - oos; % Numero di rendimenti in sample
30
31 % %Window 1
32 % ris = rendimenti(1:1269,:); %rendimenti in sample
33 % roos = rendimenti(1270:1776,:);% rendimenti out of sample
34 % iis = 1269;
35
36 % Window 2
37 ris = rendimenti(254:1524,:); %rendimenti in sample
38 roos = rendimenti(1525:2035,:);% rendimenti out of sample
```

Appendice B

```
39 iis = 1270;
40
41 %% Window 3
42 % ris = rendimenti(508:1778,:); %rendimenti in sample
43 % roos = rendimenti(1779:2292,:);% rendimenti out of sample
44 % iis = 1270;
45 %
46 %
47 %% Window 4
48 % ris = rendimenti(767:2035,:); %rendimenti in sample
49 % roos = rendimenti(2036:2545,:);% rendimenti out of sample
50 % iis = 1268;
51
52 C_ini = 100; % capitale iniziale
53 annuo = 1/10; % rendimento annuo desiderato
54 giornaliero = (1+annuo)^(1/252) - 1; % rendimento giornaliero
    desiderato
55 rf = 0.0239; % Bund 10y 30.06.2023 (da decidere il tasso appropriato
    e scaricarlo direttamente)
56 rfd = (1+rf)^(1/252)-1; % risk free giornaliero per sharpe ratio
57 Wind = 1;
58
59 tic
60 %% INITIALIZATION OF PSO
61
62 % creo degli oggetti, ovvero delle variabili che contengono delle
    propriet
63 % e per noi rappresentano le particelle, definite da: posizione,
    velocit ,
64 % cost (ovvero rischio nel nostro caso) e pbest.
65
66 contatore_stop = 0; % Inizializzazione contatore per lo stop
67 previous_best_cost = 0; % Inizializzazione confronto per stop
```

```

68
69 disp('initializing the particles') % disp per check codice
70 for i = 1:NUM_PARTICLES
71
72     % definisco la posizione iniziale della particella assegnando
73     % un'allocazione iniziale random e poi attribuendola alla
    posizione
74     % della particella
75     weights = rand(M,1);
76     particles(i).position = weights;
77
78     % definisco la velocit  della particella (inizialmente non
    essendosi
79     % spostata  inizializzata a zero)
80     particles(i).velocity = zeros(M,1);
81     disp("Particles: " + num2str(i)); % disp per check codice
82
83     % definisco la funzione di costo ovvero la risk function , che
    dipende
84     % dai vari parametri che poi entrano in gioco
85     particles(i).cost = [obj_fun(a,p,epsilon ,giornaliero ,ris ,particles
    (i).position)];
86
87     % definisco il pbest intermini di posizione (che inizialmente
88     % l'allocazione iniziale) e di costo ovvero del rischio associato
    a tale
89     % funzione
90     particles(i).best.position = particles(i).position;
91     particles(i).best.cost = particles(i).cost;
92 end
93
94 % definisco il gbest in termini di posizione (che  rappresentata
95 % dall'allocazione della particella migliore in termini di costo ,

```

```

    ovvero di
96 % rischio (vincolato) pi basso
97 global_best.position = particles(1).best.position;
98 global_best.cost = particles(1).best.cost;
99
100 %% MAIN LOOP PSO
101
102 disp("initializing main loop") % disp per check codice
103 best_costs = zeros(MAX_ITER,1); % Niter X 1
104 mean_swarm_cost = zeros(MAX_ITER,1); % creazione del costo (rischio)
    medio dello sciame
105
106 for n_iter = 2:MAX_ITER
107     swarm_cost = zeros(NUM_PARTICLES,1);
108
109     %W = (Wmax-Wmin)*(MAX_ITER-n_iter)/MAX_ITER+Wmin;
110     W = Wmax-(Wmax - Wmin)*(n_iter/MAX_ITER);
111     C1 = (C1min - C1max)*(n_iter/MAX_ITER)+C1max;
112     C2 = (C2max - C2min)*(n_iter/MAX_ITER)+C2min;
113
114     for i=1:NUM_PARTICLES
115
116         % Aggiornamento velocit
117         particles(i).velocity = W * particles(i).velocity + ...
118                                 C1 * rand(M,1) .* (particles(i).best.
position - particles(i).position) + ...
119                                 C2 * rand(M,1) .* (global_best.
position - particles(i).position);
120
121         % Aggiornamento posizioni
122         particles(i).position = particles(i).position + particles(i).
velocity;
123

```

```

124
125     % Valutazione della particella (rischio)
126     particles(i).cost = [particles(i).cost; obj_fun(a,p,epsilon ,
giornaliero ,ris , particles(i).position)];
127
128     % Aggiornamento pbest
129     if particles(i).cost(end) < particles(i).best.cost
130         particles(i).best.position = particles(i).position;
131         particles(i).best.cost = particles(i).cost(end);
132
133     % Aggiornamento gbest
134     if particles(i).best.cost < global_best.cost
135         global_best.position = particles(i).best.position;
136         global_best.cost = particles(i).best.cost;
137     end
138 end
139 swarm_cost(i) = particles(i).cost(end);
140 end
141
142 % salvataggio best cost
143 best_costs(n_iter) = global_best.cost;
144
145
146     % Check per equivalenza
147     if global_best.cost == previous_best_cost
148         contatore_stop = contatore_stop + 1;
149     else
150         contatore_stop = 0; % Reset del contatore se cambia il
best_cost
151     end
152     previous_best_cost = global_best.cost; % Aggiornamento del
parametro di confronto per iterazione successiva
153

```

Appendice B

```
154 % Particella media (in termini di costo), per visualizzazione sul
grafico
155 mean_swarm_cost(n_iter) = mean(swarm_cost);
156 mean_rendimento = mean(ris*global_best.position);
157
158 % creazione visiva dello storico delle iterazioni per il gbest
159 disp("Iteration: " + num2str(n_iter) + " | Best cost: " +
best_costs(n_iter) + ...
160 " | Mean cost: " + mean_swarm_cost(n_iter) + " | Mean
rendimento global best: " + mean_rendimento+" | W'+W)
161
162 % rallentamento del peso inerziale nel corso delle iterazioni
163 % if W > Wmin
164 %     W = W*WDAMP;
165 % else
166 %     W = Wmin;
167 % end
168
169 % Stop al raggiungimento di 20 iterazioni uguali
170 % if n_iter >= MAX_ITER * 0.66 && contatore_stop >= 500
171 %     disp("Raggiunta condizione di stop")
172 %     break;
173 % end
174 end
175
176 %% RESULTS VISUALIZATION
177 C_fig = figure(1);
178 hold on;
179 % Creazione di un array vuoto per i manici
180 h = gobjects(3, 1);
181
182 % Disegno delle particelle
183 for i = 1:NUM_PARTICLES
```

Appendice B

```
184     h(1) = plot(particles(i).cost, 'linewidth', 0.1, 'Color', [0.05,
185             0.05, 0.05], 'LineStyle', '-');
186
187 % Disegno del costo medio dello swarm
188 h(2) = plot(mean_swarm_cost(2:end), 'Linewidth', 2, 'Color', 'blue');
189
190 % Disegno del miglior costo
191 h(3) = plot(best_costs(2:end), 'LineWidth', 2, 'Color', 'red');
192
193 % Parametri del grafico
194 grid on; grid minor; box on;
195 xlabel("Num iterations");
196 ylabel("Particles Cost");
197 set(gca, 'YScale', 'log') % Imposta la scala logaritmica per l'asse Y
198
199 % Aggiunta della legenda con colori corrispondenti
200 legend(h, ["Particles", "Mean Swarm Cost", "Best Cost"], 'Location', '
201         best');
202
203 hold off;
204
205 % Salvataggio del grafico come immagine JPG
206 saveas(C_fig, 'PSO_2Sided_w2a05p1.jpg');
207
208 %% OUT OF SAMPLE ANALISYS & COMPARISON
209 final_allocation = global_best.position; % M X 1
210
211 portafoglio_iis = ris*final_allocation; % 1 X M
212 media_iis = mean(portafoglio_iis); % 1 X 1 (giornaliero)
213 varianza_iis = var(portafoglio_iis');
214 sharpe_iis = (media_iis - rfd)/sqrt(varianza_iis);
215
216 portafoglio_oos = roos*final_allocation; % 1 X M
217 media_oos = mean(portafoglio_oos); % 1 X 1 (giornaliero)
```

Appendice B

```
215 varianza_oos = var(portafoglio_oos ');
216 sharpe_oos = (media_oos - rfd)/sqrt(varianza_oos);
217
218 disp("          In Sample | Out of Sample")
219 disp("Media:          "+ media_iis+ " | " + media_oos)
220 disp("Varianza:       "+ varianza_iis+ " | " + varianza_oos)
221 disp("Sharpe ratio:   "+ sharpe_iis+ " | " + sharpe_oos)
222 toc
223
224 save("FTSEMib_2S_Cw2a05p1","ris","Wind","NUM_PARTICLES","MAX_ITER","W
      ", "WDAMP", "Wmin", "Wmax", "C1", "C2", "a", "p", "epsilon", "rf", "annuo", "
      particles", "best_costs", "global_best")
225
226 %% OBJECTIVE FUNCTION
227
228 function cost = obj_fun(a,p,epsilon ,giornaliero ,R,x)
229     mean_r = mean(R,1);
230     [L] = size(R,1);
231     diff_r = R-mean_r;
232     risk_twosided = a * norm(sum((diff_r.*(diff_r>0))*x)/L,1) + (1-a)
* norm(sum((diff_r.*(diff_r<0))*x)/L,p) - mean_r*x; % l e p
definisconl l'ordine della norma
233     vincolo1 = abs(sum(x)-1);
                % violazione di budget
234     vincolo2 = max(0,-(mean_r*x - giornaliero));
                % performance constraint
235     vincolo3 = sum(max(0,-x));
                % short selling constraint
236
237     cost_vincoli = 1/epsilon * (vincolo1 + vincolo2 + vincolo3);
238     cost = risk_twosided + cost_vincoli;
239 end
```

Bibliografia

- A. Ahmadi-Javid. Entropic value-at-risk: A new coherent risk measure. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 155:1105–1123, 2012.
- P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, 9(3):203–228, 1999.
- L. Bachelier. Théorie de la spéculation. In *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, volume 17, pages 21–86, 1900.
- F. Black and R. Litterman. Global portfolio optimization. *Financial analysts journal*, 48(5):28–43, 1992.
- Z. Chen and Y. Wang. Two-sided coherent risk measures and their application in realistic portfolio optimization. *Journal of Banking & Finance*, 32(12):2667–2673, 2008.
- S. A. Cook. The complexity of theorem-proving procedures. In *Logic, Automata, and Computational Complexity: The Works of Stephen A. Cook*, pages 143–152. 2023.
- M. Corazza, G. Fasano, and R. Gusso. Particle swarm optimization with non-smooth penalty reformulation, for a complex portfolio selection problem. *Applied Mathematics and Computation*, 224:611–624, 2013.
- E. J. Elton, M. J. Gruber, S. J. Brown, and W. N. Goetzmann. *Modern portfolio theory and investment analysis*. John Wiley & Sons, 1991.

- E. F. Fama. The behavior of stock-market prices. *The Journal of Business*, 38(1): 34–105, 1965.
- A. Gholamy, V. Kreinovich, and O. Kosheleva. Why 70/30 or 80/20 relation between training and testing sets: A pedagogical explanation. *Int. J. Intell. Technol. Appl. Stat*, 11(2):105–111, 2018.
- C. Gini. Sulla misura della concentrazione e della variabilità dei caratteri. *Atti del Reale Istituto veneto di scienze, lettere ed arti*, 73:1203–1248, 1914.
- F. Hamza and J. Janssen. The mean–semivariances approach to realistic portfolio optimization subject to transaction costs. *Applied stochastic models and data analysis*, 14(4):275–283, 1998.
- J. E. Ingersoll. *Theory of financial decision making*, volume 3. Rowman & Littlefield, 1987.
- C. R. Johnson and P. Nylén. Monotonicity properties of norms. *Linear Algebra and its Applications*, 148:43–58, 1991.
- D. Kahneman and A. Tversky. Prospect theory: An analysis of decision under risk. In *Handbook of the fundamentals of financial decision making: Part I*, pages 99–127. World Scientific, 2013.
- J. Kennedy and R. Eberhart. Particle swarm optimization. In *Proceedings of ICNN'95-international conference on neural networks*, volume 4, pages 1942–1948. ieee, 1995.
- S. J. Kon. Models of stock returns—a comparison. *The Journal of Finance*, 39(1): 147–165, 1984.
- P. Lévy. *Calcul des probabilités*. Gauthier-Villars, 1925.

- M. S. Lobo, M. Fazel, and S. Boyd. Portfolio optimization with linear and fixed transaction costs. *Annals of Operations Research*, 152:341–365, 2007.
- J. Longerstaey and M. Spencer. Riskmetricstm—technical document. *Morgan Guaranty Trust Company of New York: New York*, 51:54, 1996.
- B. Mandelbrot. New methods in statistical economics. *Journal of political economy*, 71(5):421–440, 1963.
- R. Mansini and M. G. Speranza. Heuristic algorithms for the portfolio selection problem with minimum transaction lots. *European Journal of Operational Research*, 114(2):219–233, 1999. ISSN 0377-2217.
- R. Mansini and M. G. Speranza. An exact approach for portfolio selection with transaction costs and rounds. *IIE transactions*, 37(10):919–929, 2005.
- H. Markowitz. Portfolio selection: Efficient diversification of investments. *NY: John Wiley*, 1959.
- H. Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1):77–91, 1952.
- F. J. Massey Jr. The kolmogorov-smirnov test for goodness of fit. *Journal of the American statistical Association*, 46(253):68–78, 1951.
- R. C. Merton and P. A. Samuelson. Continuous-time finance. 1992.
- R. O. Michaud. The markowitz optimization enigma: Is ‘optimized’ optimal? *Financial analysts journal*, 45(1):31–42, 1989.
- J. V. Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, 1944.
- J. P. Nolan. *Stable distributions*. 2012.

- A. Peiro. Skewness in financial returns. *Journal of Banking & Finance*, 23(6): 847–862, 1999.
- A. Ratnaweera, S. K. Halgamuge, and H. C. Watson. Self-organizing hierarchical particle swarm optimizer with time-varying acceleration coefficients. *IEEE Transactions on evolutionary computation*, 8(3):240–255, 2004.
- R. T. Rockafellar and S. Uryasev. Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of banking & finance*, 26(7):1443–1471, 2002.
- R. T. Rockafellar, S. Uryasev, and M. Zabarankin. Generalized deviations in risk analysis. *Finance and Stochastics*, 10:51–74, 2006.
- M. A. Simkowitz and W. L. Beedles. Diversification in a three-moment world. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13(5):927–941, 1978.
- G. Szegö. Measures of risk. *Journal of Banking & finance*, 26(7):1253–1272, 2002.
- G. Szegö. Measures of risk. *European Journal of Operational Research*, 163(1):5–19, 2005.
- P. K. Tripathi, S. Bandyopadhyay, and S. K. Pal. Multi-objective particle swarm optimization with time variant inertia and acceleration coefficients. *Information sciences*, 177(22):5033–5049, 2007.