



Università  
Ca'Foscari  
Venezia

Corso di Laurea  
magistrale  
in Economia e Finanza

Tesi di Laurea

# Metodi per il pricing di opzioni arcobaleno asiatiche

**Relatore**

Ch. Prof. Antonella Basso

**Laureando**

Filippo Zago

Matricola 862542

**Anno Accademico**

2022 / 2023

# INDICE

INTRODUZIONE.....	p.1
CAPITOLO I LE OPZIONI ARCOBALENO: UNA TIPOLOGIA DI OPZIONI ESOTICHE.....	p.3
1.1 OPZIONI ARCOBALENO.....	p.6
CAPITOLO II LA TEORIA DELLE OPZIONI RAINBOW.....	p.9
2.1 WILLIAM MARGRABE.....	p.9
2.2 RENÉ STULZ.....	p.12
2.2.1 OPZIONE CALL SUL MINIMO TRA DUE TITOLI RISCHIOSI.....	p.12
2.2.2 PROPRIETA' DELLE OPZIONI CALL SUL MINIMO TRA DUE TITOLI RISCHIOSI.....	p.15
2.3 HERB JOHNSON.....	p.17
CAPITOLO III COME MODELLIZZARE IL PREZZO DEI SOTTOSTANTI.....	p.21
3.1 MOTO BROWNIANO E BROWNIANO GEOMETRICO.....	p.21
3.2 MOTO BROWNIANO FRAZIONARIO (FRACTIONAL BROWNIAN MOTION).....	p.23
3.2.1 MOTO BROWNIANO FRAZIONARIO MISTO.....	p.26
CAPITOLO IV PRICING DI OPZIONI ARCOBALENO ASIATICHE:FORMULE ANALITICHE E SIMULAZIONE MONTE CARLO.....	p.27
4.1 SIMULAZIONE MONTE CARLO.....	p.27
4.1.1 DERIVATI CHE DIPENDONO DA UN SOTTOSTANTE.....	p.28
4.1.2 DERIVATI CHE DIPENDONO DA PIU' VARIABILI.....	p.29
4.2 VALUTAZIONE UTILIZZANDO IL MOTO BROWNIANO GEOMETRICO.....	p.31
4.2.1 OPZIONI ARCOBALENO ASIATICHE SU MEDIA GEOMETRICA.....	p.31
4.2.2 OPZIONI ARCOBALENO ASIATICHE SU MEDIA ARITMETICA.....	p.34
4.3 VALUTAZIONE UTILIZZANDO IL MOTO BROWNIANO FRAZIONARIO.....	p.41
4.3.1 OPZIONI ARCOBALENO ASIATICHE SUL MINIMO DI DUE MEDIE GEOMETRICHE.....	p.41
4.3.2 VERIFICA DELLA FORMULA ANALITICA TRAMITE SIMULAZIONE MONTE CARLO.....	p.48
4.4 VALUTAZIONE UTILIZZANDO IL MOTO BROWNIANO FRAZIONARIO MISTO....	p.51

4.4.1 OPZIONI ARCOBALENO ASIATICHE SUL MINIMO DI DUE MEDIE  
GEOMETRICHE.....p.51

4.4.2 VERIFICA DELLA FORMULA ANALITICA TRAMITE SIMULAZIONE MONTE  
CARLO.....p.60

CAPITOLO V ALGORITMO IN PHYTON PER IL PRICING DI OPZIONI ARCOBALENO ASIATICHE:  
CONFRONTO TRA MOTO BROWNIANO GEOMETRICO E FRAZIONARIO.....p.67

5.1 PRICING DELL' OPZIONE ARCOBALENO ASIATICA SCRITTA SUL MINIMO DI DUE  
MEDIE ARITMETICHE E GEOMETRICHE (GBM).....p.68

5.2 CODICE PHYTON OPZIONE ARCOBALENO ASIATICA SCRITTA SUL MINIMO DI DUE  
MEDIE ARITMETICHE E GEOMETRICHE (FBM).....p.73

CONCLUSIONI.....p.80



## INTRODUZIONE

La globalizzazione e l'integrazione tra i mercati finanziari ha reso necessaria l'introduzione di strumenti finanziari complessi destinati prettamente a investitori istituzionali, come i fondi comuni d'investimento, i fondi pensione e gli organismo di investimento collettivo del risparmio (OICR), per citarne alcuni, e a speculatori in cerca di rendimenti a basso rischio.

Tenere conto del grado di correlazione tra i mercati e tra i titoli azionari è fondamentale quando si studiano prodotti *multi-asset* come le opzioni arcobaleno.

Il lavoro svolto, pertanto, comincerà trattando le opzioni esotiche nel loro complesso a fini espositivi, per poi focalizzarsi sulle opzioni arcobaleno asiatiche, oggetto di questa tesi.

Si è proceduto introducendo teoricamente tale derivato, servendosi degli autorevoli studi di William Margrabe, René Stulz e Herb Johnson, realizzati tra la fine degli anni Ottanta e la fine degli anni Novanta del 1900. Tali studi sono alla base dei modelli di *pricing* delle opzioni arcobaleno.

Nel capitolo 3 si sono introdotti due processi stocastici come il moto Browniano frazionario e il moto Browniano frazionario misto, che meglio si adattano a descrivere l'andamento dei prezzi azionari rispetto al moto Browniano geometrico, catturando delle caratteristiche dei prezzi che quest'ultimo non cattura.

Nel capitolo 4 si sono analizzati tre paper fondamentali per il *pricing* delle opzioni arcobaleno asiatiche. Nei quali, rispettivamente i titoli sottostanti sono modellati col moto Browniano geometrico nel primo, col moto Browniano frazionario nel secondo e col moto Browniano frazionario misto nell'ultimo.

Si è reso opportuno prima di analizzare i paper, di dare una definizione della simulazione Monte Carlo, in particolare quando si tratta di simulare sentieri del prezzo che tengano conto della correlazione.

Infine, nell'ultimo capitolo, tutti i concetti teorici spiegati nei capitoli precedenti sono stati messi in pratica grazie ad algoritmi per il pricing realizzati in Python. Confrontando opzioni call sul minimo di medie geometriche e aritmetiche, in cui i titoli sottostanti sono modellati col moto Browniano geometrico, con opzioni del medesimo tipo in cui sottostanti sono modellati col moto Browniano frazionario. Come si vedrà, grazie all'analisi di sensitività del prezzo del derivato all'indice di Hurst, tale modello meglio si presta a descrivere il comportamento dei prezzi azionari, in quanto tale indice cattura una caratteristica fondamentale dei prezzi azionari la dipendenza a lungo termine da variazioni passate.

## CAPITOLO 1

### LE OPZIONI ARCOBALENO: UNA TIPOLOGIA DI OPZIONI ESOTICHE

Le opzioni arcobaleno, oggetto di questo lavoro di tesi, rientrano nel novero delle opzioni esotiche.

A differenza delle maggiormente conosciute, diffuse e standardizzate opzioni *call* e *put* Europee ed Americane (c.d. opzioni *plain vanilla*<sup>1</sup>), le opzioni esotiche presentano degli elementi d'innovazione nel calcolo del *payoff*, tali da non consentirne la negoziazione nei mercati regolamentati, ma solo in quelli OTC (*Over-the-counter*).

Infatti, gli elementi innovativi che le caratterizzano, da un lato le rendono più redditizie delle opzioni standard, ma dall'altro, a fronte della maggior complessità, non le rendono adatte al pubblico degli investitori non professionali (o *retail*).

Tali opzioni sono sviluppate dagli ingegneri finanziari per esigenze di copertura dal rischio di mercato ma anche per motivazioni legate alla tassazione, ad aspetti contabili, legali o alla regolamentazione, rendendole maggiormente appetibili ai tesoreri delle società, ai gestori di fondi e alle istituzioni finanziarie<sup>2</sup>.

È opportuno passare in rassegna le principali opzioni esotiche fornendone una breve descrizione<sup>3</sup>:

- *Package*: è un portafoglio formato da *call* e *put* europee, contratti *forward*, *cash*, e il sottostante. Alcuni tipi di *packages* sono: *bull spreads*, *bear spreads*, *butterfly spreads*, *calendar spreads*, *straddles*, *strangles*, ecc...

---

<sup>1</sup> Con opzione si intende il contratto che conferisce al titolare il diritto, ma non l'obbligo, di acquistare (opzione *call*) o di vendere (opzione *put*), una certa attività (sottostante), ad un prezzo prestabilito (*strike price*) ad una certa data (opzione europea) o entro una certa data (opzione americana) previo il pagamento di un premio, il quale costituisce il prezzo dell'opzione.

<sup>2</sup> Hull, J. C. (2017), *Options, Futures, and Other Derivatives*, Pearson, nona edizione, Inghilterra

<sup>3</sup> Borsa Italiana, <https://www.borsaitaliana.it/borsa/glossario/opzione-esotica.html#:~:text=La%20categoria%20delle%20opzioni%20esotiche,di%20standardizzazione%20degli%20elementi%20contrattuali>.

Hanno la peculiarità, nella maggior parte dei casi, di essere strutturati in modo tale da avere un costo iniziale pari a zero.

- *Bermudan options*: rientrano nella sottoclasse delle opzioni americane non standard in quanto, l'esercizio delle stesse è consentito solamente in date predeterminate o durante specifici intervalli temporali.
- *Forward start options*: sono opzioni che decorrono da una certa data futura  $T_1$  e che scadono in data  $T_2$ . Esse garantiscono di ricevere dopo un periodo  $T_1$  (data di consegna) un'opzione standard *call* o *put at-the-money*<sup>4</sup> con durata pari alla durata residua della *forward start*, ossia  $T_2 - T_1$ , senza costi aggiuntivi. (non capisco la correzione)
- *Compound options*: sono opzioni scritte su un'opzione, perciò hanno due *strike prices* e due date d'esercizio. Sono quattro le tipologie di opzioni composte esistenti: *call* su *call*, *call* su *put*, *put* su *call*, *put* su *put*. Nel caso della *call* su *call*, il titolare dell'opzione alla prima data di esercizio  $T_1$  può pagare lo *strike price*  $K_1$  e ricevere una opzione *call*, la quale consente di acquistare il titolo sottostante pagando lo *strike price*  $K_2$  alla seconda data d'esercizio  $K_2$ .
- *Chooser options*: sono opzioni che danno la facoltà di decidere, dopo un determinato periodo di tempo ( $T_1$ ), se l'opzione sarà una *call* o una *put*. Tale flessibilità le rende naturalmente più costose di una *call* o *put* standard.
- *Barrier options*: sono opzioni in cui il *payoff* dipende dal fatto che il prezzo dell'attività sottostante superi o meno, in un determinato periodo temporale, un certo livello (la barriera). Si dividono in:
  - a) *Knock-out options*: che cessano di esistere quando il sottostante raggiunge una certa barriera e a loro volta si dividono in:
    - *Down-and-out call*;
    - *Up-and-out call*;
    - *Down-and-out put*;
    - *Up-and-out put*.

---

<sup>4</sup> Un'opzione è detta *at-the-money* quando la differenza tra il prezzo del sottostante e lo *strike* (per le *call*) o, la differenza tra lo *strike* e il prezzo del sottostante (per le *put*) è nulla, rendendone l'esercizio indifferente al possessore.



b) *Knock-in options*: che vengono in esistenza quando il sottostante raggiunge una certa barriera e a loro volta si dividono in:

- *Down-and-in call*;
- *Up-and-in call*;
- *Down-and-in put*;
- *Up-and-in put*.

- *Binary options*: queste opzioni hanno la peculiarità di avere una struttura del *payoff* discontinua. Nel senso che pagano un ammontare fisso  $Q$ , qualora il prezzo del sottostante superi lo *strike* alla scadenza  $T$  (*cash-or-nothing call*) e non pagano nulla in caso contrario e, viceversa pagano lo stesso ammontare  $Q$  se il prezzo del sottostante termina al di sotto dello *strike* alla scadenza (*cash-or-nothing put*) e non pagano nulla in caso contrario.

Esiste una variante delle medesime, denominata *asset-or-nothing*, che si differenzia delle prime solamente per l'ammontare pagato, che non sarà più  $Q$  ma il prezzo del sottostante.

- *Lookback options*: sono opzioni in cui il *payoff* dipende dal prezzo massimo o minimo raggiunto dal sottostante durante la vita dell'opzione. In particolare, il *payoff* di un'opzione *call loopback* è dato dalla differenza tra il prezzo a scadenza del sottostante e il valore minimo raggiunto da quest'ultimo durante la vita dell'opzione. Nel caso invece della *put loopback*, il *payoff*, specularmente a prima, sarà dato dalla differenza tra il valore massimo raggiunto dal sottostante durante la vita dell'opzione e il prezzo a scadenza del medesimo.
- *Shout options*: sono opzioni in cui, metaforicamente, il possessore può "gridare" (*to shout*) nei confronti del *writer* dell'opzione bloccando il valore intrinseco del sottostante. Alla scadenza il possessore riceverà la somma maggiore tra la differenza tra il valore intrinseco al momento del "grido" e tra lo *strike* e il prezzo del sottostante a scadenza e lo *strike*.

- *Asian options*: sono opzioni in cui il *payoff* dipende dalla media aritmetica o geometrica del prezzo del sottostante durante la vita dell'opzione. Ciò le rende meno costose delle opzioni standard, in quanto i prezzi medi sono meno volatili<sup>5</sup>.

Esistono due macrocategorie di opzioni asiatiche:

- a) *Average price call (put)*: in cui il *payoff* è dato dalla differenza tra la media dei prezzi del sottostante e lo *strike (call)* o viceversa per la *put*;
  - b) *Average strike call (put)*: in cui il *payoff* è dato dalla differenza tra il prezzo del sottostante a scadenza e la media dei prezzi di quest'ultimo (*call*) o viceversa per la *put*.
- *Options to exchange one asset for another* (opzioni di scambio): sono opzioni che coinvolgono due sottostanti U e V. Tali opzioni permettono ad esempio di consegnare U e ricevere V, cosicché l'opzione sarà esercitata solo nel caso in cui il prezzo di V sia superiore a quello di U.

### 1.1 Opzioni Arcobaleno

Rientrano ovviamente nell'elenco di cui sopra, ma lasciate per ultime a fini espositivi, le opzioni arcobaleno (o *rainbow option*). Sono opzioni in cui il *payoff* dipende dal prezzo di più di un titolo sottostante, ciascuno dei quali rappresenta, per l'appunto, un colore dell'arcobaleno. Tra di esse troviamo<sup>6</sup>:

- "*Best of assets or cash*" option: che garantisce alla scadenza il valore massimo tra N titoli rischiosi e il cash, rappresentato dallo *strike price* (K).  
Dunque, la struttura del *payoff* sarà:  $\max(S_1, S_2, \dots, S_n, K)$ ;
- "*Call on max*" option: la quale garantisce al possessore, a scadenza, il diritto di acquistare il titolo che vale di più pagando lo *strike* K.  
Dunque, la struttura del *payoff* sarà:  $\max(\max(S_1, S_2, \dots, S_n) - K, 0)$ ;
- "*Call on min*" option: che garantisce al possessore, a scadenza, il diritto di acquistare il titolo che vale di meno pagando lo *strike* K.  
Dunque, la struttura del *payoff* sarà:  $\max(\min(S_1, S_2, \dots, S_n) - K, 0)$ ;

---

<sup>5</sup> Benvenuto, C. (1996). *Le opzioni esotiche: problemi di pricing e copertura*. Ancona: Università degli studi di Ancona.

<sup>6</sup> Peter Ouwehand, G. W. (2006). Pricing rainbow options. *Wilmott Magazine*.

- “Put on max” option: la quale garantisce al possessore, a scadenza, il diritto di vendere il titolo che vale di più incassando lo *strike* K.  
Dunque, la struttura del *payoff* sarà:  $\max(K - \max(S_1, S_2, \dots, S_n), 0)$ ;
- “Put on min” option: che garantisce al possessore, a scadenza, il diritto di vendere il titolo che vale di meno incassando lo *strike* K.  
Dunque, la struttura del *payoff* sarà:  $\max(K - \min(S_1, S_2, \dots, S_n), 0)$
- “Put 2 and call 1”, infine è l’opzione di scambio, introdotta, come si analizzerà in seguito, negli studi di Margrabe del 1978, in cui sostanzialmente il titolo 2 è lo *strike* da pagare per acquistare il titolo 1.  
La struttura del *payoff* sarà semplicemente:  $\max(S_1 - S_2, 0)$ .

L’integrazione tra i mercati e la globalizzazione degli stessi ha reso necessaria l’introduzione di opzioni *multi-asset*, come le opzioni arcobaleno, definite anche come *correlation products*, in quanto tengono conto della correlazione tra i sottostanti. Tali opzioni sono appetibili sia per gli investitori che per gli speculatori per le seguenti caratteristiche:

- **Diversificazione del rischio:** essa è tanto più accentuata quanto più i sottostanti provengono da mercati non correlati.
- **Efficienza di costo:** l’acquisto di una opzione *multi-asset* è più economico dell’acquisto di tante opzioni singole scritte su ciascun asset considerato. Questo per effetto della correlazione tra i titoli.
- **Miglior copertura dell’esposizione di portafoglio:** forniscono copertura contro il rischio legato ai movimenti di prezzo dei sottostanti.
- **Copertura contro la correlazione:** infine queste opzioni permettono di gestire il rischio legato alla correlazione tra titoli, il quale non è facilmente gestibile.

Si procederà inizialmente introducendo i primi studi fondamentali in materia di opzioni arcobaleno, che si riconducono a (Margrabe, 1978) a (Stulz, 1982) a (Johnson, 1987) ed a (Rubinstein, 1995).



## CAPITOLO 2

### LA TEORIA DELLE OPZIONI RAINBOW

La natura complessa di derivati come le opzioni esotiche pone un evidente problema legato al corretto *pricing* di questi strumenti, in quanto un *pricing* adeguato aumenta l'attività degli stessi e consente di controllare o ridurre il rischio di mercato, che, come si è visto, è un punto di forza proprio di questi derivati.

In questo lavoro si affronta la problematica legata al pricing delle opzioni arcobaleno, ed è perciò opportuno analizzare gli studi che hanno introdotto questi strumenti nel novero delle opzioni esotiche.

#### 2.1 WILLIAM MARGRABE

William Margrabe con il suo articolo del 1978<sup>7</sup> fu il primo ad introdurre le opzioni arcobaleno sotto la veste di un'opzione che permette di scambiare un titolo rischioso con un altro. Da qui il nome del suo lavoro "*The value of an option to exchange one asset for another*".

Margrabe sfrutta il più possibile il lavoro realizzato da Black-Scholes-Merton (d'ora in avanti BSM) estendendolo al fine di risolvere il problema alla base del suo studio. Di fatto, come in BSM, il mercato è perfetto, dunque, non esistono opportunità di arbitraggio prive di rischio e i titoli non pagano dividendi<sup>8</sup>. Il processo seguito dal prezzo a pronti del titolo  $i$ -esimo è il seguente:

$$dx_i = x_i[\alpha_i dt + \sigma_i dz_i] \quad (i = 1,2)$$

dove  $dz_i$  è un processo di Wiener e la correlazione tra i processi di Wiener<sup>9</sup>  $dz_1$  e  $dz_2$  è  $\rho_{12}$ , inoltre si assume che  $\alpha_i$  e  $\sigma_i$  siano costanti.

---

<sup>7</sup> Margrabe, W. (1978). The Value of an Option to Exchange One Asset for Another. *The Journal of Finance*, pp. 177-186.

<sup>8</sup> Hull, J. C. (2017), *op.cit.*, p.347

<sup>9</sup> Il processo di Wiener, o moto Browniano, è un processo stocastico gaussiano in tempo continuo con incrementi indipendenti utilizzato per modellizzare il moto Browniano stesso.

L'opzione di Margrabe garantisce un *payoff* alla scadenza, qualora venisse esercitata, pari a  $x_1 - x_2$ , oppure nullo in caso contrario. Di fatto, la stessa può essere considerata simultaneamente come una *call* sul primo titolo con *strike price*  $x_2$  e come una *put* sul secondo titolo con *strike*  $x_1$ . Detto ciò, si ottiene la seguente la condizione iniziale:

$$f(x_1, x_2, t) = \max(0, x_1 - x_2) \quad (1)$$

Le "condizioni al contorno" (*boundary condition*), che definiscono il valore assunto dal derivato per valori estremi di  $x$  e  $t$  sono le seguenti:

$$0 \leq f(x_1, x_2, t) \leq x_1 \quad (2)$$

Colui che acquista tale tipologia di opzione può coprire la sua esposizione vendendo (*short*)  $w_1 \equiv \partial f / \partial x_1$  unità del titolo 1 ed acquistando (*long*)  $-w_2 \equiv -\partial f / \partial x_2$  unità del titolo 2.

La formula per il *pricing* deve essere linearmente omogenea in  $x_1$  e  $x_2$ <sup>10</sup>, cosicché l'investimento sarà, in base al teorema di Eulero, il seguente:

$$w - w_1 x_1 - w_2 x_2 = 0 \quad (3)$$

A differenza di quanto hanno dimostrato BSM costruendo un portafoglio privo di rischio, composto da un'azione e dal titolo sottostante, in grado di rendere in ogni caso il tasso *risk free*; in questo caso la copertura elimina l'intero rendimento. Infatti, il rendimento di questo investimento, in un breve intervallo di tempo, è rappresentato da:

$$dw - w_1 dx_1 - w_2 dx_2 = 0 \quad (4)$$

In base al lemma di Itô<sup>11</sup>, la variazione del prezzo dell'opzione nel tempo soddisfa la sottostante equazione differenziale stocastica:

$$dw = w_1 dx_1 + w_2 dx_2 + w_3 dt + \frac{1}{2} [w_{11} (dx_1)^2 + 2w_{12} (dx_1 dx_2) + w_{22} (dx_2)^2] \quad (5)$$

dove  $w_3 = \partial w / \partial t$ ,  $(dx_1)^2 = \sigma_1^2 x_1^2 dt$ ,  $(dx_2)^2 = \sigma_2^2 x_2^2 dt$ ,  $(dx_1 dx_2) = \sigma_1 \sigma_2 \rho x_1 x_2 dt$

<sup>10</sup> Si dice funzione omogenea di grado  $k$  una funzione tale per cui, moltiplicando per un certo valore  $\alpha > 0$  ogni sua variabile si ottiene lo stesso valore che si otterrebbe moltiplicando per  $\alpha^k$  la funzione originaria. Cioè se:  $f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1, \dots, x_n)$

Quando il grado  $k = 1$  si parla di funzioni linearmente omogenee

<sup>11</sup> Hull, J. C. (2017), *op.cit.*, pp. 326-327

Sostituendo la (4) nella (5) si ottiene:

$$w_3 + \frac{1}{2}[w_{11}(dx_1)^2 + 2w_{12}(dx_1dx_2) + w_{22}(dx_2)^2] = 0 \quad (6)$$

La soluzione all'equazione differenziale in (6) è data dalla funzione  $f(x_1, x_2, t)$ , nel rispetto delle condizioni di contorno in (2) e della condizione iniziale in (1):

$$f(x_1, x_2, t) = x_1N(d_1) - x_2N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(x_1/x_2) + \frac{1}{2}\sigma^2t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

Tuttavia, Margrabe, servendosi dell'approccio suggerito da Stephen Ross, che si focalizza su quanto già introdotto da BSM al fine di ridurre drasticamente i calcoli matematici, trasforma il problema in esame nel problema affrontato da BSM.

In sostanza, il secondo asset viene considerato il *numéraire*<sup>12</sup>, in altre parole è come se formasse una nuova valuta e il primo asset costasse  $x_1/x_2$  in tale valuta.

Si noti che il tasso di interesse di un prestito non rischioso, denominato in unità del secondo asset, è zero in un mercato perfetto. Cioè chi presta un'unità del secondo asset chiede come rimborso un'unità del medesimo asset, perché ricevere il secondo asset fornisce la giusta compensazione per l'investimento e il rischio.

Così facendo, l'opzione di scambio diventa una *call* sul primo titolo, con *strike price* unitario e tasso d'interesse uguale a zero. Questo altro non è che un caso speciale del problema affrontato da BSM. Infatti:

$$f(x_1, x_2, t)/x_2 = f(x, t) = (x_1/x_2)N(d_1) - 1 * e^{0(t-t^*)}N(d_2)$$

---

<sup>12</sup> Il *numéraire* è un'entità economica negoziabile in termini del cui prezzo sono espressi i prezzi di tutti gli altri negoziabili

## 2.2 RENÉ STULZ

Stulz nel 1982 con il suo paper “*Option on the minimum or the maximum of two risky assets*”<sup>13</sup> ha introdotto le formule per il *pricing* di *call* e *put* europee sul massimo o sul minimo di due titoli rischiosi. Questa tipologia di opzioni è molto utile ai fini del *pricing* di una vasta gamma di strumenti derivati, come ad esempio le *option-bonds*<sup>14</sup>.

### 2.2.1 Opzione call sul minimo tra due titoli rischiosi

Stulz comincia fornendo la formula per il *pricing* di una *call* sul minimo tra due titoli rischiosi.

Dunque, egli considera  $V$  e  $H$  i prezzi di due titoli rischiosi, il *payoff* a scadenza dell’opzione da prezzare sarà:  $\max \{ \min(V, H) - F, 0 \}$ , dove  $F$  è lo *strike price*.

Vengono fatte le opportune assunzioni riportate di seguito:

- 1) Come per BSM non ci sono costi di transazione né tasse, le vendite allo scoperto sono ammesse, non vi è differenza tra il tasso a cui si prende a prestito e quello a cui si concede a prestito ed infine i titoli sono negoziati continuamente;
- 2) I prezzi soddisfano le sottostanti equazioni differenziali stocastiche.

$$dV/V = \mu_V dt + \sigma_V dZ_V \quad (1)$$

$$dH/H = \mu_H dt + \sigma_H dZ_H \quad (2)$$

Viene assunto che  $\sigma_V$  e  $\sigma_H$ , le quali rappresentano la varianza dei rendimenti dei titoli  $V$  e  $H$ , siano costanti. Mentre,  $\mu_V$  e  $\mu_H$ , che sono i tassi di rendimento atteso, possono cambiare nel tempo ma in ogni caso le equazioni differenziali, di cui sopra, devono avere soluzione. Infine, il coefficiente di correlazione tra i due processi di Wiener  $dZ_V$  e  $dZ_H$ ,  $\rho_{VH}$ , si assume costante nel tempo.

- 3) Il tasso d’interesse  $R$  è costante nel tempo.

---

<sup>13</sup> Stulz, R. M. (1982). Options on the minimum or the maximum of two risky assets: analysis and applications. *Journal of Financial Economics*, 161-185.

<sup>14</sup> Sono opzioni che danno il diritto di acquistare o vendere una determinata obbligazione sottostante ad un determinato prezzo, ad una determinata data (europee) o anche prima (americane)



Si considera  $M(V, H, F, T-t)$  il prezzo di una *call* sul minimo tra  $V$  e  $H$  con scadenza in  $T$  e prezzo di esercizio  $F$ . Per trovare  $M$  è sufficiente trovare il valore di un portafoglio autofinanziante<sup>15</sup> il cui valore alla data  $T$  sia uguale al valore dell'opzione in  $T$ . Il valore di questo portafoglio alla data  $t$ , con  $t \leq T$ , deve essere uguale al valore dell'opzione in  $t$  al fine di prevenire ogni possibilità di arbitraggio. Si pone  $T - t$ , ossia il tempo che manca alla scadenza dell'opzione, uguale a  $\tau$  e  $P$  uguale al valore del portafoglio autofinanziante. Dunque,  $P$  sarà funzione di  $V$ ,  $H$  e  $\tau$  e seguirà il seguente processo in base al lemma di Itô:

$$dP = P_V dV + P_H dH - P_\tau dt + \frac{1}{2} \{P_{VV} V^2 \sigma_V^2 + P_{HH} H^2 \sigma_H^2 + 2P_{VH} VH \rho_{VH} \sigma_V \sigma_H\} dt \quad (3)$$

Se il portafoglio è autofinanziante e consiste in investimenti in  $V$ ,  $H$  e in un titolo *risk free* la sua dinamica può essere parimenti descritta da:

$$dP = x(dV/V)P + y(dH/H)P + (1 - x - y)RPdt \quad (4)$$

dove  $x$  e  $y$  rappresentano, rispettivamente, le frazioni di portafoglio investite in  $V$  e in  $H$ . Ponendo la (4) uguale alla (3) ne segue che:

$$P_V V = xP \quad (5)$$

$$P_H H = yP \quad (6)$$

Utilizzando la (4) la (5) e la (6), il termine stocastico presente nella (4) può essere eliminato dividendo per  $dt$  e ottenendo:

$$-P_\tau = RP - RP_V V - RP_H H - \frac{1}{2} \{P_{VV} V^2 \sigma_V^2 + P_{HH} H^2 \sigma_H^2 + 2P_{VH} VH \rho_{VH} \sigma_V \sigma_H\} \quad (7)$$

Il portafoglio  $P$  sarà autofinanziante qualora soddisfacesse l'equazione differenziale alle derivate parziali in (7). Ora, perché  $P$  sia uguale al valore dell'opzione è necessario che il portafoglio rispetti le condizioni al contorno previste dal contratto d'opzione, cioè:

$$P(V, H, T) = \max\{\min(V, H) - F, 0\} \quad (8)$$

$$P(0, H, \tau) = 0 \quad (9)$$

---

<sup>15</sup> Per portafoglio autofinanziante (*self-financing*) si intende un portafoglio in cui il capitale non varia dopo la data zero. Ossia gli eventuali acquisti sono coperti dalle vendite senza immissione di nuovo capitale.

$$P(V, 0, \tau) = 0 \quad (10)$$

È possibile osservare che la (7) non dipende dal tasso di rendimento di V e H; dunque, come avveniva in BSM si assume la neutralità degli investitori verso il rischio. Perciò si suppone che il tasso di rendimento atteso di tutti i titoli sia pari al tasso *risk free*.

Il valore della *call* oggi sarà dato dal suo valore atteso a scadenza attualizzato al tasso *risk free* R. Quindi la soluzione all'equazione (7) che rispetta le condizioni al contorno è data da:

$$\begin{aligned} M = & HN_2(\gamma_1 + \sigma_H\sqrt{\tau}, (\ln(V/H) - \frac{1}{2}\sigma^2\sqrt{\tau})/\sigma\sqrt{\tau}, (\rho_{VH}\sigma_V - \sigma_H)/\sigma) \\ & + VN_2(\gamma_2 + \sigma_V\sqrt{\tau}, (\ln(H/V) - \frac{1}{2}\sigma^2\sqrt{\tau})/\sigma\sqrt{\tau}, (\rho_{VH}\sigma_H - \sigma_V)/\sigma) \quad (11) \\ & - Fe^{-Rt}N_2(\gamma_1, \gamma_2, \rho_{VH}) \end{aligned}$$

dove  $N_2(\alpha, \beta, \vartheta)$  rappresenta la distribuzione cumulata di una normale standard bivariata con limiti di integrazione pari ad  $\alpha$  e  $\beta$  e coefficiente di correlazione pari a  $\theta$ . Inoltre:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (\ln(H/F) + (R - \frac{1}{2}\sigma_H^2)\tau)/\sigma_H\sqrt{\tau} \\ \gamma_2 &= (\ln(V/F) + (R - \frac{1}{2}\sigma_V^2)\tau)/\sigma_V\sqrt{\tau} \\ \sigma^2 &= \sigma_V^2 + \sigma_H^2 - 2\rho_{VH}\sigma_V\sigma_H \end{aligned}$$

È possibile prendere visione di come si giunge all'equazione (11) nell'appendice al lavoro di Stulz<sup>16</sup>. In un caso particolare, ossia quando il prezzo di esercizio F è uguale a zero ( $M(V, H, 0, \tau)$ ) è possibile giungere ad una formula per il *pricing* molto più semplice di quella fornita in (11) sfruttando il lavoro realizzato da Margrabe come segue:

$$M(V, H, 0, \tau) = V - E(V, H, 1, \tau) = V - VN(d_1) + HN(d_2) \quad (12)$$

dove  $d_1$  e  $d_2$  sono definite come nel paragrafo precedente

È possibile verificare la correttezza dell'equazione (12) ricordando la struttura del *payoff* di un'opzione di scambio di un'unità dell'asset H per un'unità dell'asset V, alla scadenza

<sup>16</sup> Stulz, R. M. (1982). *op. cit.*, pp. 182-183

T. Si costruisce un portafoglio ( $W$ ) in posizione *long* su un'unità dell'asset  $V$  e *short* su di una opzione di scambio di una unità di  $H$  per una di  $V$ , il quale replica quanto visto in (12). L'equazione (12) è corretta, in quanto il valore di  $W$  a scadenza, quando  $V$  è maggiore di  $H$ , è pari a  $V - (V - H) = H$ , che è lo stesso valore alla scadenza di una *call* sul minimo tra  $V$  e  $H$  con prezzo di esercizio pari a zero, naturalmente con  $V$  maggiore di  $H$ . L'equazione si può verificare anche qualora  $V$  fosse inferiore a  $H$  alla scadenza. Infatti, il portafoglio  $W$  in tal caso varrebbe  $V$  ed è evidente che anche l'opzione di scambio, vista la struttura del *payoff*, varrebbe  $V$  a scadenza.

### 2.2.2 Proprietà delle opzioni *call* sul minimo tra due titoli rischiosi

Stulz nel suo paper affronta prima la *call* sul minimo tra due asset perché da essa è possibile derivare il *pricing* di una *put* sul minimo tra due titoli rischiosi e quello di una *put* e di una *call* scritta sul massimo tra due titoli rischiosi. Risulta perciò evidente la gerarchia adottata nella presentazione dei risultati.

Si analizza per prima la *call* sul massimo tra due titoli rischiosi.  $MX(V, H, F, \tau)$  ne rappresenta il prezzo. Il *payoff* di tale opzione a scadenza sarà così strutturato:

$$\max \{ \max(V, H) - F, 0 \}$$

Il prezzo di questa opzione può essere calcolato come segue:

$$MX(V, H, F, \tau) = C(V, F, \tau) + C(H, F, \tau) - M(V, H, F, \tau) \quad (13)$$

Dove  $C(X, F, \tau)$  rappresenta un'opzione *call* sul titolo  $X$  con *strike price*  $F$  e tempo alla scadenza  $\tau$ . Per verificare la correttezza della (13) si ipotizzi che, tra  $V$  ed  $H$ ,  $V$  sia il maggiore alla scadenza. In tal caso l'opzione sul massimo tra i due titoli pagherà  $V - F$ . Il portafoglio costruito dalle due *call*, scritte rispettivamente su  $V$  e su  $H$  e dall'opzione sul massimo tra i due titoli pagherà anch'esso  $V - F$  a scadenza concludendo per la correttezza dell'equazione (13).

Si passa ora alla *put* sul minimo tra due titoli rischiosi.

Il prezzo di una *put* sul minimo tra due titoli rischiosi  $PM(V, H, F, \tau)$  si può calcolare come:

$$PM(V, H, F, \tau) = e^{-Rt}F - M(V, H, 0, \tau) + M(V, H, F, \tau) \quad (14)$$

Come prima si procede alla verifica della correttezza della (14) considerando questa volta due investimenti:

- Portafoglio A: è formato dalla put sul minimo tra due titoli rischiosi
- Portafoglio B:
  - 1) In posizione di acquisto su un obbligazione *zero-coupon*, che paga  $F$  alla scadenza;
  - 2) In posizione di vendita su un opzione scritta sul minimo tra  $V$  ed  $H$  con *strike price* zero;
  - 3) In posizione di acquisto su un opzione, parimenti scritta sul minimo tra  $V$  ed  $H$ , con *strike price* che vale  $F$ .

Ci sono diversi scenari che possono verificarsi. Se a scadenza il minimo tra  $V$  ed  $H$  è maggiore di  $F$ , in linea con la struttura del *payoff* ( $\max\{F - \min(V, H), 0\}$ ), il portafoglio A pagherà zero e lo stesso farà il portafoglio B in quanto l'obbligazione restituisce  $F$ , l'opzione sul minimo tra  $V$  ed  $H$  con *strike* zero restituisce:  $-\min(V, H)$  e l'opzione sul minimo tra  $V$  ed  $H$  con *strike*  $F$  restituisce:  $\min(V, H) - F$ . Unendo tutti i risultati otteniamo per l'appunto:  $F - \min(V, H) + \min(V, H) - F = 0$ .

Il risultato vale anche ipotizzando che il minimo tra  $V$  ed  $H$  sia  $V$  e che sia minore di  $F$  alla scadenza. In tal caso, il portafoglio A pagherà  $F - V$ , coerentemente alla struttura del *payoff* già enunciata. Il portafoglio B pagherà ugualmente ad A:  $F - V + 0 = F - V$ . L'opzione sul minimo tra  $V$  ed  $H$  con *strike*  $F$  paga zero in quanto il suo *payoff* è il seguente:  $\max\{\min(V, H) - F, 0\}$ .

La (14) è verificata anche qualora risultasse  $H$  come minimo tra i due titoli.

Infine, si analizza il *pricing* di una put scritta sul massimo tra due titoli rischiosi:  $PX(V, H, F, \tau) = e^{-Rt}F - MX(V, H, 0, \tau) + MX(V, H, F, \tau)$  (15)

dove  $MX(V, H, 0, \tau)$  e  $MX(V, H, F, \tau)$  sono: la prima una *call* sul massimo tra due titoli rischiosi con prezzo d'esercizio zero e la seconda una *call* sul massimo tra due titoli con *strike*  $F$ .

La prova che la (15) è corretta si può svolgere in modo simile a quanto è stato fatto in precedenza per la (14).

### 2.3 HERB JOHNSON

Johnson nel suo paper<sup>17</sup> del 1987, sfruttando l'approccio di neutralità al rischio introdotta da Cox e Ross e il lavoro svolto da Margrabe, giunge alla formula per il *pricing* di un'opzione scritta su due o più sottostanti. Tale tipologia di opzione può essere utilizzata per prezzare tra le altre: le obbligazioni con opzione sulla valuta (*currency option bond*<sup>18</sup>) e le assicurazioni di portafoglio<sup>19</sup>. Johnson considera la *call* come un'opzione di scambio di *cash* per un'azione, sulla scorta di quanto già fatto da Margrabe, e procede alla valutazione utilizzando un cambio nel *numéraire*, come fa Margrabe. In questo caso viene utilizzato il prezzo dell'azione come *numéraire*.

Dunque, il prezzo della *call* misurato in unità del prezzo azionario appare come una *put* europea scritta su un titolo rischioso con prezzo corrente dato da  $x = Xe^{-rT}/S$ , *strike price* unitario e tasso d'interesse uguale a zero:

$$\frac{c}{S} = 1 * N(-d'_2) - xN(-d'_1)$$

dove:  $d'_2 = \frac{\log x - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$ ,  $d'_1 = d'_2 + \sigma\sqrt{T}$ .

Secondo la logica adottata, il prezzo del titolo misurato in unità di sé stesso è in sostanza un titolo privo di rischio con rendimento pari a zero.

Successivamente Johnson procede al *pricing*, adottando le medesime assunzioni alla base del modello di BSM. Considera  $n$  titoli con prezzo corrente  $S_1, S_2, \dots, S_n$  e assume che i prezzi stessi seguano il moto Browniano geometrico e che i titoli non paghino dividendi.

---

<sup>17</sup> Johnson H. (1987), *Option on the maximum or the minimum of several assets*, The Journal of Financial and Quantitative Analysis, pp. 277-283

<sup>18</sup> Sono obbligazioni in cui il detentore può scegliere liberamente la valuta con la quale sono effettuati sia i pagamenti delle cedole, che il rimborso alla scadenza, in base a specifici tassi di cambio specificati nel contratto d'obbligazione. Sono strumenti negoziati nel mercato Eurobond.

<sup>19</sup> Sono negoziati come un prodotto finanziario, similmente alle polizze assicurative, ma sostanzialmente si tratta di strategie di *hedging* sviluppate per limitare le perdite che un investitore può dover fronteggiare a seguito di un calo nel prezzo delle azioni in portafoglio, senza doverle vendere. Tale strategia è stata introdotta da Mark Rubinstein e Hayne Leland nel 1976.

Per cominciare considera una *call* sul massimo di  $n$  titoli con *strike price* uguale a  $X$  e scadenza  $T$ .

Dal lavoro svolto da Cox e Ross, e a cui si rimanda<sup>20</sup>, è noto un termine dell'espressione per la *call* sul massimo (d'ora in avanti  $c_{max}$ ), il prezzo d'esercizio moltiplicato per meno uno attualizzato al tasso *risk-free* ( $r$ ) moltiplicato per la probabilità (in un mondo neutrale al rischio) che almeno uno dei prezzi degli  $n$  *assets* considerati sia superiore allo *strike*  $X$ . Tale termine è il seguente:

$$-Xe^{-rT} [1 - Prob(S_1^*, S_2^*, \dots, S_n^* < X)]$$

dove  $Prob(S_1^*, S_2^*, \dots, S_n^* < X)$  è la probabilità congiunta che tutti i prezzi a scadenza siano inferiori a  $X$ .

Tale probabilità si calcola come segue:

$$1 - N_n(-d_2(S_1, X, \sigma_1^2), -d_2(S_2, X, \sigma_2^2), \dots, -d_2(S_n, X, \sigma_n^2), \rho_{12}, \rho_{13}, \dots)$$

con  $d_2(S, X, \sigma^2) = \frac{\log \frac{S}{X} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$  e dove  $N_n$  rappresenta la normale standard  $n$ -variata,  $\sigma_i^2$  la varianza del tasso di rendimento dell' $i$ -esimo titolo e  $\rho_{ij}$  è il coefficiente di correlazione tra i rendimenti dell' $i$ -esimo e del  $j$ -esimo titolo.

È necessario identificare i termini positivi nell'espressione per  $c_{max}$  adottando un cambio di unità monetaria. Si utilizza l' $i$ -esimo titolo come *numéraire*, così la *call* sul massimo tra  $n$  titoli viene trasformata in un titolo complesso consistente in una *put* europea con prezzo d'esercizio unitario, scritta su un titolo rischioso il cui prezzo corrente è  $x_i \equiv Xe^{-rT}/S$  e  $n$  opzioni di scambio del titolo rischioso con  $S_1, \dots, S_n$ .

Questa trasformazione permette di identificare immediatamente il termine positivo nella *put* come la probabilità congiunta neutrale al rischio che:

$$x_i^* < 1, \quad S_1^*/S_i^* < 1, \dots, S_n^*/S_i^* < 1$$

---

<sup>20</sup> Cox J. C., R. S. (1976). The Valuations of Options for Alternative Stochastic Processes. *Journal of Financial Economics*, 3, pp. 145-166.

Questo termine, il quale moltiplicato per  $S_i$ , dà l'i-esimo termine nella formula di  $c_{max}$  si esprime come segue:

$$N_n(d_1(S_i, X, \sigma_i^2), d'_1(S_i, S_1, \sigma_{1i}^2), \dots, d'_1(S_i, S_n, \sigma_{ni}^2), \rho_{i1i}, \rho_{i2i}, \dots)$$

Con:  $\sigma_{ij}^2 = \sigma_i^2 - 2\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j + \sigma_j^2$  e con coefficienti di correlazione da determinare.

La formula completa per  $c_{max}$  è esposta di seguito:

$$\begin{aligned} c_{max} = & S_1 N_n(d_1(S_1, X, \sigma_1^2), d'_1(S_1, S_2, \sigma_{12}^2), \dots, \\ & d'_1(S_1, S_n, \sigma_{1n}^2), \rho_{112}, \rho_{113}, \dots) \\ & + S_2 N_n(d_1(S_2, X, \sigma_2^2), d'_1(S_2, S_1, \sigma_{12}^2), \dots, \\ & d'_1(S_2, S_n, \sigma_{2n}^2), \rho_{212}, \rho_{223}, \dots) \\ & + \dots \\ & + S_n N_n(d_1(S_n, X, \sigma_n^2), d'_1(S_n, S_1, \sigma_{1n}^2), \dots, \\ & d'_1(S_n, S_{n-1}, \sigma_{n-1n}^2), \rho_{n1n}, \rho_{n2n}, \dots) \\ & - X e^{-rT} (1 - N_n(-d_2(S_1, X, \sigma_1^2), -d_2(S_2, X, \sigma_1^2), \dots, \\ & (-d_2(S_n, X, \sigma_n^2), \rho_{12}, \rho_{13}, \dots))), \end{aligned}$$

dove:  $d'_1(S_i, S_j, \sigma_{ij}^2) = \frac{\log \frac{S_i + \frac{1}{2}\sigma_{ij}^2 T}{S_j}}{\sigma_{ij}\sqrt{T}}$

e dove il coefficiente di correlazione a triplo indice si calcola come:

$$\rho_{ijk} = \frac{\sigma_i^2 - \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j - \rho_{ik}\sigma_i\sigma_k + \rho_{jk}\sigma_j\sigma_k}{\sigma_{ij}\sigma_{ik}}.$$

È necessario considerare il risultato ottenuto da Tilley e Latainer nel loro articolo<sup>21</sup>, perché il focus di questa tesi sarà sulle opzioni arcobaleno scritte su due titoli. Infatti, gli stessi autori giungono ad un'equazione che assomiglia a quella di Johnson, ma che

<sup>21</sup> Latainer, J. A. (1985). A Synthetic Option Framework for Asset Allocation. *Financial Analysts Journal*, pp. 32-43.

considerando due titoli ( $n = 2$ ), si riduce alla seguente che è coerente con l'equazione (11) di Stulz:

$$\begin{aligned}
c_{max} = & S_1 N_2(d_1(S_1, X, \sigma_1^2), d'_1(S_1, S_2, \sigma_{12}^2), \rho_{112}) \\
& + S_2 N_2(d_1(S_2, X, \sigma_2^2), d'_1(S_2, S_1, \sigma_{12}^2), \rho_{212}) \\
& - X e^{-rT} (1 - N_2(-d_2(S_1, X, \sigma_1^2), -d_2(S_2, X, \sigma_2^2), \rho_{12}))
\end{aligned}$$

E similmente per la *call* scritta sul minimo ( $c_{min}$ ):

$$\begin{aligned}
c_{min} = & S_1 N_n(d_1(S_1, X, \sigma_1^2), -d'_1(S_1, S_2, \sigma_{12}^2), \dots, \\
& \quad -d'_1(S_1, S_n, \sigma_{1n}^2), -\rho_{112}, -\rho_{113}, \dots, \rho_{123}, \dots) \\
& + S_2 N_n(d_1(S_2, X, \sigma_2^2), -d'_1(S_2, S_1, \sigma_{12}^2), \dots, \\
& \quad -d'_1(S_2, S_n, \sigma_{2n}^2), -\rho_{212}, -\rho_{223}, \dots, \rho_{213}, \dots) \\
& + \dots \\
& + S_n N_n(d_1(S_n, X, \sigma_n^2), -d'_1(S_n, S_1, \sigma_{1n}^2), \dots, \\
& \quad -d'_1(S_n, S_{n-1}, \sigma_{n-1n}^2), -\rho_{n1n}, \rho_{n2n}, \dots, \rho_{n12}, \dots) \\
& - X e^{-rT} (N_n(-d_2(S_1, X, \sigma_1^2), d_2(S_2, X, \sigma_1^2), \dots, \\
& \quad +d_2(S_n, X, \sigma_n^2), \rho_{12}, \rho_{13}, \dots)),
\end{aligned}$$

che si riduce a:

$$\begin{aligned}
c_{min} = & S_1 N_2(d_1(S_1, X, \sigma_1^2), -d'_1(S_1, S_2, \sigma_{12}^2), -\rho_{112}) \\
& + S_2 N_2(d_1(S_2, X, \sigma_2^2), -d'_1(S_2, S_1, \sigma_{12}^2), -\rho_{212}) \\
& - X e^{-rT} (N_2(d_2(S_1, X, \sigma_1^2), d_2(S_2, X, \sigma_2^2), \rho_{12}))
\end{aligned}$$

Infine, quando  $n = 2$ , come aveva già provato Stulz nell'equazione (13) si dimostra la seguente identità:

$$c_{max} + c_{min} = c(S_1, X) + c(S_2, X)$$

dove:  $c(S_i, X)$  è una *call* ordinaria scritta su  $S_i$  con prezzo d'esercizio  $X$ .



## CAPITOLO 3

### COME MODELLIZZARE IL PREZZO DEI SOTTOSTANTI

Quando si procede al *pricing* di uno strumento derivato è necessario conoscere il processo stocastico seguito dal prezzo dei titoli sottostanti. La teoria dell'*option pricing* è basata convenzionalmente sull'utilizzo del moto Browniano geometrico (*geometric Brownian motion*). Ma si vedrà in realtà che processi come il moto browniano frazionario (*fractional Brownian motion*) e la sua generalizzazione, il moto Browniano frazionario misto (*mixed fractional Brownian motion*), si adattano meglio a descrivere le fluttuazioni nel prezzo dei titoli finanziari avendo caratteristiche tipiche degli stessi come l'auto-similarità e la dipendenza di lungo periodo da eventi passati.

#### 3.1 MOTO BROWNIANO E BROWNIANO GEOMETRICO

Il nome moto Browniano si attribuisce al botanico scozzese Robert Brown, il quale, nel 1827, studiando al microscopio le particelle di polline si accorse che le stesse erano in continuo movimento e che il loro moto avveniva lungo direzioni casuali. Ma occorre attendere fino al 1905 per avere un'interpretazione fisica di tale fenomeno, grazie allo scienziato Albert Einstein, il quale, nel suo articolo "*Über die von der molekularkinetischen Theorie der Bewegung von Wärme geforderte in ruhenden suspendierten Flüssigkeiten Teilchen*", tradotto "*Sulla teoria cinetico-molecolare del movimento dovuto al calore di particelle sospese in liquidi a riposo*" attribuì la causa del moto agli urti tra le particelle di polline e le molecole d'acqua.

Fu nel 1900 che il matematico francese Louis Bachelier nella sua tesi di dottorato "*Théorie de la spéculation*" dimostrò la possibilità di utilizzare gli strumenti matematici del moto Browniano per rappresentare l'andamento dei mercati finanziari.

Il metodo di Bachelier cadde per lungo tempo in disuso fino a quando, negli anni Sessanta, nella versione aggiornata riconducibile al processo di Wiener, venne utilizzato per rappresentare le fluttuazioni dei prezzi dei titoli nei mercati finanziari.

Ma è con il lavoro di Black e Scholes e Merton del 1973 che il metodo entra a far parte della teoria della finanza. Infatti, gli stessi, utilizzando l'ipotesi che le variazioni dei prezzi

azionari seguissero il moto Browniano, hanno derivato la formula per il *pricing* di prodotti finanziari derivati.

In particolare, BSM ipotizzarono che il prezzo dei titoli sottostanti seguisse il moto Browniano geometrico. Un processo stocastico segue un moto Browniano geometrico se soddisfa la seguente equazione differenziale stocastica (SDE):

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (16)$$

che può essere anche scritta come:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \quad (17)$$

dove:  $z$  è un processo di Wiener, o moto Browniano,  $\mu$  (*drift percentuale*) è il tasso di rendimento atteso dell'azione, mentre  $\sigma$  è la volatilità del prezzo dell'azione.

Con le equazioni (16) e (17) si ipotizza che i prezzi seguano dei processi continui nel tempo ma in realtà gli stessi assumono dei valori discreti e non cambiano valore di continuo, ma solamente quando i mercati sono aperti. Se ne ricavano dunque le versioni in tempo discreto:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (18)$$

da cui:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (19)$$

dove:  $\Delta S$  rappresenta la variazione nel prezzo dell'azione  $S$  in un intervallo tempo piccolo pari a  $\Delta t$  ed  $\varepsilon$  è un'estrazione casuale da una distribuzione normale standardizzata, ossia con media nulla e deviazione standard pari a uno.

Ciò implica:

$$S_t = S_0 + \mu S_0 \Delta t + \sigma S_0 \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (20)$$

e da cui:

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \right\} \quad (21)$$

Quest'ultima costituisce la soluzione analitica alla (19)<sup>22</sup>.

### 3.2 MOTO BROWNIANO FRAZIONARIO (FRACTIONAL BROWNIAN MOTION)

Il moto Browniano frazionario (*fBm*) è una generalizzazione del moto Browniano dove, a differenza del moto Browniano standard, gli incrementi non sono indipendenti.

Apporto fondamentale allo sviluppo del moto Browniano frazionario è stato quello dell'idrologo inglese Harold Edwin Hurst<sup>23</sup>, che risolse il problema delle piene del fiume Nilo fornendo, indirettamente, un indizio necessario a comprendere al meglio il funzionamento dei mercati finanziari. Il problema del Nilo era che non si sapeva quanto avrebbe straripato in relazione all'anno precedente, comportando l'impossibilità di stabilire l'alternanza dei periodi di prosperità e di povertà, dovuta alla siccità.

Furono le fabbriche di Manchester, interessate al cotone egiziano, ad incaricare Hurst a realizzare un progetto per l'accantonamento, nei periodi di piena, di una quantità d'acqua tale da poter fronteggiare la massima siccità possibile. Hurst notò che le variazioni nel flusso d'acqua non erano statisticamente indipendenti ma bensì che vi era una sorta di dipendenza con le variazioni passate. Egli tradusse queste osservazioni elaborando quello che prende il nome di coefficiente di Hurst (*H*).

Fu Mandelbrot ad applicare questa scoperta ai mercati finanziari impostando la seguente proporzione: le piene stanno ai grandi balzi dei prezzi come le siccità stanno ai crolli di mercato.

Mandelbrot notò evidenti correlazioni fra i prezzi passati e futuri del cotone elaborando il concetto di dipendenza a lungo termine, secondo cui, qualsiasi atto compiuto nel mercato non rimane privo di conseguenze. Dunque, essendo un sistema dinamico, il risultato di qualsiasi processo dipende dal punto di partenza.

---

<sup>22</sup> Hull, J. C. (2018), *op.cit.*, pp.330 e ss

<sup>23</sup> Filomia, D., *Dalle piene del Nilo ai crolli dei mercati: il coefficiente di Hurst*, 2018, Starting Finance, <https://startingfinance.com/approfondimenti/coefficiente-hurst/>

È proprio il valore assunto dal coefficiente di Hurst che ci consente di distinguere tra osservazioni indipendenti, quando  $H = \frac{1}{2}$ , e osservazioni dipendenti fra loro, quando  $H \neq \frac{1}{2}$ .

Nello specifico:

- a) Quando  $H = \frac{1}{2}$ , denota una serie di eventi indipendenti: dunque, ogni variazione non è influenzata dalle passate e non influenzerà nemmeno quelle future. In questo caso il *fBm* si riduce al moto Browniano standard.
- b) Quando  $H \in (0, 1/2)$ , la serie di eventi è anti-persistente: si verificano continue inversioni di trend. Dunque, se in un dato periodo abbiamo avuto una variazione in incremento è molto probabile registrare un successivo decremento rispetto ad un nuovo incremento. E viceversa. La serie di osservazioni sarà tanto più volatile quanto più  $H$  tende a zero.
- c) Infine, quando  $H \in (1/2, 1)$ , la serie delle osservazioni è persistente. In tal caso è più probabile che, si è appena realizzata una variazione in incremento (decremento), la stessa sia seguita da un ulteriore incremento (decremento). Tale probabilità aumenta con l'avvicinarsi di  $H$  ad 1.

Alla luce di ciò, il moto Browniano standard non si presta a descrivere al meglio fenomeni, come i prezzi azionari, caratterizzati da dipendenza a lungo termine. Fenomeni di questo genere sono descritti meglio dal moto Browniano frazionario<sup>24</sup>.

Un altro aspetto caratterizzante il *fBm*, oltre alla dipendenza tra le osservazioni, è la proprietà di auto-similarità.

Un processo stocastico  $\{X(t), t \geq 0\}$  si dice auto-similare con indice di Hurst  $H$  (in breve *H-ss*) se  $\exists H > 0$  tale per cui  $\forall a > 0$ :

$$\{X(at)\} \triangleq \{a^H X(t)\}$$

Cioè, un processo auto-similare è invariante in distribuzione rispetto a cambiamenti sia nel tempo, che nello spazio.

---

<sup>24</sup> Iozzo A., *Derivate frazionarie e indice di Hurst* (Tesi di laurea in Finanza matematica, Università di Bologna, aa 2014/2015), pp. 14-16

Ultima caratteristica fondamentale del moto frazionario è la stazionarietà degli incrementi. Un processo stocastico si dice abbia incrementi stazionari (in breve si) qualora la distribuzione di  $\{X(t+h) - X(t)\}$  sia indipendente da  $h$ , ossia:

$$\{X(t+h) - X(t)\} = \{X(t) - X(0)\} = \{X(t)\}$$

Riassumendo, un processo stocastico continuo  $B^{(H)} = \{B^{(H)}(t)\}_{t \geq 0}$  con media nulla ( $E[B^{(H)}(t)] = 0$ ) e funzione di autocovarianza data da:

$$E[B^{(H)}(t)B^{(H)}(s)] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}) \quad t, s \geq 0$$

è un moto Browniano frazionario che gode delle seguenti proprietà:

- 1)  $B^{(H)}(0) = 0$  cioè il processo inizia da un punto che si può considerare origine;
- 2) dalla formula per l'autocovarianza si ricava quella per la varianza:  
 $E[(B^{(H)}(t) - B^{(H)}(s))^2] = |t-s|^{2H} \quad t \geq 0, s \geq 0, H \in (0,1);$
- 3) dalla seconda proprietà si dimostra che  $B^{(H)}$  è un processo ad incrementi stazionari, nella misura in cui abbiamo che:

$$\{B^{(H)}(t+s) - B^{(H)}(s)\}_{t \geq 0} = \{B^{(H)}(t) - B^{(H)}(0)\} = B^{(H)}(t)$$

Infatti:

$$E[(B^{(H)}(t+s) - B^{(H)}(s))^2] = |t+s-s|^{2H} = t^{2H} = E[(B^{(H)}(t))^2]$$

- 4)  $B^{(H)}(t)$  è un processo auto-similare con indice di Hurst ( $H$ ). Infatti, si ha che:

$$\begin{aligned} E[B^{(H)}(as)B^{(H)}(at)] &= \frac{1}{2}((at)^{2H} + (as)^{2H} - |at - as|^{2H}) \\ &= \frac{1}{2}a^{2H}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}) \\ &= a^{2H}E[B^{(H)}(s)B^{(H)}(t)] \\ &= E[(a^H B^{(H)}(s))(a^H B^{(H)}(t))]. \end{aligned}$$

### 3.2.1 Moto Browniano frazionario misto

Il moto Browniano frazionario, che ben si adatta a descrivere l'andamento seguito dai prezzi azionari, non è privo di possibilità di arbitraggio come invece risulta nel moto Browniano geometrico utilizzato nel modello di Black-Scholes-Merton. È proprio per questo che, grazie al lavoro svolto da Patrick Cheridito<sup>25</sup>, il  $fBm$  è stato generalizzato in quello che viene chiamato moto browniano frazionario misto, *mixed fractional Brownian motion (mfBm)*.

Il  $mfBm$ , dato dalla combinazione lineare di un processo di Wiener (o moto Browniano standard) e di un moto Browniano frazionario indipendente, è privo di opportunità di arbitraggio preservando le caratteristiche già menzionate di dipendenza e auto-similarità proprie del  $fBm$ .

Il moto Browniano frazionario misto si esprime come:

$$M^{H,\alpha} := B + \alpha B^H$$

dove:  $B$  è un moto Browniano standard,  $B^H$  è un moto Browniano frazionario indipendente e  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

---

<sup>25</sup> Cheridito, P. (2004). Mixed fractional Brownian motion. *Bernoulli* 6, 913-934.

## CAPITOLO 4

### PRICING DI OPZIONI ARCOBALENO ASIATICHE:

#### FORMULE ANALITICHE E SIMULAZIONE

#### MONTE CARLO

Questo lavoro si concentrerà sulla versione “asiatica” delle opzioni arcobaleno. La motivazione risiede nel fatto che le opzioni asiatiche sono meno volatili delle opzioni europee e americane, in ragione del fatto che le opzioni asiatiche sfruttano prezzi medi, i quali per natura sono meno volatili.

Dunque, le opzioni arcobaleno asiatiche sono opzioni esotiche *path-dependent*<sup>26</sup>, il cui payoff dipende dal massimo o minimo di due prezzi medi calcolati in un determinato intervallo di tempo. La media utilizzata può essere geometrica o aritmetica come si vedrà successivamente.

Ereditando le caratteristiche sia delle opzioni asiatiche, che di quelle arcobaleno, sono utili, in modo particolare per le aziende, nella copertura dei costi di produzione del processo produttivo e per coprire i margini di profitto realizzati.

In applicazione di quanto detto al capitolo 3, oltre ai risultati ottenuti utilizzando il moto Browniano geometrico, si presenteranno quelli ottenuti utilizzando prima il moto Browniano frazionario e in seguito il moto Browniano frazionario misto, confrontandoli con quelli ottenuti mediante la simulazione Monte Carlo.

#### 4.1 SIMULAZIONE MONTE CARLO

La simulazione Monte Carlo è un metodo computazionale basato sul campionamento casuale per ottenere risultati numerici. È particolarmente utilizzato nella valutazione di derivati il cui *payoff* dipenda dal sentiero seguito dal sottostante, o dai sottostanti<sup>27</sup> se più di uno.

---

<sup>26</sup> Sono opzioni in cui il *payoff* dipende dall'andamento, o per meglio dire dal sentiero (*path*), seguito dal sottostante durante la vita dell'opzione e non dal prezzo al momento dell'esercizio della stessa.

<sup>27</sup> Hull, J. C. (2018), *op.cit.*, p.477

#### 4.1.1 Derivati che dipendono da un sottostante

La simulazione consiste nell'individuazione dei possibili sentieri per il prezzo del sottostante e, sfruttando il principio di neutralità al rischio, ricavarne il valore come media attualizzata dei *payoff*.

La procedura da seguire per un derivato che dipende dal prezzo di un solo sottostante,  $S$ , e con scadenza  $T$  è la seguente<sup>28</sup>:

- 1) simulare il sentiero di  $S$  in un ambiente neutrale al rischio;
- 2) calcolare il valore finale del derivato;
- 3) ripetere i passi 1 e 2 per ottenere una serie di valori campionari;
- 4) stimare il valore finale atteso del derivato come media aritmetica dei valori finali campionari;
- 5) determinare il valore corrente del derivato attualizzando, il valore ottenuto al passo 5, al tasso d'interesse *risk-free*.

In un mondo neutrale al rischio il processo seguito dal sottostante è:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (22)$$

dove, come già visto in precedenza:  $dz$  è un processo di Wiener,  $\mu$  è il rendimento atteso in un mondo neutrale al rischio e  $\sigma$  è la volatilità.

Se si vuole simulare il sentiero seguito da  $S$ , occorre dividere la vita dell'opzione in un numero  $N$  di piccoli intervalli di lunghezza  $\Delta t$  cosicché la (22) diventa:

$$S(t + \Delta t) - S(t) = \mu S(t) \Delta t + \sigma S(t) \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (23)$$

Dove  $\varepsilon$  è l'estrazione casuale da una distribuzione normale standardizzata. Perciò, ogni simulazione comporta la costruzione di un cammino per il sottostante  $S$  grazie ad  $N$  estrazioni casuali da una distribuzione normale.

---

<sup>28</sup> Moscaritolo S., *Le opzioni. Un confronto tra i vari modelli di pricing* (Tesi di laurea in Banca, Finanza aziendale e Mercati Finanziari, Università di Pisa, aa 2016/2017), pp.59-60



Nella pratica si è soliti simulare il logaritmo di  $S$  al posto di  $S$ . Dunque, il processo seguito dal logaritmo di  $S$  è:

$$d \ln S = (\mu - \sigma^2/2)dt + \sigma dz \quad (24)$$

Da cui:

$$\ln[S(t + \Delta t)] - \ln[S(t)] = (\mu - \sigma^2/2)\Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (25)$$

Dalla eq. (25) si ottiene l'equazione per costruire i sentieri di  $S$  come di seguito:

$$S(t + \Delta t) = S(t)e^{(\mu - \sigma^2/2)\Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}}$$

Il vantaggio di usare  $\ln S$  sta nel fatto che la trasformazione di  $S$  seguirà un processo di Wiener generalizzato<sup>29</sup> con la seguente forma:

$$\ln[S(T)] - \ln[S(0)] = (\mu - \sigma^2/2)T + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

che vale per ogni  $T$ , a differenza della (23) che vale solo al limite per  $\Delta t \rightarrow 0$

Da quest'ultima equazione si ottiene la seguente:

$$S(T) = S(0)e^{(\mu - \sigma^2/2)T + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}}$$

la quale può essere utilizzata sia per valutare derivati che offrono *payoff* non standard alla scadenza, che per verificare la correttezza della formula di BSM.

Il vantaggio principale del metodo Monte Carlo è che permette di valutare anche derivati il cui valore dipende dal cammino temporale seguito dal sottostante, oltre, ovviamente, a quelli che dipendono solo dal valore finale dello stesso.

#### 4.1.2 Derivati che dipendono da più variabili<sup>30</sup>

Si considera ora il caso di un derivato che dipenda da più di un sottostante  $\theta_i$ , dove si ha  $1 \leq i \leq n$ .

La versione discreta del processo seguito da ciascun  $\theta_i$  sarà:

$$\theta_i(t + \Delta t) - \theta_i(t) = m_i \theta_i(t) \Delta t + s_i \theta_i(t) \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

<sup>29</sup> Un processo di Wiener generalizzato per una variabile  $x$  si definisce come:  $dx = a dt + b dz$  con  $a$  e  $b$  costanti

<sup>30</sup> Moscaritolo S., op.cit., pp 61-63

dove:  $m_i$  è il tasso di crescita atteso di  $\theta_i$  in un mondo neutrale al rischio,  $\varepsilon_i$  è un'estrazione casuale da una variabile casuale normale standardizzata.

Il coefficiente di correlazione tra  $\varepsilon_i$  e  $\varepsilon_k$  è uguale a  $\rho_{ik}$  con  $1 \leq i, k \leq n$ .

Ciascuna simulazione richiede  $N$  estrazioni casuali indipendenti delle  $\varepsilon_i$  da una distribuzione normale multivariata.

Per estrarre numeri casuali da una distribuzione multivariata standardizzata, con coefficiente di correlazione tra la variabile  $i$  e la variabile  $j$  pari a  $\rho_{ij}$  è necessario prima di tutto estrarre  $n$  campioni indipendenti  $x_i$  da una normale univariata standardizzata

Gli  $\varepsilon_i$  si ottengono così:

$$\varepsilon_1 = \alpha_{11}x_1$$

$$\varepsilon_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2$$

$$\varepsilon_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3$$

E via dicendo.

I valori per gli  $\alpha_{ij}$  si ottengono tramite la scomposizione di Cholesky<sup>31</sup>.

Si può verificare l'accuratezza del prezzo ottenuto con la simulazione calcolando l'errore standard di stima. Per farlo occorre dividere la deviazione standard dei valori correnti del derivato ottenuti dalle  $M$  simulazioni, che si indica con  $\omega$ , per la radice quadrata del numero di simulazioni effettuate, dunque:  $\frac{\omega}{\sqrt{M}}$ .

Calcolando l'intervallo di confidenza al 95% per il prezzo dell'opzione  $f$  si trova:

$$\mu - \frac{1,96\omega}{\sqrt{M}} < f < \mu + \frac{1,96\omega}{\sqrt{M}}$$

Si nota che l'incertezza nella stima è inversamente proporzionale alla radice quadrata del numero di simulazioni. Ne segue che per raddoppiare l'accuratezza è necessario quadruplicare il numero di simulazioni  $M$ .

---

<sup>31</sup> Hull J.C. (2018), op. cit., p. 499

Il metodo ha come svantaggio sostanziale il fatto di essere molto costoso in termini di tempo computazionale quando il numero di simulazioni comincia ad essere alto, ma si avrà modo di osservare questo aspetto nel capitolo applicativo.

## 4.2 VALUTAZIONE UTILIZZANDO IL MOTO BROWNIANO GEOMETRICO

In questo paragrafo si analizzerà il lavoro svolto da *Peng Bin* e *Peng Fei* nel loro articolo "*Pricing Rainbow Asian Options*"<sup>32</sup>, dove presentano un approccio per prezzare opzioni scritte sia sulla media geometrica che su quella aritmetica di due sottostanti.

### 4.2.1 Opzioni arcobaleno asiatiche su media geometrica

Si considerano due titoli sottostanti che pagano dividendi continui al tasso  $q_i$ . I loro prezzi,  $s_1$  e  $s_2$ , che seguono il moto Browniano geometrico, si rappresentano come:

$$\begin{cases} d \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mu_1 - q_1)s_1 \\ (\mu_2 - q_2)s_2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma_1 s_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dw_1(t) \\ dw_2(t) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.1)$$

Dove  $\mu_i$  è il tasso di rendimento atteso,  $\sigma_i$  è la varianza nel rendimento del titolo  $i$ -esimo e  $dw_1(t)$  e  $dw_2(t)$  sono due processi di Wiener con coefficiente di correlazione tra loro pari a  $\rho$ , i quali possono essere trasformati in due processi di Wiener indipendenti  $dB_1(t)$  e  $dB_2(t)$  tramite la seguente equazione:

$$\begin{cases} d \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mu_1 - q_1)s_1 \\ (\mu_2 - q_2)s_2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma_1 s_1 & 0 \\ \rho \sigma_2 s_2 & \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_2 s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dw_1(t) \\ dw_2(t) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.2)$$

Si introduce una variabile di percorso

$$I_i^G(t) = \int_0^t \ln s_i(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2$$

La media geometrica nel periodo  $[0, T]$  si calcola come:  $G_i(t) = e^{I_i^G(t)/t}$ .

---

<sup>32</sup> Bin Peng, F. P. (2009). Pricing Rainbow Asian Options. *Systems Engineering - Theory & Practice* Volume 29, Issue 11, 76-83.

Il *payoff* di una *call* sul massimo di due medie geometriche con scadenza in  $T$  e prezzo d'esercizio  $K$  è:

$$CGV(G_1, G_2, K, T) = \max(\max(G_1(T), G_2(T)) - K, 0) \quad (4.3)$$

Il prezzo dell'opzione in  $t$  (dove  $0 \leq t \leq T$ ) è  $V(s_1, s_2, I_1, I_2, K, t)$ . Il valore di questa opzione dipende dalle due variabili di percorso  $I_1$  e  $I_2$ , che tengono traccia del percorso seguito dal sottostante, ma è guidata dai due sottostanti descritti nell'equazione (4.1).

La dinamica per il prezzo dell'opzione si trova applicando il lemma di Itô:

$$\begin{aligned} dV = & \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial s_1} ds_1 + \frac{\partial V}{\partial s_2} ds_2 + \ln s_1(t) \frac{\partial V}{\partial I_1} dt \\ & + \ln s_2(t) \frac{\partial V}{\partial I_2} dt + \frac{1}{2} \sigma_1^2 s_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s_1^2} dt \\ & + \rho \sigma_1 \sigma_2 s_1 s_2 \frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2} dt + \frac{1}{2} \sigma_2^2 s_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s_2^2} dt \end{aligned}$$

Successivamente viene costruito il portafoglio di copertura privo di rischio:

$$\Pi = V + q_1 s_1 \frac{\partial V}{\partial s_1} + q_2 s_2 \frac{\partial V}{\partial s_2} - \frac{\partial V}{\partial s_1} s_1 - \frac{\partial V}{\partial s_2} s_2$$

L'equazione differenziale alle derivate parziali (PDE) per il *pricing* di un'opzione arcobaleno asiatica su media geometrica è la seguente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \ln s_1 \frac{\partial V}{\partial I_1} + \ln s_2 \frac{\partial V}{\partial I_2} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 s_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s_1^2} \\ + \frac{1}{2} \sigma_2^2 s_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s_2^2} + \sigma_1 \sigma_2 s_1 s_2 \rho \frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2} + (r - q_1) s_1 \frac{\partial V}{\partial s_1} \\ + (r - q_2) s_2 \frac{\partial V}{\partial s_2} = rV \end{aligned} \quad (4.4)$$

Le condizioni al contorno sono date dall'equazione (4.3).

Successivamente si applicano le seguenti trasformazioni:

$$\tau = (T - t)^3 / 3T^2$$

$$x_i = e^{z_i - (r - q_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2)\tau}$$

$$V(s_1, s_2, I_1, I_2, t) = e^{-r(T-t)} e^{r\tau} F(x_1, x_2, \tau)$$

dove:  $z_i = I_i/T + (T-t) \ln s_i/T + (r - q_i - 0.5\sigma_i^2)(T-t)^2/2T$ ,  $i = 1, 2$

E l'equazione (4.4) diventa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 x_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 x_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \sigma_1 \sigma_2 s_1 s_2 \rho \frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2} + (r - q_1) x_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ + (r - q_2) x_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} = rF \end{aligned} \quad (4.5)$$

Le condizioni al contorno dopo le trasformazioni diventano:

$$F(x_1, x_2, 0) = \max [\max(x_1, x_2) - K, 0] \quad (4.6)$$

La soluzione all'equazione (4.5) nel rispetto dell'equazione (4.6) ha la seguente forma:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \tau) = x_1 N_2 \left[ \frac{\ln(x_1/K) + (r - q_1 + \sigma_1^2/2)\tau}{\sigma_1 \sqrt{\tau}}, \frac{\ln(x_1/x_2) + \sigma_{12}^2 \tau/2}{\sigma_{12} \sqrt{\tau}}; \frac{\sigma_1 - \rho \sigma_2}{\sigma_{12}} \right] \\ + x_2 N_2 \left[ \frac{\ln(x_2/K) + (r - q_2 + \sigma_2^2/2)\tau}{\sigma_2 \sqrt{\tau}}, \frac{\ln(x_2/x_1) + \sigma_{12}^2 \tau/2}{\sigma_{12} \sqrt{\tau}}; \frac{\rho \sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_{12}} \right] \\ - K e^{-r\tau} \left[ 1 - N_2 \left( -\frac{\ln(x_1/K) + (r - q_1 - \sigma_1^2/2)\tau}{\sigma_1 \sqrt{\tau}}, \right. \right. \\ \left. \left. -\frac{\ln(x_2/K) + (r - q_2 - \sigma_2^2/2)\tau}{\sigma_2 \sqrt{\tau}}; \rho \right) \right] \end{aligned}$$

dove  $\sigma_{12} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$

Ciò considerato, la soluzione all'equazione differenziale (4.5) nel rispetto delle condizioni fornite dall'equazione (4.6) si ottiene con la seguente formula:

$$CGV(G_1, G_2, K, T-t) = V(s_1, s_2, I_1, I_2, t) \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} = \check{s}_1 N_2 \left[ \frac{\ln(\check{s}_1/K) + (r - q_1 + \check{\sigma}_1^2/2)(T-t)}{\check{\sigma}_1 \sqrt{T-t}}, \right. \\ \left. \frac{\ln(\check{s}_1/\check{s}_2) + \check{\sigma}_{12}^2 (T-t)/2}{\check{\sigma}_{12} \sqrt{T-t}}; \frac{\check{\sigma}_1 - \rho \check{\sigma}_2}{\check{\sigma}_{12}} \right] \\ + \check{s}_2 N_2 \left[ \frac{\ln(\check{s}_2/K) + (r - q_2 + \check{\sigma}_2^2/2)(T-t)}{\check{\sigma}_2 \sqrt{T-t}}, \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{\ln(\check{s}_2/\check{s}_1) + \tilde{\sigma}_{12}^2(T-t)/2}{\tilde{\sigma}_{12}\sqrt{T-t}}; \frac{\rho\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_2}{\tilde{\sigma}_{12}} \right] \\
& -Ke^{-r(T-t)} \left[ 1 - N_2 \left( -\frac{\ln(\check{s}_1/K) + (r - q_1 - \tilde{\sigma}_1^2/2)(T-t)}{\tilde{\sigma}_1\sqrt{T-t}}, \right. \right. \\
& \left. \left. -\frac{\ln(\check{s}_2/K) + (r - q_2 - \tilde{\sigma}_2^2/2)(T-t)}{\tilde{\sigma}_2\sqrt{T-t}}; \rho \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\text{In cui } \tilde{\sigma}_i = \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}} \frac{T-t}{T}, \tilde{\sigma}_{12} = \frac{T-t}{T} \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)/3},$$

$$\check{s}_i = s_i^{(T-t)/T} \exp \left[ \frac{I_i}{T} - \frac{r(T^2 - t^2)}{2T} - \frac{(\sigma_i^2 + 2qi)(T-t)}{4T} + \frac{\sigma_i^2(T-t)^4}{6T^2} \right],$$

e  $N_2(\alpha, \beta, \vartheta)$ , come già visto in precedenza, rappresenta la distribuzione cumulata di una distribuzione normale standard bivariata con limiti di integrazione pari a  $\alpha$  e  $\beta$  e coefficiente di correlazione pari a  $\theta$ .

È inoltre possibile ricavare il prezzo di una *put* ( $PGV(G_1, G_2, K, T-t)$ ) attraverso la relazione di parità *put-call* rappresentata nell'equazione (15) dell'articolo analizzato e che si riporta di seguito:

$$\begin{aligned}
& PGV(G_1, G_2, K, T-t) + CGV(G_1, G_2, K, T-t) \\
& = K - C(G_1, t) - C(G_2, t) + CGV(G_1, G_2, T-t) + C(G_1, K, t) + C(G_2, K, t) \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Come si può vedere, la somma dei prezzi di una *call* e una *put* sul massimo di due medie geometriche si può creare con lo *strike price*  $Ke$ , acquistando (*long*) due *call* asiatiche con media geometrica e una opzione *call* arcobaleno asiatica con *strike price* zero e vendendo (*short*) due *call* asiatiche con *strike price* zero.

#### 4.2.2 Opzioni arcobaleno asiatiche su media aritmetica

Questa tipologia di opzioni arcobaleno viene presentata con un esempio sulla politica di fatturazione adottata dall'impresa fornitrice nei confronti dell'impresa cliente.

Nell'esempio citato l'impresa fornitrice è un'impresa cinese che, per promuovere le vendite alle imprese importatrici statunitensi, consente a quest'ultime di decidere all'inizio di un determinato periodo se pagare in sterline (GBP) o in euro (EUR). Questo in ogni caso perché l'impresa cinese ha rapporti con imprese britanniche ed europee.

La scelta tra sterline ed euro può essere rappresentata dalla detenzione di un'opzione *call* arcobaleno asiatica scritta sul massimo di due medie aritmetiche  $A_1$  e  $A_2$ , rispettivamente, dei tassi di cambio a pronti  $s_1$  (tasso di cambio USD/EUR) e  $s_2$  (tasso di cambio USD/GBP).

Il *payoff* a scadenza ( $T$ ) è dato da:

$$CAV(A_1, A_2, K, T) = \max(\max(A_1(T), A_2(T)) - K, 0) \quad (4.9)$$

Adottando il principio di valutazione neutrale al rischio, il prezzo della *call* appena esposta si esprime come:

$$CAV(s_1, s_2, K, 0, T) = e^{-rT} E_Q[\max(\max(A_1(T), A_2(T)) - K, 0)] \quad (4.10)$$

dove  $E_Q$  è il valore atteso in un mondo neutrale al rischio e la media aritmetica del titolo  $i$ -esimo  $A_i$  è definita come segue:

$$A_i(T) = \int_0^T s_i(\omega) d\omega / T$$

L'opzione nell'equazione (4.10) non ha una formula analitica per il *pricing*, in quanto la media aritmetica di tali attività non può essere rappresentata utilizzando il lemma di Itô. Dunque, l'opzione può essere prezzata adottando la simulazione di Monte Carlo.

L'accuratezza del prezzo ottenuto con la simulazione è calcolata dalla varianza campionaria, ossia, l'accuratezza cresce man mano che la varianza decresce, instaurando una relazione negativa tra le due grandezze.

Generalmente, per ottenere un prezzo simulato accurato serve un gran numero di simulazioni e di conseguenza tempi di calcolo notevoli. Tuttavia, è possibile ridurre la varianza e ottenere una stima molto accurata del prezzo di opzioni multi-fattore *path-dependent*, contenendo il numero di simulazioni da effettuare, adottando le tecniche di riduzione della varianza nel metodo di Monte Carlo introdotte da *Phelim Boyle, Mark Broadie e Paul Glasserman* nel loro articolo<sup>33</sup> pubblicato nel *Journal of Economic*

---

<sup>33</sup> Phelim Boyle, M. B. (1997). Monte Carlo methods for security pricing. *Journal of Economic Dynamics and Control*, pp. 1267-1321.

*Dynamics and Control*. Tra tutte le tecniche esistenti<sup>34</sup>, quella maggiormente utilizzata, facile da implementare ed efficace è la tecnica della variabile di controllo.

Tale tecnica si può implementare quando ci sono due derivati simili  $A$  e  $B$ , dove il primo è quello che si sta analizzando e il secondo è un derivato simile, ma che può essere valutato mediante una formula analitica. Perciò, quest'ultimo è rappresentato dall'opzione sulle medie geometriche dell'equazione (4.7), che risulterà indispensabile per prezzare le opzione sul massimo o minimo di medie aritmetiche.

Per implementare la simulazione Monte Carlo prima di tutto si procede usando l'approssimazione discreta di  $A_i$  che si ottiene come segue:

$$A_i(T) = \sum_{j=1}^n \frac{s_i(T_j)}{n}, \quad i = 1,2$$

con  $T_j = j * (T/n)$  e  $T_0 = 0$ ,  $T_n = T$ ,  $j = 1,2, \dots, n$ .

In base agli studi effettuati da *Simon Babbs*<sup>35</sup> l'equazione differenziale stocastica (4.2) si risolve come segue:

$$s_i(T_n) = s_i(T_0) \exp \{ (\mu_i - q_i - 0.5\sigma_i^2)(T_n - T_0) + \sigma_i^2 (w_i(T_n) - w_i(T_0)) \} \quad (4.11)$$

Questo risultato è fondamentale per simulare il cammino dei titoli sottostanti  $s_1$  e  $s_2$ .

Si assume di essere inizialmente in  $T_0$  e a scadenza in  $T_n$  e si divide la vita del derivato in  $n$  piccoli intervalli di lunghezza  $\Delta t = (T_n - T_0)/n$ . Dunque,  $T_j = T_0 + j * \Delta t$  con  $j = 1,2, \dots, n$ .

Nella pratica si è soliti simulare  $\ln(S)$  piuttosto che  $S$  per i motivi già ricordati nel paragrafo 4.1, di conseguenza la sequenza di coppie  $[s_1(T_1), s_2(T_1)], \dots, [s_1(T_n), s_2(T_n)]$  viene generata dai seguenti processi:

$$\ln s_1(T_j) = \ln s_1(T_{j-1}) + (r - q_1 - 0.5\sigma_1^2) T/n + \sigma_1 k_j \sqrt{T/n} \quad (4.12)$$

<sup>34</sup> Hull, J. C. (2018), *op.cit.*, pp. 502-505

<sup>35</sup> Babbs, S. (2000). Binomial valuation of lookback options. *Journal of Economic Dynamics and Control*, pp. 1499-1525.



$$\ln s_2(T_j) = \ln s_2(T_{j-1}) + (r - q_2 - 0.5\sigma_1^2)T/n + \sigma_2 g_j \sqrt{T/n} \quad (4.13)$$

dove  $(k_j, g_j)$  è guidata da una distribuzione normale standard bivariata con coefficiente di correlazione  $\rho$ . Cosicché, ci sarà una sequenza di  $n$  coppie di estrazioni indipendenti dalla normale standard bivariata  $(k_1, g_1), \dots, (k_n, g_n)$ .

Vengono realizzate un totale di  $M$  simulazioni e per ciascuna simulazione viene costruito l'intero sentiero per  $s_1$  e per  $s_2$  per mezzo delle equazioni (4.12) e (4.13). Per ogni simulazione si ottiene un singolo prezzo dell'opzione calcolato come:

$$X(T) = e^{-rT} \max(\max(A_1(T), A_2(T)) - K, 0) \quad (4.14)$$

Il prezzo dell'opzione (4.10), che si ottiene tramite Monte Carlo, è semplicemente:

$$\bar{X}(T) = \frac{1}{M} e^{-rT} \sum_{j=1}^M X_j(T) \quad (4.15)$$

E la varianza del prezzo si calcola come:

$$S^2 = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (X_j(T) - \bar{X}(T))^2 \quad (4.16)$$

Ora, per implementare la tecnica di riduzione della varianza all'equazione (4.10) c'è bisogno della variabile di controllo  $Y(T)$ , ossia la *call* su medie geometriche, la quale ha un'espressione analitica per calcolare il suo valore atteso  $E[Y(T)]$ .

Dunque:

$$Y(T) = e^{-rT} \max(\max(G_1(T), G_2(T)) - K, 0) \quad (4.17)$$

dove  $G_i$  ha la seguente approssimazione a tempo discreto:

$$G_i(T) = \left[ \prod_{j=1}^n s_i(T_j) \right]^{1/n}$$

La stima del prezzo dell'opzione, che funge da variabile di controllo, si calcola come:

$$\bar{Y}(T) = \frac{1}{M} e^{-rT} \sum_{j=1}^M Y_j(T) \quad (4.18)$$

Il prezzo della *call* sul massimo di due medie aritmetiche in equazione (4.10), utilizzando la tecnica di riduzione della varianza, è calcolata come la differenza tra i due prezzi

ottenuti con la simulazione,  $\bar{X}(T)$  e  $\bar{Y}(T)$ , sommata al prezzo di una *call* su medie geometriche (*CGV*). Ossia:

$$CAV(s_1, s_2, K, 0, T) = [\bar{X}(T) - \bar{Y}(T)] + CGV$$

La varianza del prezzo di  $X(T)$  con variabile di controllo  $Y(T)$  si calcola come:

$$\begin{aligned} S'^2 &= \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left[ (X(T) - Y(T)) + E[Y(T)] - \left[ \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M X_j(T) - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M Y_j(T) \right] - E[Y(T)] \right]^2 \\ &= \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left[ X(T) - Y(T) - \sum_{j=1}^M \frac{1}{M} [X_j(T) - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M Y_j(T)] \right]^2 \\ &= \hat{S}^2 < S^2 \end{aligned}$$

dove  $\hat{S}^2$  indica la varianza della variabile stocastica  $X(T) - Y(T)$ .

Il metodo Monte Carlo, con la tecnica di riduzione della varianza, permette di ottenere una simulazione più accurata del prezzo di una *call* su due medie aritmetiche rispetto al metodo Monte Carlo standard. La prova di ciò è data dalla varianza del prezzo del derivato, che è maggiore nel caso in cui la tecnica stessa non venga implementata.

Infatti, per avere  $S'^2 = S^2$  è necessario un numero di simulazioni molto più grande, il quale riduce l'efficienza computazionale del metodo Monte Carlo. Al contrario della tecnica di riduzione della varianza, che contenendo il numero di simulazioni da effettuare, ne incrementa l'efficienza.

Tabella 1. Valutazione di un'opzione arcobaleno asiatica sul massimo di due medie aritmetiche

$\sigma_1$	$\sigma_2$	$K$	$CGV$	$\bar{X}$	$S$	$CAV$	$S'$	$CAV-CGV$	$\hat{S}$
$r = 0.04$									
0.3	0.4	40	8.20992	8.25377	0.04562	8.26021	0.00073	0.05029	0.00073
		50	3.92403	3.94725	0.02925	3.93855	0.00031	0.01452	0.00031
		60	1.78608	1.78998	0.01019	1.79368	0.00015	0.00760	0.00015
0.4	0.5	40	9.74598	9.85927	0.04733	9.82265	0.00085	0.07667	0.00085
		50	6.18462	6.22225	0.03296	6.21148	0.00051	0.02686	0.00051
		60	3.29166	3.29366	0.02135	3.29966	0.00033	0.00800	0.00033
$r = 0.06$									
0.3	0.4	40	8.36781	8.40281	0.04699	8.41888	0.00072	0.05107	0.00072
		50	4.72933	4.74114	0.03138	4.74388	0.00032	0.01455	0.00032
		60	1.53354	1.53984	0.01229	1.54404	0.00016	0.01050	0.00016
0.4	0.5	40	10.10406	10.17194	0.04858	10.18145	0.00085	0.07739	0.00085
		50	6.39659	6.41512	0.03346	6.42474	0.00051	0.02815	0.00051
		60	3.18776	3.22577	0.02274	3.19877	0.00034	0.01101	0.00034

Fonte: Bin Peng, F. P. (2009), op.cit., p.80

La tabella 1 traduce quantitativamente quando appena detto, focalizzandosi sulla validità della tecnica di riduzione della varianza.

I prezzi correnti dei due titoli  $s_1$  e  $s_2$  sono entrambi 50 USD, il tempo che rimane prima della scadenza dell'opzione è quattro mesi, i due tassi d'interesse privi di rischio annuali sono, rispettivamente, 4% e 6%, la volatilità del prezzo dell'attività  $s_1$  è, rispettivamente, 0.3 e 0.4, la volatilità del prezzo dell'attività  $s_2$  è, rispettivamente, 0.4 e 0.5, il coefficiente di correlazione  $\rho$  è pari a 0.2, i tassi di dividendo sono pari, rispettivamente, all'1% e 2%, lo *strike price* può assumere i valori 40,50 e 60 USD, la vita del derivato è divisa in 88 piccoli intervalli temporali di lunghezza  $\Delta t$ , calcolati come a pagina 33, infine il numero totale di simulazioni ( $M$ ) è pari a 10000.

$CGV$  è nota essere la formula analitica che fornisce il *pricing* di un'opzione arcobaleno asiatica sul massimo di due medie geometriche.

$\bar{X}$  è il prezzo di un'opzione *call* arcobaleno asiatica sul massimo di due medie aritmetiche, simulato con il metodo di Monte Carlo senza riduzione della varianza.

$CAV$  è il prezzo di una *call* arcobaleno asiatica su due medie aritmetiche, simulato utilizzando il metodo Monte Carlo con tecnica di riduzione della varianza e  $S'$  è la sua deviazione standard.

Infine, le ultime due colonne comparano la soluzione analitica  $CGV$  con la soluzione simulata  $CAV$  e riportano la deviazione standard della differenza tra le due soluzioni.

Ci si rende immediatamente conto dei benefici apportati dalla tecnica di riduzione della varianza osservando che la deviazione standard del prezzo è sempre di gran lunga superiore quando non la si utilizza, rispetto a quando viene utilizzata. Indipendentemente che l'opzione sia *at-the-money*, *in-the-money*, o *out-of-the-money*.

Ad esempio, consideriamo il caso in cui  $\sigma_1 = 0.3$  e  $\sigma_2 = 0.4$  e  $K = 40$ .

Con  $r = 0.04$ , la deviazione standard del prezzo è circa 62 volte inferiore quando la tecnica viene utilizzata, passando da 0.04562 a 0.00073.

Con  $r = 0.06$ , la deviazione standard del prezzo è circa 63 volte inferiore quando la tecnica viene implementata, passando da 0.04699 a 0.00072.

Osservando cosa avviene a parità di *strike price*  $K$ , variando la volatilità in aumento, ci si accorge che il trend è il medesimo di quanto appena analizzato, con una riduzione della volatilità, in termini assoluti, leggermente inferiore, che si attesta, rispettivamente, sulle 54 e 55 volte.

In conclusione, i risultati evidenziano che l'implementazione della tecnica di riduzione della varianza, utilizzando come variabile di controllo la formula analitica (4.7), migliora drasticamente la precisione del prezzo simulato. La precisione della stima è tanto maggiore quando più il tasso *risk-free* è elevato e la volatilità è bassa. Il prezzo della *CGV* è sempre leggermente superiore a quello della *CAV* e la differenza tra i due aumenta a mano a mano che aumentano volatilità e tasso privo di rischio. La deviazione standard della differenza tra i due prezzi  $\hat{S}$  è pari alla deviazione standard  $S'$  del prezzo simulato dell'opzione con l'utilizzo della tecnica di riduzione della varianza (*CAV*).

### 4.3 VALUTAZIONE UTILIZZANDO IL MOTO BROWNIANO FRAZIONARIO

Come già enunciato nel capitolo 3 quando è stato introdotto il moto Browniano frazionario, quest'ultimo è in grado di catturare alcune caratteristiche intrinseche dei prezzi azionari come l'auto-similarità e la dipendenza a lungo raggio, che invece il maggiormente utilizzato moto Browniano geometrico non è in grado di catturare e modellare. Diversi studi che si citano qui di seguito sono a conferma che le caratteristiche citate siano proprie dei prezzi azionari<sup>363738</sup>.

#### 4.3.1 Opzioni arcobaleno asiatiche sul minimo di due medie geometriche

In questo paragrafo, analizzando il lavoro svolto da *Lu Wang, Rong Zhang, Lin Yang, Yang Su, Feng Ma* nel loro articolo "*Pricing geometric Asian rainbow options under fractional Brownian motion*"<sup>39</sup>, si giungerà alla formula analitica per il *pricing* di opzioni arcobaleno asiatiche dove i sottostanti sono modellati utilizzando il moto Browniano frazionario.

Il processo seguito dal sottostante, che segue il moto Browniano frazionario, si caratterizza come segue:

$$dS_t = \mu S_t dt + S_t \sigma dB_t^H, 0 \leq t \leq T \quad (4.19)$$

---

<sup>36</sup> Bonnie K. Ray, R. S. (2000). Long range Dependence in Daily Stock Volatilities. *Journal of Business & Economic Statistics* 18 (2), pp. 254-262.

<sup>37</sup> Wang, X.-T. (2010). Scaling and long range dependence in option pricing, IV: pricing European options with transaction costs under the multifractional Black–Scholes model. *Physica A* 389 (4), pp. 789-796.

<sup>38</sup> M. Fernández-Martínez, M. S.-G. (2013). Measuring the self-similarity exponent in Lévy stable processes of financial time series. *Physica A* 392 (21), pp. 5330-5345.

<sup>39</sup> Lu Wang, R. Z. (2017). Pricing geometric Asian rainbow options under fractional Brownian motion. *Physica A* 494, pp. 8-16.

dove  $S_t$  è il prezzo del sottostante,  $\mu$  è il tasso di rendimento atteso del sottostante,  $\sigma$  è la volatilità dell'asset sottostante,  $B_t^H$  è il moto Browniano frazionario con indice di Hurst  $H \in (1/2, 1)$ .

Vengono fatte diverse assunzioni alla base del modello, alcune delle quali sono anche alla base dell'equazione differenziale di BSM, che si elencano di seguito:

- 1) La dinamica del prezzo del sottostante segue il moto Browniano frazionario con  $H > 1/2$ ;
- 2) non ci sono costi di transazione o tasse e tutti i titoli sono perfettamente divisibili;
- 3) i titoli sono negoziati continuamente;
- 4) il tasso d'interesse privo di rischio,  $r$ , è noto e costante per tutte le scadenze;
- 5) non esistono opportunità di arbitraggio prive di rischio.

Sotto l'assunzione di tempo continuo, i titoli sottostanti,  $S_1$  e  $S_2$ , seguono le seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \frac{dS_{1t}}{S_{1t}} = \mu_1 dt + \sigma_1 dB_{1t}^H \\ \frac{dS_{2t}}{S_{2t}} = \mu_2 dt + \sigma_2 dB_{2t}^H \end{cases} \quad (4.20)$$

con coefficiente di correlazione tra  $dB_{1t}^H$  e  $dB_{2t}^H$  pari a  $\rho$ .

Per ogni  $s \in [0, t]$  si introduce, come fatto precedentemente, la variabile di percorso  $I_i(t)$ , calcolata come:

$$I_i(t) = \int_0^t \ln S_i(s) ds \quad (i = 1, 2)$$

La media geometrica nell'intervallo  $[0, t]$  si calcola come  $G_i(t) = e^{\frac{1}{t} \int_0^t \ln S_i(s) ds} = e^{I_i/t}$ .

Dunque, la funzione per il *pricing* di un'opzione *call* arcobaleno asiatica su due medie geometriche ha la seguente forma:

$$V(S_1, S_2, I_1, I_2, t) = \max(\min(G_1(t), G_2(t)) - K, 0).$$

La formula per il *pricing* si ottiene risolvendo la seguente equazione alle derivate parziali:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V}{\partial t} + \ln S_1 \frac{\partial V}{\partial I_1} + Ht^{2H-1} \sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + 2\sigma_1 \sigma_2 \rho S_1 S_2 Ht^{2H-1} \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} \\
& + \ln S_2 \frac{\partial V}{\partial I_2} + Ht^{2H-1} \sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + rS_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} + rS_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} = rV \quad (4.21)
\end{aligned}$$

la dimostrazione di ciò si ha partendo dall'espansione in serie di *Taylor* riportata di seguito:

$$\begin{aligned}
dV &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial I_1} \frac{dI_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial I_2} \frac{dI_2}{dt} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S_1} dS_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} (dS_1)^2 \\
& + \frac{\partial V}{\partial S_2} dS_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} (dS_2)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} dS_1 dS_2 + o(dt) \quad (4.22)
\end{aligned}$$

in cui:

$$(dS_{it})^2 = 2H\sigma_i^2 S_{it}^2 t^{2H-1} dt + o_i(dt), \quad (i = 1,2) \quad (4.23)$$

dove:

$$o_i(dt) = S_{it}^2 (\mu_i^2 (dt)^2 + 2\mu_i dt dB_{it}^H), \quad (i = 1,2)$$

e:

$$dS_{1t} dS_{2t} = 2\rho\sigma_1\sigma_2 S_{1t} S_{2t} Ht^{2H-1} dt + o(dt) \quad (4.24)$$

dove:

$$o(dt) = S_{1t} S_{2t} (\mu_1 \mu_2 (dt)^2 + \mu_1 \sigma_2 dt dB_{2t}^H + \mu_2 \sigma_1 dt dB_{1t}^H).$$

Possiamo riscrivere:

$$\frac{dI_i}{dt} = \frac{d\left(\int_0^t \ln S_i(s) ds\right)}{dt} = \ln S_i(t) \quad (i = 1,2) \quad (4.25)$$

Ora, sostituendo le equazioni (4.23), (4.24) e (4.25) nella (4.22) e calcolando il limite per  $dt \rightarrow 0$  si ottiene:

$$\begin{aligned}
dV &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial I_1} \ln S_1(t) + \frac{\partial V}{\partial I_2} \ln S_2(t) \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S_1} dS_1 \\
&+ \frac{1}{2} * 2H \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} \sigma_1^2 S_{1t}^2 t^{2H-1} dt + \frac{1}{2} * 2H \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} \sigma_2^2 S_{2t}^2 t^{2H-1} dt \\
&+ \frac{\partial V}{\partial S_2} dS_2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} \rho \sigma_1 \sigma_2 S_{1t} S_{2t} H t^{2H-1} dt.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Si imposta il portafoglio privo di rischio,  $\Pi$ , come:

$$\Pi_t = V_t - \Delta_1 S_{1t} - \Delta_2 S_{2t} \tag{4.27}$$

Per far in modo che il portafoglio  $\Pi$  non consenta opportunità d'arbitraggio, lo stesso deve rendere, nel prossimo istante di tempo, ossia in  $(t, t + dt)$ , il tasso di rendimento a breve dei titoli privi di rischio,  $r$ . Tradotto in formula:

$$d\Pi_t = r\Pi_t dt. \tag{4.28}$$

Sostituendo la (4.27) nella (4.28) si ha:

$$d(V_t - \Delta_1 S_{1t} - \Delta_2 S_{2t}) = r(V_t - \Delta_1 S_{1t} - \Delta_2 S_{2t}) dt \tag{4.29}$$

Successivamente si sostituisce l'equazione l'equazione (4.26) nella (4.29) ottenendo:

$$\begin{aligned}
&\left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial I_1} \ln S_1 + \frac{\partial V}{\partial I_2} \ln S_2 + \left( \frac{\partial V}{\partial S_1} - \Delta_1 \right) r S_1 + \left( \frac{\partial V}{\partial S_2} - \Delta_2 \right) r S_2 \right) dt \\
&+ \left( \frac{\partial V}{\partial S_1} - \Delta_1 \right) \sigma_1 dB_{1t}^H + \left( \frac{\partial V}{\partial S_2} - \Delta_2 \right) \sigma_2 dB_{2t}^H + H \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} \sigma_1^2 S_{1t}^2 t^{2H-1} dt \\
&+ H \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} \sigma_2^2 S_{2t}^2 t^{2H-1} dt + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} \rho \sigma_1 \sigma_2 S_{1t} S_{2t} H t^{2H-1} dt \\
&= r(V_t - \Delta_1 S_{1t} - \Delta_2 S_{2t}) dt.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Per far in modo che il portafoglio  $\Pi$  renda il tasso privo di rischio,  $r$ , è necessario che il coefficiente di  $dB_{it}^H$  ( $i = 1, 2$ ) sia uguale a zero. Poi si pone  $\Delta_1 = \frac{\partial V}{\partial S_1}$  e  $\Delta_2 = \frac{\partial V}{\partial S_2}$  e

l'equazione (4.30) si può trasformare in:

$$\left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial I_1} \ln S_1 + \frac{\partial V}{\partial I_2} \ln S_2 \right) dt + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} \rho \sigma_1 \sigma_2 S_{1t} S_{2t} H t^{2H-1} dt$$



$$+H \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} \sigma_1^2 S_1^2 t^{2H-1} dt + H \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} \sigma_2^2 S_2^2 t^{2H-1} dt = r \left( V_t - \frac{\partial V}{\partial S_1} S_1 - \frac{\partial V}{\partial S_2} S_2 \right) dt \quad (4.31)$$

che è identica alla (4.21) come volevasi dimostrare.

Per trovare il valore della funzione di *pricing*  $V$ , si devono rispettare le seguenti condizioni al contorno:

$$V(S_1, S_2, I_1, I_2, T) = \max\{\min[G_1(T), G_2(T)] - K, 0\} \quad (4.32)$$

$$V(0, S_2, I_1, I_2, T) = 0, \quad (4.33)$$

$$V(S_1, 0, I_1, I_2, T) = 0. \quad (4.34)$$

Dove: l'equazione (4.32) sta ad indicare che il prezzo dell'opzione in analisi dipende dal valore minimo tra le due medie geometriche dei due sottostanti. Mentre la (4.33) e la (4.34) indicano che, se uno dei due titoli sottostanti vale zero, il guadagno derivato dall'opzione sarà nullo.

Ora, come precedentemente fatto con l'equazione alle derivate parziali in (4.21), si fornirà, prima la formula per il *pricing* di una *call* arcobaleno asiatica su due medie geometriche, e in seguito si dimostrerà com'è stata ottenuta.

$$\begin{aligned} V(S_1, S_2, I_1, I_2, K, t) = & S_1^* e^{-r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma_1^{*2}\tau} N_2 \left( \frac{\ln(S_1^*/K) + \sigma_1^{*2}(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma_1^* \sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}, \right. \\ & \left. \frac{\ln(S_2^*/S_1^*) + (\rho\sigma_1^*\sigma_2^* - \sigma_1^{*2})(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma_{12}^* \sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}; \frac{\rho\sigma_2^* - \sigma_1^*}{\sigma_{12}^*} \right) \\ & + S_2^* e^{-r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma_2^{*2}\tau} N_2 \left( \frac{\ln(S_2^*/K) + \sigma_2^{*2}(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma_2^* \sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}, \right. \\ & \left. \frac{\ln(S_1^*/S_2^*) + (\rho\sigma_1^*\sigma_2^* - \sigma_2^{*2})(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma_{12}^* \sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}; \frac{\rho\sigma_1^* - \sigma_2^*}{\sigma_{12}^*} \right) \\ & - K e^{-r(T-t)} N_2 \left( \frac{\ln(S_1^*/K)}{\sigma_1^* \sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}, \frac{\ln(S_2^*/K)}{\sigma_2^* \sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}; \rho \right). \quad (4.35) \end{aligned}$$

Quando  $t = 0$  si ha che:

$$S_i^* = \exp\left(\ln S_i(0) + \frac{rT}{2} + \frac{H\sigma_i^2 T^{2H}}{2H+1} - \frac{T^{2H}\sigma_i^2}{2}\right), \quad (i = 1, 2, 12)$$

$$\sigma_i^* = \sigma_i \sqrt{1 - \frac{4H}{2H+1} + \frac{H}{H+1}}, \quad (i = 1, 2, 12)$$

e con:  $\sigma_{12} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$

Per dimostrare come si ottiene la (4.35) bisogna definire alcune variabili:

$$y_i = \frac{I_i}{T} + \frac{T-t}{T} \ln S_i, \quad (4.36)$$

$$z_i = y_i + \frac{r(T-t)^2}{2T} + \frac{H\sigma_i^2(T^{2H+1} - t^{2H+1})}{T(2H+1)} - \frac{T^{2H} - t^{2H}}{2} \sigma_i^2, \quad (4.37)$$

$$x_i = e^{z_i - (r - \frac{1}{2}\sigma_i^2)\tau}, \quad (4.38)$$

$$\tau = \frac{2H}{T^2} \left( \frac{T^{2H} - t^{2H}}{2H} T^2 - 2T \frac{T^{2H+1} - t^{2H+1}}{2H+1} + \frac{T^{2H+2} - t^{2H+2}}{2H+2} \right) \quad (4.39)$$

La funzione di *pricing*  $V$  può essere scritta, in modo alternativo, come:

$$V(S_1, S_2, I_1, I_2, T) = e^{-r(T-t)} e^{r\tau} F(x_1, x_2, \tau) \quad (4.40)$$

Ora, procedendo con la sostituzione, nell'equazione (4.21), delle equazioni da (4.36) a (4.40), si ottiene la seguente equazione alle derivate parziali (o equazione di diffusione):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \tau} &= \frac{1}{2} \sigma_1^2 x_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \rho \sigma_1 \sigma_2 x_1 x_2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ &+ \frac{1}{2} \sigma_1^2 x_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + r x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + r x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} - r F \end{aligned} \quad (4.41)$$

Si possono anche trasformare le condizioni al contorno della (4.32) come di seguito:

$$F(z_1, z_2, 0) = \max[\min(x_1, x_2) - K, 0] \quad (4.42)$$

Per risolvere l'equazione alle derivate parziali (4.41), nel rispetto delle condizioni stabilite dalla (4.42), si può utilizzare la formula introdotta da Stulz precedentemente analizzata nel capitolo 2:

$$\begin{aligned}
F(x_1, x_2, \tau) = & x_1 N_2 \left[ \frac{\ln(x_1/K) + (r + \sigma_1^2/2)\tau}{\sigma_1 \sqrt{\tau}}, \frac{\ln(x_2/x_1) - \sigma_{12}^2 \tau/2}{\sigma_{12} \sqrt{\tau}}; \frac{\rho \sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_{12}} \right] \\
& + x_2 N_2 \left[ \frac{\ln(x_2/K) + (r + \sigma_2^2/2)\tau}{\sigma_2 \sqrt{\tau}}, \frac{\ln(x_1/x_2) - \sigma_{12}^2 \tau/2}{\sigma_{12} \sqrt{\tau}}; \frac{\rho \sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_{12}} \right] \\
& - K e^{-r\tau} N_2 \left( \frac{\ln(x_1/K) + (r - \sigma_1^2/2)\tau}{\sigma_1 \sqrt{\tau}}, \frac{\ln(x_2/K) + (r - \sigma_2^2/2)\tau}{\sigma_2 \sqrt{\tau}}; \rho \right)
\end{aligned}$$

Si procede ponendo:

$$\sigma_i^* = \sigma_i \sqrt{1 - \frac{4H(T^{2H+1} - t^{2H+1})}{T(2H+1)(T^{2H} - t^{2H})} + \frac{H(T^{2H+2} - t^{2H+2})}{T^2(H+1)(T^{2H} - t^{2H})}}, \quad (i = 1, 2, 12)$$

$$r_i^* = \frac{r(T-t)}{2T} + \frac{H\sigma_i^2(T^{2H+1} - t^{2H+1})}{T(2H+1)(T-t)} - \frac{(T^{2H} - t^{2H})}{2(T-t)} \sigma_i^2, \quad (i = 1, 2)$$

$$x_i = \exp\left(\frac{I_i}{T} + \frac{T-t}{T} \ln S_i + r_i^*(T-t) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)\tau\right), \quad (i = 1, 2)$$

$$S_i^* = \exp\left(\frac{I_i}{T} + \frac{T-t}{T} \ln S_i + r_i^*(T-t)\right), \quad (i = 1, 2).$$

Dal momento che:  $V(S_1, S_2, I_1, I_2, K, t) = e^{r\tau - r(T-t)} F(x_1, x_2, \tau)$ , si avrà:

$$\begin{aligned}
V(S_1, S_2, I_1, I_2, K, t) = & e^{r\tau - r(T-t)} x_1 N_2 \left[ \frac{\ln(x_1/K) + (r + \sigma_1^2/2)\tau}{\sigma_1 \sqrt{\tau}}, \right. \\
& \left. \frac{\ln(x_2/x_1) - \sigma_{12}^2 \tau/2}{\sigma_{12} \sqrt{\tau}}; \frac{\rho \sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_{12}} \right] \\
& + e^{r\tau - r(T-t)} x_2 N_2 \left[ \frac{\ln(x_2/K) + (r + \sigma_2^2/2)\tau}{\sigma_2 \sqrt{\tau}}, \right. \\
& \left. \frac{\ln(x_1/x_2) - \sigma_{12}^2 \tau/2}{\sigma_{12} \sqrt{\tau}}; \frac{\rho \sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_{12}} \right] \\
& - e^{r\tau - r(T-t)} K e^{-r\tau} N_2 \left( \frac{\ln(x_1/K) + (r - \sigma_1^2/2)\tau}{\sigma_1 \sqrt{\tau}}, \right. \\
& \left. \frac{\ln(x_2/K) + (r - \sigma_2^2/2)\tau}{\sigma_2 \sqrt{\tau}}; \rho \right)
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}
e^{r\tau-r(T-t)}x_i &= e^{r\tau-r(T-t)} \exp\left(\frac{I_i}{T} + \frac{T-t}{T} \ln S_i + r_i^*(T-t) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)\tau\right) \\
&= e^{r\tau-r(T-t)}S_i^* e^{-\left(r - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)\tau} \\
&= S_i^* e^{-\left(r - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)\tau - r(T-t)} \quad (i = 1,2)
\end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(x_i/K) + (r + \sigma_i^2/2)\tau}{\sigma_i\sqrt{\tau}} &= \frac{\ln S_i^* - \left(r - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)\tau - \ln K + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)\tau}{\sigma_i\sqrt{\tau}} \\
&= \frac{\ln \frac{S_i^*}{K} + \sigma_i^2\tau}{\sigma_i\sqrt{\tau}} \quad (i = 1,2)
\end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\sigma_i^2\tau = \sigma_i^{*2}(T^{2H} - t^{2H}) \quad (i = 1,2) \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\ln \frac{x_2}{x_1} - \frac{1}{2}\sigma_{12}^2\tau}{\sigma_{12}\sqrt{\tau}} &= \frac{\ln S_2^* - \left(r - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)\tau - \ln S_1^* + \left(r - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)\tau - \frac{1}{2}\sigma_{12}^2\tau}{\sigma_{12}\sqrt{\tau}} \\
&= \frac{\ln \frac{S_2^*}{S_1^*} + \frac{1}{2}(\sigma_2^2 - \sigma_1^2 - \sigma_{12}^2)\tau}{\sigma_{12}\sqrt{\tau}} = \frac{\ln \frac{S_2^*}{S_1^*} + \frac{1}{2}(2\rho\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_1^2)\tau}{\sigma_{12}\sqrt{\tau}} \\
&= \frac{\ln \frac{S_2^*}{S_1^*} + \rho(\sigma_1^*\sigma_2^* - \sigma_1^{*2})(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma_{12}^*\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Ed infine, sostituendo le equazioni dalla (4.44) alla (4.47) all'interno della (4.43), si ottiene la formula per il *pricing* di una call arcobaleno asiatica sul minimo di due medie geometriche raffigurata in (4.35), come volevasi dimostrare nel *paper* analizzato.

#### 4.3.2 Verifica della formula analitica tramite simulazione Monte Carlo

Nel *paper* citato, a verifica della correttezza dell'equazione (4.35), si simula il prezzo del derivato tramite il metodo di simulazione Monte Carlo.

Si suppone che:

- il prezzo iniziale dei due *assets* sottostanti  $S_1$  e  $S_2$  sia per entrambi 40 \$,
- l'opzione scada in quattro mesi, dunque  $T - t = 1/3$ ,

- l'indice  $H = \frac{1}{2}$

Si considera il tempo presente come 0 e la scadenza come  $T$ . Quindi si procede dividendo la vita del derivato  $[0, T]$  in  $n$  piccoli intervalli di lunghezza  $\Delta t$ .

Si suppone ulteriormente che:  $R_i(T_j) = \ln(S_i(T_j)/S_i(T_{j-1}))$  ( $i = 1, 2; j = 1, 2, \dots, n$ ).

Adottando l'approccio di neutralità al rischio il coefficiente  $\mu_i$  ( $i = 1, 2$ ) dell'equazione (4.20), si sostituisce con il tasso d'interesse a breve dei titoli privi di rischio  $r$ , e quindi  $[R_1(T_j), R_2(T_j)]$  segue una distribuzione normale bivariata con media  $(r - \frac{1}{2}\sigma_i^2)\Delta t$ , varianza pari a  $\sigma_i^2\Delta t$  e coefficiente di correlazione  $\rho$ .

La simulazione si divide in cinque passi:

- 1) Simulare un sentiero per il prezzo dei titoli sottostanti in base all'equazione (4.20):

$$\ln S_1(t_j) = \ln S_1(t_{j-1}) + r(\Delta t)^{2H} - \frac{1}{2}\sigma_1^2(\Delta t)^{2H} + \sigma_1(\Delta t)^H x_j, \quad (4.48)$$

$$\ln S_2(t_j) = \ln S_2(t_{j-1}) + r(\Delta t)^{2H} - \frac{1}{2}\sigma_2^2(\Delta t)^{2H} + \sigma_2(\Delta t)^H y_j, \quad (4.49)$$

in cui  $(x_j, y_j)$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) è una distribuzione normale standard bivariata con coefficiente di correlazione pari a  $\rho$ .

- 2) Ricavare, dal precedente passo, i prezzi dei due sottostanti nei diversi istanti di tempo  $(t_0, t_1, \dots, t_n)$ , indicati come  $(S_1(t_0), S_2(t_0)), \dots, (S_1(t_n), S_2(t_n))$ , mediante la seguente formula:  $S_i(t_j) = e^{\ln S_i(t_j)}$  ( $i = 1, 2$ ).

- 3) Calcolare la media geometrica dei sottostanti come segue:

$$G_i(T) = \left( \prod_{j=1}^n S_i(jT/n) \right)^{\frac{1}{n}} \quad (4.50)$$

- 4) Stimare il prezzo del opzione  $N$  volte utilizzando la seguente formula:

$$C_k(T) = e^{-rT} \max(\min(G_1(t), G_2(t)) - K, 0) \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (4.51)$$

- 5) Infine, si determina il prezzo simulato calcolando la media dei valori  $C_k(T)$ , mediante:

$$C(T) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N C_k(T)$$

La simulazione viene ripetuta per  $N = 10000$  volte e i risultati ottenuti sono riportati in Tabella 2, nella quale il valore simulato è confrontato col valore ottenuto analiticamente. A verifica della correttezza del valore ottenuto analiticamente è riportata, tra parentesi, la deviazione standard del prezzo simulato.

Tabella 2. Confronto tra valore analitico e simulato di una call arcobaleno asiatica su due asset

$\sigma_1$	$\sigma_2$	$K$	$r = 0.03$		$r = 0.05$		$r = 0.07$	
			Analytical value	Simulated value	Analytical value	Simulated value	Analytical value	Simulated value
$\rho = -0.3$								
0.2	0.3	35	3.0918	3.1360(0.0211)	3.1836	3.1745(0.0212)	3.2753	3.2575(0.0215)
0.2	0.3	40	0.2505	0.2533(0.0068)	0.2773	0.2717(0.0070)	0.3060	0.3005(0.0074)
0.2	0.3	45	0.0007	0.0006(0.0007)	0.0009	0.0008(0.0001)	0.0011	0.0008(0.0002)
0.2	0.4	35	2.8364	2.8692(0.0229)	2.9201	2.9072(0.0232)	3.0038	2.9947(0.0231)
0.2	0.4	40	0.2643	0.2614(0.0072)	0.2899	0.2899(0.0075)	0.3171	0.3309(0.0080)
0.2	0.4	45	0.0015	0.0012(0.0004)	0.0018	0.0012(0.0004)	0.0022	0.0020(0.0004)
0.3	0.4	35	2.5723	2.5687(0.0251)	2.6491	2.6475(0.0255)	2.7263	2.7420(0.0253)
0.3	0.4	40	0.3227	0.3343(0.0091)	0.3466	0.3613(0.0095)	0.3717	0.3804(0.0097)
0.3	0.4	45	0.0083	0.0077(0.0011)	0.0094	0.0081(0.0011)	0.0107	0.0120(0.0013)
$\rho = 0.1$								
0.2	0.3	35	3.4271	3.4159(0.0238)	3.5181	3.5053(0.0241)	3.6088	3.6429(0.0243)
0.2	0.3	40	0.4270	0.4172(0.0097)	0.4616	0.4513(0.0101)	0.4980	0.5072(0.0107)
0.2	0.3	45	0.0059	0.0060(0.0007)	0.0069	0.0075(0.0009)	0.0081	0.0076(0.0011)
0.2	0.4	35	3.1965	3.2009(0.0264)	3.2795	3.2810(0.0262)	3.3624	3.3496(0.0262)
0.2	0.4	40	0.4528	0.4729(0.0107)	0.4862	0.4644(0.0106)	0.5212	0.5241(0.0111)
0.2	0.4	45	0.0095	0.0095(0.0012)	0.0110	0.0104(0.0013)	0.0126	0.0123(0.0015)
0.3	0.4	35	3.0373	3.0615(0.0290)	3.1142	3.1020(0.0294)	3.1914	3.1944(0.0299)
0.3	0.4	40	0.5674	0.5661(0.0135)	0.5989	0.5677(0.0141)	0.6316	0.6280(0.0138)
0.3	0.4	45	0.0387	0.0394(0.0032)	0.0424	0.0437(0.0033)	0.0464	0.0464(0.0038)
$\rho = 0.5$								
0.2	0.3	35	3.8380	3.8317(0.0268)	3.9283	3.8941(0.0271)	4.0184	4.0236(0.0269)
0.2	0.3	40	0.6475	0.6403(0.0128)	0.6902	0.6970(0.0131)	0.7346	0.7108(0.0135)
0.2	0.3	45	0.0203	0.0183(0.0017)	0.0231	0.0218(0.0020)	0.0262	0.0233(0.0022)
0.2	0.4	35	3.6239	3.6533(0.0290)	3.7063	3.7020(0.0290)	3.7886	3.8102(0.0293)
0.2	0.4	40	0.6832	0.6765(0.0133)	0.7247	0.7377(0.0137)	0.7676	0.7593(0.0142)
0.2	0.4	45	0.0275	0.0248(0.0025)	0.0310	0.0284(0.0024)	0.0348	0.0379(0.0029)
0.3	0.4	35	3.6025	3.5933(0.0336)	3.6803	3.7077(0.0335)	3.7582	3.7786(0.0337)
0.3	0.4	40	0.8800	0.8887(0.0185)	0.9193	0.9069(0.0189)	0.9597	0.9345(0.0194)
0.3	0.4	45	0.1018	0.0952(0.0060)	0.1094	0.0952(0.0059)	0.1174	0.1159(0.0065)

Fonte: Lu Wang, R. Z. (2017), op. cit., p. 14

#### 4.4 VALUTAZIONE UTILIZZANDO IL MOTO BROWNIANO FRAZIONARIO MISTO

Il moto Browniano frazionario appena analizzato nasconde il problema di non essere privo di opportunità di arbitraggio, se non quando il parametro  $H = \frac{1}{2}$  e si riduce ad un moto Browniano standard. Perciò, diversi autori lo hanno generalizzato in quello che si definisce moto Browniano frazionario misto (*MFBM*), che altro non è che la combinazione del moto Browniano frazionario e del processo di Wiener (o moto Browniano standard). Il quale è stato dimostrato essere privo di opportunità di arbitraggio prive di rischio.

##### 4.4.1 Opzioni arcobaleno asiatiche sul minimo di due medie geometriche

In questo paragrafo si vedrà come ricavare la formula per il *pricing* di opzioni arcobaleno asiatiche su medie geometriche, dove la dinamica seguita dai sottostanti è descritta dal *MFBM*, grazie al paper “Pricing geometric Asian rainbow options under the mixed fractional Brownian motion”<sup>40</sup>.

Le formule proposte dagli autori sono generali, quindi per  $n$  sottostanti, ma in ogni caso quando si confronterà il prezzo derivato analiticamente con quello simulato, si vedrà il caso per  $n = 2$ .

Il *payoff* dell’opzione è rappresentato dalla seguente funzione:

$$\begin{aligned} & \varphi(I_1(T), I_2(T), \dots, I_n(T), T) \\ &= \max(\min(G_1(I_1(T), T), G_2(I_2(T), T), \dots, G_n(I_n(T), T)) - K, 0) \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

in cui  $G_i(I_i(t), t)$  è la media geometrica del prezzo  $S_i$  in  $[t_0, t]$ , definita come:

$$G_i(I_i(t), t) = e^{\frac{1}{t-t_0} I_i(t)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.4.2)$$

e dove:

$$I_i(t) = \int_{t_0}^t \ln S_i(s) ds, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.4.3)$$

---

<sup>40</sup> D. Ahmadian, L. V. (2020). Pricing geometric Asian rainbow options under the mixed fractional Brownian motion. *Physica A* 555, pp. 1-14.

dove  $t_0 = 0$  indica il tempo corrente.

La dinamica seguita dal prezzo dell'attività sottostante  $S_i$  si rappresenta con il moto Browniano frazionario misto:

$$\frac{dS_i}{S_i} = \mu_i dt + \sigma_i^H dW_i^H(t) + \sigma_i^B dW_i^B(t) \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.4.4)$$

dove  $\mu_i$  è il tasso di rendimento atteso,  $\sigma_i^H$  e  $\sigma_i^B$  sono i parametri di volatilità (costante),  $W_i^H$  è un moto Browniano frazionario con parametro di Hurst  $H \in (0, 1)$  e  $W_i^B$  è un moto Browniano standard.

La struttura di correlazione tra i moti Browniani standard e i moti Browniani frazionari è la seguente:

$$\mathbb{E} \left( dW_i^H(t) dW_j^H(t) \right) = \rho_{i,j}^H dt, \quad \mathbb{E} \left( dW_i^B(t) dW_j^B(t) \right) = \rho_{i,j}^B dt,$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j,$$

$$\left( dW_i^H(t) dW_j^B(t) \right) = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.4.5)$$

Si indica con  $C(S_1, S_2, \dots, S_n, I_1, I_2, \dots, I_n, t)$ , il prezzo dell'opzione arcobaleno asiatica al tempo  $t$ . Tale prezzo deve soddisfare la seguente equazione alle derivate parziali:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial C}{\partial I_i} \ln(S_i) + \sum_{i=1}^n (H(\sigma_i^H)^2 t^{2H-1} + \frac{1}{2} (\sigma_i^B)^2) S_i^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_i^2} \\ + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n (2H \rho_{i,j}^H \sigma_i^H \sigma_j^H t^{2H-1} + \rho_{i,j}^B \sigma_i^B \sigma_j^B) S_i S_j \frac{\partial^2 C}{\partial S_i \partial S_j} \\ + \sum_{i=1}^n r S_i \frac{\partial C}{\partial S_i} - rC = 0, \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Con condizione finale descritta da:

$$C(S_1, S_2, \dots, S_n, I_1, I_2, \dots, I_n, T) = \varphi(I_1, I_2, \dots, I_n, T) \quad (4.4.7)$$

Com'era stato fatto nel precedente paragrafo si dimostra come ottenere l'equazione differenziale (4.4.6) a partire dalla seguente espansione di Taylor:



$$\begin{aligned}
dC &= \left( \frac{\partial C}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial C}{\partial I_i} \frac{dI_i}{dt} \right) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial C}{\partial S_i} dS_i \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 C}{\partial S_i^2} (dS_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{\partial^2 C}{\partial S_i \partial S_j} dS_i dS_j + o(dt).
\end{aligned} \tag{4.4.8}$$

nella quale:

$$(dS_i)^2 = (2Ht^{2H-1}(\sigma_i^H)^2 S_i^2 + (\sigma_i^B)^2) dt + o(dt), \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{4.4.9}$$

$$dS_i dS_j = (2H\rho_{i,j}^H \sigma_i^H \sigma_j^H t^{2H-1} + \rho_{i,j}^B \sigma_i^B \sigma_j^B) S_i S_j dt + o(dt), \tag{4.4.10}$$

$$\frac{dI_i}{dt} = \frac{d \int_{t_0}^t \ln S_i(s) ds}{dt} = \ln S_i \tag{4.4.11}$$

Si procede sostituendo le equazioni (4.4.9), (4.4.10) e (4.4.11) all'interno della (4.4.8) e, facendo tendere  $dt \rightarrow 0$ ; si ottiene:

$$\begin{aligned}
dC &= \left( \frac{\partial C}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial C}{\partial I_i} \ln S_i \right) dt \\
&+ \sum_{i=1}^n \frac{\partial C}{\partial S_i} dS_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (2Ht^{2H-1}(\sigma_i^H)^2 + (\sigma_i^B)^2) S_i^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_i^2} dt \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n (2H\rho_{i,j}^H \sigma_i^H \sigma_j^H t^{2H+1} + \rho_{i,j}^B \sigma_i^B \sigma_j^B) S_i S_j \frac{\partial^2 C}{\partial S_i \partial S_j} dt.
\end{aligned} \tag{4.4.12}$$

Il passo successivo è costruire il portafoglio privo di rischio  $\Pi(t)$ :

$$\Pi = C - \sum_{i=1}^n \Delta_i S_i, \tag{4.4.13}$$

dove le  $\Delta_i$ , che rappresentano la frazione di portafoglio investita nel titolo  $i$ -esimo, sono scelte in modo tale che  $\Pi(t)$  sia privo di rischio in  $(t, t + dt)$ . Sfruttando il principio di non arbitraggio si ottiene:

$$d\Pi(t) = r\Pi(t)dt, \quad (4.4.14)$$

Ora, sostituendo l'equazione (4.4.13) nella (4.4.14), si ha:

$$d\left(C - \sum_{i=1}^n \Delta_i S_i\right) = r\left(C - \sum_{i=1}^n \Delta_i S_i\right) dt. \quad (4.4.15)$$

Dopodiché, si procede con la sostituzione dell'equazione (4.4.12) nella (4.4.15), ottenendo:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial C}{\partial I_i} \ln S_i\right) dt \\ & + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial C}{\partial S_i} - \Delta_i\right) dS_i + \sum_{i=1}^n \left(Ht^{2H-1}(\sigma_i^H)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_i^B)^2\right) S_i^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_i^2} dt \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \left(2H\rho_{i,j}^H \sigma_i^H \sigma_j^H t^{2H-1} + \rho_{i,j}^B \sigma_i^B \sigma_j^B\right) S_i S_j \frac{\partial^2 C}{\partial S_i \partial S_j} dt \\ & = r\left(C - \sum_{i=1}^n \Delta_i S_i\right) \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

Di seguito, in base al principio di non arbitraggio, affinché il portafoglio sia privo di rischio in  $(t, t + dt)$  bisogna porre  $\Delta_i = \frac{\partial C}{\partial S_i}$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$ . Dunque, l'equazione (4.4.16) si trasforma in:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial C}{\partial I_i} \ln S_i + \sum_{i=1}^n \left(Ht^{2H-1}(\sigma_i^H)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_i^B)^2\right) S_i^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_i^2} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \left(2H\rho_{i,j}^H \sigma_i^H \sigma_j^H t^{2H-1} + \rho_{i,j}^B \sigma_i^B \sigma_j^B\right) S_i S_j \frac{\partial^2 C}{\partial S_i \partial S_j} = r\left(C - \sum_{i=1}^n \frac{\partial C}{\partial S_i} S_i\right), \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

che, come volevasi dimostrare, è proprio l'equazione (4.4.6).

Per risolvere l'equazione alle derivate parziali (4.4.6) si procede al seguente cambio di variabili:

$$x_i(S_i, I_i, t) = e^{\frac{I_i(t)}{T-t_0} S_i^{\frac{T-t}{T-t_0}}}, i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.4.18)$$

viene trasformata in:

$$S_i(x_i, I_i, t) = x_i^{\frac{T-t_0}{T-t}} e^{-\frac{I_i(t)}{T-t}}, i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.4.19)$$

Perciò, si può definire:

$$\begin{aligned} U(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ = C(S_1(x_1, I_1, t), S_2(x_2, I_2, t), \dots, S_n(x_n, I_n, t), I_1(t), I_2(t), \dots, I_n(t), t) \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

Sfruttando i risultati ottenuti dall'equazione (4.4.3) e dalle equazioni dalla (4.4.18) alla (4.4.20), si ha che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{T-t_0} e^{\frac{I_i(t)}{T-t_0} S_i^{\frac{T-t}{T-t_0}}} \ln S_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{T-t_0} \left( \frac{T-t_0}{T-t} \ln(x_i) - \frac{I_i(t)}{T-t} \right) x_i \frac{\partial U}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (4.4.21)$$

$$\frac{\partial C}{\partial I_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial I_i} = \frac{1}{T-t_0} e^{\frac{I_i(t)}{T-t_0} S_i^{\frac{T-t}{T-t_0}}} \frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{1}{T-t_0} x_i \frac{\partial U}{\partial x_i}, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.4.22)$$

$$S_i \frac{\partial C}{\partial S_i} = S_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial S_i} = S_i \left( \frac{T-t}{T-t_0} e^{\frac{I_i(t)}{T-t_0} S_i^{\frac{T-t}{T-t_0}}} \right) \frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{T-t}{T-t_0} x_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad (4.4.23)$$

$$\begin{aligned} S_i^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_i^2} &= S_i^2 \frac{\partial}{\partial S_i} \left( \frac{T-t}{T-t_0} e^{\frac{I_i(t)}{T-t_0} S_i^{\frac{T-t}{T-t_0}}} \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) \\ &= S_i^2 \left( \frac{(t_0-t)(T-t)}{(T-t_0)^2} e^{\frac{I_i(t)}{T-t_0} S_i^{\frac{T-t}{T-t_0}}} \left( \frac{2t_0-(t+T)}{T-t_0} \right) \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) + S_i^2 \left( \frac{T-t}{T-t_0} e^{\frac{I_i(t)}{T-t_0} S_i^{\frac{T-t}{T-t_0}}} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{(t_0 - t)(T - t)}{(T - t_0)^2} x_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + \left( \frac{T - t}{T - t_0} \right)^2 x_i^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} \quad (4.4.24)$$

$$\begin{aligned} S_i S_j \frac{\partial^2 C}{\partial S_i \partial S_j} &= S_i S_j \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_i}{\partial S_i} \frac{\partial x_j}{\partial S_j} \\ &= S_i \left( \frac{T - t}{T - t_0} e^{\frac{I_i(t)}{T - t_0} \frac{t_0 - t}{T - t_0}} \right) S_j \left( \frac{T - t}{T - t_0} e^{\frac{I_j(t)}{T - t_0} \frac{t_0 - t}{T - t_0}} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \left( \frac{T - t}{T - t_0} \right)^2 x_i x_j \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (4.4.25)$$

Successivamente, si procede sostituendo, nell'equazione (4.4.17), le equazioni da (4.4.21) a (4.4.25) ottenendo la seguente equazione alle derivate parziali:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \left( \frac{T - t}{T - t_0} \right)^2 \sum_{i=1}^n \left( H(\sigma_i^H)^2 t^{2H-1} + \frac{1}{2} (\sigma_i^B)^2 \right) x_i^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} \\ + \frac{1}{2} \left( \frac{T - t}{T - t_0} \right)^2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n (2H \rho_{i,j}^H \sigma_i^H \sigma_j^H t^{2H-1} + \rho_{i,j}^B \sigma_i^B \sigma_j^B) x_i x_j \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \\ + \sum_{i=1}^n \left( r \frac{T - t}{T - t_0} + \frac{(t_0 - t)(T - t)}{(T - t_0)^2} \left( H(\sigma_i^H)^2 t^{2H-1} + \frac{1}{2} (\sigma_i^B)^2 \right) \right) x_i \frac{\partial U}{\partial x_i} - rU = 0 \end{aligned} \quad (4.4.26)$$

La condizione finale che consegue al cambio variabili sarà:

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n, T) = \varphi(I_1(T), I_2(T), \dots, I_n(T), T), \quad (4.4.27)$$

nella quale  $I_i(T)$  si può ottenere dall'equazione (4.4.18) come segue:

$$I_i(T) = (T - t_0) \ln(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.4.28)$$

Ora si possono sostituire le equazioni (4.4.1) e (4.4.2) nella condizione rappresentata dalla (4.4.27), per ottenere:

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n, T) = \max(\min(x_1, x_2, \dots, x_n) - K, 0). \quad (4.4.29)$$

Infine, impostando le seguenti uguaglianze:

$$r(t) = r, \quad (4.4.30)$$

$$\sigma_i^2(t) = \left(\frac{T-t}{T-t_0}\right)^2 (2H(\sigma_i^H)^2 t^{2H-1} + (\sigma_i^B)^2) \quad (4.4.31)$$

$$D_i(t) = \frac{r(t-t_0)}{T-t_0} + \frac{(t-t_0)(T-t)}{(T-t_0)^2} \left( H(\sigma_i^H)^2 t^{2H-1} + \frac{1}{2}(\sigma_i^B)^2 \right) \quad (4.4.32)$$

$$\sigma_i(t)\sigma_j(t)\rho_{i,j}(t) = \left(\frac{T-t}{T-t_0}\right)^2 (2H\rho_{i,j}^H\sigma_i^H\sigma_j^H t^{2H-1} + \rho_{i,j}^B\sigma_i^B\sigma_j^B), \quad (4.4.33)$$

si può riscrivere la (4.4.26) in forma compatta come:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sigma_i(t)\sigma_j(t)\rho_{i,j}(t)x_i x_j \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \\ + \sum_{i=1}^n (r(t) - D_i(t)) x_i \frac{\partial U}{\partial x_i} - r(t)U = 0. \end{aligned} \quad (4.4.34)$$

Ora, per risolvere l'equazione (4.4.26), con condizione finale rappresentata dall'equazione (4.4.29), si utilizza il lavoro svolto da *Bos e Ware*<sup>41</sup> pubblicato nel *Journal of Computational Finance*, in quanto trattasi di un'equazione differenziale con coefficienti dipendenti dal tempo.

Nello specifico, in un particolare istante  $(t_0 < T)$ , si ha che:  $U(x_1, x_2, \dots, x_n, t_0) = V(x_1, x_2, \dots, x_n, t_0)$ , dove  $V$  rappresenta la soluzione al seguente problema:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j \hat{\rho}_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n (\hat{r} - \hat{D}_i) x_i \frac{\partial V}{\partial x_i} - \hat{r}V = 0, \quad (4.4.35)$$

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, T) = \max(\min(x_1, x_2, \dots, x_n) - K, 0), \quad (4.4.36)$$

---

<sup>41</sup> L. P. Bos, A. F. (2001). How to solve multiasset Black-Scholes with time-dependent volatility and correlation. *Journal of Computational Finance*, pp. 99-107.

in cui  $\hat{r}, \hat{\sigma}_i, \hat{D}_i, \hat{\rho}_{i,j}$  rappresentano i valori medi di  $r, \sigma_i, D_i, \rho_{i,j}$  nell'intervallo  $[t_0, T]$  ed in base allo studio sopra citato si calcolano come segue:

$$\hat{r} = \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T r(t) dt, \quad (4.4.37)$$

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T \sigma_i^2(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.4.38)$$

$$\hat{D}_i = \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T D_i(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.4.39)$$

$$\hat{\rho}_{i,j} = \frac{\frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T \sigma_i(\tau) \sigma_j(\tau) \rho_{i,j}(\tau) d\tau}{\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j \quad (4.4.40)$$

Dunque, in ogni istante  $t_0$  per ottenere il valore di  $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , invece di risolvere l'equazione con coefficienti dipendenti dal tempo in (4.4.26), il problema si semplifica nel risolvere l'equazione con coefficienti costanti (4.4.35).

I valori dei coefficienti costanti delle equazioni da (4.4.37) a (4.4.40) si calcolano come segue:

$$\hat{r} = r, \quad (4.4.41)$$

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{2H(\sigma_i^H)^2}{(T - t_0)^3} \left( T^2 \left( \frac{T^{2H} - t_0^{2H}}{2H} \right) - 2T \frac{T^{2H+1} - t_0^{2H+1}}{2H+1} + \frac{T^{2H+2} - t_0^{2H+2}}{2H+2} \right) + \frac{1}{3} (\sigma_i^B)^2 \quad (4.4.42)$$

$$\hat{D}_i = \frac{\hat{r}}{2} + \frac{H(\sigma_i^H)^2}{(T - t_0)^3} \left( (T + t_0) \frac{T^{2H+1} - t_0^{2H+1}}{2H+1} - \frac{T^{2H+2} - t_0^{2H+2}}{2H+2} - t_0 T \frac{T^{2H} - t_0^{2H}}{2H} \right) + \frac{1}{12} (\sigma_i^B)^2, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.4.43)$$

$$\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j \hat{\rho}_{i,j} = \frac{2H \rho_{i,j}^H \sigma_i^H \sigma_j^H}{(T - t_0)^3} \left( T^2 \left( \frac{T^{2H} - t_0^{2H}}{2H} \right) - 2T \frac{T^{2H+1} - t_0^{2H+1}}{2H+1} + \frac{T^{2H+2} - t_0^{2H+2}}{2H+2} \right)$$

$$+ \frac{1}{3} \rho_{i,j}^B \sigma_i^B \sigma_j^B), \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j. \quad (4.4.44)$$

La soluzione all'equazione differenziale (4.4.35) è stata ottenuta da *Johnson*<sup>42</sup>, e da *Stulz*<sup>43</sup> nel caso di due titoli:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, t_0) = S_1 e^{-\hat{D}_1(T-t_0)} N_n(X_1, \Sigma_1) + S_2 e^{-\hat{D}_2(T-t_0)} N_n(X_2, \Sigma_2) \\ + \dots + S_n e^{-\hat{D}_n(T-t_0)} N_n(X_n, \Sigma_n) - K e^{-\hat{r}(T-t_0)} (X_{n+1}, \Sigma_{n+1}), \quad (4.4.45)$$

nella quale  $N_n(X_i, \Sigma_i)$  è la funzione di ripartizione normale standard  $n$ -variata di  $X_i$  con matrice di correlazione  $\Sigma_i$  con  $i = 1, 2, \dots, n + 1$ , dove:

$$X_1 = [d_1(x_1, K, \hat{\sigma}_1^2), -d'_1(x_1, x_2, \hat{\sigma}_{1,2}^2), \dots, -d'_1(x_1, x_n, \hat{\sigma}_{1,n}^2)], \quad (4.4.46)$$

$$X_i = [d_1(x_i, K, \hat{\sigma}_i^2), -d'_1(x_i, x_1, \hat{\sigma}_{i,1}^2), \dots, -d'_1(x_i, x_{i-1}, \hat{\sigma}_{i,i-1}^2), \\ -d'_1(x_i, x_{i+1}, \hat{\sigma}_{i,i+1}^2), \dots, -d'_1(x_i, x_n, \hat{\sigma}_{i,n}^2)], \quad i = 2, 3, \dots, n - 1 \quad (4.4.47)$$

$$X_n = [d_1(x_n, K, \hat{\sigma}_n^2), -d'_1(x_n, x_1, \hat{\sigma}_{n,1}^2), \dots, -d'_1(x_n, x_{n-1}, \hat{\sigma}_{n,n-1}^2)], \quad (4.4.48)$$

$$X_{n+1} = [d_2(x_1, K, \hat{\sigma}_1^2), d_2(x_2, K, \hat{\sigma}_2^2), \dots, d_2(x_n, K, \hat{\sigma}_n^2)], \quad (4.4.49)$$

e:

$$d_2(u, v, p) = \frac{\ln(\frac{u}{v}) + (r - \frac{1}{2}p)(T-t_0)}{\sqrt{p(T-t_0)}}, \quad d_1(u, v, p) = d_2(u, v, p) + \sqrt{p(T-t_0)} \quad (4.4.50)$$

$$d'_1(u, v, p) = \frac{\ln(\frac{u}{v}) + \frac{1}{2}p(T-t_0)}{\sqrt{p(T-t_0)}}, \quad (4.4.51)$$

$$\hat{\sigma}_{i,j}^2 = \hat{\sigma}_i^2 + \hat{\sigma}_j^2 - 2\hat{\rho}_{i,j}\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j, \quad (4.4.52)$$

---

<sup>42</sup> Johnson, H. (1987), op.cit., pp.280-281

<sup>43</sup> Stulz, R. M. (1982), op.cit., p.165

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \begin{bmatrix} 1 & -\hat{\rho}_{1,1,2} & -\hat{\rho}_{1,1,3} & \cdots & -\hat{\rho}_{1,1,n} \\ -\hat{\rho}_{1,2,1} & 1 & \hat{\rho}_{1,2,3} & \cdots & \hat{\rho}_{1,2,n} \\ -\hat{\rho}_{1,3,1} & \hat{\rho}_{1,3,2} & 1 & \cdots & \hat{\rho}_{1,3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\hat{\rho}_{1,n,1} & \hat{\rho}_{1,n,2} & \hat{\rho}_{1,n,3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\
\Sigma_2 &= \begin{bmatrix} 1 & -\hat{\rho}_{2,2,1} & -\hat{\rho}_{2,2,3} & \cdots & -\hat{\rho}_{2,2,n} \\ -\hat{\rho}_{2,1,2} & 1 & \hat{\rho}_{2,1,3} & \cdots & \hat{\rho}_{2,1,n} \\ -\hat{\rho}_{2,3,2} & \hat{\rho}_{2,3,1} & 1 & \cdots & \hat{\rho}_{2,3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\hat{\rho}_{2,n,2} & \hat{\rho}_{2,n,1} & \hat{\rho}_{2,n,3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\
&\vdots \\
\Sigma_n &= \begin{bmatrix} 1 & -\hat{\rho}_{n,n,1} & -\hat{\rho}_{n,n,2} & \cdots & -\hat{\rho}_{n,n,n-1} \\ -\hat{\rho}_{n,1,n} & 1 & \hat{\rho}_{n,1,2} & \cdots & \hat{\rho}_{n,1,n-1} \\ -\hat{\rho}_{n,2,n} & \hat{\rho}_{n,2,1} & 1 & \cdots & \hat{\rho}_{n,2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\hat{\rho}_{n,n-1,n} & \hat{\rho}_{n,n-1,1} & \hat{\rho}_{n,n-1,2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{4.4.53}
\end{aligned}$$

$$\Sigma_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho}_{1,2} & \hat{\rho}_{1,3} & \cdots & \hat{\rho}_{1,n} \\ \hat{\rho}_{2,1} & 1 & \hat{\rho}_{2,3} & \cdots & \hat{\rho}_{2,n} \\ \hat{\rho}_{3,1} & \hat{\rho}_{3,2} & 1 & \cdots & \hat{\rho}_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\rho}_{n,1} & \hat{\rho}_{n,2} & \hat{\rho}_{n,3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{4.4.54}$$

$$\text{dove } \hat{\rho}_{i,j,i} = \hat{\rho}_{i,i,j} = \frac{\hat{\sigma}_i - \hat{\rho}_{i,j} \hat{\sigma}_j}{\hat{\sigma}_{i,j}}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j \tag{4.4.55}$$

$$\hat{\rho}_{i,j,k} = \frac{\hat{\sigma}_i^2 - \hat{\rho}_{i,j} \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j - \hat{\rho}_{i,k} \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_k + \hat{\rho}_{j,k} \hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_k}{\hat{\sigma}_{i,j} \hat{\sigma}_{i,k}}, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j \neq k \tag{4.4.56}$$

#### 4.4.2 Verifica della formula analitica tramite simulazione Monte Carlo

Parallelamente a quanto era stato fatto nel paper sul moto Browniano frazionario, anche in questo caso si valuta la correttezza della formula analitica con il prezzo che deriva dalla simulazione Monte Carlo, in particolare nel caso in cui il numero dei sottostanti è  $n = 2$ .

Per prima cosa si divide la vita del derivato  $[0, T]$  in intervalli di lunghezza  $\Delta t = \frac{T}{L}$  con  $L = 100$  dove le osservazioni si indicano come:  $t_0, t_1, \dots, t_L$ .



$\tilde{W}^H(t)$  denota un moto Browniano frazionario, ed i suoi incrementi, indicati come:  $\tilde{W}^H(t_i) - \tilde{W}^H(t_{i-1})$ , sono normalmente distribuiti e con la seguente matrice di varianza-covarianza:

$$A = [a_{i,j}], \quad i, j = 1, 2, \dots, L \quad (4.4.57)$$

dove:

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \text{Cov}\left(\left(\tilde{W}^H(t_i) - \tilde{W}^H(t_{i-1})\right)\left(\tilde{W}^H(t_j) - \tilde{W}^H(t_{j-1})\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(|t_i - t_{j-1}|^{2H} + |t_j - t_{i-1}|^{2H} - 2|t_{j-1} - t_{i-1}|^{2H}\right), \quad i, j = 1, 2, \dots, L \end{aligned} \quad (4.4.58)$$

Si indica con  $\mathbf{Z}_K$  un vettore di  $L$  variabili casuali indipendenti estratte da una distribuzione normale standard, con  $k = 1, 2, 3, 4$ . Inoltre,  $\tilde{W}_1^H(t)$  e  $\tilde{W}_2^H(t)$  sono due moti Browniani frazionari indipendenti e,  $\mathbf{Q}_1$  e  $\mathbf{Q}_2$ , indicano i loro incrementi:

$$\mathbf{Q}_1(i) = \tilde{W}_1^H(t_i) - \tilde{W}_1^H(t_{i-1}), \quad \mathbf{Q}_2(i) = \tilde{W}_2^H(t_i) - \tilde{W}_2^H(t_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (4.4.59)$$

Queste equazioni possono essere ridotte in forma compatta utilizzando la struttura di varianza-covarianza dell'equazione (4.4.57) in questo modo:

$$\mathbf{Q}_1 = R\mathbf{Z}_1, \quad \mathbf{Q}_2 = R\mathbf{Z}_2 \quad (4.4.60)$$

dove  $R$  è la matrice di Cholesky della matrice  $A$ .

Ora, se si considerano i moti Browniani frazionari  $\tilde{W}_1^H(t)$  e  $\tilde{W}_2^H(t)$  dell'equazione (4.4.4), il cui coefficiente di correlazione è  $\rho_{1,2}^H$ , i loro incrementi saranno:

$$X_1(i) = \tilde{W}_1^H(t_i) - \tilde{W}_1^H(t_{i-1}), \quad X_2(i) = \tilde{W}_2^H(t_i) - \tilde{W}_2^H(t_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (4.4.61)$$

Dunque, i vettori degli incrementi  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$  si ottengono come segue:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{Q}_1, \quad \mathbf{X}_2 = \rho_{1,2}^H \mathbf{Q}_1 + \sqrt{1 - (\rho_{1,2}^H)^2} \mathbf{Q}_2, \quad (4.4.62)$$

Oltre al moto Browniano frazionario si deve anche considerare il moto Browniano puro, che è componente del moto Browniano frazionario misto.

infatti,  $W_1^B$  e  $W_2^B$  indicano due moti Browniani puri, con coefficiente di correlazione  $\rho_{1,2}^B$ .

I vettori degli incrementi,  $Y_1$  e  $Y_2$ , si ottengono come segue:

$$Y_1 = \sqrt{\Delta t} Z_3, \quad Y_2 = \sqrt{\Delta t} \rho_{1,2}^B Z_3 + \sqrt{1 - (\rho_{1,2}^B)^2} Z_4 \quad (4.4.63)$$

Ora si può procedere con la simulazione dei sentieri per il prezzo dei due sottostanti  $S_1$  e  $S_2$  in base alle seguenti formule:

$$S_1(t_i) = S_1(t_{i-1}) e^{\left(r - \frac{1}{2}(\sigma_1^B)^2\right)\Delta t - \frac{1}{2}(\sigma_1^H)^2(t_i^{2H} - t_{i-1}^{2H})\sigma_1^B Y_1(i) + \sigma_1^H X_1(i)}$$

$$S_2(t_i) = S_2(t_{i-1}) e^{\left(r - \frac{1}{2}(\sigma_2^B)^2\right)\Delta t - \frac{1}{2}(\sigma_2^H)^2(t_i^{2H} - t_{i-1}^{2H})\sigma_2^B Y_2(i) + \sigma_2^H X_2(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (4.4.64)$$

Il *payoff* dell'opzione, che si basa sull'equazione (4.4.1), si indica come:

$$\varphi(I_1(T), I_2(T), T) = \max(\min(G_1, G_2) - K, 0), \quad (4.4.65)$$

in cui  $G_1, G_2$ , sono date da:

$$G_k = e^{\frac{1}{T-t_0} \int_{t_0}^T \ln S_k(s) ds}, \quad k = 1, 2. \quad (4.4.66)$$

Infine, in base ai dettami della simulazione Monte Carlo, si simulano un numero pari a  $N_{MC}$  di sentieri per i sottostanti (con  $N_{MC} = 100.000$ ) e si calcola il prezzo simulato come media aritmetica degli  $N_{MC}$  *payoffs* scontati in base al fattore di attualizzazione  $e^{-rT}$ .

Considerare  $n = 2$  sottostanti permette di semplificare le formule che sono state introdotte precedentemente nel caso generale di  $n$  sottostanti. In particolare, le formule da (4.4.46) a (4.4.49) possono essere riscritte come segue:

$$X_1 = [d_1(x_1, K, \hat{\sigma}_1^2), -d_1'(x_1, x_2, \hat{\sigma}_{1,2}^2)], \quad (4.4.67)$$

$$X_2 = [d_1(x_2, K, \hat{\sigma}_2^2), -d_1'(x_2, x_1, \hat{\sigma}_{2,1}^2)], \quad (4.4.68)$$

$$X_3 = [d_2(x_1, K, \hat{\sigma}_1^2), d_2(x_2, K, \hat{\sigma}_2^2)], \quad (4.4.69)$$

e inoltre le matrici delle equazioni (4.4.53) e (4.4.54) si semplificano come segue:

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\hat{\rho}_{1,1,2} \\ -\hat{\rho}_{1,2,1} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4.70)$$

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\hat{\rho}_{2,1,2} \\ -\hat{\rho}_{2,2,1} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4.71)$$

$$\Sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & -\hat{\rho}_{1,2} \\ -\hat{\rho}_{2,1} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4.72)$$

dove, in base all'equazione (4.4.55), si ricava:

$$\hat{\rho}_{1,2,1} = \hat{\rho}_{1,1,2} = \frac{\hat{\sigma}_1 - \hat{\rho}_{1,2}\hat{\sigma}_2}{\hat{\sigma}_{1,2}} \quad (4.4.73)$$

$$\hat{\rho}_{2,2,1} = \hat{\rho}_{2,1,2} = \frac{\hat{\sigma}_2 - \hat{\rho}_{2,1}\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_{2,1}} \quad (4.4.74)$$

In Tabella 2, si riporta il confronto tra il prezzo di una *call* arcobaleno su medie geometriche, calcolato prima con la formula analitica e successivamente mediante simulazione Monte Carlo. Il prezzo viene calcolato utilizzando diverse configurazioni di parametri. I parametri riportati di seguito sono fissi:

$$t_0 = 0, n = 2, H = \frac{3}{4}, S_1 = 39, S_2 = 40.$$

Tabella 2. Prezzo di una *call* arcobaleno asiatica su medie geometriche

	$\sigma_1^H$	$\sigma_2^H$	$\sigma_1^B$	$\sigma_2^B$	K	$r = 0.01, T = 0.25$		$r = 0.03, T = 0.5$		$r = 0.05, T = 0.75$		$r = 0.07, T = 1$	
						C(S <sub>1</sub> , S <sub>2</sub> , 0, 0, 0)		C(S <sub>1</sub> , S <sub>2</sub> , 0, 0, 0)		C(S <sub>1</sub> , S <sub>2</sub> , 0, 0, 0)		C(S <sub>1</sub> , S <sub>2</sub> , 0, 0, 0)	
						Analytical	Simulated	Analytical	Simulated	Analytical	Simulated	Analytical	Simulated
$\rho_{ij}^H = -0.3$ $\rho_{ij}^B = 0.3$ $i, j = 1, 2, i \neq j$	0.2	0.3	0.2	0.3	35	2.87074	2.84712(0.02286)	2.61013	2.59433(0.02887)	2.59975	2.61541(0.03264)	2.69834	2.63747(0.03633)
	0.2	0.3	0.2	0.3	40	0.26274	0.26559(0.00785)	0.45131	0.47808(0.01304)	0.63262	0.61794(0.01635)	0.82612	0.85011(0.02117)
	0.2	0.3	0.2	0.3	45	0.00249	0.00329(7.55e-04)	0.02992	0.03416(0.00308)	0.08830	0.09825(0.00626)	0.17512	0.22252(0.01081)
	0.3	0.4	0.3	0.4	35	2.59237	2.54499(0.02792)	2.40531	2.47259(0.03474)	2.40052	2.52178(0.04006)	2.46101	2.50377(0.04590)
	0.3	0.4	0.3	0.4	40	0.42073	0.43589(0.01204)	0.64400	0.67918(0.01905)	0.82926	0.83261(0.02285)	1.00317	1.02401(0.02853)
	0.3	0.4	0.3	0.4	45	0.02505	0.03135(0.00303)	0.11464	0.14449(0.00874)	0.22798	0.26576(0.01283)	0.35345	0.42762(0.01808)
	0.2	0.4	0.2	0.4	35	2.66764	2.67936(0.02445)	2.43726	2.46863(0.02997)	2.42966	2.50580(0.03437)	2.51276	2.58043(0.03882)
	0.2	0.4	0.2	0.4	40	0.28083	0.29428(0.00845)	0.47831	0.48213(0.01322)	0.66119	0.68516(0.01803)	0.84896	0.91774(0.02338)
	0.2	0.4	0.2	0.4	45	0.00421	0.00398(9.08e-04)	0.04230	0.06119(0.00450)	0.11480	0.10761(0.00661)	0.21472	0.24649(0.01153)
	$\rho_{ij}^H = 0.5$ $\rho_{ij}^B = -0.5$ $i, j = 1, 2, i \neq j$	0.2	0.3	0.2	0.3	35	2.54712	2.58950(0.02082)	2.28597	2.32168(0.02627)	2.31255	2.40420(0.030765)	2.45806
0.2		0.3	0.2	0.3	40	0.14102	0.16726(0.00575)	0.30101	0.34269(0.01107)	0.47850	0.50340(0.01630)	0.68177	0.69865(0.01861)
0.2		0.3	0.2	0.3	45	5.24e-04	5.86e-04(2.24e-04)	0.01125	0.01678(0.00198)	0.05014	0.07473(0.00544)	0.12340	0.17815(0.00911)
0.3		0.4	0.3	0.4	35	2.14916	2.16775(0.02463)	1.98512	2.10427(0.03085)	2.03660	2.20096(0.03679)	2.16075	2.26925(0.04083)
0.3		0.4	0.3	0.4	40	0.28287	0.26270(0.00854)	0.48810	0.52680(0.01552)	0.67823	0.70374(0.02096)	0.86810	0.88954(0.02633)
0.3		0.4	0.3	0.4	45	0.00524	0.01043(0.00161)	0.05186	0.06817(0.00529)	0.13878	0.18232(0.01016)	0.25497	0.30035(0.01516)
0.2		0.4	0.2	0.4	35	2.32002	2.37759(0.02167)	2.09571	2.13613(0.02715)	2.12973	2.25763(0.03202)	2.26320	2.37283(0.03594)
0.2		0.4	0.2	0.4	40	0.15254	0.18540(0.00622)	0.32034	0.35962(0.01185)	0.50015	0.52859(0.01516)	0.69911	0.75881(0.02039)
0.2		0.4	0.2	0.4	45	6.91e-04	6.20e-04(2.41e-04)	0.01815	0.02331(0.00260)	0.06937	0.10086(0.00645)	0.15606	0.16748(0.00914)
$\rho_{ij}^H = 0.7$ $\rho_{ij}^B = -0.7$ $i, j = 1, 2, i \neq j$		0.2	0.3	0.2	0.3	35	2.47305	2.51432(0.01999)	2.20933	2.25340(0.02540)	2.24366	2.34624(0.03054)	2.49231
	0.2	0.3	0.2	0.3	40	0.11486	0.14288(0.00508)	0.26698	0.29969(0.00961)	0.44256	0.50505(0.01435)	0.64739	0.72404(0.01925)
	0.2	0.3	0.2	0.3	45	1.20e-04	2.30e-04(1.61e-04)	0.00819	0.01414(0.00176)	0.04242	0.06883(0.00514)	0.11193	0.15734(0.00900)
	0.3	0.4	0.3	0.4	35	2.04663	2.07767(0.02365)	1.88577	2.00011(0.02992)	1.94970	2.08593(0.03563)	2.08842	2.27320(0.04087)
	0.3	0.4	0.3	0.4	40	0.18610	0.23535(0.0079)	0.37377	0.46044(0.01418)	0.56428	0.67285(0.02052)	0.76395	0.88289(0.02562)
	0.3	0.4	0.3	0.4	45	0.00292	0.00608(0.00111)	0.04033	0.05750(0.00482)	0.12007	0.15085(0.00897)	0.23290	0.29373(0.01477)
	0.2	0.4	0.2	0.4	35	2.23934	2.28511(0.02138)	2.01429	2.10446(0.02660)	2.05750	2.15630(0.03083)	2.20263	2.32901(0.03561)
	0.2	0.4	0.2	0.4	40	0.12477	0.14328(0.00539)	0.28454	0.32655(0.01051)	0.46264	0.50539(0.01510)	0.66351	0.73033(0.02015)
	0.2	0.4	0.2	0.4	45	3.46e-04	0.00132(4.08e-04)	0.01386	0.01738(0.00190)	0.05990	0.08752(0.00590)	0.14290	0.16985(0.00917)

Fonte: D. Ahmadian, L. V. (2020), op.cit., p.9

Come si può osservare dalla tabella, la differenza tra il prezzo analitico e quello simulato è molto contenuta e inferiore di cinque volte alla deviazione standard. Inoltre, considerare l'errore standard<sup>44</sup> della simulazione (il valore riportato fra parentesi), porta a concludere per l'esattezza della formula proposta, avendo quest'ultimo un valore molto contenuto.

Ad ulteriore riprova della valenza della formula analitica proposta gli autori danno prova del fatto che le formule da (4.4.45) a (4.4.56) soddisfano l'equazione alle derivate parziali (4.4.6) quando  $n = 2$ . Per fare ciò le derivate dell'equazione (4.4.6) vengono discretizzate applicando il metodo delle differenze finite<sup>45</sup> e i risultati sono riportati di seguito:

$$\frac{\partial C(S_1, S_2, I_1, I_2, t)}{\partial t} \approx \frac{C(S_1, S_2, I_1, I_2, t + \Delta t) - C(S_1, S_2, I_1, I_2, t)}{\Delta t}, \quad (4.4.75)$$

$$\frac{\partial C(S_1, S_2, I_1, I_2, t)}{\partial S_1} \approx \frac{C(S_1 + \Delta S, S_2, I_1, I_2, t) - C(S_1 - \Delta S, S_2, I_1, I_2, t)}{2\Delta S}, \quad (4.4.76)$$

$$\frac{\partial C(S_1, S_2, I_1, I_2, t)}{\partial S_2} \approx \frac{C(S_1, S_2 + \Delta S, I_1, I_2, t) - C(S_1, S_2 - \Delta S, I_1, I_2, t)}{2\Delta S}, \quad (4.4.77)$$

$$\frac{\partial C(S_1, S_2, I_1, I_2, t)}{\partial I_1} \approx \frac{C(S_1, S_2, I_1 + \Delta I, I_2, t) - C(S_1, S_2, I_1 - \Delta I, I_2, t)}{2\Delta I}, \quad (4.4.78)$$

$$\frac{\partial C(S_1, S_2, I_1, I_2, t)}{\partial I_2} \approx \frac{C(S_1, S_2, I_1, I_2 + \Delta I, t) - C(S_1, S_2, I_1, I_2 - \Delta I, t)}{2\Delta I}, \quad (4.4.79)$$

$$\frac{\partial^2 C(S_1, S_2, I_1, I_2, t)}{\partial S_1^2} \approx \frac{C(S_1 + \Delta S, S_2, I_1, I_2, t) - 2C(S_1, S_2, I_1, I_2, t) + C(S_1 - \Delta S, S_2, I_1, I_2, t)}{(\Delta S)^2}, \quad (4.4.80)$$

$$\frac{\partial^2 C(S_1, S_2, I_1, I_2, t)}{\partial S_2^2} \approx \frac{C(S_1, S_2 + \Delta S, I_1, I_2, t) - 2C(S_1, S_2, I_1, I_2, t) + C(S_1, S_2 - \Delta S, I_1, I_2, t)}{(\Delta S)^2}, \quad (4.4.81)$$

$$\frac{\partial^2 C(S_1, S_2, I_1, I_2, t)}{\partial S_1 \partial S_2} \approx \frac{C(S_1 + \Delta S, S_2 + \Delta S, I_1, I_2, t) - C(S_1 + \Delta S, S_2 - \Delta S, I_1, I_2, t) - C(S_1 - \Delta S, S_2 + \Delta S, I_1, I_2, t) + C(S_1 - \Delta S, S_2 - \Delta S, I_1, I_2, t)}{4(\Delta S)^2}, \quad (4.4.82)$$

<sup>44</sup> In statistica l'errore standard è una stima della variabilità di uno stimatore, dunque una misura della sua imprecisione. Si calcola come rapporto tra deviazione standard e radice quadrata della numerosità campionaria. Più piccolo è l'errore standard minore sarà l'imprecisione.

<sup>45</sup> Il metodo delle differenze finite consente di valutare derivati risolvendo l'equazione differenziale che ne descrive il comportamento, convertendola in equazioni alle differenze che vengono risolte iterativamente.

dove:  $\Delta t, \Delta S, \Delta I = \frac{1}{m}$ , con  $m$  che viene progressivamente incrementato affinché accresca l'accuratezza dell'approssimazione alle differenze finite.

Nelle equazioni da (4.4.75) a (4.4.82) vengono calcolate tutte le funzioni  $C(\dots, \dots)$ , per mezzo delle formule da (4.4.45) a (4.4.56), permettendo così di valutare la parte sinistra dell'equazione (4.4.6) denominata *LHSPDE*, ossia *left hand side partial differential equation*.

Calcolare la *LHSPDE* permette di dimostrare ulteriormente l'accuratezza delle formule analitiche nel soddisfare l'equazione alle derivate parziali. Ed in particolare, si vede come, scegliendo la combinazione di parametri per i quali il prezzo simulato e quello analitico si discostano maggiormente (2.27320 il primo e 2.08842 il secondo), ossia quando:

$$T = 1, r = 0.07, \sigma_1^B = 0.3, \sigma_2^B = 0.4, \sigma_1^H = 0.3, \sigma_2^H = 0.4, \rho_{1,2}^H = 0.7, \rho_{1,2}^B = 0.7,$$

$$S_1 = 39, S_2 = 40, K = 40, H = 3/4, t = 0,$$

man mano che il parametro di discretizzazione  $m$  cresce (si veda Tabella 3), la *LHSPDE* diminuisca tendendo velocemente a zero, com'era ragionevole attendersi.

Tabella 3: *LHSPDE* dell'equazione (4.4.6) quando il prezzo è uguale a 2.08842.

$m$	50	100	150	200
<i>LHSPDE</i>	$9.30 \times 10^{-3}$	$6.40 \times 10^{-3}$	$4.28 \times 10^{-3}$	$7.70 \times 10^{-4}$

Fonte: D. Ahmadian, L. V. (2020), op.cit., p.10



## CAPITOLO 5

### ALGORITMO IN PHYTON PER IL PRICING DI OPZIONI ARCOBALENO ASIATICHE: CONFRONTO TRA MOTO BROWNIANO GEOMETRICO E FRAZIONARIO

Al fine di corroborare i concetti teorici forniti nei capitoli precedenti, in quest'ultimo capitolo l'attenzione si sposterà sull'applicazione nel concreto delle formule precedentemente spiegate.

In particolare, si calcoleranno dapprima i prezzi di un'opzione call asiatica scritta sul minimo di due medie aritmetiche e geometriche, confrontando i risultati ottenuti con quelli ottenuti dagli autori *Xueping Wu e Jin E. Zhang* nel loro paper<sup>46</sup> del 1999.

I prezzi opzionari sono stati calcolati mediante simulazione Monte Carlo utilizzando un numero di simulazioni pari a  $N = 10.000$  al fine di ottenere un adeguato livello di accuratezza del risultato come dimostrato dall'intervallo di confidenza al 95% del prezzo simulato, che si calcola nel seguente modo:

$$\mu - \frac{1.96 * \omega}{\sqrt{N}} < f < \mu + \frac{1.96 * \omega}{\sqrt{N}}$$

dove:  $\mu$  e  $\omega$  indicano, rispettivamente, la media e la deviazione standard dei payoff attualizzati ottenuti dalle  $N$  simulazioni<sup>47</sup>.

È facile notare che l'incertezza sul valore dell'opzione è inversamente proporzionale alla radice quadrata del numero  $N$  di simulazioni. Ciò significa che per duplicare la precisione della stima occorre quadruplicare il numero di simulazioni.

Si fornirà prima il codice realizzato in Python adeguatamente commentato a fini espositivi e si commenteranno i risultati ottenuti confrontandoli con quelli del paper sopra citato.

---

<sup>46</sup> Xueping W., Jin E. Z. (1999), *Options on the Minimum or the Maximum of Two Average Prices*, Review of Derivatives Research, 3, pp. 183–204

<sup>47</sup> Hull, J. C. (2017), *op.cit.*, p. 495

## 5.1 PRICING DELL' OPZIONE ARCOBALENO ASIATICA SCRITTA SUL MINIMO DI DUE MEDIE ARITMETICHE E GEOMETRICHE (GBM)

Si fornisce in prima istanza il codice realizzato in Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math
from scipy.stats.mstats import gmean
from scipy.stats import sem

v=[0.2,0.3] # vettore delle volatilità
npassi = 88 # nr step temporali
N=10000 # numero simulazioni
T=1/3 # tempo a scadenza dell'opzione
dt = T/npassi
stock_price_sim_mat1 = np.full((npassi+1,N), 40.0) # vettore dei prezzi
del 1° titolo
stock_price_sim_mat2 = np.full((npassi+1,N), 40.0) # vettore dei prezzi
del 2° titolo
rho=0.5 # coefficiente correlazione
K=35.0 # strike price
r = 0.03 # tasso di rendimento

medie_eps=[0,0]# media delle epsilon
corrmat_eps=([1,rho],[rho,1])# matrice di correlazione
rng = np.random.default_rng(1234)
ra = rng.multivariate_normal(medie_eps,corrmat_eps,size=(npassi+1,N)) #
generazioni normale multivariata
exp1=(r - v[0]**2/2) * dt
exp2=(r - v[1]**2/2) * dt

for nsim in range (N):

    for t in range(npassi):
        # generazione sentieri prezzo del primo e del secondo titolo
        stock_price_sim_mat1[t+1,nsim]= stock_price_sim_mat1[t,nsim]*
np.exp(exp1 + v[0] * math.sqrt(dt) * ra[t,nsim,0])
        stock_price_sim_mat2[t+1,nsim]= stock_price_sim_mat2[t,nsim]
*np.exp(exp2 + v[1] * math.sqrt(dt)*ra[t,nsim,1])

arithmetic_sim1=np.mean(stock_price_sim_mat1,axis=0)#vettore         medie
aritmetiche titolo 1
arithmetic_sim2=np.mean(stock_price_sim_mat2,axis=0)#         vettore         medie
aritmetiche titolo 2
geomean_sim1=gmean(stock_price_sim_mat1,axis=0)         #         vettore         medie
geometriche titolo 1
geomean_sim2=gmean(stock_price_sim_mat2,axis=0)#         vettore         medie
geometriche titolo 2
arithmetic_mat=(arithmetic_sim1,arithmetic_sim2)# matrice medie aritmetiche
geomean_mat=(geomean_sim1,geomean_sim2)# matrice medie geometriche
min_stockprice1_2_sim=np.min(arithmetic_mat,axis=0)# vettore minimi medie
aritmetiche
ming_stockprice1_2_sim=np.min(geomean_mat,axis=0)# vettore minimi medie
geometriche
```



```

array_K=np.full(N,K)# vettore di stock price
payoff_sim=min_stockpricel_2_sim - array_K# calcolo payoff opzione su
medie aritmetiche
payoff_sim_mg=ming_stockpricel_2_sim - array_K# calcolo payoff opzione
su medie geometriche

for nsim in range (N):
    payoff_sim[nsim]=max(payoff_sim[nsim],0)
    payoff_sim_mg[nsim]=max(payoff_sim_mg[nsim],0)

std_err_IC_ma=sem(payoff_sim)# deviazione standard payoff opzione media
aritmetica
std_err_IC_mg=sem(payoff_sim_mg)# deviazione standard payoff opzione
media geometrica
prezzo_opzione_sim=np.mean(payoff_sim) * np.exp(-r*T)# prezzo opzione
media aritmetica
prezzo_opzione_sim_mg=np.mean(payoff_sim_mg) * np.exp(-r*T)# prezzo
opzione media geometrica

# calcolo intervalli di confidenza al 95% simulazione
lower_bound_ma_IC=prezzo_opzione_sim-(1.96*std_err_IC_ma/math.sqrt(N))
upper_bound_ma_IC=prezzo_opzione_sim+(1.96*std_err_IC_ma/math.sqrt(N))
lower_bound_mg_IC=prezzo_opzione_sim_mg-
(1.96*std_err_IC_mg/math.sqrt(N))
upper_bound_mg_IC=prezzo_opzione_sim_mg+(1.96*std_err_IC_mg/math.sqrt(
N))

print("I dati di input sono: \nsigma_1 = ", v[0], "\nsigma_2 = ", v[1],
"\nS1,S2 = ", 40, "\nrho = ", rho, "\nK = ", K, "\nr = ", r, "\n")
print("il prezzo dell'opzione scritta su medie aritmetiche
è:",prezzo_opzione_sim)
print("la deviazione standard della simulazione é:", std_err_IC_ma)
print("il limite inferiore dell'intervallo di confidenza della
simulazione è:",lower_bound_ma_IC)
print("il limite superiore dell'intervallo di confidenza della
simulazione:",upper_bound_ma_IC)
print("\n")
print("il prezzo dell'opzione scritta su medie geometriche
è:",prezzo_opzione_sim_mg)
print("la deviazione standard della simulazione é:", std_err_IC_mg)
print("il limite inferiore dell'intervallo di confidenza della
simulazione è:",lower_bound_mg_IC)
print("il limite superiore dell'intervallo di confidenza della
simulazione:",upper_bound_mg_IC)

#comandi per print a video dei sentieri dei prezzi dei titoli
fig3, (ax3a,ax3b) = plt.subplots(nrows=2, ncols=1)
ax3a.plot(stock_price_sim_mat1)
ax3a.set_xlabel('Time increments 1')
ax3a.set_ylabel('Stock price 1')
ax3a.set_title('Price path 1')
ax3b.plot(stock_price_sim_mat2)
ax3b.set_xlabel('Time increments 2')
ax3b.set_ylabel('Stock price 2')
ax3b.set_title('Price path 2')
fig3.tight_layout()

```

Si forniscono ora i risultati ottenuti al variare dei parametri di input, in particolare tenendo fissi rho (pari a 0.5), volatilità ( $\sigma_1 = 0.2$  e  $\sigma_2 = 0.3$ ) e tasso di rendimento (pari a 0.03) e facendo variare lo strike price tra i valori 35,40 e 45, si ottiene:

Tabella 4: Risultati call arcobaleno asiatica sul minimo di due medie aritmetiche e geometriche

	Prezzo			
	Call sul minimo di due medie aritmetiche	Intervallo di confidenza al 95%	Call sul minimo di due medie geometriche	Intervallo di confidenza al 95%
<b>K = 35</b>	3,88766 (0,02716)	(3,88713 ; 3,88820)	3,83628 (0,02708)	(3,83575 ; 3,83681)
<b>K = 40</b>	0,66617 (0,01325)	(0,66591 ; 0,66643)	0,64717 (0,01295)	(0,64691 ; 0,64742)
<b>K = 45</b>	0,02207 (0,00231)	(0,02202 ; 0,02212)	0,01946 (0,00213)	(0,01941 ; 0,01950)

Fonte: Elaborazione propria

È stato fornito l'intervallo di confidenza al 95% del prezzo simulato. Il numero di simulazioni pari a 10.000 riduce l'errore standard della stima e di conseguenza l'incertezza nel prezzo del derivato oggetto di studio.

Tabella 5: Risultati call arcobaleno asiatica sul minimo di due medie aritmetiche e geometriche

Panel A: Valuation at $r = 0.03$							
$\sigma_1$	$\sigma_2$	$K$	$AV$	$Std(AV)$	$AV^*$	$Std(AV^*)$	$GV^*$
$\rho = -0.3$							
0.2	0.3	35	3.12351	0.02134	3.14199	0.00050	3.09182
		40	0.25436	0.00691	0.26012	0.00026	0.25054
		45	0.00081	0.00035	0.00083	0.00004	0.00070
0.2	0.4	35	2.90434	0.02295	2.89729	0.00073	2.83643
		40	0.26721	0.00737	0.27617	0.00038	0.26432
		45	0.00183	0.00049	0.00170	0.00006	0.00145
0.3	0.4	35	2.67154	0.02548	2.64503	0.00079	2.57226
		40	0.33972	0.00968	0.34043	0.00051	0.32273
		45	0.01085	0.00161	0.00991	0.00023	0.00825
$\rho = 0.1$							
0.2	0.3	35	3.47097	0.02397	3.47741	0.00049	3.42712
		40	0.45019	0.01018	0.44149	0.00035	0.42697
		45	0.00540	0.00091	0.00667	0.00010	0.00591
0.2	0.4	35	3.29790	0.02625	3.25902	0.00074	3.19653
		40	0.46524	0.01078	0.46961	0.00043	0.45283
		45	0.01054	0.00147	0.01077	0.00016	0.00953
0.3	0.4	35	3.15056	0.03010	3.11394	0.00083	3.03727
		40	0.60500	0.01432	0.59423	0.00066	0.56737
		45	0.04288	0.00345	0.04425	0.00040	0.03869
$\rho = 0.5$							
0.2	0.3	35	3.88484	0.02696	3.88982	0.00051	3.83803
		40	0.66847	0.01303	0.66665	0.00041	0.64746
		45	0.02294	0.00235	0.02283	0.00022	0.02033
0.2	0.4	35	3.67025	0.02919	3.68789	0.00077	3.62390
		40	0.71828	0.01434	0.70582	0.00052	0.68324
		45	0.03092	0.00256	0.03101	0.00029	0.02751
0.3	0.4	35	3.70914	0.03388	3.68633	0.00093	3.60252
		40	0.91422	0.01897	0.91706	0.00082	0.87999
		45	0.11302	0.00655	0.11377	0.00063	0.10176

Fonte: Xueping W., Jin E. Z. (1999), op.cit., p. 190

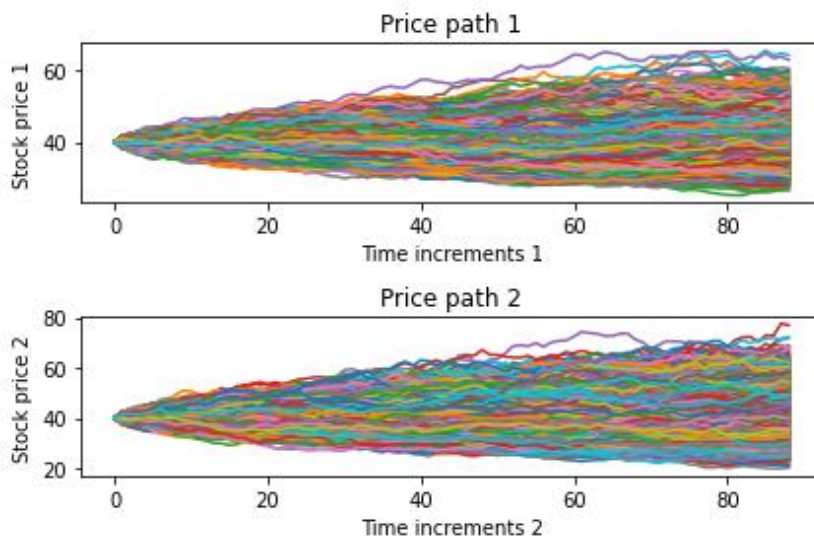
Come si può notare i prezzi ottenuti sono sostanzialmente quelli ottenuti nel paper citato, i cui risultati sono riassunti in tabella 5. Con  $K=35$  il prezzo simulato vale 3.88766 USD contro i 3.88484 USD del paper per l'opzione sulle medie aritmetiche, vale, invece, 3.83628 USD contro i 3.83803 USD del paper per l'opzione sulle medie geometriche.

Con  $K=40$  il prezzo simulato vale 0.66617 USD contro i 0.66847 USD del paper per l'opzione sulle medie aritmetiche, vale, invece, 0.64717 USD contro i 0.64746 del paper per l'opzione sulle medie geometriche.

Con  $K=45$  il prezzo simulato vale 0.02207 USD contro i 0.02294 USD del paper per l'opzione sulle medie aritmetiche, vale, invece, 0.01946 USD contro i 0.02033 del paper per l'opzione sulle medie geometriche.

Si riporta anche il grafico con i sentieri simulati del prezzo dei due titoli.

Grafico 1 da codice Python



A ulteriore supporto della correttezza del codice sviluppato si forniscono i risultati facendo variare più di una variabile di input. Nello specifico il coefficiente di correlazione  $\rho$ , la volatilità dei titoli, e il tasso di rendimento, a parità di strike price.

Si riporta una tabella riepilogativa dei risultati ottenuti:

Tabella 6:

Risultati call arcobaleno asiatica sul minimo di due medie aritmetiche e geometriche al variare di più input

Prezzo ( con $\sigma_1 = 0.2$ , $\sigma_2 = 0.3$ , $\rho = -0.3$ , $r = 0.03$ )				
	Call sul minimo di due medie aritmetiche	Intervallo di confidenza al 95%	Call sul minimo di due medie geometriche	Intervallo di confidenza al 95%
<b>K = 40</b>	0,25780 (0,00711)	(0,25766 ; 0,25794)	0,24807 (0,00693)	(0,24793 ; 0,24821)

Prezzo ( con $\sigma_1 = 0.2$ , $\sigma_2 = 0.4$ , $\rho = 0.1$ , $r = 0.03$ )				
	Call sul minimo di due medie aritmetiche	Intervallo di confidenza al 95%	Call sul minimo di due medie geometriche	Intervallo di confidenza al 95%
<b>K = 40</b>	0,46961 (0,01095)	(0,46940 ; 0,46982)	0,45216 (0,01067)	(0,45195 ; 0,45237)

Prezzo ( con $\sigma_1 = 0.2$ , $\sigma_2 = 0.4$ , $\rho = 0.1$ , $r = 0.07$ )				
	Call sul minimo di due medie aritmetiche	Intervallo di confidenza al 95%	Call sul minimo di due medie geometriche	Intervallo di confidenza al 95%
<b>K = 40</b>	0,54149 (0,01190)	(0,54126 ; 0,54173)	0,52159 (0,01160)	(0,52136 ; 0,52181)

Fonte: Elaborazione propria

Dal confronto con la tabella 5 e dal suo continuo, riportato di seguito, si può vedere come, anche in questo caso, i prezzi siano sostanzialmente uguali a quelli del paper.

Continuo Tabella 5:

Risultati call arcobaleno asiatica scritta sul minimo di due medie aritmetiche e geometriche

Panel C: Valuation at $r = 0.07$							
$\sigma_1$	$\sigma_2$	$K$	$AV$	$Std(AV)$	$AV^*$	$Std(AV^*)$	$GV^*$
$\rho = -0.3$							
0.2	0.3	35	3.30846	0.02152	3.32477	0.00048	3.27525
		40	0.29849	0.00746	0.31696	0.00028	0.30598
		45	0.00117	0.00036	0.00128	0.00004	0.00110
0.2	0.4	35	3.06885	0.02330	3.06476	0.00074	3.00382
		40	0.33594	0.00839	0.33108	0.00039	0.31713
		45	0.00224	0.00055	0.00256	0.00010	0.00215
0.3	0.4	35	2.81670	0.02561	2.80055	0.00079	2.72628
		40	0.40477	0.01060	0.39329	0.00056	0.37174
		45	0.01062	0.00146	0.01236	0.00019	0.01070
$\rho = 0.1$							
0.2	0.3	35	3.64576	0.02415	3.65972	0.00050	3.60883
		40	0.50545	0.01080	0.51358	0.00034	0.49802
		45	0.00683	0.00098	0.00899	0.00011	0.00812
		35	3.46978	0.02651	3.42370	0.00074	3.36237
0.2	0.4	40	0.54945	0.01195	0.54069	0.00047	0.52116
		45	0.01424	0.00161	0.01438	0.00017	0.01264
		35	3.28295	0.03022	3.26986	0.00086	3.19141
0.3	0.4	40	0.65495	0.01510	0.66019	0.00068	0.63159
		45	0.04716	0.00359	0.05204	0.00039	0.04643
$\rho = 0.5$							
0.2	0.3	35	4.07721	0.02755	4.07119	0.00054	4.01835
		40	0.73767	0.01376	0.75547	0.00041	0.73460
		45	0.02827	0.00238	0.02936	0.00024	0.02615
0.2	0.4	35	3.88041	0.02954	3.85420	0.00076	3.78855
		40	0.79688	0.01494	0.79283	0.00053	0.76756
		45	0.04059	0.00312	0.03921	0.00030	0.03478
0.3	0.4	35	3.84091	0.03468	3.84267	0.00093	3.75815
		40	0.97967	0.01959	0.99959	0.00083	0.95972
		45	0.12300	0.00665	0.13073	0.00066	0.11743

Fonte: Xueping W., Jin E. Z. (1999), op.cit., p. 192

## 5.2 CODICE PHYTON OPZIONE ARCOBALENO ASIATICA SCRITTA SUL MINIMO DI DUE MEDIE ARITMETICHE E GEOMETRICHE (FBM)

Ora, riprendendo quanto spiegato nel capitolo 3.2, in cui è stato introdotto il moto Browniano frazionario, e, volendo applicare in pratica i concetti di cui al paper citato nel capitolo 4.4, per verificare la correttezza dei prezzi simulati in Python, si fornirà inizialmente il codice realizzato e si confronteranno, successivamente, i risultati ottenuti con quelli del paper.

Considerando una caratteristica sostanziale dei prezzi azionari, ossia la dipendenza a lungo termine da variazioni passate degli stessi, è opportuno riprendere il concetto di indice di Hurst, che si indicherà con la lettera  $H$ , in quanto costituisce la differenza fondamentale tra sottostanti il cui prezzo viene modellato tramite il moto Browniano geometrico e quelli invece modellati col moto Browniano frazionario.

In particolare, il suddetto indice, come già detto al paragrafo 3.2, misura il grado di dipendenza nel tempo delle variazioni nel prezzo dei sottostanti. Dunque, sapendo che con  $H = \frac{1}{2}$  il moto Browniano frazionario si riduce a Browniano geometrico, denotando le variazioni dei prezzi come una serie di eventi indipendenti, si potranno confrontare i prezzi ottenuti con quelli del paragrafo precedente.

Si realizzerà anche un'analisi di sensitività del prezzo dell'opzione al variare dell'indice di Hurst, come fatto nel paper citato, per analizzare come varia il prezzo del derivato, al variare di questo importante parametro di input del modello.

```
import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats.mstats import gmean
from scipy.stats import sem

v=[0.2,0.3]# vettore delle volatilità
npassi = 88# nr step temporali
N=10000# nr simulazioni
T=1/3# tempo alla scadenza dell'opzione
dt = T/npassi
```

```

stock_price_sim_mat1 = np.full((npassi+1,N), 40.0)# vettore dei prezzi
simulati del 1° titolo
stock_price_sim_mat2 = np.full((npassi+1,N), 40.0)# vettore dei prezzi
simulati del 2° titolo
rho=0.5 # coefficiente di correlazione rho
K=44.5 # strike price
r = 0.05 # tasso rendimento titoli
H = 0.4# indice di Hurst

medie_eps=[0,0]# media delle epsilon
corrmat_eps=([1,rho],[rho,1])# matrice di correlazione
rng = np.random.default_rng(1234)
ra = rng.multivariate_normal(medie_eps,corrmat_eps,size=(npassi+1,N))#
generazioni da una normale multivariata

termine_in_H = dt ** H
termine_in_H2 = dt ** (2*H)
exp1=(r * termine_in_H2 - v[0]**2/2*termine_in_H2)
exp2=(r * termine_in_H2 - v[1]**2/2*termine_in_H2)
for nsim in range (N):

    for t in range(npassi):
        # generazione sentieri prezzo del primo e del secondo titolo
        stock_price_sim_mat1[t+1,nsim]= stock_price_sim_mat1[t,nsim]*
np.exp(exp1 + v[0] * termine_in_H * ra[t,nsim,0])
        stock_price_sim_mat2[t+1,nsim]= stock_price_sim_mat2[t,nsim]
* np.exp(exp2 + v[1] * termine_in_H * ra[t,nsim,1])

geomean_sim1=gmean(stock_price_sim_mat1,axis=0)# vettore medie
geometriche titolo 1
geomean_sim2=gmean(stock_price_sim_mat2,axis=0)# vettore medie
geometriche titolo 2
geomean_mat=(geomean_sim1,geomean_sim2)# matrice con le medie dei due
titoli
min_stockpricel_2_sim=np.min(geomean_mat,axis=0)# vettore dei minimi
delle medie geometriche
array_K=np.full(N,K)# vettore di strike price
payoff_sim=min_stockpricel_2_sim - array_K# calcolo payoff opzione

for nsim in range (N):
    payoff_sim[nsim]=max(payoff_sim[nsim],0)# calcolo del massimo tra
il payoff e 0
prezzo_opzione_sim=np.mean(payoff_sim) * np.exp(-r*T)# calcolo del
prezzo opzionario
std_dev_IC=sem(payoff_sim)# deviazione standard payoff opzione

# calcolo intervallo di confidenza al 95%
lower_bound_IC=prezzo_opzione_sim-(1.96*std_dev_IC/math.sqrt(N))
upper_bound_IC=prezzo_opzione_sim+(1.96*std_dev_IC/math.sqrt(N))

print("I dati di input sono: \nsigma_1 = ", v[0], "\nsigma_2 = ",
v[1], "\nS1,S2 = ", 40, "\nrho = ",rho, "\nK = ", K, "\nr = ", r, "\nH
=",H,"\n")
print("il prezzo dell'opzione scritta su medie geometriche
è:",prezzo_opzione_sim)
print("la deviazione standard della simulazione é:", std_dev_IC)

```

```

print("il limite inferiore dell'intervallo di confidenza della
simulazione è:", lower_bound_IC)
print("il limite superiore dell'intervallo di confidenza della
simulazione:", upper_bound_IC)

# comandi per print a video dei sentieri dei prezzi dei titoli
fig3, (ax3a, ax3b) = plt.subplots(nrows=2, ncols=1)
ax3a.plot(stock_price_sim_mat1)
ax3a.set_xlabel('Time increments 1')
ax3a.set_ylabel('Stock price 1')
ax3a.set_title('Price path 1')
ax3b.plot(stock_price_sim_mat2)
ax3b.set_xlabel('Time increments 2')
ax3b.set_ylabel('Stock price 2')
ax3b.set_title('Price path 2')
fig3.tight_layout()

```

Per dar prova del fatto che con  $H = 1/2$  il moto Browniano frazionario si riduce al moto Browniano standard si procederà a visualizzare i prezzi ottenuti confrontandoli con i prezzi ottenuti per una opzione call scritta sul minimo di due medie geometriche di cui al paragrafo 5.1, a parità di parametri di input.

Tabella 7: Risultati call arcobaleno asiatica sul minimo di due medie geometriche

	Prezzo	
	<i>Call sul minimo di due medie geometriche</i>	<i>Intervallo di confidenza al 95%</i>
<b>K = 35</b>	3,83628 (0,02708)	(3,83575 ; 3,83681)
<b>K = 40</b>	0,64717 (0,01296)	(0,64691 ; 0,64742)
<b>K = 45</b>	0,01946 (0,00213)	(0,01941 ; 0,01950)

Fonte: Elaborazione propria

Come volevasi dimostrare i risultati sono uguali a quelli ottenuti nel capitolo precedente.

Si procede ora al confronto dei prezzi ottenuti con quelli del paper, riportando da quest'ultimo una tabella riepilogativa (tabella 8).

Tabella 8: Prezzi di una call arcobaleno asiatica scritta su medie geometriche

$\sigma_1$	$\sigma_2$	K	r = 0.03		r = 0.05		r = 0.07	
			Analytical value	Simulated value	Analytical value	Simulated value	Analytical value	Simulated value
$\rho = -0.3$								
0.2	0.3	35	3.0918	3.1360(0.0211)	3.1836	3.1745(0.0212)	3.2753	3.2575(0.0215)
0.2	0.3	40	0.2505	0.2533(0.0068)	0.2773	0.2717(0.0070)	0.3060	0.3005(0.0074)
0.2	0.3	45	0.0007	0.0006(0.0007)	0.0009	0.0008(0.0001)	0.0011	0.0008(0.0002)
0.2	0.4	35	2.8364	2.8692(0.0229)	2.9201	2.9072(0.0232)	3.0038	2.9947(0.0231)
0.2	0.4	40	0.2643	0.2614(0.0072)	0.2899	0.2899(0.0075)	0.3171	0.3309(0.0080)
0.2	0.4	45	0.0015	0.0012(0.0004)	0.0018	0.0012(0.0004)	0.0022	0.0020(0.0004)
0.3	0.4	35	2.5723	2.5687(0.0251)	2.6491	2.6475(0.0255)	2.7263	2.7420(0.0253)
0.3	0.4	40	0.3227	0.3343(0.0091)	0.3466	0.3613(0.0095)	0.3717	0.3804(0.0097)
0.3	0.4	45	0.0083	0.0077(0.0011)	0.0094	0.0081(0.0011)	0.0107	0.0120(0.0013)
$\rho = 0.1$								
0.2	0.3	35	3.4271	3.4159(0.0238)	3.5181	3.5053(0.0241)	3.6088	3.6429(0.0243)
0.2	0.3	40	0.4270	0.4172(0.0097)	0.4616	0.4513(0.0101)	0.4980	0.5072(0.0107)
0.2	0.3	45	0.0059	0.0060(0.0007)	0.0069	0.0075(0.0009)	0.0081	0.0076(0.0011)
0.2	0.4	35	3.1965	3.2009(0.0264)	3.2795	3.2810(0.0262)	3.3624	3.3496(0.0262)
0.2	0.4	40	0.4528	0.4729(0.0107)	0.4862	0.4644(0.0106)	0.5212	0.5241(0.0111)
0.2	0.4	45	0.0095	0.0095(0.0012)	0.0110	0.0104(0.0013)	0.0126	0.0123(0.0015)
0.3	0.4	35	3.0373	3.0615(0.0290)	3.1142	3.1020(0.0294)	3.1914	3.1944(0.0299)
0.3	0.4	40	0.5674	0.5661(0.0135)	0.5989	0.5677(0.0141)	0.6316	0.6280(0.0138)
0.3	0.4	45	0.0387	0.0394(0.0032)	0.0424	0.0437(0.0033)	0.0464	0.0464(0.0038)
$\rho = 0.5$								
0.2	0.3	35	3.8380	3.8317(0.0268)	3.9283	3.8941(0.0271)	4.0184	4.0236(0.0269)
0.2	0.3	40	0.6475	0.6403(0.0128)	0.6902	0.6970(0.0131)	0.7346	0.7108(0.0135)
0.2	0.3	45	0.0203	0.0183(0.0017)	0.0231	0.0218(0.0020)	0.0262	0.0233(0.0022)
0.2	0.4	35	3.6239	3.6533(0.0290)	3.7063	3.7020(0.0290)	3.7886	3.8102(0.0293)
0.2	0.4	40	0.6832	0.6765(0.0133)	0.7247	0.7377(0.0137)	0.7676	0.7593(0.0142)
0.2	0.4	45	0.0275	0.0248(0.0025)	0.0310	0.0284(0.0024)	0.0348	0.0379(0.0029)
0.3	0.4	35	3.6025	3.5933(0.0336)	3.6803	3.7077(0.0335)	3.7582	3.7786(0.0337)
0.3	0.4	40	0.8800	0.8887(0.0185)	0.9193	0.9069(0.0189)	0.9597	0.9345(0.0194)
0.3	0.4	45	0.1018	0.0952(0.0060)	0.1094	0.0952(0.0059)	0.1174	0.1159(0.0065)

Fonte: Lu Wang, R. Z. (2017), op. cit., p. 14

Con K = 35 il prezzo calcolato in Phyton, pari a 3.83628 USD, è sostanzialmente uguale ai 3.8317 USD del paper. Con K = 40 il prezzo calcolato in Phyton, pari a 0.64717 USD, è sostanzialmente uguale ai 0.6403 del paper. Infine, con K = 45 il prezzo calcolato in Phyton, pari a 0.1946 USD non si discosta molto dai 0.183 USD del paper (prezzi riquadrati in rosso in tabella 5)

Facendo ora variare più di un parametro di input alla volta, si darà ulteriore riprova della correttezza dei risultati ottenuti. In particolare, partendo da una configurazione in cui:

K = 45,  $\rho = 0.5$ ,  $\sigma_1 = 0.2$ ,  $\sigma_2 = 0.3$ , r = 0.03, Il prezzo è pari a 0.1946 USD, come riportato in tabella 7.

Si fa variare, K che passa da 45 a 40,  $\rho$  che passa da 0.5 a 0.1 e r che passa da 0.3 a 0.7 ottenendo:



Tabella 9: Risultati call arcobaleno asiatica sul minimo di due medie geometriche al variare di più input

<b>Prezzo (con <math>\rho = 0.1</math>, <math>r = 0.07</math>, <math>\sigma_1 = 0.2</math>, <math>\sigma_2 = 0.3</math>)</b>		
	<i>Call sul minimo di due medie geometriche</i>	<i>Intervallo di confidenza al 95%</i>
<b>K = 40</b>	0,49756 (0,01080)	(0,49735 ; 0,49777)

Fonte: Elaborazione propria

Il prezzo calcolato in Python pari a 0.49756 USD non si discosta molto dai 0.5072 USD del paper (prezzo riquadrato in verde in tabella 5).

Si procederà ora, come anticipato in precedenza, a verificare l'impatto di una variazione dell'indice di Hurst sul prezzo dell'opzione. In particolare, ci si aspetta, in base a quanto già enunciato teoricamente, che facendo aumentare l'indice di Hurst sopra il valore 0.5 le variazioni nei prezzi azionari abbiano un comportamento persistente; dunque, a variazioni passate in aumento nel prezzo seguano variazioni in aumento, viceversa nel caso di variazioni passate in diminuzione. Essendo dunque le oscillazioni nel prezzo del sottostante più facilmente prevedibili si ha come effetto un prezzo dell'opzione inferiore.

Viceversa, facendo diminuire l'indice di Hurst sotto 0.5, ad esempio a 0.4 e 0.3 si noterà che, essendo le variazioni dei prezzi anti-persistenti, il prezzo dell'opzione tende a salire, in ragione del fatto che le oscillazioni del titolo azionario sono meno facilmente prevedibili.

Partendo dalla configurazione di seguito:  $K = 40$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $\sigma_1 = 0.2$ ,  $\sigma_2 = 0.3$ ,  $r = 0.05$ , con  $H$  che inizialmente è posto uguale a 0.5, si fa variare lo strike price  $K$  da 40 a 45 con variazioni di 0.5 e poi si ripete la procedura con  $H$  che assume valori pari a 0.3, 0.4, 0.6, 0.7.

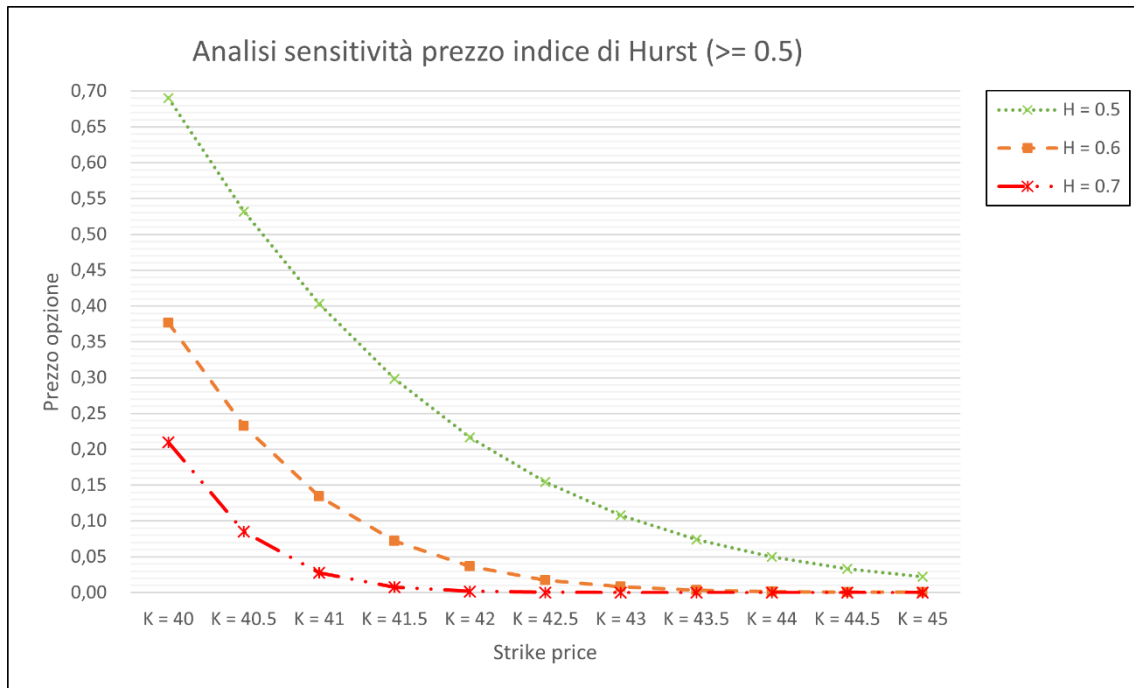
Si sono raccolti i dati ottenuti nella tabella 9 e nel grafico 2.

Tabella 9: Prezzi call arcobaleno asiatica sul minimo di due medie geometriche al variare dell'indice di Hurst e dello strike price

	H = 0.3	H = 0.4	H = 0.5	H = 0.6	H = 0.7
K = 40	2,658613	1,312711	0,690291	0,376360	0,209527
K = 40.5	2,474068	1,141809	0,532019	0,232520	0,085016
K = 41	2,299636	0,988011	0,402585	0,134340	0,027635
K = 41.5	2,134282	0,850859	0,298680	0,072256	0,007298
K = 42	1,978127	0,728630	0,216646	0,036504	0,001678
K = 42.5	1,830939	0,620830	0,154086	0,017355	0,000305
K = 43	1,693112	0,526317	0,108143	0,008042	0,000139
K = 43.5	1,563847	0,443119	0,074156	0,003537	0,000063
K = 44	1,442239	0,371127	0,049880	0,001317	0,000013
K = 44.5	1,329219	0,309417	0,033264	0,000559	0,000000
K = 45	1,224148	0,257058	0,021989	0,000350	0,000000

Fonte: Elaborazione propria

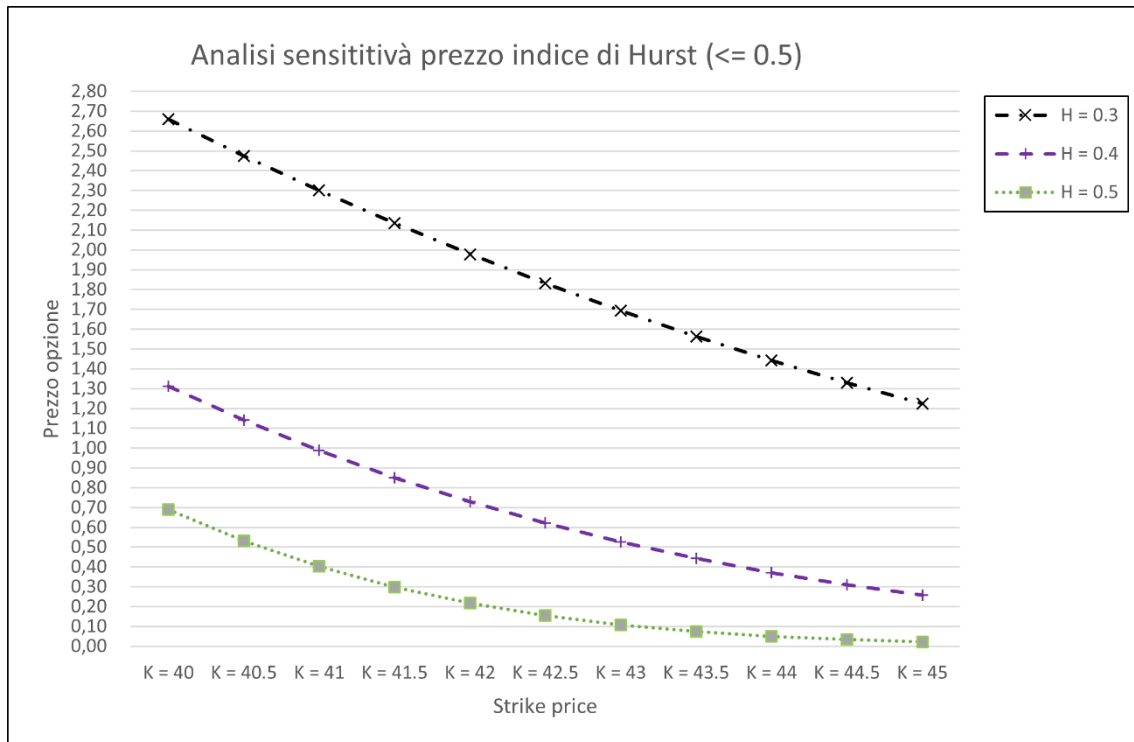
Grafico 2: Analisi di sensitività del prezzo opzionario all'indice di Hurst ( $\geq 0.5$ )



Fonte: Elaborazione propria

Come prevedibile, all'aumentare dell'indice di Hurst, il prezzo dell'opzione diminuisce raggiungendo valori prossimi allo zero via via più velocemente. Il prezzo raggiunge addirittura valore pari a zero con  $H = 0.7$  e con strike price di 44.5 e 45.

Grafico 3: Analisi sensitività prezzo opzionario all'indice di Hurst ( $\leq 0.5$ )



Fonte: Elaborazione propria

Anche qui, come si prevedeva, quando l'indice scende sotto il valore 0.5, il prezzo dell'opzione sale in risposta ad un comportamento del prezzo azionario più instabile.

## CONCLUSIONI

La tesi ha voluto porre l'attenzione su uno strumento finanziario tanto complesso, quanto utile, come le opzioni arcobaleno asiatiche.

Si è detto che tale strumento è stato introdotto per l'esigenza, in un mercato come quello azionario sempre più globalizzato e integrato, di diversificare il portafoglio di investimento per ridurre il rischio legato alla correlazione presente per natura tra i titoli azionari.

Il lavoro svolto si è focalizzato molto sul fornire i concetti teorici alla base dei modelli di *pricing* presenti nei paper analizzati, per poi applicarli nel calcolo vero e proprio del prezzo del derivato, obiettivo della tesi.

Si è scelto, dopo aver dato una visione complessiva sulle opzioni esotiche, e, in particolare sulle opzioni arcobaleno, di focalizzarsi sulla versione asiatica delle stesse in quanto più economiche della versione standard utilizzando prezzi medi, per loro natura meno volatili.

Si è ritenuto utile calcolare il prezzo di tale derivato, confrontando il caso in cui il prezzo dei sottostanti sia modellato con il moto Browniano geometrico, e quello in cui, invece, sia modellato col moto Browniano frazionario. Perché, era opportuno affiancare ad un algoritmo più semplice (quello che utilizza il GBM), uno più complesso (quello che utilizza il FBM) che aumentasse la precisione nel calcolo del prezzo del derivato. In particolare, si è visto come il moto Browniano geometrico non tenga conto delle variazioni passate nei prezzi dei sottostanti, a differenza di quanto fa il moto Browniano frazionario tramite l'indice di Hurst.

I prezzi ottenuti, calcolati mediante algoritmi realizzati in Python, come si è visto nell'ultimo capitolo, sono sostanzialmente uguali a quelli dei paper scientifici analizzati, a riprova della bontà del codice realizzato.

La scelta del linguaggio di programmazione è ricaduta su Python per la sua velocità d'esecuzione, per la sua facilità d'utilizzo e per la presenza di librerie *open source* pratiche da utilizzare e disponibili online.

L'analisi di sensitività del prezzo dell'opzione all'indice di Hurst ha dimostrato quanto sia importante considerare la dipendenza a lungo termine dei prezzi alle variazioni passate degli stessi, per un calcolo puntuale del prezzo dell'opzione, infatti, si è visto quanto varia il prezzo al variare di tale indice nel suo range di variazione da 0 a 1.

## BIBLIOGRAFIA

- Hull, J. C. (2017), *Opzioni, Futures, and Other Derivatives*, Pearson, nona edizione, Inghilterra.
- Benvenuto, C. (1996). *Le opzioni esotiche: problemi di pricing e copertura*. Ancona: Università degli studi di Ancona.
- Peter Ouwehand, G. W. (2006). Pricing rainbow options. *Wilmott Magazine*.
- Margrabe, W. (1978). The Value of an Option to Exchange One Asset for Another. *The Journal of Finance*, pp. 177-186.
- Stulz, R. M. (1982). Options on the minimum or the maximum of two risky assets: analysis and applications. *Journal of Financial Economics*, 161-185.
- Johnson H. (1987), Option on the maximum or the minimum of several assets, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, pp. 277-283.
- Cox J. C., R. S. (1976). The Valuations of Options for Alternative Stochastic Processes. *Journal of Financial Economics*, 3, pp. 145-166.
- Latainer, J. A. (1985). A Synthetic Option Framework for Asset Allocation. *Financial Analysts Journal*, pp. 32-43.
- Iozzo A., Derivate frazionarie e indice di Hurst (Tesi di laurea in Finanza matematica, Università di Bologna, aa 2014/2015), pp. 14-16.
- Cheridito, P. (2004). Mixed fractional Brownian motion. *Bernoulli* 6, 913-934.
- Bin Peng, F. P. (2009). Pricing Rainbow Asian Options. *Systems Engineering - Theory & Practice* Volume 29, Issue 11, 76-83.
- Phelim Boyle, M. B. (1997). Monte Carlo methods for security pricing. *Journal of Economic Dynamics and Control*, pp. 1267-1321.
- Babbs, S. (2000). Binomial valuation of lookback options. *Journal of Economic Dynamics and Control*, pp. 1499-1525.
- Bonnie K. Ray, R. S. (2000). Long range Dependence in Daily Stock Volatilities. *Journal of Business & Economic Statistics* 18 (2), pp. 254-262.
- Wang, X.-T. (2010). Scaling and long range dependence in option pricing, IV: pricing European options with transaction costs under the multifractional Black–Scholes model. *Physica A* 389 (4), pp. 789-796.

- M. Fernández-Martínez, M. S.-G. (2013). Measuring the self-similarity exponent in Lévy stable processes of financial time series. *Physica A* 392 (21), pp. 5330-5345.
- Lu Wang, R. Z. (2017). Pricing geometric Asian rainbow options under fractional Brownian motion. *Physica A* 494, pp. 8-16.
- L. P. Bos, A. F. (2001). How to solve multiasset Black-Scholes with time-dependent volatility and correlation. *Journal of Computational Finance*, pp. 99-107.
- Xueping W., Jin E. Z. (1999), Options on the Minimum or the Maximum of Two Average Prices, *Review of Derivatives Research*, 3, pp. 183–204

## SITOGRAFIA

- BORSA ITALIANA: <https://www.borsaitaliana.it/borsa/glossario/opzione-esotica.html#:~:text=La%20categoria%20delle%20opzioni%20esotiche,di%20standardizzazione%20degli%20elementi%20contrattuali>.
- STARTING FINANCE: <https://startingfinance.com/approfondimenti/coefficiente-hurst/>
- INVESTOPEDIA: <https://www.investopedia.com/terms/r/rainbowoption.asp>
- GITHUB: [https://github.com/woutervanheeswijk/multi\\_asset\\_basket](https://github.com/woutervanheeswijk/multi_asset_basket)
- WIKIPEDIA: [https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione\\_omogenea](https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_omogenea)
- WIKIPEDIA: [https://en.wikipedia.org/wiki/Monte\\_Carlo\\_methods\\_for\\_option\\_pricing](https://en.wikipedia.org/wiki/Monte_Carlo_methods_for_option_pricing)
- FINANCE REFERENCE: <https://www.financereference.com/rainbow-option/>
- FINANCE CUE: <https://financecue.it/le-opzioni-esotiche/12182/>