



Università  
Ca' Foscari  
Venezia

## Corso di Laurea in Economia e Commercio

Tesi di Laurea

Applicazione di modelli di Selezione  
di Portafoglio in periodi di turbolenza.  
Analisi in tre mercati finanziari

**Relatore**

Ch. Prof. Marco Corazza

**Laureando**

Enrica Longhi

Matricola 744344

**Anno Accademico**

2021 / 2022



# Sommario

<b>INTRODUZIONE .....</b>	<b>1</b>
<b>1 LA MODERN PORTFOLIO THEORY .....</b>	<b>5</b>
<b>1.1 Premesse .....</b>	<b>5</b>
<b>1.2 La Modern Portfolio Theory .....</b>	<b>7</b>
1.2.1 <i>Il Criterio Media-Varianza .....</i>	<i>8</i>
1.2.2 <i>Il Criterio di Efficienza di Dominanza in Media -Varianza .....</i>	<i>10</i>
1.2.3 <i>Massimizzazione della Funzione di Utilità Attesa .....</i>	<i>13</i>
<b>1.3 Frontiera Efficiente con attività <i>riskless</i>.....</b>	<b>18</b>
<b>2 CRITICHE ALLA MODERN PORTFOLIO THEORY .....</b>	<b>23</b>
<b>3 IL MODELLO DIAGONALE DI SHARPE .....</b>	<b>29</b>
<b>3.1 Premesse .....</b>	<b>29</b>
<b>3.2 Il Modello Diagonale.....</b>	<b>31</b>
<b>4 METODI EURISTICI PER LA SELEZIONE DI PORTAFOGLIO .....</b>	<b>35</b>
<b>4.1 Concetti introduttivi .....</b>	<b>35</b>
<b>4.2 La Particle Swarm Optimization .....</b>	<b>37</b>
4.2.1 <i>La PSO in termini qualitativi.....</i>	<i>38</i>
4.2.2 <i>La PSO in termini quantitativi .....</i>	<i>40</i>
4.2.3 <i>Il ruolo del peso d'inerzia .....</i>	<i>45</i>
4.2.4 <i>La topologia del gruppo .....</i>	<i>46</i>
<b>4.3 Dal Modello di Markowitz alla PSO .....</b>	<b>47</b>
<b>5 APPLICAZIONE .....</b>	<b>49</b>
<b>5.1 Premesse .....</b>	<b>49</b>
<b>5.2 Le attività finanziarie .....</b>	<b>52</b>
<b>5.3 Periodo pre-Covid.....</b>	<b>57</b>
5.3.1 <i>Titoli Hang Seng .....</i>	<i>57</i>
5.3.2 <i>Titoli FTSE MIB .....</i>	<i>65</i>
5.3.3 <i>Titoli S&amp;P 100.....</i>	<i>72</i>
<b>5.4 Periodo Covid .....</b>	<b>80</b>
5.4.1 <i>Titoli Hang Seng .....</i>	<i>80</i>
5.4.2 <i>Titoli FTSE MIB Covid.....</i>	<i>87</i>
5.4.3 <i>Titoli S&amp;P 100.....</i>	<i>95</i>
<b>5.5 Periodo post-Covid .....</b>	<b>103</b>
5.5.1 <i>Titoli Hang Seng .....</i>	<i>103</i>
5.5.2 <i>Titoli FTSE MIB .....</i>	<i>111</i>
5.5.3 <i>Titoli S&amp;P 100.....</i>	<i>117</i>
<b>5.6 Analisi e confronto.....</b>	<b>124</b>
<b>5.7 Conclusioni .....</b>	<b>137</b>

<b>6</b>	<b>APPENDICE .....</b>	<b>141</b>
6.1	Statistiche descrittive .....	141
6.2	Distribuzioni di frequenza .....	143
6.3	Composizioni portafogli .....	146
6.4	Output <i>PSO</i> .....	154
<b>7</b>	<b>BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>163</b>

## INTRODUZIONE

A partire dagli anni '50 del secolo scorso il mercato finanziario ha operato in misura sempre più consistente con attività rischiose e di conseguenza si sono rese necessarie tecniche e strumenti adatti ad una opportuna scelta su come distribuire una ricchezza tra diverse attività finanziarie. La Selezione di Portafoglio è la disciplina economica che ha lo scopo di analizzare e dare risposte agli investitori, siano essi privati o istituzionali, sul modo in cui ripartire un capitale tra più investimenti che non garantiscono un reddito certo. Come affermato da Constantinides e Malliaris, la Selezione di Portafoglio implica il prendere decisioni in un contesto di incertezza<sup>1</sup>.

Pubblicando nel 1952 l'articolo *Portfolio Selection* sul *The Journal of Finance*<sup>2</sup>, e il successivo libro *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*<sup>3</sup> l'economista statunitense Harry Markowitz formalizza un modello di selezione di portafoglio che ancora oggi costituisce una pietra miliare della teoria finanziaria, la cosiddetta *Modern Portfolio Theory* (d'ora in avanti *MPT*), di seguito illustrata nel capitolo 1. Partendo dal presupposto che ogni individuo/investitore desidera massimizzare il rendimento del proprio capitale investito, la *MPT* afferma e dimostra che è possibile controllare il rischio connesso ad un investimento in attività finanziarie rischiose attraverso il principio della diversificazione. Le attività finanziarie che non garantiscono un rendimento certo, infatti, sono soggette a rischi sistematici, come il pericolo di inflazione, di recessione, o più in generale di fatti imprevedibili ed esterni al mercato finanziario ma che hanno una ricaduta su di esso e che non sono evitabili, ma sono anche soggette a rischi

---

<sup>1</sup> Constantinides G.M, Malliaris A.G., Finance. *Finance*, in Jarrow R.A., Maksimovic V. e Ziemba W.T. eds, (1995) p.1

<sup>2</sup> Markowitz H.M., Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, (1952) Vol 7, No. 1, pp. 77-91

<sup>3</sup> Markowitz H.M., *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, Yale Un. Press (1959)

direttamente imputabili alle attività finanziarie stesse, che grazie alla diversificazione del portafoglio possono essere ridotti in modo anche significativo.

Con un rivoluzionario approccio matematico la *Modern Portfolio Theory* determina con esattezza la composizione di un portafoglio risolvendo un problema di ottimizzazione vincolata, dove le variabili da individuare sono le quote di capitale da investire nei diversi titoli. Ponendosi come obiettivo da un lato la massimizzazione del valore atteso del rendimento, individuato come misura sintetica del profitto, e dall'altro la minimizzazione della varianza, identificata come misura sintetica del rischio dell'investimento, il modello cerca lo specifico portafoglio che minimizza la varianza a partire da un prefissato rendimento atteso. Markowitz è il primo economista ad utilizzare la varianza come misura di rischio, e a trattare un problema di scelta finanziaria come un problema di programmazione matematica.

Ampiamente ripreso ed analizzato (Szegö, 1980, Elton, Gruber *et al.*, 2007, Luenberger, 2014, Castagnoli, Peccati, 1991 per citarne solo alcuni), nonostante la sua popolarità il modello presenta un fondamentale limite operativo: è risolvibile in modo esatto ma non è realistico. Si basa infatti su un rigido impianto di assunzioni e ipotesi che difficilmente trova riscontro nella quotidiana pratica finanziaria. Inoltre assume che i rendimenti siano normalmente distribuiti e impone che l'utilità dell'investitore sia una funzione quadratica del rendimento. La versione classica della *Modern Portfolio Theory* non è in effetti molto utilizzata nella pratica finanziaria; è stata oggetto di numerose analisi critiche che ne hanno rilevato i limiti, ma risulta ancora oggi la metodologia alla base delle strategie di selezione di portafoglio, e soprattutto è il paradigma dal quale hanno tratto origine quasi tutti i successivi modelli.

Le critiche mosse alla *MPT*, che vengono illustrate nel capitolo 2, riguardano sia l'impianto di assunzioni che gli aspetti formali: i rendimenti raramente seguono una distribuzione Normale<sup>4</sup>, la misura del rischio scelta non è la più appropriata<sup>5</sup>, l'utilità dell'investitore non è esattamente una funzione quadratica del tasso di rendimento, il modello è poco realistico, mancano vincoli operativi. Samuelson rigetta l'approccio di Markowitz "di per sé", convinto che la teoria finanziaria debba avere a che fare con una

---

<sup>4</sup> Jia J., Dyer J., A standard measure of risk and risk-value models. *Management science*, (1996) Vol. 42, fasc.12, p.1691

<sup>5</sup> Castagnoli E., Peccati L., *Introduzione alla Selezione di Portafoglio*, Torino (1991), p.10

classe di investimenti i cui rendimenti sono distribuzioni del tipo Pareto-Levy (nel quale la distribuzione Normale è un caso particolare)<sup>6</sup>.

Tuttavia, superare le criticità del modello classico non è banale. In primo luogo, se da un lato l'introduzione di nuovi vincoli lo avvicina alla realtà operativa, dall'altro lo rende di difficile soluzione: con i vincoli il problema diventa molto più complesso dell'originale classificandosi *NP-Hard*. Allo stesso modo, quando le funzioni obiettivo utilizzano misure di rischio alternative rispetto alla varianza, il problema non è sempre risolvibile con strumenti matematici. In conclusione, quando i problemi di selezione di portafoglio diventano complessi in conseguenza dell'inserimento di vincoli o di funzioni obiettivo diverse, il modello di Markowitz è di difficile applicazione perché perde le caratteristiche analitiche che lo contraddistinguono nella sua versione originale.

Tra i contributi apparsi in letteratura che hanno proposto variazioni od estensioni del modello classico, nel capitolo 3 di questa tesi viene presentato in particolare il Modello Diagonale di William Sharpe<sup>7</sup>, che costruisce un portafoglio "alla Markowitz" in una versione semplificata grazie alla presenza di un'unica fonte di rischio che condiziona i rendimenti finanziari.

Nel capitolo 4 viene presentato un approccio alternativo ai problemi di selezione di portafoglio. Negli ultimi anni infatti sono state sviluppate nuove metodologie risolutive ad ispirazione biologica che si avvalgono di tecniche euristiche e algoritmi di intelligenza artificiale. Esse costituiscono una buona alternativa quando non è possibile risolvere in modo analitico problemi complessi di ottimizzazione di portafoglio. Grazie ad un algoritmo iterativo le tecniche euristiche costruiscono in tempi ragionevoli soluzioni non ottime, ma ammissibili e vicine alla soluzione ottima. Pur non individuando soluzioni esatte, forniscono risposte più che soddisfacenti ai problemi di selezione di portafoglio anche quando questi vengono strutturati in modo da tenere conto di aspetti più vicini alla realtà. Oggetto di questa trattazione è in particolare la *Particle Swarm Optimization*,

---

<sup>6</sup> Sharpe W.F., Portfolio Analysis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 2.2 (1967) p. 82

<sup>7</sup> Sharpe W.F., A simplified model for portfolio analysis. *Management Science* 9.2 (1963) pp. 277-293

la tecnica euristica di tipo *population-based* prevalente negli algoritmi di ottimizzazione<sup>8</sup>.

Infine, l'obiettivo di questa tesi è di natura applicativa: a partire dalle soluzioni esatte individuate attraverso il modello classico della *MPT*, con e senza attività a rendimento certo, nel capitolo 5 vengono valutate le performance del Modello Diagonale di Sharpe e delle soluzioni individuate mediante la *Particle Swarm Optimization* attraverso una verifica empirica, un confronto quantitativo, l'esposizione e l'analisi dei risultati. Alla luce della recente attualità, nella quale si è assistito a significative e prolungate turbolenze a causa della pandemia globale da Covid-19, l'obiettivo è verificare se le valutazioni fatte sulle performance realizzate dai diversi modelli nel periodo precedente la crisi da Covid-19 vengono o meno confermate nel periodo di piena pandemia, caratterizzata da una volatilità più consistente, e nel periodo successivo, quando gli effetti della pandemia sono stati in gran parte assorbiti grazie alla diffusione delle campagne vaccinali.

Tutti i modelli procedono attraverso le rilevazioni dei dati storici dei rendimenti finanziari, effettuate su intervalli di tempo variabili, a partire dalle quali vengono sviluppati i modelli predittivi. Una volta raccolte le serie statistiche, una parte di esse viene utilizzata per costruire il problema di selezione di portafoglio e ottenere una soluzione, il cosiddetto periodo *in-sample*, e una parte viene invece utilizzata per verificare la correttezza delle soluzioni individuate dal modello, il cosiddetto periodo *out-of-sample*. Con periodi di rilevazione dei dati *in-sample* e *out-of-sample* prolungati, ci si aspetta che i modelli risultino affidabili, perché nel lungo periodo il trend dei prezzi dei titoli è generalmente positivo. Nel breve e medio termine invece i modelli scontano maggiormente le oscillazioni del mercato finanziario. Un modello costruito su periodi troppo lunghi di rilevazione delle serie statistiche rischia di diventare poco significativo ai fini di un confronto, ragione per cui in questa tesi si è scelto di utilizzare serie storiche dei rendimenti relative a periodi annuali di rilevazioni per costruire i portafogli attraverso i diversi modelli.

---

<sup>8</sup> Zhang Y., Wang S., Ji G., Wang S., A Comprehensive Survey on Particle Swarm Optimization Algorithm and Its Applications. *Mathematical Problems in Engineering* (2015), pp.1-38

# 1 LA MODERN PORTFOLIO THEORY

## 1.1 Premesse

Mentre nel mercato dei beni e servizi i prezzi sono dati e noti agli operatori, che di conseguenza decidono su acquisti o vendite, nel mercato finanziario l'investitore deve prendere decisioni senza conoscere con certezza il prezzo futuro delle attività finanziarie (titoli, azioni, ecc.) che intende acquistare o vendere. "L'incertezza è un elemento connaturato alle operazioni finanziarie di qualsiasi genere, e riguarda la conoscenza limitata di quelli che possono essere i risultati dello scambio di risorse finanziarie nel tempo"<sup>9</sup>: nella pratica essa si manifesta in termini di guadagni ma anche di perdite che possono o meno realizzarsi a seconda del verificarsi di determinati eventi futuri.

Nei problemi di ottimizzazione di portafoglio i parametri principali sono il rendimento e il rischio: l'investitore vuole percepire il massimo rendimento possibile e contemporaneamente ridurre al minimo il rischio. Tuttavia, alti rendimenti sono associati ad alti rischi<sup>10</sup>. I rendimenti dei titoli, rispetto al cui andamento futuro si possono fare solo delle ipotesi e che non garantiscono un risultato certo, sono variabili casuali, i cui esiti non sono noti a priori e possono essere descritti solo in termini probabilistici<sup>11</sup>. Il problema che il modello di Selezione di Portafoglio di Markowitz cerca di risolvere è determinare le quantità ottime  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , quote del capitale a disposizione da investire nei diversi titoli, che permettono all'investitore di massimizzare il rendimento, una volta fissato il livello di rischiosità, o di minimizzare il rischio del portafoglio, una volta fissato un determinato rendimento atteso. È un modello statico,

---

<sup>9</sup> Ferrari A. *et al.*, *Il Sistema finanziario: funzioni, mercati e intermediari*, Torino (2016)

<sup>10</sup> Chang T., Yang S., Chang K., Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm. *Expert systems with applications* (2009) Vol. 36, pp. 10529-10537

<sup>11</sup> Luenberger D.G., *Investment Science*, 2<sup>nd</sup> ed., Oxford Print, New York (2014)

che non prende in considerazione la variabile tempo e si fonda su rigide condizioni e assunzioni<sup>12</sup>:

- *Frictionless Markets Assumption*: il mercato è senza frizioni. In sede di acquisti e/o vendite, non ci sono tasse o costi da sostenere e tutte le attività finanziarie sono perfettamente divisibili. Non ci sono quindi obblighi di lotti minimi di acquisto o vendita.
- *Price-Taker Assumption*: gli operatori sono *price-taker* e non condizionano il mercato. Quando comprano e/o vendono i titoli, non sono in grado di influenzare la distribuzione dei prezzi, che in ogni caso non sono fissati.
- *No-Institutional Restrictions Assumption*: è permessa la vendita allo scoperto senza restrizioni<sup>13</sup>. Consentire le vendite allo scoperto fa cadere il vincolo di non negatività delle quote di capitale da investire nel titolo  $i$ , indicate con  $x_i$ , dove  $x_i \in \mathbb{R}$  per ogni  $x_i = 1, \dots, N$  purché sia  $\sum_{i=1}^N x_i = 1$ . Le vendite allo scoperto fanno sì che l'investitore possa potenzialmente realizzare valori infinitamente grandi (o piccoli) di rendimenti attesi grazie all'effetto leva: ogni operazione finanziaria può amplificare progressivamente il guadagno (o la perdita).
- L'agente economico conosce la distribuzione di probabilità dei rendimenti, che il modello rappresenta attraverso la distribuzione di una variabile casuale Normale.

---

<sup>12</sup> Merton R., Samuelson P., *Continuous – time Finance*, Cambridge - MA (1990)

<sup>13</sup> Con le vendite allo scoperto, una pratica principalmente speculativa, un intermediario può vendere oggi ad un certo prezzo un titolo non suo a fronte di un corrispettivo verso il possessore. Nell'ipotesi di una riduzione dei prezzi, in un tempo successivo predeterminato l'intermediario ricompra il titolo ad un prezzo inferiore, realizzando un guadagno. Al contrario, in caso di aumento dei prezzi, subisce una perdita. Le vendite allo scoperto sono vietate in alcune Borse, soprattutto di Paesi emergenti, proprio allo scopo di evitare eccessive speculazioni. Anche dove sono abitualmente permesse, in alcune situazioni l'Autorità di Controllo di Borsa le può temporaneamente bloccare. Ciò è successo ad esempio durante la crisi finanziaria del 2007-08, quando è stato constatato che le vendite allo scoperto avevano causato da sole un crollo del 5-7% dei prezzi dei titoli

## 1.2 La Modern Portfolio Theory

La metodologia del modello classico di Markowitz si sviluppa attraverso tre step, qui presentati e di seguito illustrati:

- La misurazione dell'incertezza, in altre parole la rischiosità legata ad ogni investimento finanziario aleatorio, attraverso il Criterio Media-Varianza.
- La determinazione della cosiddetta Frontiera dei Portafogli Efficienti, grazie al Criterio di Efficienza di Dominanza Stocastica in Media-Varianza<sup>14</sup> che distingue in maniera non ambigua tra gli infiniti portafogli possibili quelli "buoni/efficienti" da quelli "cattivi/inefficienti"<sup>15</sup>.
- L'individuazione del portafoglio ottimo: tra tutti i possibili portafogli efficienti appartenenti alla Frontiera dei Portafogli Efficienti l'ottimo portafoglio è quello che massimizza la funzione individuale di Utilità Attesa della Moneta, che dipende sia dal rendimento atteso che dalla rischiosità dell'investimento. In accordo con le loro preferenze, gli investitori agiscono in modo razionale scegliendo sempre il portafoglio con i maggiori rendimenti attesi per massimizzare la loro funzione di utilità. Nel caso di più portafogli con un identico rendimento atteso preferiscono investire in quello meno rischioso.

---

<sup>14</sup> Merton R., An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier. *Journal of financial and quantitative analysis* (1972), Vol. 7, pp. 1851-187

<sup>15</sup> Szegö G.P., *Portfolio Theory with Application to bank asset management*, New York (1980)

### 1.2.1 Il Criterio Media-Varianza

Nel Criterio Media-Varianza Markowitz utilizza due strumenti statistico-probabilistici attribuendo loro un significato finanziario: egli rappresenta il rendimento del portafoglio  $\tilde{r}$  in termini di una coppia di valori, il rendimento medio  $\bar{r}$  come indicatore della profittabilità di una determinata scelta d'investimento e la varianza  $\sigma_{\tilde{r}}^2$  come strumento di misurazione del rischio associato a tale scelta. Il grado di incertezza di un investimento viene misurato in funzione del suo rendimento medio e della sua varianza:

$$\tilde{r} \rightarrow (\bar{r}, \sigma_{\tilde{r}}^2). \quad (1.1)$$

In generale, data una variabile casuale discreta  $X = \{(x_1, p_1), \dots, (x_i, p_i), \dots, (x_M, p_M)\}$ , dove  $x_i$  è la  $i$ -esima realizzazione di  $X$  e  $p_i$  è la probabilità del verificarsi di  $x_i$ , con  $i = 1, \dots, M$ , con  $0 \leq p_i \leq 1$  per  $\forall i$ , e  $\sum_{i=1}^M p_i = 1$  per  $i = 1, \dots, M$ , la media e la varianza sono date rispettivamente da:

- $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^M x_i p_i$  (1.2)

- $\sigma^2 = Var(X) = \sum_{i=1}^M (x_i - E(x))^2 \cdot p_i$  (1.3)

I rendimenti finanziari sono supposti continui, perciò le due misure vengono espresse come:

- $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t dF(t)$  (1.4)

- $Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t) dt.$  (1.5)

Il rendimento aleatorio del portafoglio è la somma pesata dei singoli rendimenti aleatori, dato che il rendimento di ciascun titolo è proporzionale a quanto di quel titolo si detiene nel portafoglio:

$$R_P = x_1 R_1 + x_2 R_2 + \dots + x_N R_N = \sum_{i=1}^N x_i R_i. \quad (1.6)$$

Il rendimento atteso del portafoglio è la media di  $R_P$ , somma pesata (con le quote percentuali) dei rendimenti medi dei titoli:

$$E(R_P) = x_1 E(R_1) + \dots + x_N E(R_N) = \sum_{i=1}^N x_i r_i =: r_P = \mathbf{x}' \mathbf{r}, \quad (1.7)$$

dove  $\mathbf{x}' \mathbf{r}$  è la notazione vettoriale di  $r_P$ ,  $\mathbf{x}'$  è il vettore trasposto delle percentuali e  $\mathbf{r}$  il vettore dei rendimenti medi. La varianza del portafoglio dipende dalla somma del rischio che deriva dal possesso del singolo titolo e dalle dipendenze tra i diversi titoli presenti nel portafoglio:

$$Var(R_P) = \sum_{i=1}^N x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N x_i x_j \sigma_{i,j} =: \sigma_P^2, \quad (1.8)$$

dove  $\sigma_{i,j}$  è la covarianza tra il titolo  $i$  e il titolo  $j$ . Richiamando che  $\sigma_{i,j} = \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j$ , che  $\rho_{i,j}$  è il coefficiente di correlazione lineare di Bravais-Pearson, con  $\rho_{i,j} \in [-1, 1]$ , che  $\sigma_i$  è la deviazione standard<sup>16</sup> del titolo  $i$  e infine che  $\sigma_j$  è la deviazione standard del titolo  $j$ , si ha che:

$$Var(R_P) = \sigma_P^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j \quad (1.9)$$

Mentre il rendimento è imputabile ai singoli titoli in proporzione alle loro quote presenti nel portafoglio, la varianza deriva in parte dal rischio imputabile a ciascun singolo titolo, e in parte dal rischio associato alla dipendenza tra i titoli, un valore che rimane da stabilire perché in funzione di  $\rho_{1,2}$ , con  $\rho \in [-1, 1]$ . Con la massima correlazione positiva tra i titoli c'è una contrazione del rischio di portafoglio legata ai singoli titoli senza effetti di riduzione sul rischio legato alla dipendenza tra i titoli stessi. Viceversa, i titoli a correlazione negativa contribuiscono a comprimere il rischio. Se  $\rho_{i,j} = 0$ , i due titoli sono indipendenti.

---

<sup>16</sup> La deviazione standard è la radice della varianza. Nella pratica finanziaria il rischio viene più spesso misurato con la deviazione standard piuttosto che con la varianza, e nella prassi giornalistica la deviazione standard  $\sigma_P$  viene chiamata volatilità

### 1.2.2 Il Criterio di Efficienza di Dominanza in Media -Varianza

Il modello proposto dalla *MPT* nella sua formulazione classica per l'individuazione del portafoglio efficiente è un problema di ottimizzazione vincolata in cui la funzione obiettivo è la varianza. Dato un rendimento atteso  $\pi$  desiderato e posto che l'intero capitale debba essere investito, una volta trovati tutti i portafogli che danno il rendimento stabilito, il modello cerca il portafoglio che minimizza la varianza e contestualmente individua le quote dei diversi titoli in esso presenti. Rappresentato ogni portafoglio come un vettore  $\mathbf{x}'$  i cui elementi sono le percentuali del capitale unitario da investire negli  $N$  diversi titoli disponibili, le variabili che il problema intende determinare sono le percentuali  $x_1, x_2, \dots, x_N$  che minimizzano la varianza  $\sigma_P^2$ .

In termini formali:

$$\min_{x_1, x_2, \dots, x_N} \sigma_P^2 \quad (1.10)$$

$$s. v. \quad \begin{cases} r_P = \pi \\ \mathbf{x}'\mathbf{e} = 1 \end{cases} \quad (1.11)$$

dove  $\mathbf{x}'\mathbf{e} = \sum_{i=1}^N x_i \cdot 1 = 1$  è il vincolo secondo il quale tutto il capitale deve essere investito,  $\pi$  è il rendimento atteso desiderato,  $\mathbf{x}'$  è il vettore trasposto delle quote di capitale da investire nei titoli ed  $\mathbf{e}$  è il vettore colonna di  $N$  numeri 1.

Il modello si può formulare anche in forma matriciale:

$$\min_{x_1, x_2, \dots, x_N} \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} \quad (1.12)$$

$$s. v. \quad \begin{cases} \mathbf{x}'\mathbf{r} = \pi \\ \mathbf{x}'\mathbf{e} = 1 \end{cases} \quad (1.13)$$

dove  $\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x}$  è la funzione obiettivo, una funzione convessa<sup>17</sup> paraboloidale,  $\mathbf{r}$  è il vettore dei rendimenti attesi e  $\mathbf{V}$  è la matrice di varianza-covarianza quadrata ( $N \times N$ ) con  $N^2$  elementi, la cui diagonale principale è costituita dalle  $N$  varianze di ciascun titolo, e le covarianze sono in numero  $N(N-1)$ , a due a due simmetriche:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,N-1} & \sigma_{1,N} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & & \sigma_{2,N-1} & \sigma_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{N-1,1} & \sigma_{N-1,2} & \dots & \sigma_{N-1}^2 & \sigma_{N-1,N} \\ \sigma_{N,1} & \sigma_{N,2} & & \sigma_{N,N-1} & \sigma_N^2 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Se  $\mathbf{V}$  è positiva definita e non-singolare, se nel vettore  $\mathbf{r}$  ci sono almeno due rendimenti diversi (se tutti i rendimenti fossero uguali, secondo il criterio  $\mu, \sigma^2$  l'investitore sceglierebbe di destinare tutto il capitale al titolo con rischio minore, senza ulteriori inutili valutazioni), il problema ha un'unica soluzione che risolve la funzione obiettivo<sup>18</sup>. I vincoli sono uguaglianze, si può quindi procedere nella risoluzione costruendo la funzione di Lagrange con i moltiplicatori  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ :

$$\mathcal{L} = \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} - \lambda_1(\mathbf{x}'\mathbf{r} - \pi) - \lambda_2(\mathbf{x}'\mathbf{e} - 1). \quad (1.15)$$

Il sistema delle condizioni del primo ordine è:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{x}'\mathbf{V} - \lambda_1\mathbf{r}' - \lambda_2\mathbf{e}' = \mathbf{0}_N \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = -\mathbf{x}'\mathbf{r} + \pi (= -\mathbf{r}'\mathbf{x} + \pi) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = -\mathbf{x}'\mathbf{e} + 1 (= -\mathbf{e}'\mathbf{x} + 1) = 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

da cui:

<sup>17</sup> Posto  $\sigma_i^2 > 0$ , si ha che  $\frac{\partial^2 \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x}}{\partial x_i^2} = 2\sigma_i^2 > 0$ , per ogni  $i = 1, \dots, N$

<sup>18</sup> Costantinides G. M., Malliaris A.G., Finance. *Finance*, Jarrow R.A., Maksimovic V. e Ziemba W.T. eds, (1995) p.4

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \frac{1}{2}\lambda_1\mathbf{r}'\mathbf{V}^{-1} + \frac{1}{2}\lambda_2\mathbf{e}'\mathbf{V}^{-1} \\ \mathbf{x}'\mathbf{r} = \pi \\ \mathbf{x}'\mathbf{e} = 1 \end{cases}$$

(1.17)

Sostituendo nelle due ultime condizioni l'espressione trovata per  $\mathbf{x}'$ , con opportune trasformazioni si ottiene la soluzione esplicita del problema, un vettore i cui elementi sono le ottime percentuali dei titoli che compongono il portafoglio a varianza minima:

$$\mathbf{x} = \frac{(\gamma\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r} - \beta\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e})\pi + (\alpha\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e} - \beta\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r})}{\alpha\gamma - \beta^2} := \mathbf{x}^*$$

(1.18)

con:

- $\alpha = \mathbf{r}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r};$
- $\beta = \mathbf{r}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e} = \mathbf{e}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r};$
- $\gamma = \mathbf{e}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}.$

Si rappresenta che  $\alpha, \beta, \gamma$  sono grandezze scalari<sup>19</sup>. Il calcolo di  $\mathbf{x}^*$  non è di semplice risoluzione a causa del prodotto tra matrici particolarmente grandi e necessita dell'impiego di macchine computazionali; è anche per questo motivo che le discipline finanziarie si sono affermate quando si sono sviluppate le capacità di calcolo delle macchine. Una volta individuata la composizione del portafoglio ottimo  $\mathbf{x}^*$ , per rappresentare questo vettore sul piano  $\mu, \sigma^2$  si quantificano il rendimento medio e la varianza associati. Il rendimento medio del portafoglio risulterà lo stesso  $\pi$  indicato come vincolo in quanto rendimento atteso desiderato:

$$E(R_{P^*}) = r_{P^*} = \mathbf{x}^{*\prime}\mathbf{r} = \pi$$

(1.19)

La varianza associata al portafoglio si ricava sostituendo il portafoglio ottimo  $\mathbf{x}^*$  nella notazione matriciale della varianza stessa:

---

<sup>19</sup>  $\alpha, \beta, \gamma$  sono il prodotto di tre matrici:  $(1 \times N) \times (N \times N) \times (N \times 1) = (1 \times 1)$

$$Var(R_{P^*}) = \sigma_{P^*}^2 = \mathbf{x}^{*T} \mathbf{V} \mathbf{x}^* = \dots = \frac{\gamma}{\alpha\gamma - \beta^2} r_{P^*}^2 - \frac{2\beta}{\alpha\gamma - \beta^2} r_{P^*} + \frac{\alpha}{\alpha\gamma - \beta^2} \quad (1.20)$$

La varianza è una parabola in funzione di  $r_{P^*}$ : sul piano  $\mu, \sigma^2$  la Frontiera dei Portafogli Efficienti è rappresentata da una parabola con asse orizzontale, concavità verso destra e vertice di coordinate  $\left(\sigma_{P,v}^2 = \frac{1}{\gamma}, r_{P,v} = \frac{\beta}{\gamma}\right)$ . Il vertice corrisponde al portafoglio efficiente che garantisce la minor varianza in assoluto, il *Global Minimum Variance Portfolio (GMV Portfolio)*. La parabola si sviluppa secondo due rami, uno crescente e l'altro decrescente: il ramo crescente, associato ai valori del rendimento atteso  $\geq \frac{\beta}{\gamma}$ , rappresenta la Frontiera dei Portafogli Efficienti, quello decrescente la Frontiera dei Portafogli Inefficienti. Per ogni portafoglio individuato sul ramo decrescente ne esiste sempre un altro situato sul ramo crescente che a parità di rischio garantisce un maggior rendimento atteso: nessun investitore razionale sceglierebbe un portafoglio individuato sul tratto di frontiera decrescente. Si ricava dalla (1.20) la deviazione standard  $\sigma_{P^*}$  associata al portafoglio ottimo:

$$DevSt(R_{P^*}) = \sigma_{P^*} = (\mathbf{x}^{*T} \mathbf{V} \mathbf{x}^*)^{1/2} = \left(\frac{\gamma r_{P^*}^2 - 2\beta r_{P^*} + \alpha}{\alpha\gamma - \beta^2}\right)^{1/2} \quad (1.21)$$

che descrive un'iperbole. Sul piano  $\mu, \sigma$  la Frontiera dei Portafogli Efficienti è perciò rappresentata come un'iperbole, anch'essa con un ramo crescente, che corrisponde alla Frontiera dei Portafogli Efficienti, e un tratto decrescente, dove tutti i portafogli individuati sono inefficienti. In questo caso le coordinate del vertice dell'iperbole che descrivono il rendimento atteso e la rischiosità associata al *GMV Portfolio* sono

$$\left(\sigma_{P,v} = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{1/2}, r_{P,v} = \frac{\beta}{\gamma}\right).$$

### 1.2.3 Massimizzazione della Funzione di Utilità Attesa

Ottenuta la Frontiera dei Portafogli Efficienti, tutti i portafogli appartenenti alla curva sono efficienti, ma solo uno sarà quello ottimo. Per individuare quale sia questo "paniere

ottimo” interviene un fattore soggettivo: ogni singolo investitore individua il proprio ottimo portafoglio in base alla personale propensione al rischio. Secondo la *MPT* il portafoglio ottimo è quello che massimizza il valore atteso della funzione individuale dell’Utilità della Moneta individuata da Von Neumann e Morgenstern<sup>20</sup>. Il giudizio su un determinato importo/valore certo deriva non tanto dal suo valore nominale, ma dalla sua utilità. Nel Teorema dell’Utilità Attesa Von Neumann e Morgenstern affermano che esiste una funzione di Utilità della ricchezza, diversa da quella di Utilità dei beni e servizi<sup>21</sup>, con la quale si può indurre un ordinamento nell’insieme degli importi certi e che la si può utilizzare correttamente per valutare l’Utilità Attesa e prendere decisioni. Perciò, se si cerca una buona valutazione probabilistica di quanto sia utile un rendimento di un importo aleatorio, anziché la media del rendimento si calcola la media della sua utilità.

Sia data allora una funzione di Utilità della Moneta  $U(X)$  crescente<sup>22</sup> e concava<sup>23</sup>: l’operatore economico desidera massimizzare l’importo ed è avverso al rischio, poiché la funzione di utilità cresce in modo meno che proporzionale (*Grafico 1.1*). Ciò non vuol dire che egli non intende investire in titoli rischiosi, piuttosto che sceglierà il titolo meno rischioso tra quelli ugualmente redditizi oppure quello più redditizio tra tutti i titoli ugualmente rischiosi a sua disposizione.

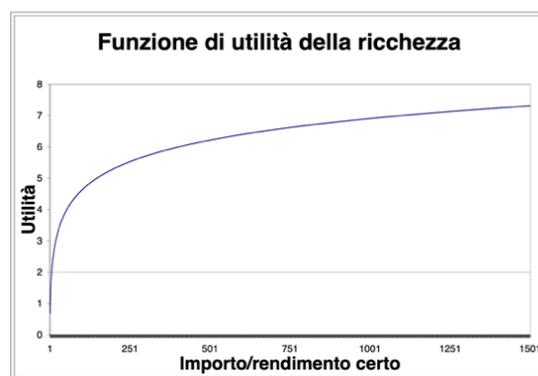


Grafico 1.1 Funzione di Utilità della Ricchezza

<sup>20</sup> Von Neumann J., Morgenstern O., Theory of Games and Economic Behavior. *The Journal of Philosophy* 42.20 (1945) 548

<sup>21</sup> Nel mercato dei beni e servizi esiste una funzione di Utilità del consumatore, il cui input è un paniere di beni e servizi, un oggetto il cui valore è certo

<sup>22</sup> Dati  $x_1 < x_2$  si ha  $u(x_1) < u(x_2)$ .

<sup>23</sup> Dati  $x_1 < x_2$  e data una variazione  $\Delta x$ , si ha  $u(x_1 + \Delta x) - u(x_1) > u(x_2 + \Delta x) - u(x_2)$ .

La domanda che l'investitore deve porsi è di quanto mediamente il rendimento del titolo farebbe aumentare la sua utilità, prendendo in considerazione il valore atteso dell'utilità stessa:

$$E[U(X)] = V(r_X, \sigma_X^2). \tag{1.22}$$

La funzione  $V$  è positiva rispetto al rendimento e sempre crescente, infatti si ha che  $\frac{\partial V(r_X, \sigma_X^2)}{\partial r_X} > 0$ . Inoltre, essa è negativa rispetto alla varianza, perciò concava, in ciò significando che l'investitore è avverso al rischio. Si ha infatti che  $\frac{\partial V(r_X, \sigma_X^2)}{\partial \sigma_X^2} < 0$ . A partire dal valore atteso, si determinano le curve di Iso-Utilità, curve di indifferenza per l'investitore che possono essere rappresentate nel piano  $\mu$  e  $\sigma^2$ . Le funzioni di Utilità Attesa permettono un ordinamento nelle scelte dell'investitore che le può utilizzare correttamente per prendere decisioni. Man mano che il rendimento atteso cresce, a parità di rischio anche l'utilità dell'investitore aumenta.

L'ottimo portafoglio viene individuato come punto di tangenza fra la Frontiera dei Portafogli Efficienti e la più alta curva di Iso-Utilità Attesa dell'investitore (*Grafico 1.2*).

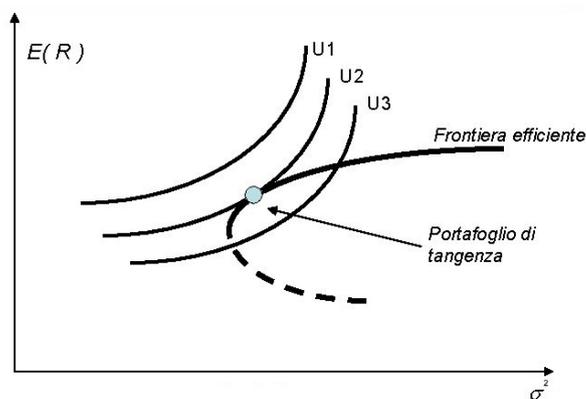


Grafico 1.2 Individuazione grafica del portafoglio ottimo

Nonostante l'esistenza di molte funzioni di Utilità della ricchezza crescenti e concave, non tutte sono adatte: la funzione di Utilità deve essere tale che il suo valor medio sia esattamente solo funzione di  $\mu$  e  $\sigma^2$ . L'unica funzione di Utilità che si può utilizzare correttamente all'interno del modello della *MPT* è la funzione di Utilità quadratica:

$$U(R_p) = R_p - \frac{a}{2} R_p^2, \quad (1.23)$$

dove  $a$  è il coefficiente di avversione al rischio, con  $a > 0$ <sup>24</sup>. Minore è il valore di  $a$ , minore è l'avversione al rischio dell'investitore. Trattasi di una parabola passante per l'origine con la concavità verso il basso, come si può vedere nel Grafico 1.3.

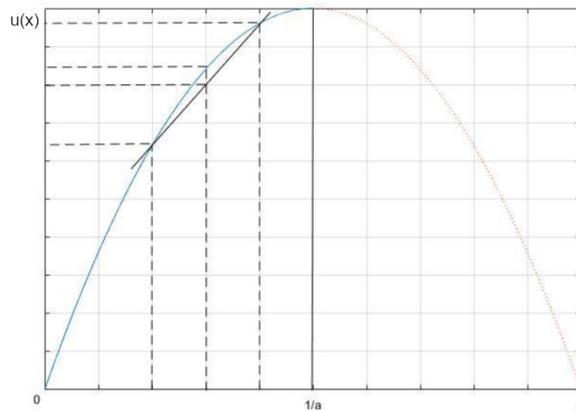


Grafico 1.3 Funzione di Utilità quadratica

Il vertice della parabola è situato in corrispondenza di  $R_p = \frac{1}{a}$ , dove l'Utilità è massima. La funzione di Utilità quadratica è crescente solo per valori del rendimento  $R_p < \frac{1}{a}$ ; si considereranno quindi solo le realizzazioni con  $R_p \leq \frac{1}{a}$ . Nessun investitore ragiona in termini di funzione di Utilità quadratica quando valuta la sua Utilità rispetto ai diversi portafogli disponibili. L'operatore finanziario solitamente crea la funzione di Utilità in modo empirico, avvalendosi di appositi questionari che cercano di inquadrare il grado di avversione al rischio dell'investitore attraverso informazioni personali come età, reddito, situazione patrimoniale, capacità di sopportare perdite finanziarie<sup>25</sup>. Data la funzione di Utilità quadratica, se ne calcola l'Utilità Attesa:

$$E[U(R_p)] = E\left(R_p - \frac{a}{2} R_p^2\right) = r_p - \frac{a}{2} (r_p^2 + \sigma_p^2), \quad (1.24)$$

<sup>24</sup> Se  $a = 0$ , l'investitore è indifferente al rischio, ma ciò è in contrasto con le assunzioni iniziali del modello

<sup>25</sup> Luenberger D., *Investment Science*, 2<sup>nd</sup> ed. Oxford Print, New York (2014)

funzione del rendimento atteso  $r_p$  e della varianza del portafoglio  $\sigma_p^2$ , posta uguale ad un certo valore  $k > 0$ . Per ogni valore assegnato di  $k$  si ricava una funzione di Utilità attesa associata:

$$r_p - \frac{a}{2} (r_p^2 + \sigma_p^2) = k, \tag{1.25}$$

da cui facilmente si ottiene:

$$\sigma_p^2 + r_p^2 - \frac{2}{a} r_p + \frac{2}{a} k = 0. \tag{1.26}$$

L'equazione (1.26) è una circonferenza di centro  $(0, \frac{1}{a})$  e raggio  $\sqrt{\frac{1-2ak}{a^2}}$ , della quale si va a considerare solo l'arco che può andare in tangenza con la Frontiera dei Portafogli Efficienti (Grafico 1.4).

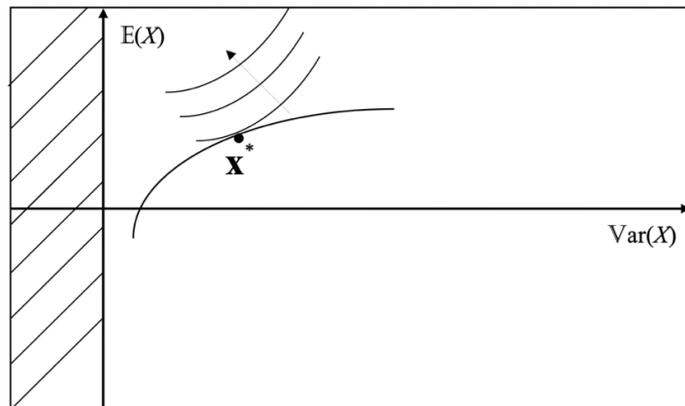


Grafico 1.4 Le curve di Iso-Utilità sono circonferenze

Si sono così determinati il rendimento atteso e il rischio del portafoglio ottimi, in altri termini il rendimento atteso e la varianza del portafoglio che tra tutti quelli efficienti massimizza l'Utilità Attesa dell'investitore, in simboli  $X^* \rightarrow (r_p^*, \sigma_p^{2*})$ , che sostituiti nella soluzione del generico portafoglio efficiente individueranno la composizione del portafoglio ottimo cercato.

### 1.3 Frontiera Efficiente con attività *riskless*

Nel modello classico di Markowitz la selezione di portafoglio avviene a partire dai soli titoli rischiosi. James Tobin<sup>26</sup> introduce la possibilità che un investitore inserisca nel portafoglio un'attività a rendimento certo<sup>27</sup>. È sufficiente limitare l'analisi al caso di un solo titolo certo: nel caso di più titoli verrebbe comunque preferito quello con rendimento maggiore e verrebbero scartati tutti gli altri.

Si considerino:

- $X_1$ , un titolo, e  $\pi_1$  il suo rendimento certo;
- $X_2$  un titolo aleatorio ed  $r_2$  il suo rendimento medio;
- $\pi_1 < r_2$  (i due titoli devono essere entrambi efficienti altrimenti l'agente investirebbe tutto il capitale nel titolo certo).

Sia quindi che:

- $E(\pi_1) = \pi_1$ ;
- $Var(\pi_1) = 0$ ;
- $\rho_{1,2} = 0$ , da cui  $Cov(\pi_1, r_2) = \sigma_{1,2} = \rho_{1,2} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 = 0$ ;
- $\sigma_p^2 = 0 + (1 - x_1)^2 \sigma_2^2 + 0$  (la rischiosità del portafoglio dipende solo dal rischio associato al titolo rischioso);
- $\sigma_p = (1 - x_1) \sigma_2$ , la volatilità del portafoglio;
- $R_p = x_1 \pi_1 + (1 - x_1) R_2$ , il rendimento del portafoglio;
- $E(R_p) = x_1 \pi_1 + (1 - x_1) r_2 := r_p$ , il rendimento atteso.

Con opportune trasformazioni si ricava che:

$$r_p = \pi_1 + \frac{r_2 - \pi_1}{\sigma_2} \sigma_p$$

(1.27)

---

<sup>26</sup> Tobin J., Liquidity preference as behavior toward risk. *Review of Economic Studies* (1958) Vol. 25, pp.65-86

<sup>27</sup> Ad esempio un BOT, un BTP, un deposito in C/C

Il rendimento del portafoglio è dato dal rendimento certo  $\pi_1$  e da una quantità rischiosa pari a  $\frac{r_2 - \pi_1}{\sigma_2}$ , ed è una relazione lineare con pendenza positiva. Se l'investitore acquista il titolo rischioso ottiene un rendimento aggiuntivo pari alla differenza  $r_2 - \pi_1$ : questa differenza rappresenta l'*Excess Return*. Il rapporto

$$\frac{r_2 - \pi_1}{\sigma_2} = \frac{\text{Excess return}}{\text{deviazione standard titolo 2}} \quad (1.28)$$

è l'Indice di Sharp<sup>28</sup>, un coefficiente che esprime in termini di rendimento il premio di cui l'investitore beneficia per ogni unità del titolo rischioso che decide di acquistare. Maggiore è l'indice, migliore è la performance del portafoglio, dunque il modello e i problemi di programmazione quadratica cercano di individuare il portafoglio associato al massimo Indice di Sharp (vedi Chen *et al.* 2011)<sup>29</sup>.

Generalizzando il caso precedente, dati:

- $X_1, X_2, \dots, X_N$   $N$  titoli rischiosi;
- $R_1, R_2, \dots, R_N$  rendimenti aleatori di  $X_1, X_2, \dots, X_N$ ;
- $X_{N+1}$ , l' $N + 1$ esimo titolo a rendimento certo;
- $r_{N+1} = E(r_{N+1})$ , il rendimento del titolo certo;
- $r_{N+1} < \max_i \{r_i, i = 1, \dots, N\}$ : il rendimento certo deve essere minore del massimo rendimento atteso dei titoli rischiosi, altrimenti dominerebbe tutti gli altri portafogli;
- $\sigma_{N+1}^2 = 0$ ;
- $\rho_{i,N+1} = 0$  per  $i = 1, 2, \dots, N$ ;
- $\tilde{r}' = (r_1, r_2, \dots, r_N, r_{N+1})$ , il vettore trasposto dei rendimenti attesi, compreso quello certo;
- $\tilde{V}$  la matrice  $(N + 1) \times (N + 1)$  delle varianze-covarianze di  $R_1, R_2, \dots, R_N, R_{N+1}$ ;
- $\tilde{e}' = (e', 1)$  il vettore trasposto di  $N + 1$  numeri 1;
- $\tilde{x}' = (x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1})$  il vettore trasposto delle  $N + 1$  quote del capitale da investire nei titoli.

<sup>28</sup> Sharpe W., Mutual Fund Performance. *The Journal of Business*, (1966) Vol. 39, No. 1, pp 119-138

<sup>29</sup> Chen H., Tsai H., Lin D., Optimal Mean-variance portfolio selection using Cauchy-Schwarz Maximization. *Applied economics* (2011), Vol. 43, p. 2795-2801

Si assuma che il tasso di interesse passivo sia uguale a quello attivo<sup>30</sup>, che il mercato sia senza frizioni, che gli operatori siano *price-taker* e che siano permesse le vendite allo scoperto. Il problema di selezione del portafoglio diventa:

$$\min_{x_1, x_2, \dots, x_{N+1}} \quad \tilde{\mathbf{x}}' \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{x}} \quad (1.29)$$

$$s. v. \quad \begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}' \tilde{\mathbf{r}} = \pi \\ \tilde{\mathbf{x}}' \tilde{\mathbf{e}} = 1 \end{cases} \quad (1.30)$$

dove la matrice  $\tilde{\mathbf{V}}$  è la seguente:

$$\tilde{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,N-1} & \sigma_{1,N} & 0 \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & & \sigma_{2,N-1} & \sigma_{2,N} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{N-1,1} & \sigma_{N-1,2} & & \sigma_{N-1,N-1}^2 & \sigma_{N-1,N} & 0 \\ \sigma_{N,1} & \sigma_{N,2} & \dots & \sigma_{N,N-1} & \sigma_N^2 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{0}_N \\ \mathbf{0}_{N'} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

Se  $\mathbf{V}$  è non singolare e positiva definita e se  $r_i \neq r_j$  per  $i, j = 1, \dots, N + 1$ , la soluzione al problema di selezione di portafoglio esiste ed è unica:

$$\tilde{\mathbf{x}}^{*'} = (\mathbf{x}_N^*, x_{N+1}^*). \quad (1.32)$$

$\tilde{\mathbf{x}}^{*'}$  è un vettore di  $N + 1$  componenti che individua un unico portafoglio dandone due soluzioni separate: nella prima parte definisce la struttura del portafoglio con gli  $N$  titoli rischiosi (diversa da quella determinata nel caso di assenza del titolo certo) e poi, data la composizione degli  $N$  titoli rischiosi individua la quota dell' $N + 1$ esimo titolo certo. Si ha infatti la soluzione ottima  $\mathbf{x}_N^*$  tale che:

---

<sup>30</sup> Merton R., Samuelson P. *Continuous-time Finance*, Cambridge, MA (1990), p. 18

$$\mathbf{x}_N^* = \frac{\pi - r_{N+1}}{\gamma r_{N+1}^2 - 2\beta r_{N+1} + \alpha} \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{r} - r_{N+1} \mathbf{e}), \quad (1.33)$$

con  $\alpha = \mathbf{r}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r}$ ,  $\beta = \mathbf{r}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e} = \mathbf{e}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r}$  e  $\gamma = \mathbf{e}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}$ <sup>31</sup>.

La soluzione trovata è un vettore che descrive la struttura del portafoglio per i soli titoli rischiosi, a partire dalla quale viene individuata la quota del titolo a rendimento certo:

$$x_{N+1}^* = \frac{\pi(\gamma r_{N+1} - \beta) + \alpha - \beta r_{N+1}}{\gamma r_{N+1}^2 - 2\beta r_{N+1} + \alpha} \quad (1.34)$$

In generale,  $\mathbf{x}_N^* \neq \mathbf{x}^*$ : la parte di portafoglio che riguarda la composizione degli  $N$  titoli nel caso di  $N$  titoli rischiosi e un  $N + 1$ esimo certo è diversa dalla composizione del portafoglio nel caso di soli titoli aleatori. Una volta ottenute le quote  $x_N^*$  e  $x_{N+1}^*$  la media e la varianza ottime associate a quella composizione di portafoglio risultano:

$$E(R_{P^*}) = r_{P^*} = \widetilde{\mathbf{x}}^{*\prime} \widetilde{\mathbf{r}}^* = \pi \quad (1.35)$$

$$Var(R_{P^*}) = \sigma_{P^*}^2 = \widetilde{\mathbf{x}}^{*\prime} \widetilde{\mathbf{V}}^* \widetilde{\mathbf{x}}^* = \frac{(\pi - r_{N+1})^2}{\gamma r_{N+1}^2 - 2\beta r_{N+1} + \alpha} \quad (1.16)$$

La varianza del rendimento del portafoglio è ancora una parabola: nel piano  $\mu, \sigma^2$  la Frontiera dei Portafogli Efficienti tocca l'asse delle  $y$  in corrispondenza del portafoglio costituito dal solo titolo certo. Si ricava la volatilità nel piano  $\mu, \sigma$ :

$$\sigma_{P^*} = (\mathbf{x}^{*\prime} \mathbf{V} \mathbf{x}^*)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{(\pi - r_{N+1})^2}{\gamma r_{N+1}^2 - 2\beta r_{N+1} + \alpha} \right)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{\pi - r_{N+1}}{\sqrt{\gamma r_{N+1}^2 - 2\beta r_{N+1} + \alpha}} & \text{se } \pi \geq r_{N+1} \\ \frac{r_{N+1} - \pi}{\sqrt{\gamma r_{N+1}^2 - 2\beta r_{N+1} + \alpha}} & \text{se } \pi < r_{N+1} \end{cases} \quad (1.37)$$

La Frontiera dei Portafogli Efficienti si articola in due rette, una inclinata positivamente (nel caso che il rendimento del portafoglio sia maggiore del rendimento certo), e una inclinata negativamente (nel caso opposto).

---

<sup>31</sup>  $\alpha, \beta, \gamma$  sono grandezze scalari



## 2 CRITICHE ALLA MODERN PORTFOLIO THEORY

Qualunque modello teorico, pur anche perfetto nella concezione, viene osservato ed analizzato sotto nuovi punti di vista quando diviene operativo: anche nel caso della *MPT* sono stati evidenziati alcuni fenomeni ricorrenti derivanti da evidenze empiriche sistematiche. In primo luogo l'evidenza empirica mostra che le distribuzioni di probabilità dei rendimenti azionari non sono Normali, tranne che in qualche raro caso: basta paragonare la distribuzione dei rendimenti con la distribuzione Normale per vedere le deviazioni. La maggior parte delle distribuzioni dei rendimenti sono asimmetriche, con *skewness* positiva<sup>32</sup>: non sono ellittiche, e ciò obbliga ad esprimere le preferenze dell'investitore esclusivamente attraverso la funzione di Utilità quadratica. Solo se la distribuzione dei rendimenti è Normale, il criterio media-varianza è equivalente all'approccio dell'Utilità Attesa per qualsiasi funzione di utilità concava e avversa al rischio (Luenberger, 2014)<sup>33</sup>. Per Bell (1995) la funzione di utilità dell'investitore deve essere una combinazione tra la funzione lineare e quella quadratica per essere compatibile con una misura del rischio<sup>34</sup>.

Un altro fatto stilizzato in cui si incorre nello studio del modello della *MPT* è che si assiste al fenomeno delle *fat tails*: le code delle distribuzioni dei rendimenti sono in realtà più grosse di quelle che dovrebbero essere in una distribuzione Normale (l'indice della curtosi<sup>35</sup> risulta essere maggiore  $> 3$ ). Il rischio associato ai rendimenti sulle code è maggiore di quanto stimato dal modello attraverso la varianza. Gli investitori d'altronde preferiscono una distribuzione asimmetrica a destra con le code più grosse: il rendimento di un titolo ha maggiore probabilità di assumere valori superiori alla media.

---

<sup>32</sup> La skewness rappresenta il momento del 3° ordine di una distribuzione statistica, pari a 0 in una distribuzione Normale, come tutti i momenti di ordine dispari. Skewness positiva indica asimmetria verso destra della distribuzione statistica, negativa verso sinistra

<sup>33</sup> Luenberger D., *Investment Science*, 2<sup>nd</sup> ed. Oxford Print, New York (2014)

<sup>34</sup> Bell D., Risk, Return and Utility. *Management Science*, (1995), vol.41, fasc. 1, p.23-30

<sup>35</sup> La curtosi è il momento del 4° ordine di una distribuzione statistica, pari a 3 nel caso di una distribuzione Normale. Una curtosi  $> 3$  indica che la probabilità che si verifichino eventi estremi (le cosiddette code) è maggiore rispetto alla probabilità del verificarsi degli stessi eventi in una distribuzione Normale

Registrare i rendimenti dei titoli e poi calcolarne le statistiche descrittive (media, varianza, covarianza, correlazione) come se si stesse operando con una variabile casuale Normale, crea una criticità nella stima del rischio associata ai parametri del modello che impatta sulla Frontiera dei Portafogli Efficienti. Il modello di Markowitz utilizza un numero molto alto di parametri da stimare<sup>36</sup> e ne richiede un continuo aggiornamento: ognuno di essi comporta un errore di stima che si propaga nei calcoli successivi al punto da arrivare a delineare una frontiera efficiente che può non corrispondere a quella vera. In particolare, il criterio media-varianza tende a sovrastimare i valori nel caso di alti rendimenti attesi, correlazioni negative o varianze contenute. La conseguenza è che il portafoglio individuato può anche essere lontano da quello ottimo vero. Markowitz sceglie di utilizzare il criterio media-varianza per quantificare il rischio del rendimento di un dato investimento aleatorio grazie alla sua completa gestione analitica, non certo perché inconsapevole dei limiti di tale scelta. La varianza si presta perfettamente alla ricerca dei punti stazionari, fondamentali nell'ottimizzazione.

L'evidenza empirica dimostra inoltre che le performance *out-of-sample* difficilmente risultano uguali a quelle registrate nel periodo *in-sample*, con una conseguente instabilità delle soluzioni individuate mediante il criterio media-varianza. Nel portafoglio alla Markowitz l'approccio è uniperiodale: adottando i processi stocastici vigenti all'epoca della selezione, si assume per ipotesi che essi rimangano invariati nel tempo. Questo in realtà non si verifica: il portafoglio andrebbe periodicamente o aperiodicamente revisionato per modificarne la composizione in risposta all'evoluzione dei processi di formazione dei prezzi e del mercato, e a tutte le variabili che intervengono. In ogni caso, se già in partenza il portafoglio individuato non corrisponde a quello ottimo per via degli errori di stima commessi, è un portafoglio di per sé instabile nel tempo.

La diversificazione costituisce un altro aspetto critico del modello: se è vero come dimostrato da Markowitz che l'effetto della diversificazione è la riduzione del rischio complessivo, esso tende però a decrescere all'aumentare del numero dei titoli inseriti in portafoglio.

---

<sup>36</sup> I parametri da stimare sono  $\frac{N^2+3N}{2}$

La *MPT* evidenzia inoltre alcune problematiche legate alle rigide assunzioni di base. È poco verosimile un mercato senza frizioni in cui non esistono tassazioni o costi di transazione. Inoltre, considerare gli operatori come *price-taker* esclude dal mercato la presenza di grandi investitori come ad esempio le banche centrali che in effetti sono invece presenti. Se è vero inoltre che le azioni vengono acquistate in numero intero è vero anche che qualche volta vengono posti obblighi di acquisto e/o vendita. Gli unici vincoli imposti da Markowitz riguardano il rendimento che mediamente l'investitore si aspetta di ottenere e l'obbligo di investire tutto il capitale, a cui eventualmente viene aggiunto il vincolo di non negatività. Problemi più realistici richiedono che vengano considerate anche variabili intere. Introdurre vincoli interi può sembrare una semplificazione in un problema di ottimizzazione, invece essi costituiscono una forte complicazione: dal punto di vista dell'ammissibilità dei vincoli, questi problemi sono classificati come *NP-completi*, e dal punto di vista della risoluzione sono classificati come *NP-hard*. In altri termini i calcoli con variabili miste-intere sono tra i più lenti in assoluto, con il tempo di risoluzione che cresce a dismisura al crescere del numero delle variabili, e sono anche particolarmente complessi. Tenere conto di questi vincoli rende molto difficile la risoluzione dei problemi di selezione del portafoglio anche perché esistono pochi algoritmi polinomiali di risoluzione: le loro caratteristiche li rendono diversi l'uno dall'altro, dunque non può esistere un unico algoritmo risolutivo. Inoltre, le funzioni non sono più né continue, né derivabili, né differenziabili. La frontiera può risultare spezzata (Jobst *et al.*<sup>37</sup>), e anche nei casi semplici possono esistere più punti di tangenza con la curva di Utilità attesa: vanno perse proprio le proprietà analitiche della frontiera che la rendono significativa.

Infine, sono numerose le critiche degli economisti sull'utilizzo della varianza come misura di rischio. La varianza è un indice statistico di variabilità, simmetrico e indifferente al "contenuto" che va a misurare. Nel caso degli investimenti finanziari un investitore razionale considera auspicabile una realizzazione dell'investimento al di sopra della media e percepisce come rischiosi solo i rendimenti inferiori alla media stessa. Media e varianza di una distribuzione casuale non sono sufficienti a

---

<sup>37</sup> Jobst N.J., Horniman M.D., Lucas C.A. e Mitra G., Computational Aspects of Alternative Portfolio Selection Models in the Presence of Discrete Asset Choice Constraints. *Quantitative Finance*, 2001

rappresentare tutta la rischiosità di un titolo, in quanto  $\mu$  e  $\sigma^2$  sono l'una il momento del primo e l'altra il momento del secondo ordine<sup>38</sup>. Nel criterio media-varianza, in simboli  $\tilde{r} \rightarrow (\bar{r}, \sigma_{\tilde{r}}^2)$ , non vengono considerati i momenti del terzo e quarto ordine, asimmetria e curtosi, che come detto, caratterizzano invece le reali distribuzioni dei rendimenti. Markowitz assume implicitamente che tutte le distribuzioni siano simmetriche e normocurtiche. Una misura di dispersione può essere infatti utilizzata come misura di rischio solo se la distribuzione dei rendimenti è simmetrica.<sup>39</sup> Un altro limite dell'uso della varianza come misura del rischio finanziario è che essa amplifica le variazioni estreme, riduce l'impatto delle variazioni piccole e risulta essere persistente nel tempo: ad un periodo di alta volatilità ne segue uno con volatilità altrettanto alta<sup>40</sup>. Dal punto di vista delle qualità formali, la varianza non è una misura coerente, in quanto soddisfa la subadditività, ma non rispetta la positiva omogeneità. Si ha infatti che:

$$Var(\alpha X) = \alpha^2 Var(X) \quad (2.1)$$

La deviazione standard soddisfa invece entrambe le proprietà ed è una misura coerente:

$$SD(\alpha X) = \alpha SD(X) \quad (2.1)$$

Cercando di misurare sempre meglio gli aspetti di rischio legati alle dinamiche finanziarie, fin dagli anni '50-'60 del secolo scorso sono state proposte misure di rischio alternative, come ad esempio la semi-varianza, suggerita dallo stesso Markowitz, o la Deviazione Assoluta dalla Media, proposta nel 1991 da Konno e Yamakazi<sup>41</sup>. Oggi è sottinteso che tutte le misure utilizzate siano coerenti, ma questo risultato non è da considerarsi affatto scontato. Nella prassi operativa finanziaria si è infatti ampiamente utilizzato come misura di rischio il *Value at Risk*, uno strumento semplice e di facile

---

<sup>38</sup> Canestrelli E., Nardelli C., *Criteri per la Selezione del Portafoglio*, Giappichelli, (1998), p. 39

<sup>39</sup> Szego G., Measures of risk. *European Journal of Operational Research*, (2005) Vol.163(1) pp.5-19

<sup>40</sup> Cassese G., Pelagatti M., *Finanza quantitativa. Risk Management e Statistica dei Mercati Monetari e Finanziari*, Università Milano Bicocca, p. 14

<sup>41</sup> Konno H., Yamakazi H., Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its application to the Tokyo Stock Market. *Management Science* (1991) 37, pp.519-531

intuizione, che tiene conto degli aspetti finanziari del rischio, ma che non è coerente, perché non gode della subadditività. Tutte le misure coerenti rientrano oggi nella definizione di misure di rischio moderne, tra le quali si ricordano la *Tail Conditional Expectation (TCE)*, detta anche *TailVaR*, e la *Worst Conditional Expectation (WCE)*, entrambe formalizzate da Artzner nel 1999, la nota *Expected Shortfall (ES)*, conosciuta anche come *Conditional - VaR (C-VaR)*, e tutte le misure cosiddette *two-sided*.



### 3 IL MODELLO DIAGONALE DI SHARPE

#### 3.1 Premesse

Circa 10 anni dopo la pubblicazione dell'articolo di Markowitz e la diffusione della *MPT* l'economista William Sharpe<sup>42</sup> ne propone una versione semplificata. Nel suo Modello Diagonale, Sharpe riprende l'idea di fondo del modello di equilibrio dei mercati finanziari, il *CAPM* (*Capital Asset Pricing Model*), da lui stesso proposto<sup>43</sup>: a differenza di Markowitz che tiene in considerazione tante fonti di rischio quanti sono i titoli, Sharpe ritiene che esista un'unica fonte di rischio che esercita un'influenza sui rendimenti attesi dei titoli, e che essa sia il rendimento atteso del portafoglio di mercato. L'output finale del Modello Diagonale è una relazione lineare tra il rendimento atteso dei diversi titoli e il rendimento atteso del portafoglio di mercato. Nel modello di Sharpe il rendimento di ciascun titolo  $R_i$  dipende da tre fattori:

$$R_i = A_i + B_i I + C_i \quad (3.1)$$

dove:

- $R_i$  è una variabile casuale;
- $A_i$  è una costante, rappresenta la caratteristica dell'attività finanziaria  $i$ , ed è un parametro da stimare;
- $B_i$  è una costante, rappresenta un coefficiente, ed è un parametro da stimare;
- $I$  è il fattore di rischio, uguale per tutti i titoli;
- $C_i$  è una variabile casuale e rappresenta la componente erratica.

Non è necessario associare a  $C_i$  una distribuzione di probabilità. Si ha infatti che:

- $E(C_i) = 0$  (il valor medio del termine errore è nullo);
- $Var(C_i) = Q_i$  da stimare;

---

<sup>42</sup> Sharpe W.F., A simplified model for portfolio analysis. *Management Science* (1963) Vol.9, pp. 277-293

<sup>43</sup> Sharpe W.F., Capital Asset Prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*, (1964), Vol.19

- **Covar** ( $C_i$ ) = 0 per  $\forall i \neq j$  in quanto fra le componenti erratiche dei rendimenti di due titoli non c'è correlazione.

L'ultima assunzione stabilisce che i due titoli sono correlati tra loro solo attraverso il fattore di rischio comune, il rischio del portafoglio di mercato: due titoli hanno in comune solo il fatto che entrambi hanno un rischio che dipende dalla stessa fonte. La covarianza tra gli errori dei rendimenti dei titoli è nulla, ma può essere che sia  $\neq 0$  la covarianza tra i rendimenti.  $I$  è una quantità esogena generalmente rappresentata da uno degli indici finanziari di mercato oppure da indici economici e viene descritto attraverso due componenti:

$$I = A_{N+1} + C_{N+1}, \tag{3.2}$$

dove  $A_{N+1}$  è una costante che rappresenta il rendimento atteso della fonte di rischio ed è un parametro da stimare;  $C_{N+1}$  è una variabile casuale, e rappresenta la componente erratica associata tale che  $E(C_{N+1}) = 0$ ,  $Var(C_{N+1}) = Q_{N+1}$  e  $Covar(C_{N+1}, C_i) = 0$  per  $\forall i \neq n + 1$ . Dalla (3.2) si ha che:

$$Var(I) = Var(A_{N+1}) + Var(C_{N+1}) + 2Covar(A_{N+1}, C_{N+1}) = Q_{N+1} \tag{3.3}$$

Per ciascun titolo  $i$  il Modello Diagonale richiede di stimare tre costanti,  $A_i, B_i$ , e  $Q_i$  e i valori di  $A_{N+1}$  e  $C_{N+1}$ , per un totale di  $(3N + 2)$  parametri, a differenza del modello classico di Markowitz che prevede la stima di  $(N^2 + 3N) \frac{1}{2}$  parametri. Se il numero dei titoli presi in considerazione è basso, il modello Diagonale ne richiede un numero maggiore, ma comunque contenuto; non appena il numero dei titoli aumenta, la differenza cresce in modo consistente a favore del modello Diagonale. Ad esempio, con 200 titoli Sharpe richiede la stima del 2,97% dei parametri richiesti da Markowitz<sup>44</sup>. Questo diverso approccio implica in primis un vantaggio in termini di tempi computazionali, perché inserisce nel modello un ridotto numero di variabili. Ha inoltre un vantaggio non trascurabile in termini statistico-econometrici perché il minor numero di variabili comporta un minor numero di errori di stima. Oggi le capacità computazionali degli strumenti moderni riducono l'impatto negativo della complessità dei calcoli;

---

<sup>44</sup> 602 parametri nel Modello Diagonale contro 20300 nella *MPT*

rimane il fatto che minori errori di stima generano soluzioni meno instabili e sono quindi certamente auspicabili quando si effettua selezione di portafogli.

### 3.2 Il Modello Diagonale

Come nella *MPT*, il Modello Diagonale calcola il rendimento medio del titolo  $i$ -esimo, determinato dalla somma tra il valore percentuale che lo caratterizza ( $A_i$ ) e il prodotto tra il rendimento percentuale associato alla fonte di rischio ( $A_{N+1}$ ) e quanto la fonte di rischio impatta su quel titolo ( $B_i$ ):

$$E(R_i) = E(A_i + B_i I + C_i) = E(A_i + B_i(A_{N+1} + C_{N+1}) + C_i) = A_i + B_i A_{N+1}. \quad (3.4)$$

La varianza associata all' $i$ -esimo titolo dipende dalla varianza specifica del titolo  $i$  ( $Q_i$ ) e dal prodotto tra la varianza del mercato ( $Q_{N+1}$ ) e quanto la fonte di rischio impatta su quel titolo ( $B_i^2$ ):

$$\mathbf{Var}(R_i) = \mathbf{Var}(A_i + B_i I + C_i) = \mathbf{Var}(A_i + B_i(A_{N+1} + C_{N+1}) + C_i) = B_i^2 Q_{N+1} + Q_i \quad (3.5)$$

Le covarianze tra i diversi titoli dipendono dall'unica fonte di rischio, la varianza del titolo di mercato ( $Q_{N+1}$ ), e dai legami che i titoli hanno con questo rischio:

$$\mathbf{Covar}(R_i, R_j) = \mathbf{Covar}(A_i + B_i I + C_i, A_j + B_j I + C_j) = B_i B_j Q_{N+1} \quad \text{con } i \neq j \quad (3.6)$$

Il rendimento del portafoglio, in termini di variabili casuali, è dato dalla somma dei prodotti tra la percentuale di capitale investita in ciascun titolo ( $X_i$ ) e il suo rendimento ( $R_i$ ). Questa somma si fraziona in due parti, delle quali la prima è direttamente imputabile ai titoli e la seconda proviene dall'unica fonte di rischio del mercato ( $I$ ), non indicizzato, che può essere perciò portato fuori dalla sommatoria:

$$R_P = \sum_{i=1}^N X_i R_i = \sum_{i=1}^N X_i (A_i + C_i) + \sum_{i=1}^N X_i B_i I. \quad (3.7)$$

Posto ora  $\sum_{i=1}^N X_i B_i = X_{N+1}$ , la (4.7) diventa:

$$R_P = \sum_{i=1}^N X_i (A_i + C_i) + X_{N+1} I = \sum_{i=1}^{N+1} X_i (A_i + C_i). \quad (3.8)$$

Nel portafoglio vengono adesso considerati  $N + 1$  titoli:  $N$  sono titoli veri e propri fisicamente presenti in portafoglio, mentre l' $N + 1$ esimo è il rischio di mercato, che non è fisicamente presente ma che viene comprato indirettamente e che si è obbligati a considerare. Il rendimento medio è espresso tenendo conto soltanto delle  $N$  attività rischiose:

$$E(R_P) = \mathbf{x}'\mathbf{r} = E\left(\sum_{i=1}^{N+1} X_i (A_i + C_i)\right) = \sum_{i=1}^N X_i (A_i + B_i A_{N+1}) \quad (3.9)$$

Il contributo apportato da ogni titolo in termini di rendimento è costituito da una parte che proviene dallo specifico titolo e una parte che proviene dalla fonte di rischio del mercato ( $A_{N+1}$ ), il tutto moltiplicato per la forza del legame tra i due rendimenti ( $B_j$ ). Il vettore dei rendimenti medi, detto Vettore dei Rendimenti Attesi di Sharpe, è:

$$\begin{pmatrix} A_1 + B_1 A_{N+1} \\ A_2 + B_2 A_{N+1} \\ \dots \\ A_N + B_N A_{N+1} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

dove  $A_i$  è il rendimento specifico del titolo  $i$  e  $B_i A_{N+1}$  è il prodotto tra la forza del legame tra il titolo  $i$  e la fonte di rischio ( $B_i$ ) e la fonte di rischio stessa ( $A_{N+1}$ ). I valori vengono stimati attraverso regressione lineare. Con opportuni passaggi algebrici si ottiene la varianza del rendimento del portafoglio:

$$\mathbf{Var}(R_P) = \sum_{i=1}^N X_i^2 (Q_i + B_i^2 Q_{N+1}) + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N X_i X_j B_i B_j Q_{N+1} \quad (3.11)$$

Il rischio del rendimento del portafoglio dipende dalle varianze dei rendimenti dei singoli titoli specifici ( $Q_i$ ) e dalla varianza del rendimento dell'unica fonte di rischio del mercato ( $Q_{N+1}$ ) moltiplicata per il quadrato della forza del legame tra il rendimento del titolo e il rendimento dell'unica fonte di rischio del mercato ( $B_i$ ), il tutto moltiplicato per  $X_i^2$ . Dipende inoltre dalle covarianze tra i titoli, che passano attraverso l'unica fonte di

rischio, e sono le somme dei doppi prodotti tra  $X_i, X_j, B_i, B_j, Q_{N+1}$ , tutte quantità già note. La matrice  $V$  delle varianze e covarianze da considerare è allora:

$$\begin{pmatrix} Q_1 + B_1^2 Q_{N+1} & B_1 B_2 Q_{N+1} & \dots & B_1 B_N Q_{N+1} \\ B_2 B_1 Q_{N+1} & \dots & \dots & B_2 B_N Q_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_N B_1 Q_{N+1} & B_N B_2 Q_{N+1} & \dots & Q_N + B_N^2 Q_{N+1} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Sulla diagonale principale ci sono le varianze dei titoli; le altre quantità sono le covarianze, che dipendono da  $Q_{N+1}, B_i$ , e  $B_j$ . Non ci sono correlazioni da stimare (presenti invece nella matrice di Markowitz), di conseguenza si riducono gli errori di stima. Per poter confrontare l'approccio di Sharpe con il modello di Markowitz è necessario scrivere il rendimento medio (3.9) e la varianza (3.11) in una forma compatta:

$$\mathbf{E}(R_P) = \underline{x}' \underline{r} = \sum_{i=1}^N X_i (A_i + B_i A_{N+1}) \quad (3.13)$$

$$\mathbf{Var}(R_P) = \underline{x}' V \underline{x} = \sum_{i=1}^N X_i^2 (Q_i + B_i^2 Q_{N+1}) + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N X_i X_j B_i B_j Q_{N+1} \quad (3.14)$$

È sufficiente inserire nel problema di ottimizzazione il vettore dei rendimenti attesi e la nuova matrice  $V$  di Sharpe. Il problema di selezione di portafoglio può essere adesso formalizzato nel modo seguente:

$$\max \lambda \underline{x}' \underline{r} - \underline{x}' V \underline{x} \quad (3.15)$$

$$s. v. \begin{cases} \underline{x}' \underline{e} = 1 \\ x_i \geq 0 \quad \forall i \end{cases} \quad (3.16)$$

Il modello massimizza il rendimento riducendolo di una certa quantità, la varianza, in una sorta di operazione "media meno varianza". Si sommano dunque termini espressi

in unità di misure diverse<sup>45</sup>. Nel problema compaiono  $N + 1$  rendimenti medi e  $N + 1$  varianze: la matrice di varianza-covarianza è una matrice  $(N + 1) \times (N + 1)$ .  $\lambda$  è il coefficiente di avversione al rischio<sup>46</sup>.

---

<sup>45</sup> Il fatto che Sharpe abbia conseguito il Premio Nobel ha probabilmente indotto molti altri economisti a commettere questa stessa leggerezza

<sup>46</sup> In una variante del modello  $\lambda$  indica la propensione alla performance

## 4 METODI EURISTICI PER LA SELEZIONE DI PORTAFOGLIO

### 4.1 Concetti introduttivi

Come illustrato, il modello classico di selezione di portafoglio trova una risoluzione matematica esatta solo nella misura in cui esso si fonda su ipotesi e condizioni teoriche rigide, difficilmente riscontrabili nella quotidiana realtà operativa finanziaria. Non appena si costruiscono modelli più aderenti alla realtà bisogna trovare di volta in volta le tecniche matematiche necessarie, e la risoluzione diventa non solo complessa, ma soprattutto lenta. Il mercato finanziario richiede invece risposte veloci.

Negli ultimi 25-30 anni la teoria economica finanziaria ha ampiamente fatto ricorso a metodologie di ottimizzazione che prendendo esempio dalla natura hanno sviluppato tecniche risolutive che a partire da un problema di ottimizzazione costruiscono in tempi ragionevoli soluzioni non necessariamente ottime, ma ammissibili: le tecniche euristiche o meta-euristiche ad ispirazione biologica. Nel dettaglio, un'euristica è un algoritmo<sup>47</sup> iterativo che individua una soluzione ammissibile, di solito vicina a quella ottima, mentre una meta-euristica individua la zona dello spazio più promettente per la ricerca delle soluzioni.

Le tecniche euristiche sono largamente diffuse come metodo di ottimizzazione in natura e nel pensiero biologico superiore. Ad esempio, stiamo utilizzando tecniche euristiche quando dalla strada ci spostiamo indietro sul marciapiede per evitare una macchina che sta sopraggiungendo. Il nostro cervello non calcola la distanza esatta necessaria ad evitare l'impatto con l'automobile, e nemmeno calcola l'intensità del vettore della forza dell'impatto; si limita a darci il comando di spostarci indietro, salvandoci la vita. La natura è un ottimizzatore formidabile: gli organismi viventi risolvono continuamente problemi di ottimizzazione attraverso tecniche euristiche o meta-euristiche senza

---

<sup>47</sup> Un algoritmo è un insieme di comandi non ambigui, eseguiti in sequenza, iterati o meno, che producono un risultato in una quantità finita di tempo

bisogno di formalizzazioni matematiche. Ad esempio, le api costruiscono cellette esagonali che a parità di perimetro sono costruite con angoli di ampiezza tale da massimizzare la capacità disponibile per contenere il miele; le formiche minimizzano il percorso tra il formicaio e le risorse di acqua e di cibo a loro disposizione nelle vicinanze. Alla base c'è il cosiddetto concetto dell'intelligenza dello sciame, la *Swarm Intelligence (SI)*, che deriva dal virtuoso comportamento collettivo in grado di superare qualsiasi corretto comportamento individuale. Uno sciame è intelligente<sup>48</sup> se rispetta le seguenti caratteristiche:

- Principio di Prossimità: lo sciame è in grado di effettuare semplici calcoli in termini di spazio e di tempo;
- Principio di Qualità: lo sciame è in grado di rispondere a determinati stimoli dell'ambiente;
- Principio di Strategia Differenziata: lo sciame non utilizza strategie troppo rigide;
- Principio di Stabilità: lo sciame non modifica la strategia ogni volta che l'ambiente si modifica;
- Principio di Adattamento: quando è necessario, lo sciame modifica il comportamento.

A partire dalla sua Teoria degli Schemi, John Holland è il primo scienziato a proporre una tecnica risolutiva euristica (1975)<sup>49</sup> con un approccio di tipo evuzionistico che si basa sul principio secondo il quale solo il più adatto sopravvive, ma esistono numerosi tipi diversi di tecniche euristiche e meta-euristiche *bio-inspired*. Nella selezione di portafoglio l'Algoritmo Genetico (*Genetic Algorithm, GA*) è la tecnica evolutiva più conosciuta (Mitchell<sup>50</sup>; Goldberg<sup>51</sup>). La *GA* rappresenta i portafogli finanziari attraverso

---

<sup>48</sup> Kennedy J. e Eberhart, R., Particle Swarm Optimization. *Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks*, (1995) Vol. 4, pp. 1942-1948

<sup>49</sup> Holland J.H., *Adaptation in natural and artificial system: an introductory analysis with applications to biology, control and artificial intelligence*, University of Michigan, Ann Arbor (1975)

<sup>50</sup> Mitchell M., An introduction to genetic algorithms. *Computers & Mathematics with Applications*, MIT Press, Cambridge, MA (1996)

<sup>51</sup> Goldberg D., *Genetic algorithms in search: Optimization and machine learning*, Addison-Wesley, Reading, MA (1997)

i cromosomi: ogni cromosoma viene ottimizzato in un ciclo valutazione-selezione-riproduzione secondo il principio “il più adatto sopravvive” per raggiungere la soluzione. Altre tecniche euristiche applicate alla Selezione di Portafoglio sono la Rete Neurale (*Neural Network*), la Ricottura Simulata (*Simulated Annealing*) e la Ricerca del Tabù (*Tabù Search*) che cerca di evitare i punti di minimo locale. Queste due ultime tecniche si basano su algoritmi che agiscono sulla traiettoria di una singola potenziale soluzione, sono veloci e permettono un ampio sfruttamento dello spazio, e sono detti *trajectory-based*.

#### 4.2 La *Particle Swarm Optimization*

Lo specifico algoritmo individuato nel caso della selezione di portafoglio oggetto di questa tesi è la *Particle Swarm Optimization*, o *PSO*, una meta-euristica evolutiva di tipo *population-based*<sup>52</sup>, ispirata al comportamento di gruppi sociali come gli stormi degli uccelli o i banchi dei pesci che genera un insieme di soluzioni, detto “popolazione”. Introdotta per la prima volta da Kennedy e Eberhart<sup>53</sup> nel 1995, in quel caso applicata agli stormi di uccelli, è stata poi ampiamente utilizzata per risolvere problemi non banali di ottimizzazione, tra i quali si ricorda a puro titolo di esempio il contributo di Clerc e Kennedy (2002) che a partire da una versione semplice dell’algoritmo propongono un modello generalizzato più complesso<sup>54</sup>.

La *PSO* è l’ottimizzazione di uno sciame di particelle in cui la soluzione cercata si ottiene da una popolazione che cambia in modo continuo e migliora nel tempo. Le singole particelle che in natura sono costituite dai pesci o dagli uccelli, nella *PSO* sono costituite dai singoli portafogli, ognuno dei quali è un vettore i cui elementi sono le quote di capitale investite in ciascun titolo: ogni particella/portafoglio è una possibile candidata

---

<sup>52</sup> A differenza degli algoritmi *trajectory-based*, che lavorano con singole potenziali soluzioni, gli algoritmi *population-based* hanno a che fare con gruppi di soluzioni: sono quindi meno veloci, ma riescono a raggiungere alti livelli di diversificazione nell’esplorazione dello spazio

<sup>53</sup> Kennedy J. e Eberhart, R., Particle Swarm Optimization. *Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks*, (1995) Vol. 4, pp. 1942-1948

<sup>54</sup> Clerc M., Kennedy J., The particle swarm - Explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* (2002) Vol. 6, pp.58-73

soluzione. Alcuni vettori sono buoni, altri meno; data la *particle swarm* iniziale, senza una struttura centrale di controllo ogni particella deve seguire alcune regole che le permettono di generare nuove particelle migliori delle precedenti e migliorare complessivamente la generazione successiva. In un problema con vincoli di cardinalità presentato da Deng *et al.* (2012) la PSO si dimostra essere più robusta ed efficace rispetto al genetic algorithm (GA), alla simulated annealing (SA) e alla tabu search (TS)<sup>55</sup>.

#### 4.2.1 La PSO in termini qualitativi

Per Clerc e Kennedy (2002) la vera forza della *particle swarm* deriva dalle interazioni fra le particelle che collaborano nella loro esplorazione dello spazio<sup>56</sup>. Ipotizzando un problema di selezione di portafoglio con tre titoli, ogni particella conosce la propria posizione grazie alle coordinate individuate da un vettore di tre elementi, le composizioni delle quote di capitale investite in ciascuno dei tre titoli. Se il portafoglio non va bene, essa deve spostarsi nello spazio, generando un nuovo portafoglio con una diversa composizione dei titoli: il vettore velocità, anch'esso a tre componenti, indica le nuove quote dei titoli, il punto dello spazio dove si andrà a posizionare la nuova particella/portafoglio. Ogni particella conosce la propria velocità. Se la velocità è alta, la particella schizza da una parte all'altra dello spazio; se è bassa, si muove un po' alla volta. Entrambe hanno vantaggi e svantaggi: in generale, la particella "individualista" si muove a velocità maggiori perché si trova spesso nelle zone periferiche, mentre le particelle "sociali" si muovono più lentamente perché rimangono nella zona dello spazio dove si concentra il gruppo. Ogni particella conosce la composizione, la velocità e la posizione dell'intero gruppo: essa fa parte di uno spazio composto da una popolazione di altre particelle, quindi qualsiasi decisione sulla posizione e sulla velocità va presa tenendo conto di questo fatto. Per lo stesso motivo, il comportamento di ogni particella è legato

---

<sup>55</sup> Deng G., Lin W., Lo C., Markowitz-based portfolio selection with cardinality constraints using improved particle swarm optimization. *Expert Systems with Applications* (2012) Vol. 39, pp.4558-4566

<sup>56</sup> Clerc M., Kennedy J., The particle swarm - Explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* (2002) Vol. 6, pp.58-73

a quello delle altre. Ogni particella segue infatti quelle vicine, secondo il cosiddetto *herding effect*<sup>57</sup>. Anche se la posizione iniziale è pessima, è cruciale che ogni particella individui il migliore spostamento nella giusta direzione: il migliore spostamento si ottiene imitando le altre particelle nella loro stessa direzione e con la stessa velocità.

Le particelle non devono collidere - due portafogli non devono mai posizionarsi nello stesso punto, perché il gruppo perderebbe un'opportunità - e devono rimanere all'interno del gruppo: esplorare zone nuove dello spazio può portare ad individuare portafogli migliori, ma solo rimanendo in contatto una particella può permettere alle altre di recepire dove si trova la zona promettente. Seguire i vicini ed esplorare lo spazio rimanendo in contatto con il gruppo sono caratteristiche delle specie sociali, che si equilibrano tra individualismo (ogni particella può allontanarsi dal gruppo per esplorare nuove zone dello spazio), e socialità (restando vicini, gli individui possono copiare comportamenti virtuosi e tutto il gruppo può migliorare). La strategia di ricerca è in equilibrio tra:

- *exploration* (esplorazione): la generazione iniziale non ha conoscenza alcuna dello spazio e si muove molto velocemente. Può essere efficace in questa fase l'individualismo del singolo portafoglio che più veloce degli altri cerca la zona promettente e diversifica la ricerca.
- *exploitation* (sfruttamento): le generazioni successive, che hanno individuato la regione promettente, si muovono più lentamente. Le particelle cercano in questa fase di sfuggire ai punti di minimo locale.

Nei problemi di ottimizzazione ogni particella è espressa in termini di variabile o di vettore di variabili, ed è una potenziale candidata soluzione del problema. Ad ogni particella è associato un valore, un indice di qualità, il cosiddetto *fitness value*, calcolato attraverso una specifica funzione, la funzione di *fitness*. Il *fitness value* corrisponde in un certo qual modo ad un giudizio sulle composizioni ottenute nelle successive generazioni di particelle. A partire dal fatto che nel problema di selezione di portafoglio si cerca di minimizzare la varianza, la funzione di fitness più opportuna da utilizzare è la varianza: i

---

<sup>57</sup> Effetto gregge

portafogli buoni hanno una varianza bassa, quelli da evitare sono associati ad una varianza alta. La funzione di *fitness* varia a seconda del problema che si va a considerare. Al tempo  $t = 0$ , le particelle sono posizionate nello spazio in modo casuale, possibilmente ben distribuite: la popolazione iniziale viene generata casualmente. Ogni particella è caratterizzata da una prima posizione (composizione iniziale del vettore  $N$  dimensionale), una prima velocità (composizione iniziale di un vettore  $N$  dimensionale che indica come modificare le composizioni degli  $N$  titoli del portafoglio) e una funzione di *fitness*. Con una scansione temporale tutti i vettori vengono aggiornati, all'inizio con velocità anch'esse casuali, via via iterando con composizioni e velocità migliorate. Nello spazio si trova il paraboloide che esprime la rischiosità associata ai portafogli; le particelle cercano il punto dove andare a posizionarsi che corrisponde al punto di minimo globale. Riassumendo, la *Particle Swarm Optimization* è costituita da:

- una posizione all'interno dello spazio;
- il valore di *fitness* associato alla posizione;
- una velocità che caratterizza la successiva posizione della particella;
- una memoria, che conserva la migliore posizione passata della particella;
- il valore di *fitness* della migliore posizione passata della particella.

#### 4.2.2 La PSO in termini quantitativi

L'approccio risolutivo della *PSO* non è come gli altri modelli visti finora in quanto non richiede la derivazione e la differenziazione di funzioni e non ha bisogno di sfruttare le proprietà analitiche della funzione di *fitness*: è un modello *derivative free*. Cerca semplicemente un modo opportuno di far muovere le particelle nello spazio, ed è proprio questa sua caratteristica che lo rende applicabile ai problemi complessi. Il modello seguente è quello proposto da Shi e Eberhart nel 1998, detto *Inertia Weight*, che a differenza della versione originale introduce un coefficiente inerziale allo scopo di bilanciare le fasi di esplorazione e di sfruttamento dello spazio delle particelle e in qualche modo controllare la loro velocità iniziale. Ogni particella:

- ha consapevolezza della propria posizione attuale;

- ha memoria, infatti conosce la propria migliore posizione (=composizione) passata (*personal best fitness*);
- ha consapevolezza della migliore posizione di ciascun individuo della popolazione, e quindi della migliore posizione passata raggiunta dall'intero gruppo (*global best fitness*).

Siano dati:

- $M$  particelle, dove ogni particella è una variabile o un vettore di variabili, rappresenta una possibile combinazione dei titoli ed è una possibile soluzione;
- $S \subseteq \mathbb{R}^D$ , con  $D \in \{1,2,3,\dots\}$  lo spazio delle soluzioni, dove si muovono le particelle;
- $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione di *fitness* che dà un giudizio all'ottimalità della particella.

Ogni particella  $i$ -esima è caratterizzata al tempo  $k$  da  $x_i^k$ , composizione dell' $i$ -esimo portafoglio dopo  $k$  iterazioni e da  $v_i^k$ , velocità dell' $i$ -esimo portafoglio dopo  $k$  iterazioni; siano allora dati:

- $f(x_i^k)$  il valore di ottimalità del portafoglio  $i$ -esimo dopo  $k$  iterazioni;
- $p_i$  la migliore posizione passata di  $i$ , a cui corrisponde  $f(p_i) = pbest_i$  (*personal best*);
- $s$  la migliore posizione passata della popolazione, a cui corrisponde  $f(s) = gbest$  (*global best*).

L'algoritmo aggiorna iterativamente la velocità e la composizione di ognuna delle particelle fino a quando non viene soddisfatto un prefissato criterio di arresto:

$$v_i^{k+1} = w^k * v_i^k + c_1 * rand_1 \otimes (p_i - x_i^k) + c_2 * rand_2 \otimes (s - x_i^k) \tag{4.1}$$

$$x_i^{k+1} = x_i^k + v_i^{k+1}, \tag{4.2}$$

dove:

- $w^k$  rappresenta il peso d'inerzia;
- $c_1$  è un parametro che esprime la componente cognitiva e che sfrutta la conoscenza della particella della sua migliore posizione passata (*cognitive acceleration coefficient*);

- $c_2$  è un parametro che esprime la componente sociale, in altre parole l'effetto che produce la migliore direzione collettiva (*social acceleration coefficient*);
- $rand_1$  e  $rand_2$  sono due numeri generati in modo casuale in maniera uniforme nell'intervallo  $[0,1]$  che intervengono sulla differenza tra la posizione al tempo  $k$  e la migliore posizione passata per far modificare (di poco) in modo casuale la direzione della particella e dell'intero sciame rispetto a quella che spingerebbe automaticamente tutte le particelle esclusivamente verso la migliore posizione passata.

La velocità di ogni particella all'iterazione  $k + 1$  si ottiene considerando tre addendi (*Equazione 4.1*). Il primo addendo interviene sulla velocità della particella all'iterazione precedente  $v_i^k$  moltiplicata per un certo freno  $w^k$ : la nuova velocità è dunque un po' in funzione di quella precedente. Se la particella si muove in una direzione produttiva, continuerà a muoversi in quella direzione. Il secondo addendo tiene conto del singolo migliore portafoglio passato: se la particella si trova molto lontano dalla migliore posizione, la differenza tra il portafoglio migliore passato e la posizione attuale è ampia, ma va riducendosi man mano che la particella si avvicina alla posizione migliore. La differenza viene moltiplicata per un numero casuale che la lascia evidentemente spostare verso la migliore posizione passata, provando però ancora a cercare altre possibili migliori soluzioni lì intorno. Il terzo addendo caratterizza la parte sociale: conosce la migliore posizione passata dell'intero sciame, e anche in questo caso la direzione verso la miglior posizione passata dello sciame viene deviata in modo contenuto e casuale. Iterazione dopo iterazione la velocità di ogni particella viene specificata attraverso i tre addendi che guidano la particella lungo una direzione pesata, facendola deviare un po' a caso dalla migliore direzione pesata passata, sia della singola particella che di tutto il gruppo.

Data  $x_i^k$ , composizione della particella  $i$  all'iterazione  $k$ , si ottiene la velocità  $v^{k+1}$  e la composizione della successiva particella  $x^{k+1}$  (*Equazione 4.2*). Ogni volta che viene trovata una posizione nuova bisogna verificare se essa è migliore della migliore posizione passata, sia della singola particella che di tutto lo sciame. Questa verifica viene fatta attraverso la funzione di *fitness*: ad ogni successiva posizione migliore di tutte le precedenti, sia rispetto al singolo individuo, sia rispetto all'intero gruppo, verrà associata

una funzione di *fitness* via via più bassa.  $w^k, c_1, c_2$  vengono aggiustati durante la procedura. Man mano che le iterazioni si succedono, diminuisce il peso  $w^k$  sulla velocità diventando sempre meno determinante: ad una prima fase di esplorazione dello spazio, dove le particelle devono muoversi più velocemente, segue la fase di sfruttamento dell'area promettente durante la quale le particelle cercano la posizione che garantisce la varianza minore.  $rand_1$  e  $rand_2$  aiutano le particelle ad avvicinarsi al portafoglio ottimo grazie a tentativi casuali. Ogni particella può raggiungere una fissata velocità massima  $v_{max}$ , in modo da evitare che le particelle si muovano troppo velocemente, sacrificando lo sfruttamento dello spazio a favore di un'eccessiva esplorazione. All'iterazione  $k + 1$  la *personal best position* della particella  $i$  viene aggiornata:

$$p_i^{k+1} = p_i^k \quad \text{se } f(x_i^{k+1}) \geq f(p_i^k) \quad (4.3)$$

$$p_i^{k+1} = x_i^{k+1} \quad \text{se } f(x_i^{k+1}) < f(p_i^k) \quad (4.4)$$

La particella con funzione di *fitness* più bassa, in questo caso con la varianza  $x'Vx$  minore, attira le altre particelle dello sciame: il portafoglio ottimo si riesce a trovare se la particella con *fitness* più basso è lì vicino. Non è quindi il portafoglio ottimo che attira verso di sé lo sciame: è la particella con la funzione di *fitness* più bassa (con la varianza minore). In alcuni casi sfortunati è comunque possibile che la particella che attira le altre si trovi in realtà lontana dal portafoglio ottimo.

Per garantire la convergenza verso l'ottimo del problema, deve essere rispettata la seguente relazione tra il peso d'inerzia e i coefficienti di accelerazione  $c_1$  e  $c_2$ :

$$[(c_1 + c_2)/2] - 1 < w \quad (4.5)$$

Kennedy (1998)<sup>58</sup> ritiene corretti i valori di  $c_1$  e  $c_2$  tali che  $c_1 + c_2 = [0.0; 4.0]$ . Per Poli,

---

<sup>58</sup> Kennedy, J. The behavior of particles. *Lecture notes in computer science. Evolutionary programming VII: proceedings of the 7-th annual conference on evolutionary programming* (1998) pp. 581–589

Kennedy e Blackwell (2007)<sup>59</sup> la scelta dei valori di  $c_1$  e  $c_2$  modifica l'efficacia della *PSO*: valori troppo bassi riducono lo spazio di ricerca delle particelle, valori troppo alti rischiano di allontanarle e farle divergere, e utilizzano  $c_1 = c_2 = 1.49$ . Riassumendo, la procedura avviene in tre fasi: inizializzazione – ottimizzazione - termine:

- 1) si genera una popolazione di particelle nello spazio  $S$  con posizioni e velocità casuali;
- 2) si calcola il valore della funzione obiettivo di ogni particella;
- 3) dato il  $pbest$ , lo si confronta con il valore ottenuto nella funzione obiettivo dalla particella, e se questo valore è migliore del  $pbest$  allora esso diventa il nuovo  $pbest$  della particella;
- 4) si identifica e si memorizza la particella dello sciame con il migliore valore della funzione obiettivo;
- 5) si aggiorna la velocità e la posizione di ogni particella;
- 6) si ritorna al punto 2 e si ripete fino al punto 6 fino a quando si raggiunge il criterio di arresto stabilito (un numero massimo di iterazioni prefissate oppure un determinato valore della funzione obiettivo).

Nel Grafico 4.1 è rappresentata la costruzione delle posizioni successive, che a partire dal punto  $x_i$  esplora lo spazio verso i punti  $x'_i$  e  $x''_i$  scelti casualmente.

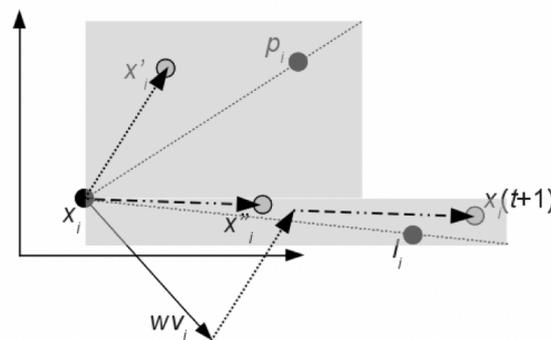


Grafico 4.1 Costruzione delle posizioni successive delle particelle in uno spazio definito da assi cartesiani. Fonte: Clerc M., *Standard Particle Swarm Optimization* (2012)

<sup>59</sup> Poli R., Kennedy J, Bratton D., Blackwell T. Theoretical derivation, analysis and empirical evaluation of a simpler Particle Swarm Optimiser. *IEEE Congress on Evolutionary Computation* (2007) pp.1955-1962

#### 4.2.3 Il ruolo del peso d'inerzia

Il peso d'inerzia  $w^k$  influenza significativamente la direzione che ogni particella deve prendere: esistono infatti diversi approcci per la quantificazione di questo peso.

Nell'approccio *IWA (Inertia Weight Approach)* il peso d'inerzia viene calcolato a partire da un prefissato valore massimo del numero di iterazioni  $k_{max}$  e da due valori prefissati ottenuti empiricamente  $w_{max}$  e  $w_{min}$ , e decresce all'aumentare delle iterazioni. Ciò significa che quando lo sciame è nella fase di sfruttamento, non gli consente di cercare nuove zone di esplorazione. In termini formali, il valore del peso d'inerzia alla  $k$ -esima iterazione è dato da:

$$w^k = w_{max} - \left[ \frac{(w_{max} - w_{min})}{k_{max}} \right] * k$$

(4. 6)

L'approccio *CFA (Constriction Factor Approach)*, proposto da Clerc (2010)<sup>60</sup> ha mostrato risultati più efficienti del precedente. Esso introduce nel modello un "fattore di costrizione"  $\lambda$  che influenza la velocità  $v_i^{k+1}$  e di conseguenza le posizioni delle singole particelle e dell'intero gruppo. Assegnando a  $\lambda$  valori opportuni, le velocità possono essere mantenute all'interno di un intervallo costante. In termini formali, la velocità delle particelle è data da:

$$v_i^{k+1} = \lambda * [v_i^k + c_1 * rand_1 * (p_i - x_i^k) + c_2 * rand_2 * (s_i - x_i^k)],$$

(4. 7)

$$\text{con } \lambda = \frac{2}{\left[ \left| 2 - \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha} \right| \right]}, \text{ dove } \alpha = c_1 + c_2 \text{ e } \alpha > 4.$$

---

<sup>60</sup> Clerc M., From theory to practice in particle swarm optimization. *Handbook of Swarm Intelligence* (2010) Vol. 8, pp.3-36

L'approccio *IWCFA* (*Inertia Weight Constriction Factor*) proposto da Clerc e Kennedy nel 2002 considera entrambi i pesi: evita così l'eccessiva velocità delle particelle grazie al peso d'inerzia e garantisce la convergenza verso l'ottimo.

$$v_i^{k+1} = \lambda * [w^k * v_i^k + c_1 * rand_1 * (p_i - x_i^k) + c_2 * rand_2 * (s_i - x_i^k)] \quad (4.8)$$

$$\text{con } \lambda = \frac{2}{[|2-\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\alpha}|]}, \text{ in cui } \alpha = c_1 + c_2 \text{ e } \alpha > 4,$$

$$\text{e con } w_k = w_{max} - [(w_{max} - w_{min})/k_{max}] * k.$$

#### 4.2.4 La topologia del gruppo

Ogni particella conosce la propria migliore posizione passata ma anche quella di tutto lo sciame. È necessario a questo punto definire quale sia questo sciame; esistono infatti diverse modalità in cui una particella può essere a contatto con le altre in base a quale intorno prefissato si considera. Cheng, Qin e Shi (2012)<sup>61</sup> identificano quattro diverse topologie di sciame:

- Nella topologia a stella, detta "globale" o "*fully connected*", come si vede in Figura 4.1 (a), ogni particella è collegata con tutte le altre del gruppo: la ricerca e il passaggio delle informazioni è istantaneo.
- Nella topologia ad anello o circolare, rappresentata in Figura 4.1 (b), ogni particella è collegata solo con le due che si trovano alla sua destra e alla sua sinistra: il passaggio delle informazioni è più lento, ma dà più tempo alle particelle di esplorare lo spazio circostante.
- Nella topologia a quattro cluster, rappresentata in Figura 4.1 (c), lo sciame è suddiviso in quattro sotto-gruppi, dove ognuno rappresenta una topologia a stella ed è collegato agli altri tre: questa topologia permette di aumentare la potenzialità dello sfruttamento, effettuato su quattro zone diverse.

---

<sup>61</sup> Cheng S., Qin Q., Shi Y., Population diversity based study on search information propagation in particle swarm optimization. *IEEE Congress on Evolutionary Computation* (2012) pp.1-8

- Nella topologia di Von Neumann, chiamata anche topologia quadrata, o “NWES”, rappresentata in Figura 4.1 (d), ogni particella è collegata con quella che si trova sopra (*North*), a sinistra (*West*), a destra (*East*) e sotto (*South*) di lei.

Topologie a cerchi, ruote, stelle, anche confini casualmente definiti sono tutti stati testati; le performance dell’algoritmo variano a seconda della topologia considerata<sup>62</sup>.

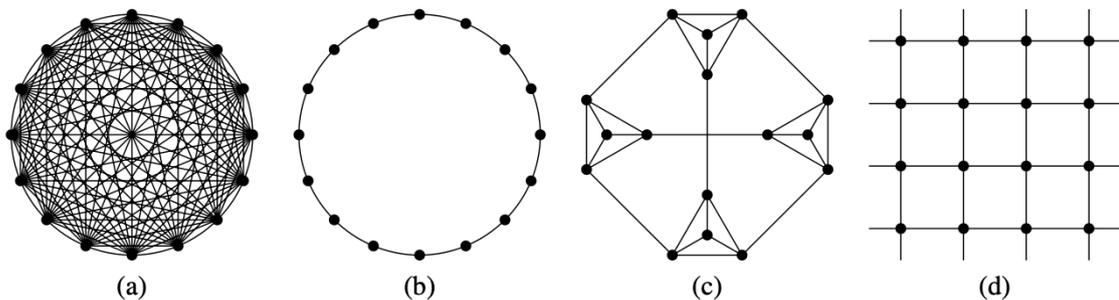


Figura 4.1 Diverse topologie dello sciame, tutte con sedici particelle. Fonte: Cheng S., Qin Q., Shi Y., *Population diversity-based study on search information propagation in Particle Swarm Optimization. IEEE Congress on Evolutionary Computation (2012) pp. 1-8*

### 4.3 Dal Modello di Markowitz alla PSO

La PSO rappresenta una metodologia di ottimizzazione in problemi non vincolati: per essere applicato ai problemi complessi di selezione di portafoglio, i cosiddetti problemi *NP-hard*, il modello viene riformulato attraverso la tecnica delle penalità esatte<sup>63</sup>.

<sup>62</sup> Poli R., Kennedy J, Bratton D., Blackwell T. Theoretical derivation, analysis and empirical evaluation of a simpler Particle Swarm Optimizer. *IEEE Congress on Evolutionary Computation (2007) pp.1955-1962*

<sup>63</sup> Corazza M., Fasano G., Gusso R., Particle Swarm Optimization with non-smooth penalty reformulation for a complex portfolio selection problem. *Applied Mathematics and Computation (2013), 224, pp. 611-624*

Dal punto di vista formale, il problema di selezione alla Markowitz è un problema di ottimizzazione vincolata che ha come funzione obiettivo la minimizzazione della varianza:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x} \\ & x_1, x_2, x_3 \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$s. v. \quad \begin{cases} \mathbf{x}^T \mathbf{1} = 1 \\ \mathbf{x}^T \mathbf{R} = R_p \end{cases} \tag{4.10}$$

Se risolto attraverso la *PSO*, il problema viene trasformato in un problema di ottimizzazione non vincolata: anzichè considerare i vincoli, la *PSO* li esprime attraverso una misura di quanto essi vengono violati. La funzione obiettivo diventa minimizzare la varianza trovando contemporaneamente i valori che minimizzano le violazioni dei due vincoli:

$$\mathbf{x}_{(PSO)}^T \mathbf{V} \mathbf{x}_{(PSO)} + 1/\varepsilon * |\mathbf{x}_{(PSO)}^T \mathbf{1} - 1| + 1/\varepsilon * |\mathbf{x}_{(PSO)}^T \mathbf{R} - R_p| \tag{4.11}$$

- $\varepsilon$  è un parametro positivo detto parametro di penalizzazione;
- $|\mathbf{x}_{(PSO)}^T \mathbf{1} - 1|$  è la violazione del vincolo sulle percentuali  $\mathbf{x}^T \mathbf{1} = 1$ ;
- $|\mathbf{x}_{(PSO)}^T \mathbf{R} - R_p|$  è la violazione del vincolo sulla redditività  $\mathbf{x}^T \mathbf{R} = R_p$ .

Le violazioni sono moltiplicate per un certo peso  $\frac{1}{\varepsilon}$ , che di fatto le ingrandisce, proprio per far capire al sistema che esse sono importanti. Lo sciame deve trovare i portafogli che minimizzano contemporaneamente la varianza e le due violazioni. Anzichè affrontare il problema originario, se ne affronta un altro in cui si penalizzano i valori che violano i vincoli. Un Teorema dimostra che i due problemi, pur essendo diversi, hanno la stessa soluzione: esistono certi valori di  $\varepsilon$  per i quali le soluzioni dell'ottimizzazione vincolata sono le stesse di quella non vincolata. Il valore di  $\varepsilon$ , oltre a far capire allo sciame di particelle l'importanza della non violazione dei vincoli, è anche la garanzia che la soluzione trovata sia corretta. Il Teorema purtroppo non dice quale sia il valore di  $\varepsilon$ , dice solo che esso esiste.

## 5 APPLICAZIONE

### 5.1 Premesse

Nel 2020 l'economia mondiale è stata pesantemente condizionata e penalizzata dal dilagare del virus Covid-19 e dei successivi ripetuti periodi di *lock-down* che hanno provocato un crollo generalizzato delle attività economiche. Si è infatti verificata una forte contrazione del PIL mondiale (secondo le stime del *FMI* del 4,4%) manifestatasi in modo non omogeneo nelle varie aree geografiche: negli Stati Uniti si è registrato un calo del 3,5% e nell'Europa area euro del 6,7%. L'Italia ha subito una contrazione più severa della media europea, pari a -8,3%, la diminuzione più pesante mai registrata nel Paese dalla Seconda Guerra Mondiale. All'opposto, il PIL della Cina è aumentato del 2,3%.

Diversamente dalle economie, dopo un iniziale crollo seguito alla diffusione della pandemia i mercati azionari hanno segnato crescite significative sostenuti dagli imponenti aiuti governativi che hanno garantito liquidità grazie ad iniziative di acquisto di titoli, e dall'inizio delle campagne di vaccinazione. In generale, nel 2021 i mercati azionari europei e statunitensi hanno avuto un consistente rimbalzo, mentre le borse asiatiche hanno registrato crescite contenute, con il caso della borsa di Hong Kong che ha subito invece un calo del 12%.

Il primo semestre del 2022 ha registrato forti ribassi su tutte le borse mondiali a causa di una elevata inflazione, un progressivo aumento dei tassi di interesse e seri timori di una recessione.

L'emergenza rappresentata dal Covid-19 non è stata gestita in modo omogeneo nei Paesi del mondo. I Paesi europei, tra cui l'Italia, hanno puntato su una massiccia campagna di vaccinazione della popolazione che ha permesso una graduale ripresa delle attività economiche. Gli Usa hanno adottato una posizione più moderata rispetto all'obbligo vaccinale, raggiungendo ugualmente alti tassi di vaccinazione. La Cina si è invece indirizzata verso una politica di severi e ripetuti *lock-down* ma scarsa

vaccinazione<sup>64</sup>: fino a tutto il 2022 in caso di elevati contagi alcune produzioni sono state bloccate.

Ciò premesso, in un'ipotesi di investimento in un portafoglio azionario, il caso applicativo qui presentato viene redatto al fine di valutare se il giudizio sui diversi modelli di Selezione di Portafoglio trova conferma non solo in via generale ma anche nel caso di differenti mercati finanziari, o di situazioni di particolare turbolenza, come è avvenuto nel periodo tra il marzo 2020 e la primavera inoltrata del 2021 a causa della pandemia da Covid-19.

Le serie storiche dei rendimenti giornalieri sono state rilevate in tre periodi: dal 30/02/2019 al 30/02/2020 (periodo precedente la pandemia, d'ora in poi "Periodo pre-Covid"), dal 30/02/2020 al 30/02/2021 (periodo di piena pandemia, d'ora in poi "Periodo Covid"), e dal 30/02/2021 al 30/02/2022 (periodo successivo, d'ora in poi "Periodo post-Covid"), con l'utilizzo dei primi nove mesi come periodo *in-sample* e dei successivi tre come periodo *out-of-sample*.

Per ciascun periodo vengono effettuati lo sviluppo, l'analisi e la comparazione fra i diversi modelli di Selezione di Portafoglio in tre distinti mercati finanziari, appartenenti a Paesi le cui economie hanno reagito in modo differente alla crisi da Covid-19: Hong Kong Stock Exchange,<sup>65</sup> Borsa Italiana S.p.A. e New York Stock Exchange. Anche se distinti e caratterizzati da orari sfalsati di svolgimento delle contrattazioni,<sup>66</sup> questi mercati finanziari sono certamente interconnessi.

A partire dalla composizione esatta del portafoglio ottimo individuato attraverso il modello in media-varianza della *MPT* di Markowitz e delle performance da esso effettivamente realizzate nel futuro virtuale in termini in rendimento e rischio, viene effettuata un'analisi ed un confronto con il portafoglio equipesato, con il *GMV Portfolio* e con i portafogli individuati attraverso il Modello Diagonale di Sharpe. Si procede poi ad un confronto con i portafogli approssimati individuati in problemi complessi risolti

---

<sup>64</sup> In Cina solo il 40% degli over 80 è attualmente vaccinato

<sup>65</sup> Hong Kong è la sede principale delle quotazioni delle azioni *offshore* cinesi, alle quali possono accedere gli investitori esteri

<sup>66</sup> Con riferimento all'ora italiana, la Borsa di Hong Kong apre alle 02:30 e chiude alle 09:00, la Borsa Italiana apre alle 09:00 e chiude alle 17:30, la Borsa di New York apre alle 15:30 e chiude alle 22:00

attraverso la *Particle Swarm Optimization*, in modo da avvicinare il modello ad una pratica finanziaria più realistica. In dettaglio, nei paragrafi 5.3, 5.4 e 5.5 vengono riportati i rendimenti medi giornalieri e le varianze di ciascuna attività finanziaria effettivamente realizzati nei tre periodi e nei rispettivi mercati finanziari, calcolati a partire dalla serie storica dei rendimenti logaritmici quotidiani. Viene inoltre rappresentato il rendimento medio annuo espresso in termini percentuali e approssimato alla seconda cifra decimale. Una volta determinata la Frontiera dei Portafogli Efficienti/Inefficienti con e senza attività a rendimento certo, si riportano le performance in termini di rendimento e rischio realizzate nel futuro virtuale dai diversi portafogli, utilizzando tre distinti rendimenti attesi prefissati pari al 4%, al 15% e al 35% annuo.

Viene quindi determinata la composizione del portafoglio ottimo caratterizzato da ciascun prefissato rendimento atteso, selezionato attraverso il metodo classico della *Modern Portfolio Theory*, sia nel caso in cui le vendite allo scoperto siano permesse e non sia presente un'attività a rendimento certo, sia nel caso in cui le vendite allo scoperto siano permesse e sia presente un'attività a rendimento certo positivo, pari al 2% annuo. Con gli stessi rendimenti attesi prefissati vengono presentate le composizioni del *GMV Portfolio* e del portafoglio di Sharpe, con e senza attività *riskless*, in presenza di vendite allo scoperto.

Si procede poi alla determinazione della composizione del portafoglio individuato grazie alla tecnica euristica *PSO* considerando l'ipotesi che le vendite allo scoperto siano vietate: nel problema sono quindi introdotti vincoli di non negatività. La selezione di portafoglio viene effettuata con dieci iterazioni a partire da due diversi settaggi dei parametri  $P$ ,  $K$ ,  $niter$  ed  $epsilon1$ , dove  $P$  indica il numero di particelle,  $K$  il numero di titoli selezionabili,  $niter$  il numero di iterazioni ed  $epsilon1$  il parametro di penalità. L'inizializzazione delle particelle avviene in modo casuale con i valori delle percentuali della generazione iniziale di ciascun titolo uniformemente distribuiti e opportunamente normalizzati. I settaggi utilizzati sono riportati nella Tabella 5.1.

SETTAGGIO ( $K = 10$ )	$P$	$niter$	$epsilon1$
1	40	20000	$1.0e - 003$
2	40	30000	$1.0e - 004$

Tabella 5. 1 Settaggi PSO

Si risolve infine attraverso la *PSO* un problema complesso in cui sono presenti vincoli misti-interi decisionali aggiuntivi rispetto ai consueti sulle percentuali e sulla redditività: i vincoli introdotti stabiliscono un *upper* e un *lower bound* alle quote dei titoli che non devono essere inferiori all'1% o superiori al 50% del capitale disponibile. La risoluzione attraverso il modello *Mean-Variance con vincoli misti-interi* viene effettuata con dieci *run* a partire dagli stessi due settaggi dei parametri  $P, K, niter$  ed  $\epsilon$  di cui sopra. Anche in questo caso l'inizializzazione delle particelle avviene in modo casuale con i valori delle percentuali della generazione iniziale di ciascun titolo uniformemente distribuiti e opportunamente normalizzati.

Nel paragrafo 5.6 si procede ad una approfondita analisi e comparazione dei dati.

In questa parte applicativa è stata necessaria la creazione e l'elaborazione di circa 120 tabelle e 350 grafici, 189 dei quali rappresentano le composizioni dei portafogli individuati; al fine di non appesantire inutilmente la trattazione, si è deciso di riportarli nel testo solo in parte.

Gli ambienti di calcolo utilizzati sono il foglio elettronico Excel e il software Matlab\_R2022b.

## 5.2 Le attività finanziarie

I titoli azionari oggetto della valutazione che appartengono all'indice Hang Seng sono:

1. Xiaomi Corporation (1810.HK)
2. Industrial and Commercial Bank of China Limited (1398.HK)
3. China Petroleum & Chemical Corporation - Sinopec (0386.HK)
4. Li Ning Company Limited (2331.HK)
5. CITIC Limited (0267.HK)
6. Lenovo Group Limited (0992.HK)
7. CSPC Pharmaceutical Group Limited (1093.HK)
8. China Life Insurance Company Limited (2628.HK)
9. WuXi Biologics Inc. (2269.HK)
10. Country Garden Services Holdings Company Limited (6098.HK).

Xiaomi Corporation è una multinazionale con sede a Pechino che produce dispositivi elettronici ed informatici, tra cui cellulari, smartphone, smart TV ed elettrodomestici, dei quali è il produttore principale nel mercato cinese.

Industrial and Commercial Bank of China Limited è uno dei quattro più importanti istituti finanziari cinesi, con oltre 400mila dipendenti, che offre servizi a società, agenzie governative e istituzioni finanziarie oltre che singoli clienti privati. Ha sede a Pechino. Il suo maggior azionista è lo Stato Cinese.

China Petroleum & Chemical Corporation – Sinopec è una delle grandi aziende cinesi che operano nel settore petrolchimico e di raffinazione, a partire dall'esplorazione fino alla produzione e distribuzione di prodotti petroliferi, con sede a Pechino. Detiene il 65% delle stazioni di servizio in Cina e ha circa 385mila dipendenti.

Li Ning Company Limited è un'azienda di Pechino che produce abbigliamento, accessori e scarpe sportive fondata da una ex atleta cinese nel 1990.

CITIC Limited (ex CITIC Pacific) è un gruppo con sede a Pechino che si occupa di servizi finanziari, immobiliari, risorse, energia, produzione di materiali avanzati attraverso diversi segmenti aziendali. Appartiene al Governo Cinese per il 58%.

Lenovo Group Limited è una multinazionale che opera nel settore della tecnologia e delle telecomunicazioni, producendo soprattutto personal computer, notebook e smartphone, ma fornendo anche server e software. Ha sede ad Hong Kong.

CSPC Pharmaceutical Group Limited (fino al 2013 nota come China Pharmaceutical Group Limited) è una società che si occupa di ricerca, sviluppo e produzione di prodotti farmaceutici. La sede è a Shijiazhuang.

China Life Insurance Company Limited, fondata nel 1949 a Pechino, è il più importante gruppo assicurativo cinese. La compagnia opera in quattro settori: ramo vita, ramo salute, ramo infortuni e ramo altre attività.

WuXi Biologics Inc. è una società di ricerca, sviluppo e produzione e gestione di test clinici e prodotti biologici, con sede a Wuxi.

Country Garden Services Holdings Company Limited è un'azienda di intermediazione e gestione immobiliare con sede a Foshan che fornisce servizi a privati, società, strutture pubbliche ed enti governativi e ha più di 230mila dipendenti.

I titoli azionari che appartengono al FTSE MIB sono:

- Prysmian S.p.A. (PRY.MI);
- Davide Campari S.p.A. (CPR.MI);
- Generali S.p.A. (G.MI);
- Enel S.p.A. (ENEL.MI);
- Intesa Sanpaolo (ISP.MI);
- Atlantia S.p.A. (ATL.MI);
- Brembo S.p.A. (BRE.MI);
- Eni S.p.A. (ENI.MI);
- Leonardo S.p.A. (LDO.MI);
- Moncler S.p.A. (MONC.MI).

Prysmian S.p.A., è una società con sede a Milano specializzata nella progettazione, produzione, commercializzazione e installazione di cavi e sistemi di cablaggio con oltre 106 siti di produzione in tutto il mondo e circa 30.000 impiegati, la prima al mondo per fatturato.

Davide Campari – Milano S.p.A. è una società di diritto olandese con sede fiscale a Milano che figura tra i principali produttori di alcolici e vini. Commercializza tra gli altri i marchi Campari, Aperol, Dreher.

Assicurazioni Generali S.p.A. è il primo gruppo assicurativo italiano, terzo europeo per fatturato, che sviluppa anche attività di gestione bancaria e immobiliare. Ha sede a Trieste e impiega circa 72.600 dipendenti.

Enel S.p.A. è una multinazionale che opera nel settore dell'energia elettrica e del gas nata come ente pubblico nel 1962 e trasformata in S.p.A. nel 1992. Lo Stato Italiano ne è il principale azionista con il 24% circa di capitale sociale.

Intesa Sanpaolo è un gruppo bancario con sede a Torino nato nel 2007 in seguito alla fusione di Banca Intesa S.p.A. e Sanpaolo IMI S.p.A., primo in Italia per numero di sportelli e quota di mercato.

Atlantia S.p.A. è una società con sede a Roma specializzata in gestione e sfruttamento in concessione di reti autostradali e infrastrutture aeroportuali. Ha circa 29.000 impiegati. Nel maggio 2021, dopo le polemiche seguite al crollo del ponte autostradale di Genova, ha ceduto il controllo di Autostrade per l'Italia ad una cordata guidata da Cassa Depositi e Prestiti.

Brembo S.p.A. è una società con sede a Bergamo con circa 11.400 impiegati, tra i leader mondiali nella progettazione, produzione e commercializzazione di impianti frenanti per veicoli.

Eni S.p.A. è una società nata come ente pubblico nel 1953 e poi convertita in Società per Azioni nel 1992. Con sede a Roma, è tra i principali produttori europei di petrolio e gas, ottavo gruppo petrolifero mondiale per giro d'affari. Si occupa di acquisto, trasporto, raffinazione e vendita di gas naturale e di produzione di energia elettrica. Ha circa 31.500 dipendenti.

Leonardo S.p.A. (ex Finmeccanica S.p.A.) è un'azienda con sede a Roma che appartiene al settore aeronautico, spaziale, della difesa e dell'elettronica con più di 50.000 dipendenti. Il suo maggior azionista è il Ministero dell'Economia e delle Finanze che ne possiede il 30%.

Moncler S.p.A. è una società di Milano specializzata in abbigliamento e accessori di lusso fondata in Francia ma diventata italiana a seguito di un'acquisizione nel 2003. Commercializza anche il marchio Stone Island.

I titoli azionari che appartengono allo S&P 100 sono:

1. Apple Inc. (AAPL.NE)
2. Starbucks Corporation (SBUX.NE)
3. BlackRock Inc. (BLK.NE)
4. Exxon Mobil Corporation (XOM.NE)
5. Caterpillar Inc. (CAT.NE)
6. The Boeing Company (BA.NE)
7. The Goldman Sachs Group, Inc (GS.NE)
8. Pfizer Inc. (PFE.NE)
9. FedEx corporation (FDX.NE)

#### 10. DuPont de Nemours Inc. (DD.NE)

Apple Inc. è una società fondata nel 1976 con sede a Cupertino che progetta, produce e commercializza smartphone, computer, tablet, altri dispositivi elettronici e fornisce diversi servizi.

Starbucks Corporation è un'azienda di Seattle che attraverso una diffusa rete di negozi autorizzati (17.299 in Nord America e 18.146 nel resto del mondo) commercializza caffè, diverse bevande calde e fredde e prodotti alimentari con il proprio marchio.

Exxon Mobil Corporation è una società di estrazione e lavorazione di petrolio, gas naturale e prodotti petrolchimici. Fondata nel 1870, ha sede a Irving, Texas.

Caterpillar Inc. produce e vende macchinari e attrezzature per l'edilizia e per l'estrazione mineraria, terrestre e marina, per la produzione di energia, del petrolio e del gas, motori, turbine, gruppi elettrogeni. Ha sede a Deerfield, in Illinois.

The Boeing Company è una società di Chicago che progetta, sviluppa, produce, commercializza e fornisce assistenza negli aerei commerciali e militari, nei satelliti, nel volo spaziale, nei sistemi di lancio e nel settore della difesa.

The Goldman Sachs Group Inc. è un istituto bancario con sede a New York e filiali in tutto il mondo che fornisce servizi finanziari e di consulenza a clienti privati, aziende, istituti finanziari e governi attraverso quattro segmenti.

Pfizer Inc. è un'azienda fondata nel 1849 con sede a New York che sviluppa, produce e commercializza prodotti biofarmaceutici con diversi marchi, tra cui vaccini per il Covid-19.

FedEx Corporation è un'azienda americana con sede a Memphis che si occupa di logistica e trasporti terrestri, marittimi e aerei all'interno degli Stati Uniti e all'estero.

DuPont de Nemours Inc. sviluppa, produce e commercializza prodotti elettronici, industriali e chimici e materiali speciali, tra cui il Teflon. Ha sede a Wilmington, Delaware.

## 5.3 Periodo pre-Covid

### 5.3.1 Titoli Hang Seng

Le rilevazioni dei dati storici relative al periodo precedente la pandemia, effettuate dal 30/02/2019 al 30/02/2020 su dieci titoli dell'indice Hang Seng, indicano che i rendimenti medi realizzati sono positivi nella metà dei casi considerati: in dettaglio, risultano particolarmente lusinghieri per quanto riguarda Country Garden Services Holdings, Li Ning, WuXi Biologics e CSPC Pharmaceutical Group. Di segno opposto cinque titoli, fra i quali si rivelano deludenti soprattutto China Petroleum & Chemical Corporation e Lenovo. I titoli più redditizi sono però anche i più volatili. Quanto detto è confermato nella Tabella 5.2 dove sono riportati i rendimenti medi giornalieri e annui e le varianze realizzate nel periodo *in-sample*. La frequenza dei rendimenti logaritmici giornalieri rilevati segue la distribuzione Normale in tre casi su dieci<sup>67</sup>.

Titoli Hang Seng - Periodo pre-Covid			
	Rendimento medio (d)	Rendimento medio % (y)	Varianza
Xiaomi	0.0003528	9,30%	0.00054203
Ind. Bank of Ch.	-0.00027185	-6,62%	0.00013136
Ch. Petr. & Chem.	-0.0018534	-37,34%	0.0001411
Li Ning	0.0026483	94,74%	0.00088335
CITIC	-0.0010902	-24,03%	0.00017646
Lenovo	-0.0012546	-27,12%	0.00045601
CSPC Pharm.	0.0014309	43,38%	0.0006486
Ch. Life Insurance	-0.0008798	-19,90%	0.00026365
WuXi Biologics	0.0017499	55,36%	0.00052309
Country Garden S.	0.0036461	150,21%	0.0005433

Tabella 5. 2 Statistiche descrittive titoli Hang Seng – Periodo pre-Covid

In applicazione del Modello Classico della *MPT* di Markowitz, nel Grafico 5.2 è rappresentata la Frontiera Efficiente sul piano Media-Varianza determinata sia in

<sup>67</sup> Vedi Appendice A

presenza che in assenza di un'attività a rendimento certo. In presenza del titolo *riskless* essa tocca l'asse delle ordinate, in corrispondenza del portafoglio a rischio nullo costituito esclusivamente dal titolo a rendimento certo.

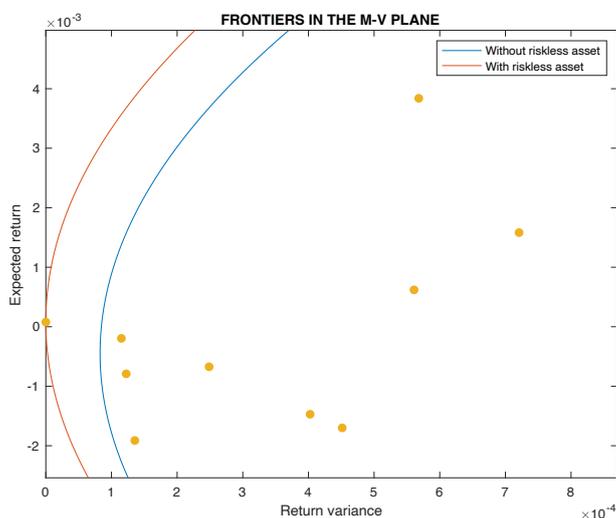


Grafico 5. 1 Frontiera Efficiente titoli Hang Seng – Periodo pre-Covid

Nei Grafici 5.2, 5.3, 5.4 e nelle Tabelle 5.3, 5.4 e 5.5 sono riportate le performance, espresse in termini di media e varianza, ottenute nel futuro virtuale dal portafoglio ottimo di Markowitz con e senza attività a rendimento certo nei casi di rendimento atteso annuo prefissato pari rispettivamente al 4%, al 15% e al 35%: esse vengono messe a confronto con le performance realizzate dal *GMV Portfolio*, dal portafoglio equipesato con e senza attività a rendimento certo, dal portafoglio di Sharpe con e senza attività a rendimento certo, e dai portafogli con vincolo di divieto di vendite allo scoperto e con vincoli misti-interi individuati mediante la *PSO* nei due diversi settaggi considerati<sup>68</sup>.

<sup>68</sup> Per quanto riguarda le performance e le composizioni dei portafogli individuati attraverso *PSO* con vincoli di non negatività e *PSO* con vincoli misti-interi, i dati inseriti nei grafici e nelle tabelle sono i risultati “al meglio di” in termini di funzione di *fitness* sulle dieci *run* effettuate per ogni settaggio

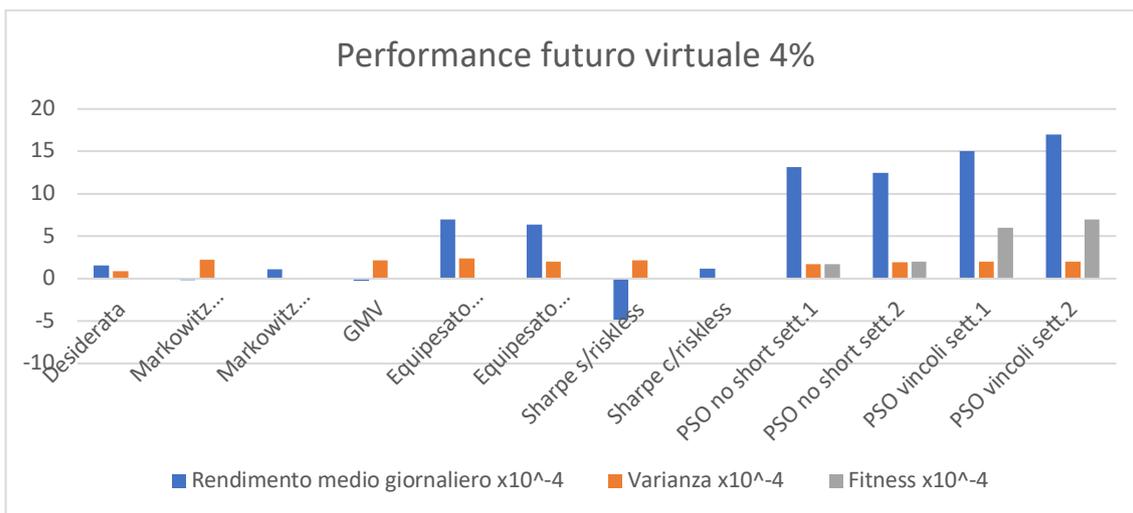


Grafico 5. 2 Performance titoli Hang Seng – Periodo pre-Covid

Performance futuro virtuale portafogli titoli Hang Seng - Periodo pre-Covid			
	Rendimento atteso	Varianza	Fitness
Desiderata 4% (in sample)	0.000155649863	0.000086163761	-
Markowitz N titoli	-0.000014656254	0.000222757125	-
Markowitz N+1 titoli	0.000111478568	0.000000050804	-
GMV Portfolio	-0.000267198907	0.000211959396	-
Equipesato N titoli	0.000694474798	0.000238805713	-
Equipesato N+1 titoli	0.000639199220	0.000197360093	-
Sharpe N titoli	-0.000482778834	0.000212183669	-
Sharpe N+1 titoli	0.000118560809	0.000000055781	-
PSO no short settaggio 1	0.001315917055	0.000169040737	1.738844034487233e-04
PSO no short settaggio 2	0.001245271728	0.000193528162	1.992826627047690e-04
PSO vincoli settaggio 1	0.0015	0.0002	-0.0006
PSO vincoli settaggio 2	0.0017	0.0002	-0.0007

Tabella 5. 3 Performance titoli Hang Seng. Rendimento atteso prefissato 4% – Periodo pre-Covid

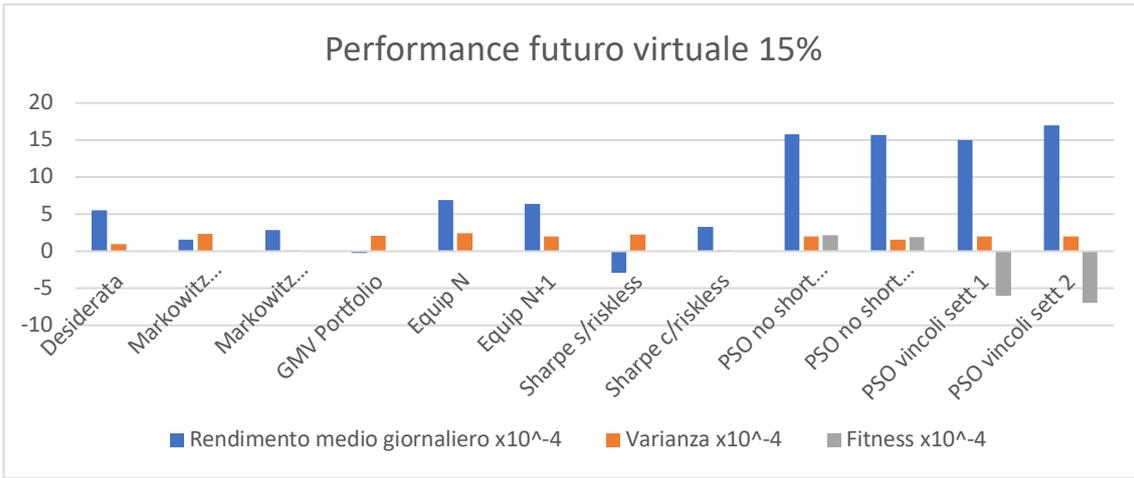


Grafico 5. 3 Performance titoli Hang Seng – Periodo pre-Covid

Performance futuro virtuale portafogli titoli Hang Seng – Periodo pre-Covid			
	Rendimento atteso	Varianza	Fitness
Desiderata 15% (in sample)	0.000554764707	0.000092408089	-
Markowitz N titoli	0.000152688327	0.000233540495	-
Markowitz N+1 titoli	0.000281832787	0.000001939655	-
Sharpe N titoli	-0.000294897296	0.000221274644	-
Sharpe N+1 titoli	0.000325593553	0.000002129677	-
PSO no short settaggio 1	0.001573543977	0.000196402363	2.172751105092977e-04
PSO no short settaggio 2	0.001565986873	0.000155655809	1.869624898029086e-04
PSO vincoli settaggio 1	0.0015	0.0002	-0.0006
PSO vincoli settaggio 2	0.0017	0.0002	-0.0007

Tabella 5. 4 Performance titoli Hang Seng. Rendimento atteso prefissato 15% – Periodo pre-Covid

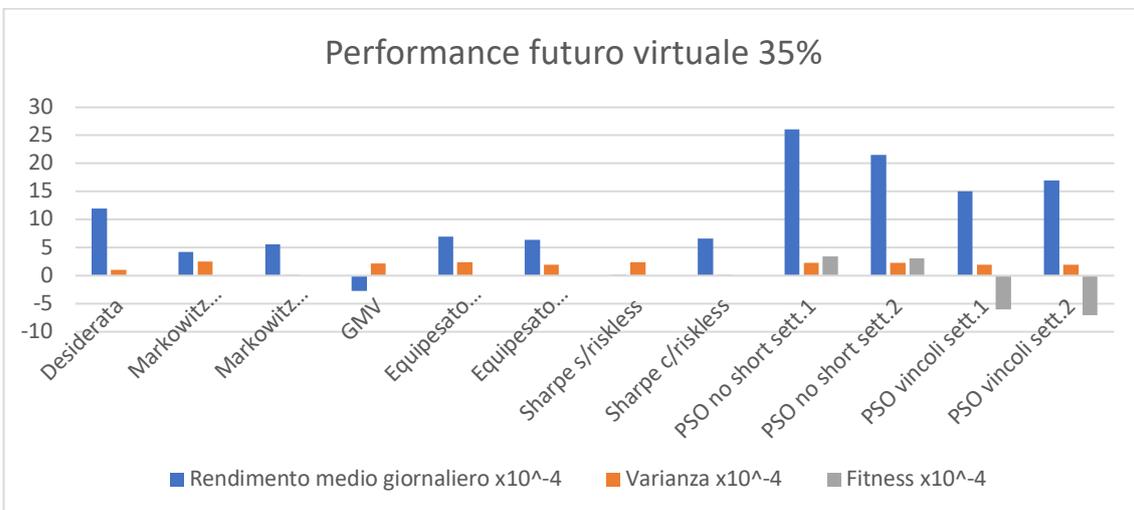


Grafico 5. 4 Performance titoli Hang Seng – Periodo pre-Covid

Performance futuro virtuale portafogli titoli Hang Seng - Periodo pre-Covid			
	Rendimento atteso	Varianza	Fitness
Desiderata 35% (in sample)	0.001191600632	0.000108807746	-
Markowitz N titoli	0.000419706812	0.000256735772	-
Markowitz N+1 titoli	0.000553653513	0.000010597056	-
Sharpe N titoli	0.000004890384	0.000242010184	-
Sharpe N+1 titoli	0.000655939294	0.000011635217	-
PSO no short settaggio 1	0.002605258187	0.000227094771	3.376011995155678e-04
PSO no short settaggio 2	0.002157078954	0.000225417645	3.042703342097627e-04
PSO vincoli settaggio 1	0.0015	0.0002	-0.0006
PSO vincoli settaggio 2	0.0017	0.0002	-0.0007

Tabella 5. 5 Performance titoli Hang Seng. Rendimento atteso prefissato 35% – Periodo pre-Covid

Dal punto di vista della redditività i portafogli del Modello Classico della *MPT* e del Modello Diagonale costituiti dai soli titoli rischiosi sono lontani dal rendimento atteso prefissato, realizzando nel futuro virtuale rendimenti negativi in tre casi su sei; pur rimanendo a livelli inferiori rispetto a quanto richiesto, l’inserimento del titolo a rendimento certo aumenta la redditività dei portafogli, e soprattutto permette di dimezzarne la rischiosità. Il *GMV Portfolio* realizza sempre rendimenti negativi nel periodo *out-of-sample*. I portafogli selezionati attraverso le tecniche euristiche si comportano molto bene in termini di redditività, superando nel futuro virtuale i rendimenti attesi prefissati; tali livelli di redditività sono però accompagnati da una volatilità dei portafogli superiore a quanto prefissato. Ciò detto, la costruzione dei portafogli permette di contenere la rischiosità complessiva dell’investimento: tutti i portafogli, sia quelli esatti che quelli approssimati, risultano essere meno rischiosi del titolo meno rischioso (a rendimento positivo) preso da solo.

Il Modello Classico di Markowitz (Grafico 5.5) e il Modello Diagonale di Sharpe (Grafico 5.7) costruiscono in modo simile i portafogli costituiti dai soli titoli rischiosi: il capitale è investito principalmente sui titoli Industrial and Commercial Bank of China e CITIC. I modelli sfruttano l’effetto leva che deriva dalla possibilità di vendere a corto il titolo China Life Insurance. In presenza dell’attività a rendimento certo, il capitale viene quasi esclusivamente investito sull’attività *riskless* (Grafici 5.6 e 5.8). Il *GMV Portfolio* si

differenza dai portafogli precedenti per l'aggiunta del titolo China Petroleum & Chemical Corporation: una scelta che comporta la realizzazione di un rendimento negativo nel futuro virtuale (Grafico 5.9). Pur in assenza di vendite allo scoperto, entrambi i modelli risolti attraverso le tecniche euristiche costruiscono portafogli più che soddisfacenti dal punto di vista della redditività: i rendimenti sono risultati positivi in tutte le *run* effettuate grazie alla presenza di diversi titoli ad alto rendimento. Nei portafogli con divieto di vendite allo scoperto ottenuti mediante *PSO* più di due terzi del capitale a disposizione risulta concentrato su due o tre titoli: i titoli presenti con la quota maggiore sono Country Garden Services Holdings, CITIC e Industrial and Commercial Bank of China (Grafici 5.10 e 5.11). Coerentemente con il rispetto dei vincoli introdotti nel modello, i portafogli realizzati con la tecnica *PSO* con vincoli misti-interi risultano più diversificati rispetto ai precedenti (Grafici 5.12 e 5.13): se da un lato l'*upper bound* impone di non superare il 50% del capitale investito in un singolo titolo, dall'altro il *lower bound* costringe il modello ad includere tutti i titoli nell'investimento.

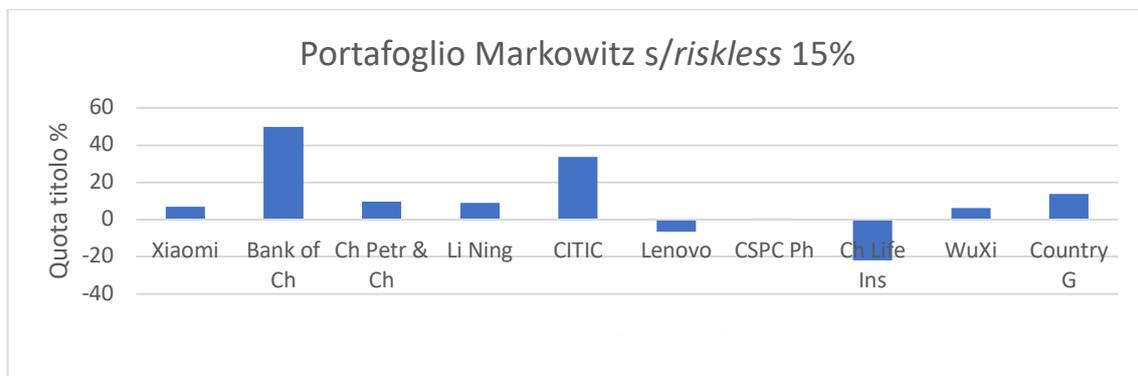


Grafico 5. 5 Composizione portafoglio Markowitz titoli Hang Seng – Periodo pre-Covid

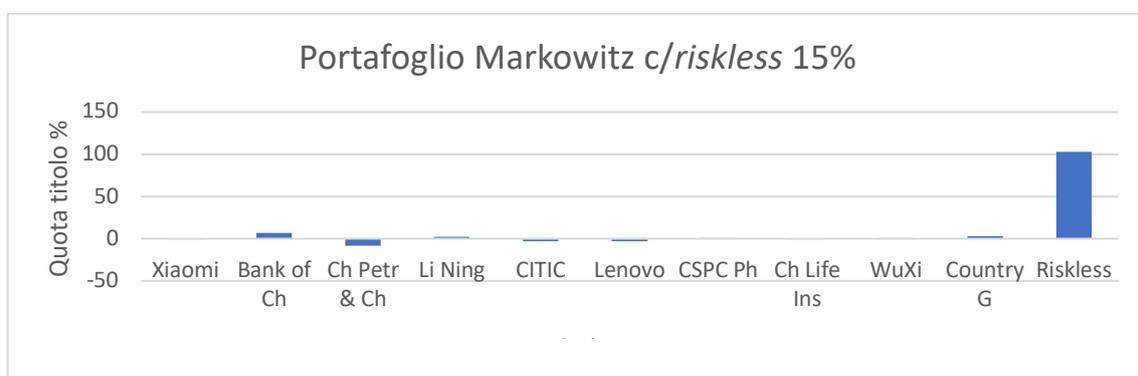


Grafico 5. 6 Composizione portafoglio Markowitz titoli Hang Seng – Periodo pre-Covid

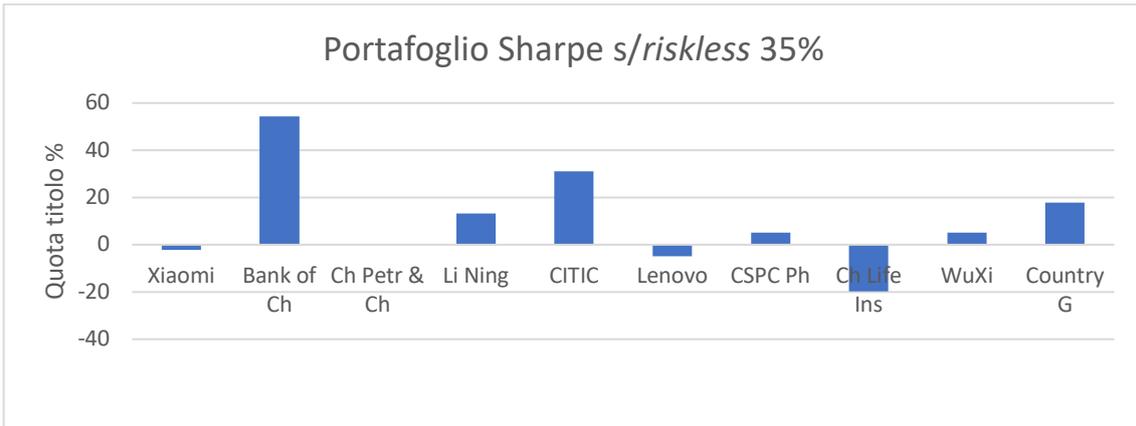


Grafico 5. 7 Composizione portafoglio Sharpe titoli Hang Seng – Periodo pre-Covid

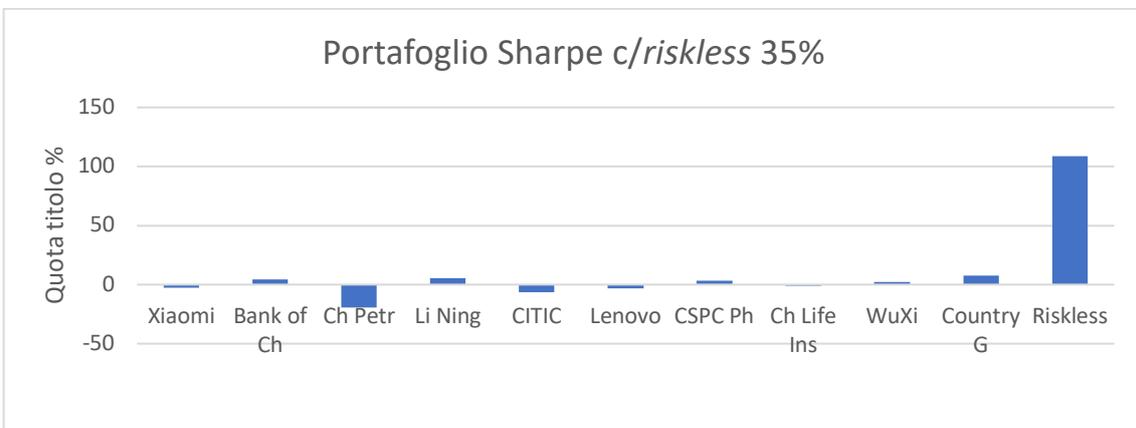


Grafico 5. 8 Composizione portafoglio Sharpe titoli Hang Seng – Periodo pre-Covid

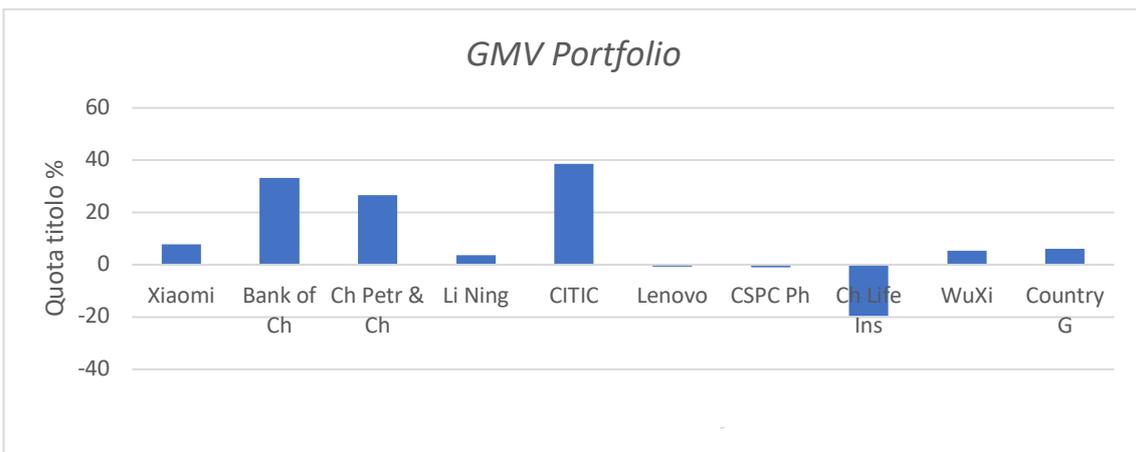


Grafico 5. 9 Composizione GMV Portfolio titoli Hang Seng – Periodo pre-Covid

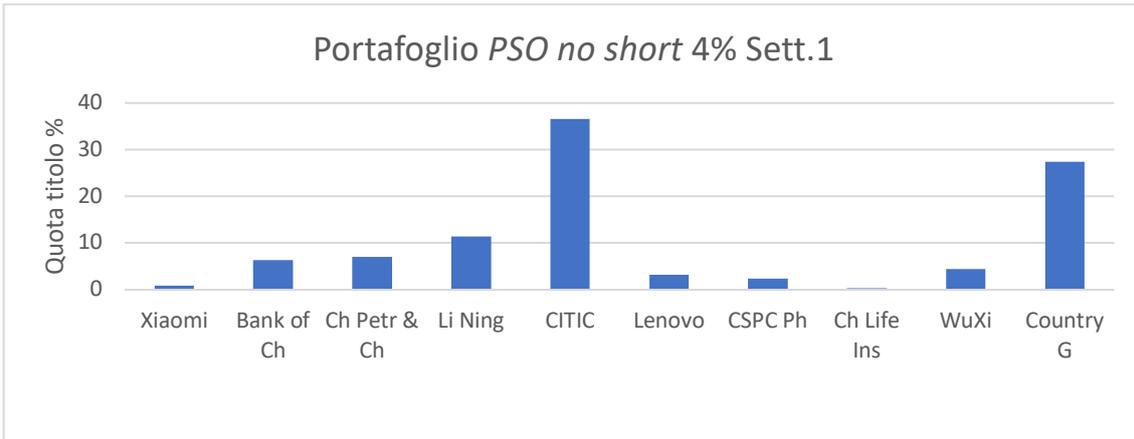


Grafico 5. 10 Composizione portafoglio con vincoli di non negatività titoli Hang Seng – Periodo pre-Covid

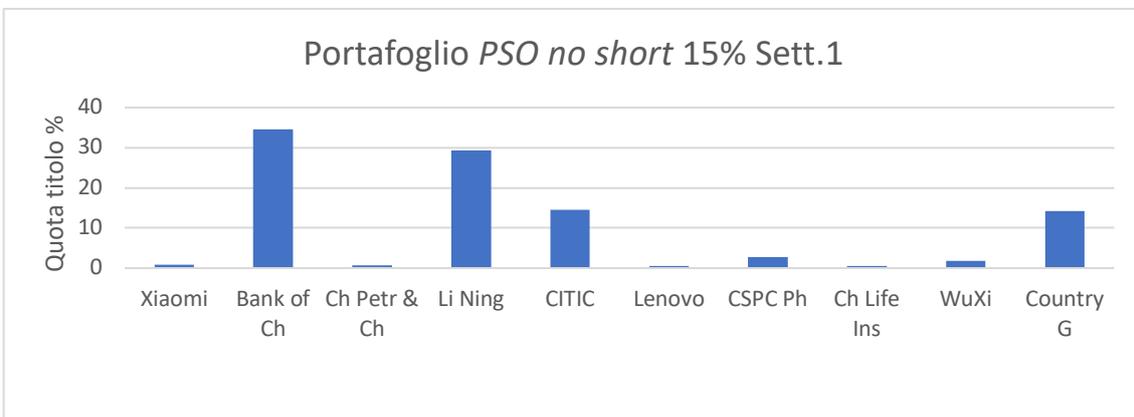


Grafico 5. 11 Composizione portafoglio con vincoli di non negatività titoli Hang Seng – Periodo pre-Covid

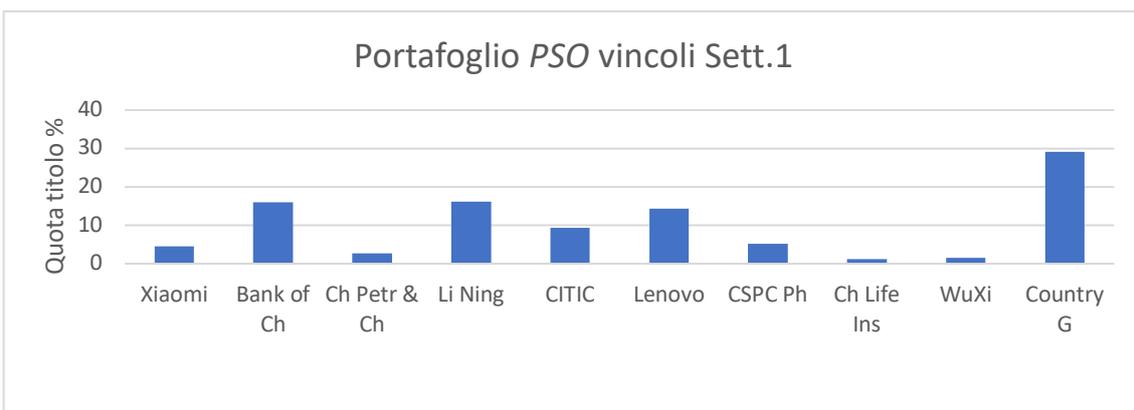


Grafico 5. 12 Composizione portafoglio con vincoli misti-interi titoli Hang Seng – Periodo pre-Covid

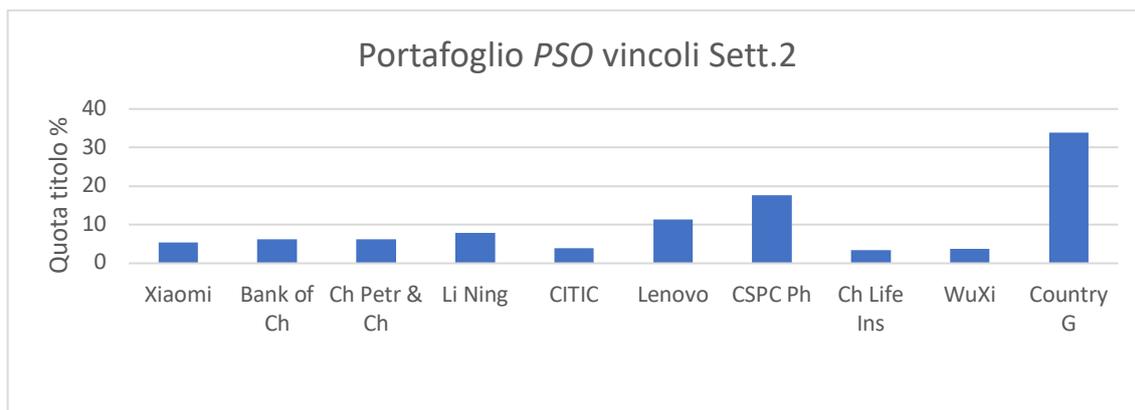


Grafico 5.13 Composizione portafoglio con vincoli misti-interi titoli Hang Seng – Periodo pre-Covid

### 5.3.2 Titoli FTSE MIB

Le rilevazioni dei dati storici relative al periodo precedente la pandemia effettuate dal 30/02/2019 al 30/02/2020 su dieci titoli appartenenti all'indice FTSE MIB indicano che i rendimenti medi realizzati sono positivi per quanto riguarda Prysmian, Intesa Sanpaolo e Generali, lusinghieri nel caso di Enel, poco significativi per quanto riguarda Leonardo. Di segno opposto gli altri titoli, fra i quali si rivelano deludenti soprattutto Eni e Brembo. Dal punto di vista della rischiosità, il titolo meno rischioso è Generali, seguito da Eni, Enel, Campari e Intesa Sanpaolo; risultano più rischiosi Leonardo, Brembo e soprattutto Prysmian. A parte Enel, nessuno fra i titoli presi in considerazione sembra particolarmente attrattivo se considerato singolarmente. Nella Tabella 5.6 sono riportati i rendimenti medi giornalieri e annui e le varianze realizzate nel periodo *in-sample*. In nessun caso la frequenza dei rendimenti logaritmici giornalieri rilevati segue la distribuzione Normale<sup>69</sup>.

<sup>69</sup> Vedi Appendice A

Titoli FTSE MIB – Periodo pre-Covid			
	Rendimento medio (d)	Rendimento medio % (y)	Varianza
Prysmian	0.00069207	19,05%	0.00046287
Campari	-0.00043426	-10,37%	0.00018119
Generali	0.00026497	6,90%	9.152e-05
Enel	0.001612	50,06%	0.00014873
Intesa Sanpaolo	0.00034299	9,03%	0.000195
Atlantia	-0.0003018	-7,32%	0.00035833
Brembo	-0.00086303	-19,56%	0.00038181
Eni	-0.00096817	-21,66%	0.00012577
Leonardo	0.00011665	2,98%	0.00035891
Moncler	-0.00028837	-7,01%	0.00034331

Tabella 5. 6 Statistiche descrittive titoli FTSE MIB – Periodo pre-Covid

In applicazione del Modello Classico della *MPT* di Markowitz, nel Grafico 5.14 è rappresentata la Frontiera Efficiente sul piano Media-Varianza determinata sia in presenza che in assenza di un'attività a rendimento certo. In presenza del titolo *riskless* la frontiera tocca l'asse delle ordinate in corrispondenza del portafoglio a rischio nullo costituito esclusivamente dal titolo a rendimento certo

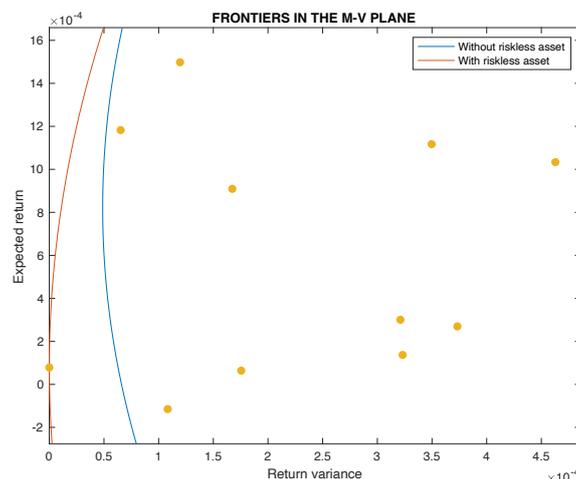


Grafico 5. 14 Frontiera Efficiente titoli FTSE MIB – Periodo pre-Covid

Nei Grafici 5.15, 5.16, 5.17 e nelle Tabelle 5.7, 5.8 e 5.9 sono riportate le performance, espresse in termini di media e varianza, ottenute nel futuro virtuale dal portafoglio

ottimo di Markowitz con e senza attività a rendimento certo nei casi di rendimento atteso annuo prefissato pari rispettivamente al 4%, al 15% e al 35%: esse vengono messe a confronto con le performance realizzate dal *GMV Portfolio*, dal portafoglio equipesato con e senza attività a rendimento certo, dal portafoglio di Sharpe con e senza attività a rendimento certo e dal portafoglio senza vendite allo scoperto individuato con la *PSO* nei due settaggi considerati<sup>70</sup>. In questo scenario il modello *PSO* non ha dato risultati nel caso di un portafoglio con vincoli misti-interi.

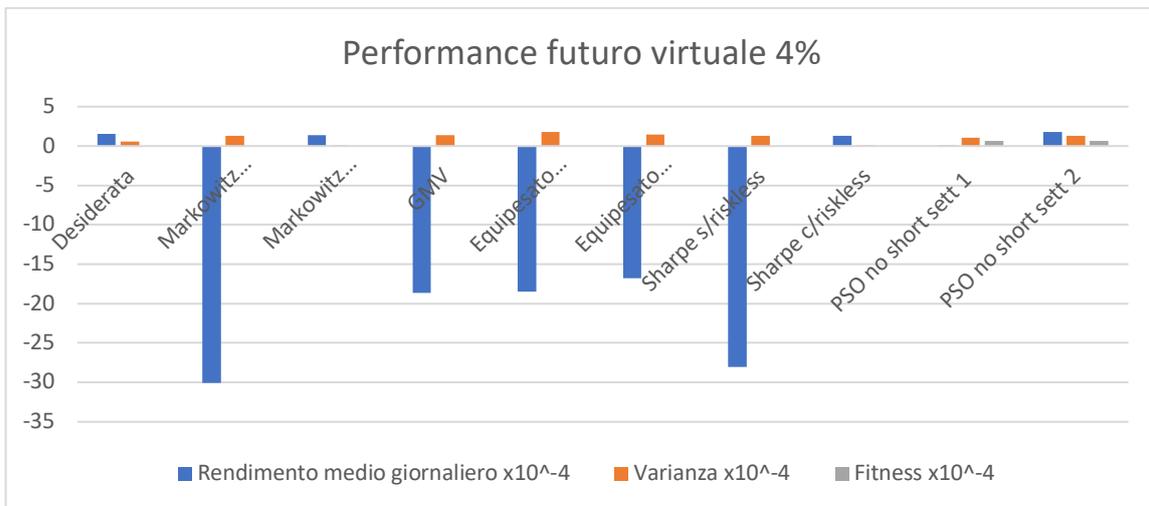


Grafico 5. 15 Performance titoli FTSE MIB – Periodo pre-Covid

Performance futuro virtuale portafogli titoli FTSE MIB – Periodo pre-Covid			
	Rendimento atteso	Varianza	Fitness
Desiderata 4% (in sample)	0.000155649863	0.000060133165	-
Markowitz N titoli	-0.003008843652	0.000131484842	-
Markowitz N+1 titoli	0.000136442529	0.000000207705	-
<i>GMV Portfolio</i>	-0.001862980428	0.000138113764	-
Equipesato N titoli	-0.001849896667	0.000176798800	-
Equipesato N+1 titoli	-0.001673865748	0.000146114711	-
Sharpe N titoli	-0.002801565614	0.000131664258	-
Sharpe N+1 titoli	0.000131114935	0.000000234529	-

<sup>70</sup> Per quanto riguarda le performance e le composizioni dei portafogli individuati attraverso *PSO* con vincoli di non negatività, i dati inseriti nei grafici e nelle tabelle sono i risultati “al meglio di” in termini di funzione di *fitness* sulle dieci *run* effettuate per ogni settaggio

PSO no short Settaggio 1	0.000009482888	0.000106055564	6.405733331173044e-05
PSO no short Settaggio 2	0.000177023162	0.000132077783	6.278947916847402e-05

Tabella 5. 7 Performance titoli FTSE MIB. Rendimento atteso prefissato 4% – Periodo pre-Covid

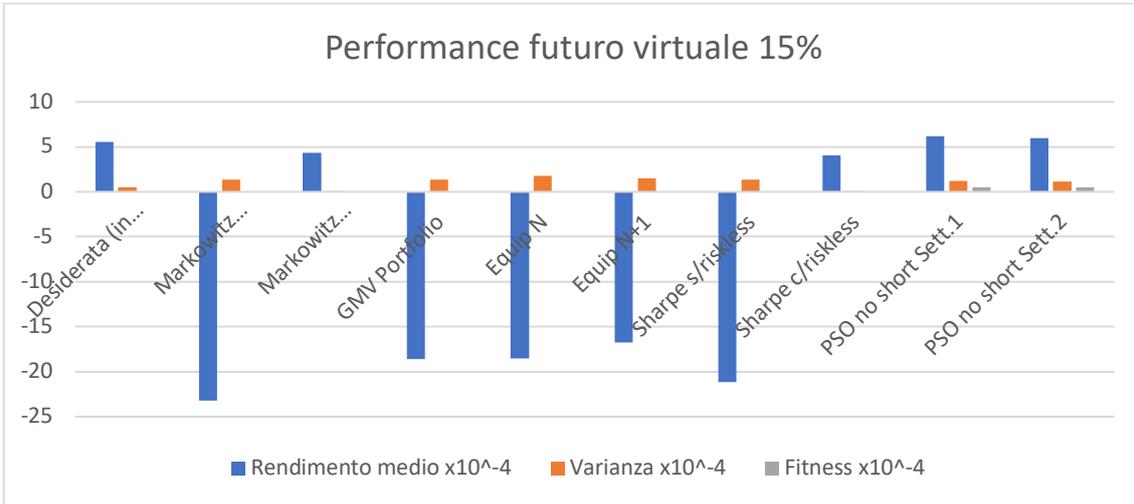


Grafico 5. 16 Performance titoli FTSE MIB – Periodo pre-Covid

Performance futuro virtuale portafogli titoli FTSE MIB – Periodo pre-Covid			
	Rendimento atteso	Varianza	Fitness
Desiderata 15% (in sample)	0.000554764707	0.000050624880	-
Markowitz N titoli	-0.002321244092	0.000132653680	-
Markowitz N+1 titoli	0.000436083681	0.000007930038	-
Sharpe s/riskless	-0.002113732612	0.000135399553	-
Sharpe c/riskless	0.000403164782	0.000008954164	-
PSO no short Settaggio 1	0.000617614006	0.000121935294	5.004634314994889e-05
PSO no short Settaggio 2	0.000599238914	0.000112192220	5.128066593696473e-05

Tabella 5. 8 Performance titoli FTSE MIB. Rendimento atteso prefissato 15% – Periodo pre-Covid

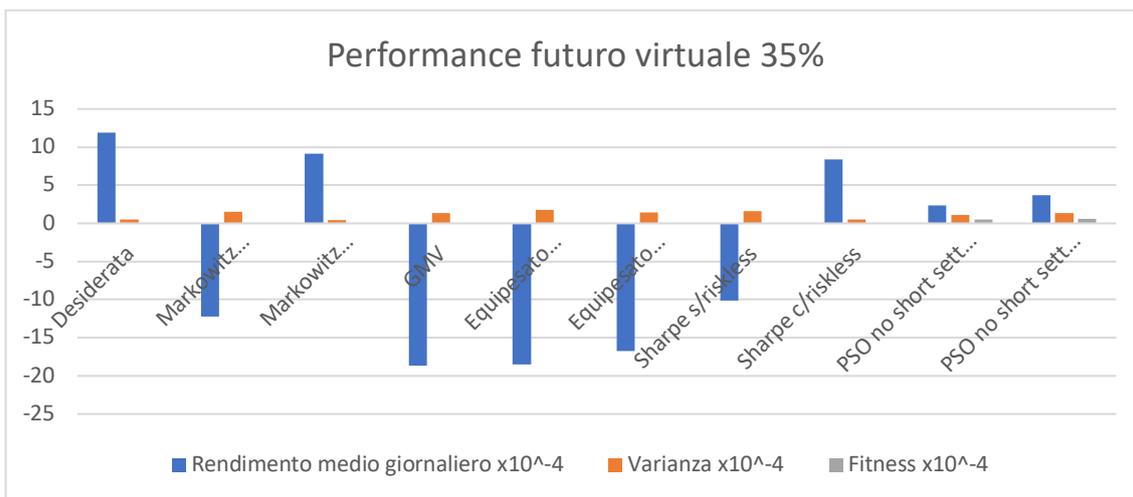


Grafico 5. 17 Performance titoli FTSE MIB – Periodo pre-Covid

Performance futuro virtuale portafogli titoli FTSE MIB – Periodo pre-Covid			
	Rendimento atteso	Varianza	Fitness
Desiderata 35% (in sample)	0.001191600632	0.000052333167	-
Markowitz N titoli	-0.001224095973	0.000151974546	-
Markowitz N+1 titoli	0.000914197320	0.000043324741	-
Sharpe N titoli	-0.001016212005	0.000158073632	-
Sharpe N+1 titoli	0.000837253162	0.000048919920	-
PSO no short Settaggio 1	0.000238966169	0.000111774768	5.357244101091117e-05
PSO no short Settaggio 2	0.000366447457	0.000136719081	5.686485826027804e-05

Tabella 5. 9 Performance titoli FTSE MIB. Rendimento atteso prefissato 35% – Periodo pre-Covid

In termini di redditività le performance dei portafogli individuati attraverso tecniche esatte sono sempre negative; l'unica eccezione è costituita dai portafogli di Markowitz e di Sharpe che inseriscono l'attività a rendimento certo, che a differenza degli altri si dimostrano essere anche gli unici meno rischiosi di quanto richiesto. I portafogli costruiti con l'introduzione del divieto di vendite allo scoperto e determinati attraverso la PSO realizzano rendimenti positivi nel futuro virtuale, superiori al rendimento atteso prefissato solo quando questo è pari al 15%, e più volatili rispetto a quanto desiderato. Nelle *run* effettuate con i rendimenti maggiori (15% e 35%) il modello PSO ha mostrato qualche difficoltà nella costruzione di portafogli a rendimento positivo.

I portafogli di Markowitz (Grafico 5.18) e di Sharpe (Grafico 5.20) costituiti dai soli titoli rischiosi risultano poco diversificati e investono oltre i due terzi del capitale su Generali, Eni e Campari, i titoli meno volatili ma anche poco redditizi. Sfruttano in modo limitato la possibilità di andare corto, data la limitata attrattiva dei titoli a disposizione: la composizione è coerente con la performance negativa effettivamente realizzata nel futuro virtuale. Con l’inserimento del titolo a rendimento certo (Grafici 5.19 e 5.21), l’investimento si sposta quasi esclusivamente a suo favore. L’introduzione del vincolo di non negatività (Grafici 5.22, 5.23 e 5.24) ha come effetto una maggiore diversificazione nei portafogli che sposta l’investimento su titoli a maggiore redditività e a maggiore volatilità.

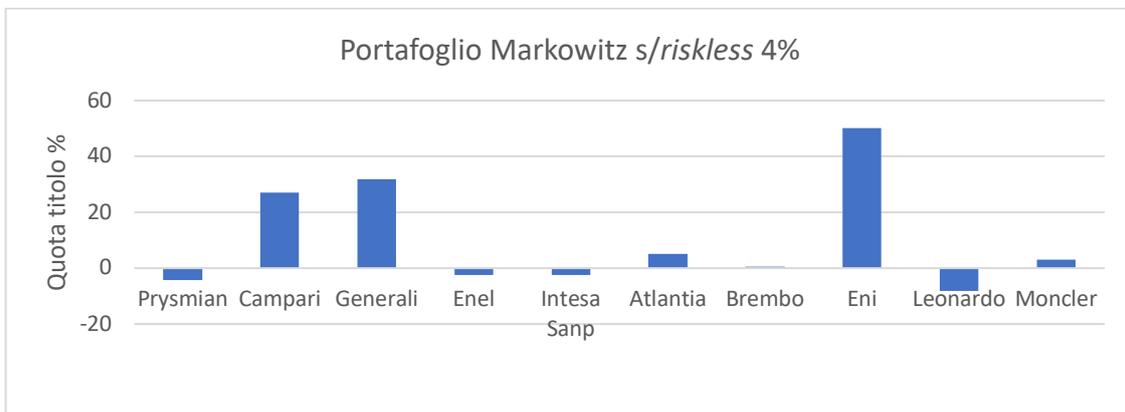


Grafico 5. 18 Composizione portafoglio Markowitz titoli FTSE MIB – Periodo pre-Covid

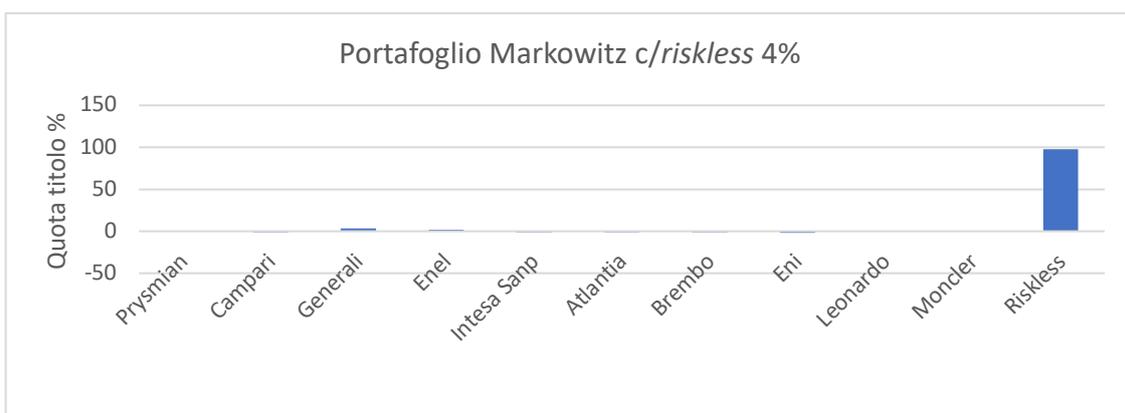


Grafico 5. 19 Composizione portafoglio Markowitz titoli FTSE MIB – Periodo pre-Covid

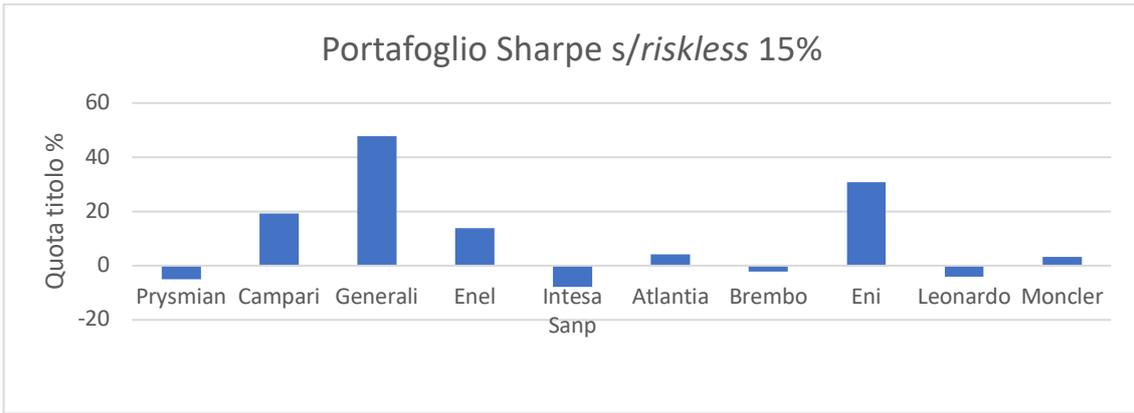


Grafico 5. 20 Composizione portafoglio Sharpe titoli FTSE MIB – Periodo pre-Covid

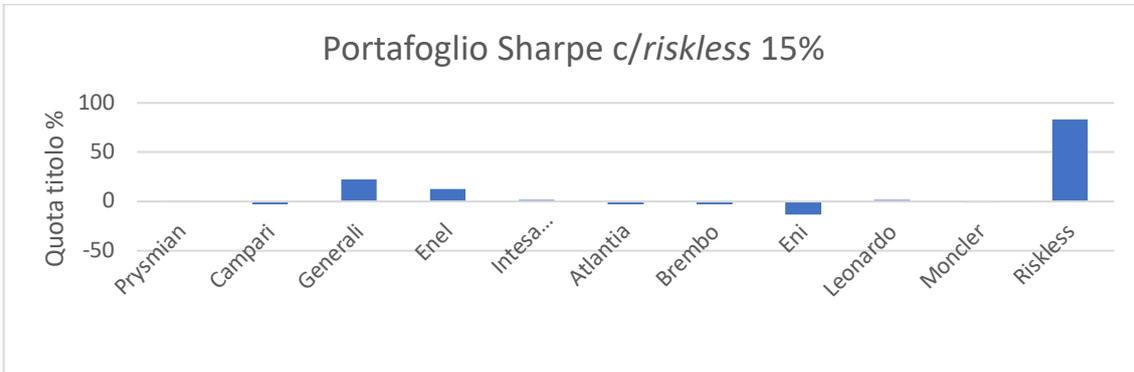


Grafico 5. 21 Composizione portafoglio Sharpe titoli FTSE MIB – Periodo pre-Covid

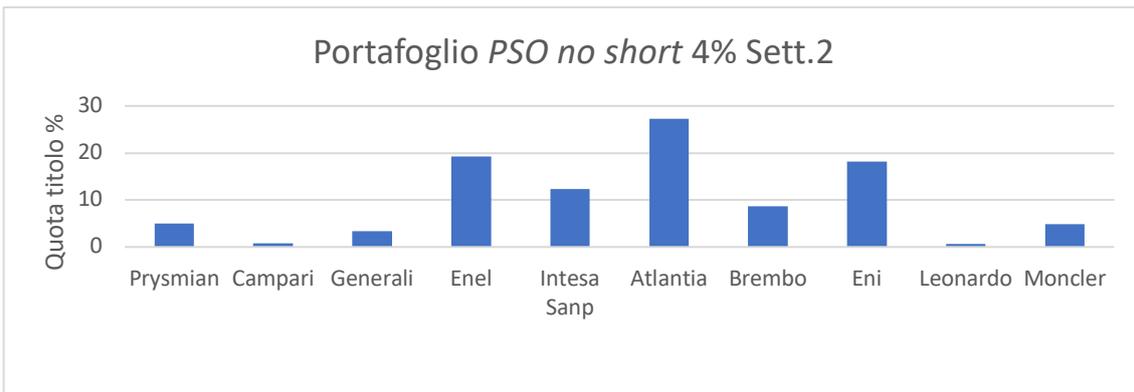


Grafico 5. 22 Composizione portafoglio con vincoli di non negatività titoli FTSE MIB – Periodo pre-Covid

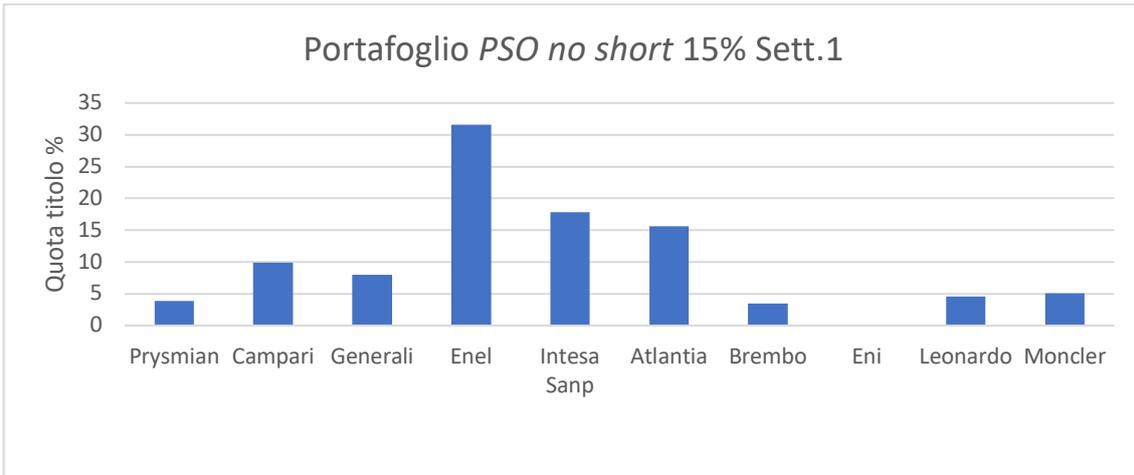


Grafico 5. 23 Composizione portafoglio con vincoli di non negatività titoli FTSE MIB – Periodo pre-Covid

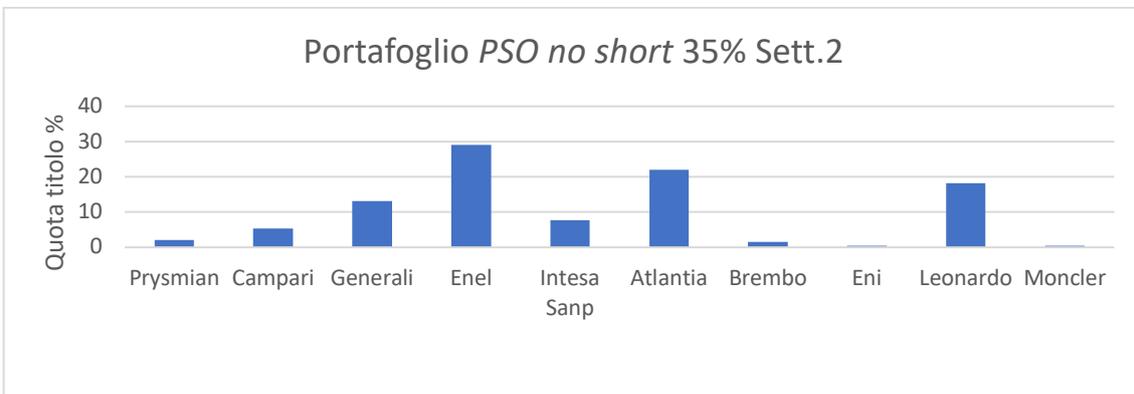


Grafico 5. 24 Composizione portafoglio con vincoli di non negatività titoli FTSE MIB – Periodo pre-Covid

### 5.3.3 Titoli S&P 100

Le rilevazioni dei dati storici relative al periodo precedente la pandemia, effettuate dal 30/02/2019 al 30/02/2020 su dieci titoli dell'indice S&P 100, indicano che i rendimenti medi realizzati sono positivi in meno di metà dei casi considerati, e che il titolo con la maggiore redditività registrata è Apple. Tra i titoli a rendimento negativo, sono particolarmente deludenti le performance di DuPont e Boeing, due fra i tre titoli maggiormente rischiosi. Si rileva la minore volatilità dei titoli di questo mercato rispetto

ai titoli di Hong Kong. Nella Tabella 5.10 sono riportati i rendimenti medi giornalieri e annui e le varianze realizzate nel periodo *in-sample* calcolati a partire dalla serie storica dei rendimenti logaritmici quotidiani. Si rappresenta inoltre il rendimento medio annuo in termini percentuali approssimato alla seconda cifra decimale. Solo la frequenza dei rendimenti logaritmici giornalieri del titolo Caterpillar segue la distribuzione Normale<sup>71</sup>.

Titoli S&P 100 - Periodo pre-Covid			
	Rendimento medio (d)	Rendimento medio % (y)	Varianza
Apple	0.0021755	72.92%	0.00028993
Starbucks	0.00066968	18.38%	0.00016432
BlackRock	0.00049542	13.29%	0.00021339
Exxon Mobil	-0.00137	-29.21%	0.00018363
Caterpillar	-0.00018255	-4.5%	0.00024544
Boeing	-0.0015759	-32.80%	0.00035663
Goldman Sachs	0.0003086	8.86%	0.00020916
Pfizer	-0.00071266	-16.44%	0.00015223
FedEx	-0.0010028	-22.34%	0.0004541
DuPont de Nem.	-0.0020052	-39.70%	0.00047099

Tabella 5. 10 Statistiche descrittive titoli S&P 100 – Periodo pre-Covid

In applicazione del Modello Classico della *MPT* di Markowitz, nel Grafico 5.25 è rappresentata la Frontiera Efficiente sul piano Media-Varianza sia in presenza che in assenza di un'attività a rendimento certo. In della presenza del titolo *riskless* la frontiera tocca l'asse delle ordinate in corrispondenza del portafoglio a rischio nullo costituito esclusivamente dal titolo a rendimento certo.

---

<sup>71</sup> Vedi Appendice A

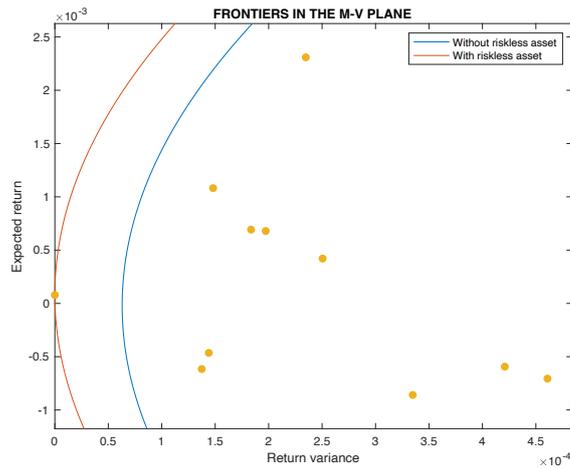


Grafico 5. 25 Frontiera Efficiente titoli S&P 100 – Periodo pre-Covid

Nei Grafici 5.26, 5.27, 5.28 e nelle Tabelle 5.11, 5.12 e 5.13 sono riportate le performance, espresse in termini di media e varianza, ottenute nel futuro virtuale dal portafoglio ottimo di Markowitz con e senza attività a rendimento certo nei casi di rendimento atteso prefissato annuo pari rispettivamente al 4%, al 15% e al 35%: esse vengono messe a confronto con le performance realizzate dal *GMV Portfolio*, dal portafoglio equipesato con e senza attività a rendimento certo, dal portafoglio di Sharpe con e senza attività a rendimento certo, e dai portafogli con vincolo di divieto di vendite allo scoperto e con vincoli misti-interi individuati mediante la *PSO* nei due diversi settaggi considerati<sup>72</sup>.

<sup>72</sup> Per quanto riguarda le performance e le composizioni dei portafogli individuati attraverso *PSO* con vincoli di non negatività e *PSO* con vincoli misti-interi, i dati inseriti nei grafici e nelle tabelle sono i risultati “al meglio di” in termini di funzione di *fitness* sulle dieci *run* effettuate per ogni settaggio

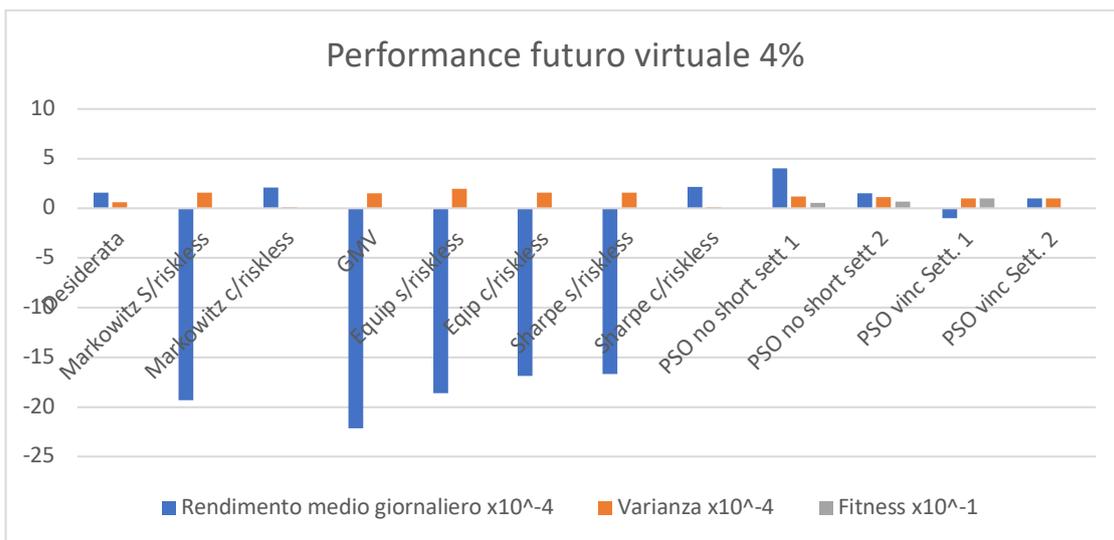


Grafico 5. 26 Performance titoli S&P 100 – Periodo pre-Covid

Performance futuro virtuale portafogli titoli S&P 100 - Periodo pre-Covid			
	Rendimento atteso	Varianza	Fitness
Desiderata 4% (in sample)	0.000155649863	0.000063491956	-
Markowitz N titoli	-0.001930913091	0.000157241619	-
Markowitz N+1 titoli	0.000207903520	0.000000111939	-
GMV Portfolio	-0.002217147997	0.000151707665	-
Equipesato N titoli	-0.001863232825	0.000192674849	-
Equipesato N+1 titoli	-0.001685989528	0.000159235413	-
Sharpe N titoli	-0.001669395349	0.000155979541	-
Sharpe N+1 titoli	0.000216510117	0.000000105675	-
PSO no short settaggio 1	0.000401221047	0.000121098542	5.540636617295842e-05
PSO no short settaggio 2	0.000151090400	0.000112708149	6.872557073097531e-05
PSO vincoli settaggio 1	-0.0001	0.0001	0.0001
PSO vincoli settaggio 2	0.0001	0.0001	0.0000

Tabella 5. 11 Performance titoli S&P 100. Rendimento atteso prefissato 4% – Periodo pre-Covid

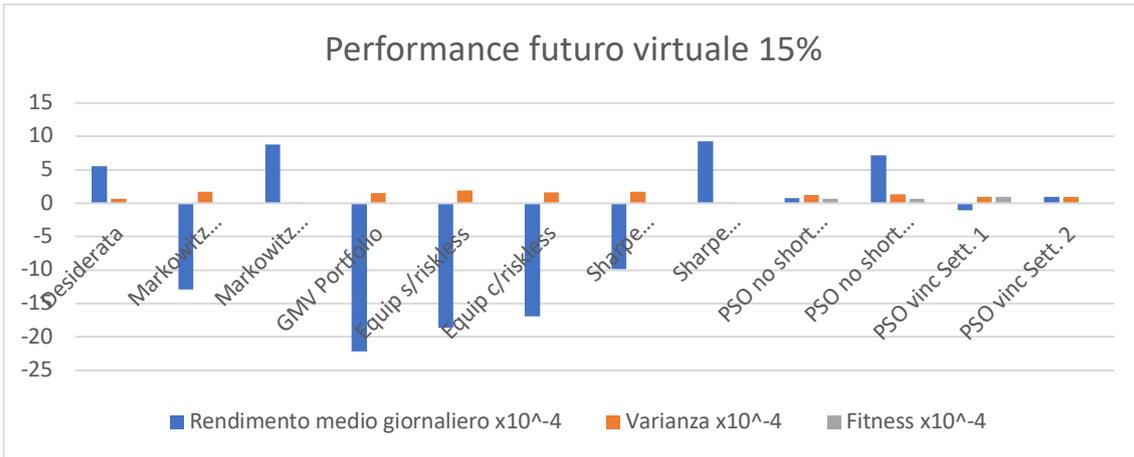


Grafico 5. 27 Performance titoli S&P 100 – Periodo pre-Covid

Performance futuro virtuale portafogli titoli S&P 100 - Periodo pre-Covid			
	Rendimento atteso	Varianza	Fitness
Desiderata 15% (in sample)	0.000554764707	0.000068715136	-
Markowitz N titoli	-0.001284571620	0.000174243309	-
Markowitz N+1 titoli	0.000877637087	0.000004273755	-
Sharpe N titoli	-0.000986302801	0.000172666488	-
Sharpe N+1 titoli	0.000930816757	0.000004034610	-
PSO no short settaggio 1	0.000078860903	0.000125745605	7.172968316986376e-05
PSO no short settaggio 2	0.000715487013	0.000135921894	6.388923264109184e-05
PSO vincoli settaggio 1	-0.0001	0.0001	0.0001
PSO vincoli settaggio 2	0.0001	0.0001	0.0000

Tabella 5. 12 Performance titoli S&P 100. Rendimento atteso prefissato 15% – Periodo pre-Covid

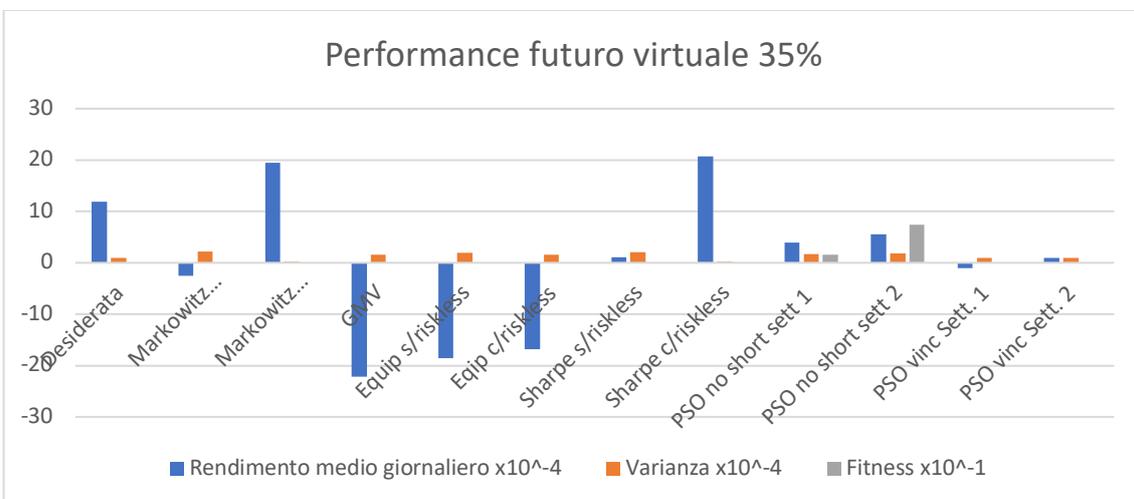


Grafico 5. 28 Performance titoli S&P 100 – Periodo pre-Covid

Performance futuro virtuale portafogli titoli S&P 100 - Periodo pre-Covid			
	Rendimento atteso	Varianza	Fitness
Desiderata 35% (in sample)	0.001191600632	0.000088521148	-
Markowitz N titoli	-0.000253255760	0.000214304541	-
Markowitz N+1 titoli	0.001946277858	0.000023349107	-
Sharpe N titoli	0.000103653839	0.000211717740	-
Sharpe N+1 titoli	0.002070579250	0.000022042572	-
PSO no short settaggio 1	0.000388546404	0.000165794139	0.156943670444408
PSO no short settaggio 2	0.000551778682	0.000179451777	0.743100530200554
PSO vincoli settaggio 1	-0.0001	0.0001	0.0001
PSO vincoli settaggio 2	0.0001	0.0001	0.0000

Tabella 5. 13 Performance titoli S&P 100. Rendimento atteso prefissato 35% – Periodo pre-Covid

Dal punto di vista della redditività i portafogli individuati con tecniche esatte producono un rendimento negativo, ad eccezione del portafoglio di Sharpe nel caso del rendimento atteso prefissato pari al 35% e dei portafogli di Markowitz e di Sharpe che inseriscono l'attività a rendimento certo, che invece realizzano un rendimento superiore ad ogni rendimento atteso prefissato e si dimostrano gli unici meno rischiosi di quanto prefissato. I portafogli selezionati attraverso le tecniche euristiche garantiscono in tre scenari su quattro una redditività positiva, ma sono sempre accompagnati da una marcata rischiosità; il portafoglio con vincoli misti-interi del settaggio 2 realizza un rendimento negativo. Quasi tutte le iterazioni effettuate per la costruzione del portafoglio senza vendite allo scoperto hanno prodotto rendimenti positivi; con vincoli misti-interi più della metà hanno invece individuato portafogli a rendimento negativo. Il Modello Classico di Markowitz e il Modello Diagonale di Sharpe con i soli titoli rischiosi costruiscono portafogli simili in cui il capitale viene distribuito principalmente tra Apple, Starbucks e Pfizer (Grafico 5.29 e Grafico 5.31). In presenza dell'attività a rendimento certo, sia nel caso di Markowitz che di Sharpe il portafoglio si presenta concentrato quasi esclusivamente sull'attività *riskless*. I portafogli approssimati che realizzano la migliore performance in termini di rendimento sono quelli che investono quasi tutto il capitale

sul titolo Starbucks, ad alto rendimento e bassa volatilità (Grafici 5.33 e 5.34). Il portafoglio con vincoli misti-interi risulta diversificato (Grafico 5.35).

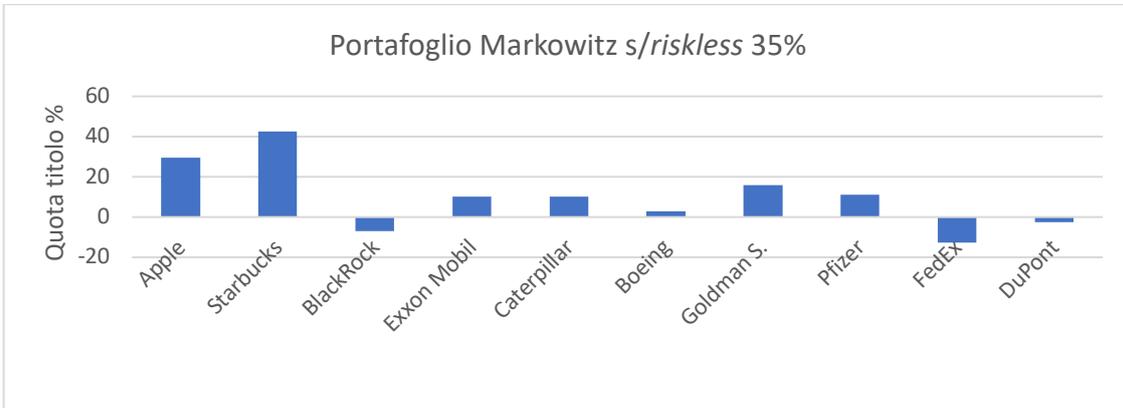


Grafico 5. 29 Composizione portafoglio Markowitz titoli S&P 100 – Periodo pre-Covid

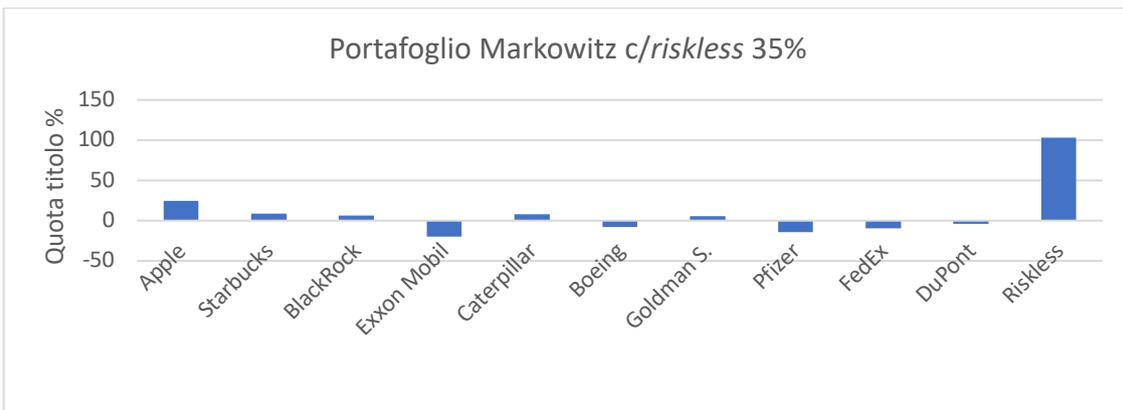


Grafico 5. 30 Composizione portafoglio Markowitz titoli S&P 100 – Periodo pre-Covid

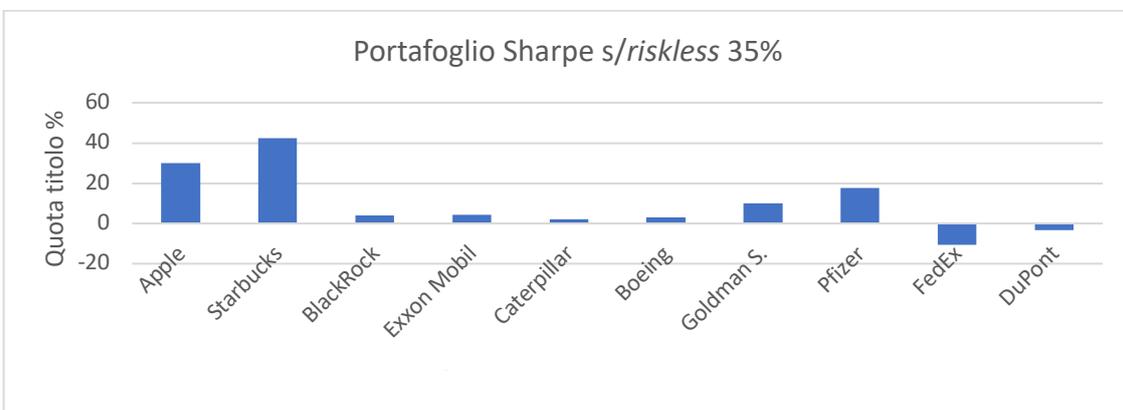


Grafico 5. 31 Composizione portafoglio Sharpe titoli S&P 100 – Periodo pre-Covid

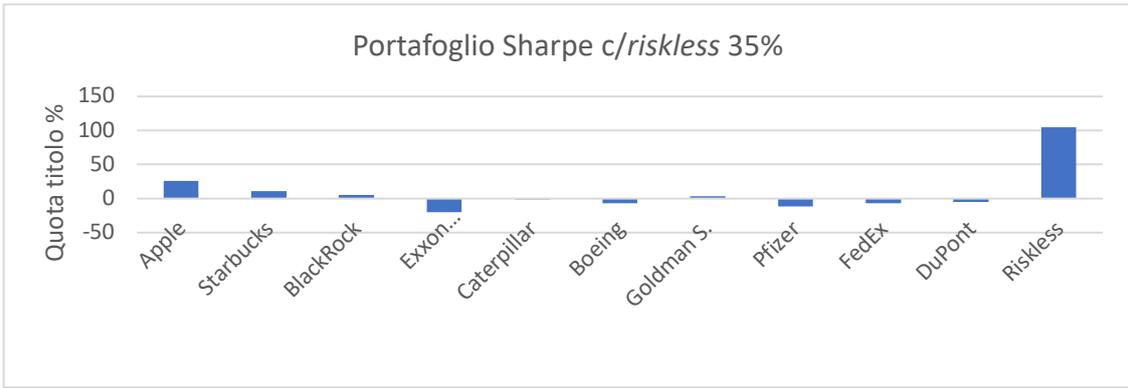


Grafico 5. 32 Composizione portafoglio Sharpe titoli S&P 100 – Periodo pre-Covid

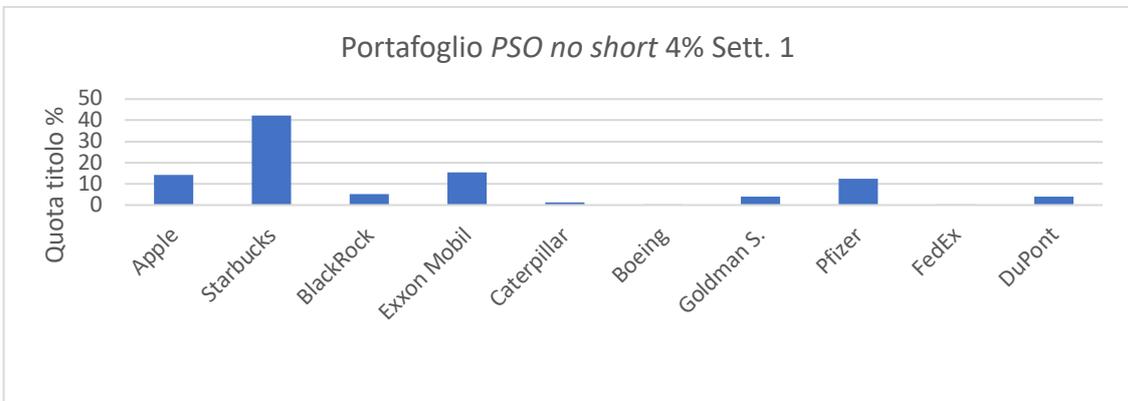


Grafico 5. 33 Composizione portafoglio con vincoli di non negatività titoli S&P 100 – Periodo pre-Covid

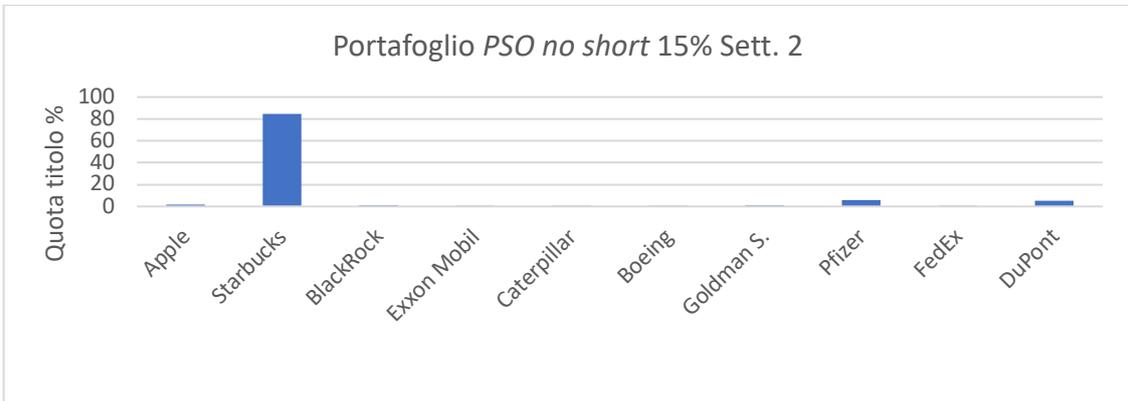


Grafico 5. 34 Composizione portafoglio con vincoli di non negatività titoli S&P 100 – Periodo pre-Covid

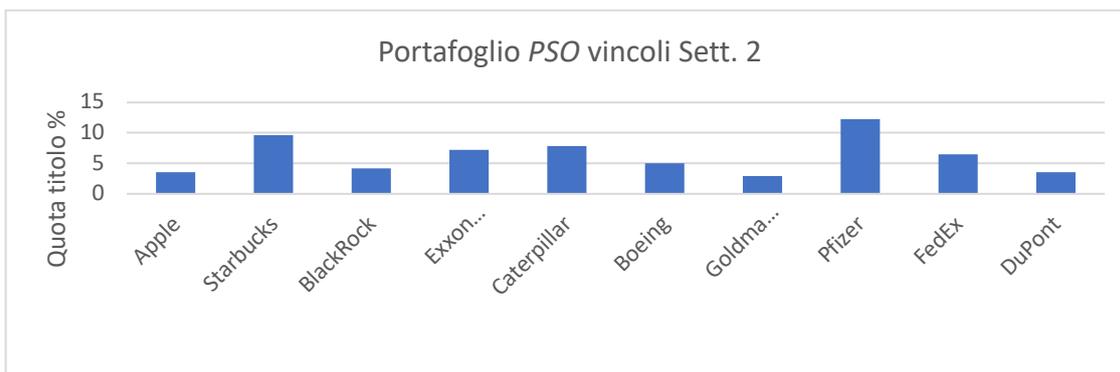


Grafico 5. 35 Composizione portafoglio con vincoli misti-interi titoli S&P 100 – Periodo pre-Covid

## 5.4 Periodo Covid

### 5.4.1 Titoli Hang Seng

Le rilevazioni dei dati storici relative al periodo di piena diffusione della pandemia, effettuate dal 30/02/2020 al 30/02/2021 sui titoli dell'indice Hang Seng, indicano che i rendimenti medi realizzati sono positivi in sette su dieci casi considerati: si confermano particolarmente brillanti per quanto riguarda WuXi Biologics, Lenovo e Li Ning, a cui si aggiungono Country Garden Services Holdings e Xiaomi. I rendimenti sono negativi per i titoli China Life Insurance Company e CITIC. La migliore prestazione in termini di redditività si accompagna ad un marcato aumento della volatilità dei titoli, in più di un caso pari ad oltre il doppio rispetto al periodo precedente. Nella Tabella 5.14 sono riportati i rendimenti medi attesi giornalieri e le varianze di ciascuna attività finanziaria, calcolate a partire dalla serie storica dei rendimenti logaritmici quotidiani. Si rappresenta inoltre il rendimento medio annuo in termini percentuali approssimato alla seconda cifra decimale. La frequenza dei rendimenti logaritmici giornalieri rilevati segue la distribuzione Normale solo per quanto riguarda il titolo Xiaomi.

Titoli Hang Seng – Periodo Covid			
	Rendimento medio (d)	Rendimento medio % (y)	Varianza
Xiaomi	0.002097	69.54%	0.0012724
Ind. Bank of Ch.	0.00033555	8.82%	0.0002914
Ch. Petr. & Chem.	0.00060598	16.49%	0.00058998
Li Ning	0.0027448	99.52%	0.0012105
CITIC	-0.00093914	-21.08%	0.00054229
Lenovo	0.0029641	110.82%	0.0007374
CSPC Pharm.	-0.00037007	-8.91%	0.00069328
Ch. Life Insurance	-0.0011151	-24.51%	0.00027655
WuXi Biologics	0.0030114	113.34%	0.0011632
Country Garden S.	0.002411	83.46%	0.0080371

Tabella 5. 14 Statistiche descrittive titoli Hang Seng – Periodo Covid

In applicazione del Modello Classico della *MPT* di Markowitz, nel Grafico 5.36 è rappresentata la Frontiera Efficiente sul piano Media-Varianza sia in presenza che in assenza di un'attività a rendimento certo. In presenza del titolo *riskless* la frontiera tocca l'asse delle ordinate, in corrispondenza del portafoglio a rischio nullo costituito esclusivamente dal titolo a rendimento certo.

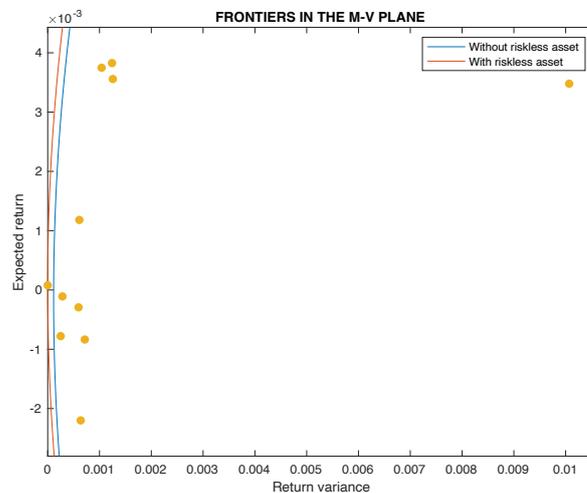


Grafico 5. 36 Frontiera Efficiente titoli Hang Seng – Periodo Covid

Nei Grafici 5.37, 5.38, 5.39 e nelle Tabelle 5.15, 5.16 e 5.17 sono riportate le performance, espresse in termini di media e varianza, ottenute nel futuro virtuale dal portafoglio ottimo di Markowitz con e senza attività a rendimento certo nei casi di rendimento atteso prefissato annuo pari rispettivamente al 4%, al 15% e al 35%: esse vengono messe a confronto con le performance realizzate dal *GMV Portfolio*, dal

portafoglio equipesato con e senza attività a rendimento certo, dal portafoglio di Sharpe con e senza attività a rendimento certo e dal portafoglio senza vendite allo scoperto individuato con la *PSO* nei due diversi settaggi considerati<sup>73</sup>. In questo scenario il modello *PSO* non ha dato risultati nel caso di un portafoglio con vincoli misti-interi.

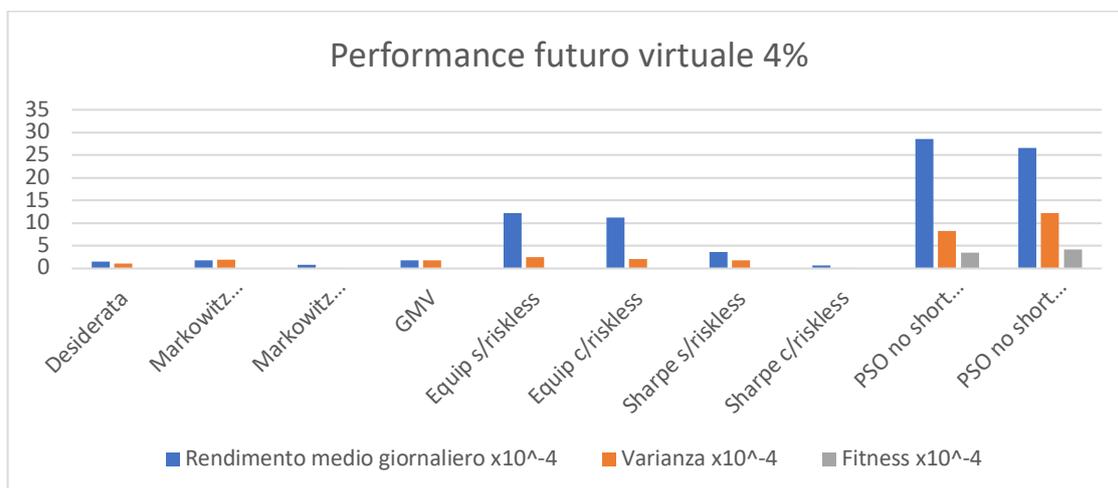


Grafico 5. 37 Performance titoli Hang Seng – Periodo Covid

Performance futuro virtuale portafogli titoli Hang Seng - Periodo Covid			
	Rendimento atteso	Varianza	Fitness
Desiderata 4% (in sample)	0.000155649863	0.000114832318	-
Markowitz N titoli	0.000182786544	0.000189957294	-
Markowitz N+1 titoli	0.000080386641	0.000000131350	-
<i>GMV Portfolio</i>	0.000175448704	0.000182561704	-
Equipesato N titoli	0.001225624637	0.000247142280	-
Equipesato N+1 titoli	0.001122062709	0.000204249819	-
Sharpe N titoli	0.000363936219	0.000186385022	-
Sharpe N+1 titoli	0.000060944727	0.000000193353	-
PSO no short settaggio 1	0.002859542743	0.000831547410	3.492339222659843e-04
PSO no short settaggio 2	0.002651692889	0.001222577798	4.189720261488012e-04

Tabella 5. 15 Performance titoli Hang Seng. Rendimento atteso prefissato 4% – Periodo Covid

<sup>73</sup> Per quanto riguarda le performance e le composizioni dei portafogli individuati attraverso *PSO* con vincoli di non negatività, i dati inseriti nei grafici e nelle tabelle sono i risultati “al meglio di” in termini di funzione di *fitness* sulle dieci *run* effettuate per ogni settaggio

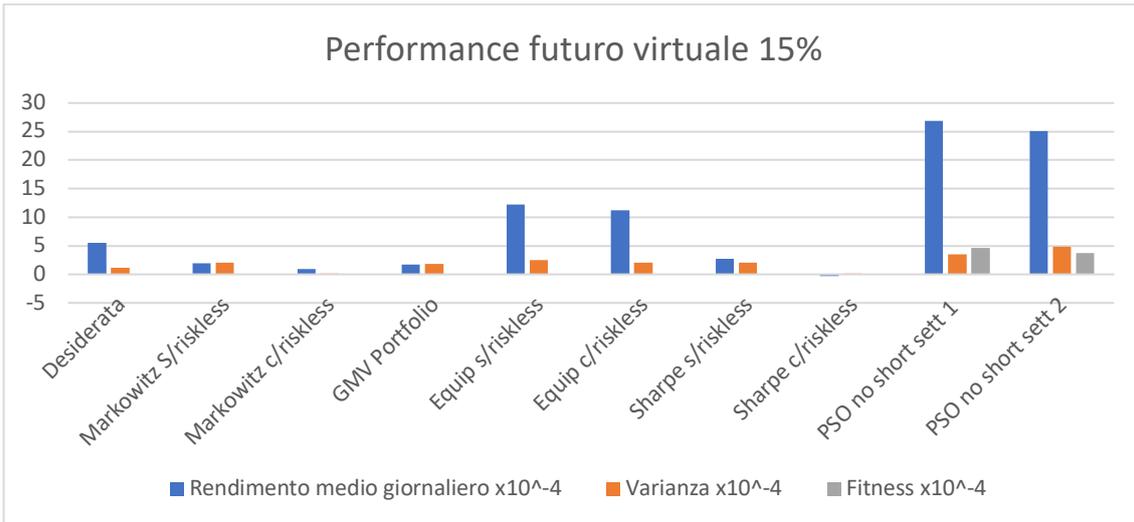


Grafico 5. 38 Performance titoli Hang Seng – Periodo Covid

Performance futuro virtuale portafogli titoli Hang Seng – Periodo Covid			
	Rendimento atteso	Varianza	Fitness
Desiderata 15% (in sample)	0.000554764707	0.000120629505	-
Markowitz N titoli	0.000193216808	0.000206647911	-
Markowitz N+1 titoli	0.000089717538	0.000005014873	-
Sharpe N titoli	0.000276511329	0.000208763931	-
Sharpe N+1 titoli	-0.000030412942	0.000007382101	-
PSO no short settaggio 1	0.002691126319	0.000344977187	4.604587796781643e-04
PSO no short settaggio 2	0.002505342674	0.000489234971	3.762913333006980e-04

Tabella 5. 16 Performance titoli Hang Seng. Rendimento atteso prefissato 15% – Periodo Covid

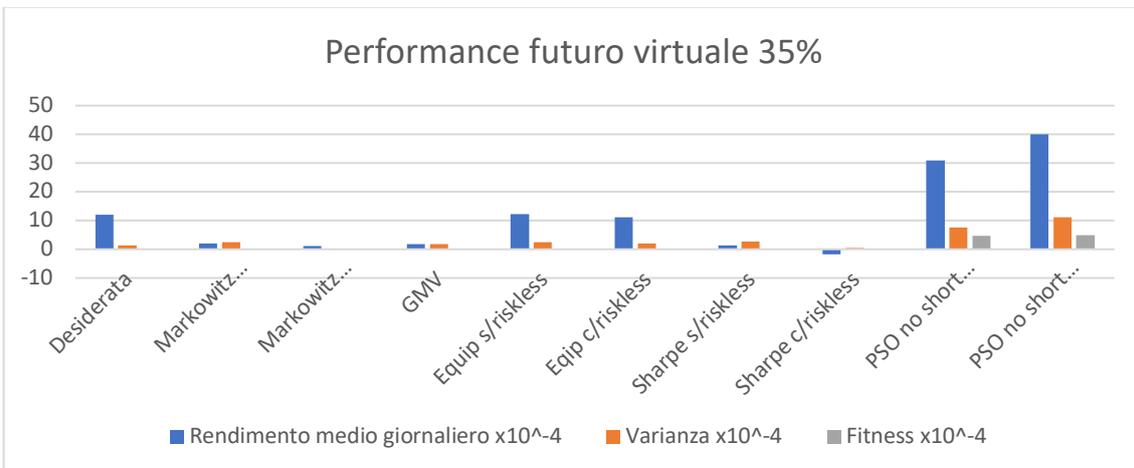


Grafico 5. 39 Performance titoli Hang Seng – Periodo Covid

Performance futuro virtuale portafogli titoli Hang Seng - Periodo Covid			
	Rendimento atteso	Varianza	Fitness
Desiderata 35% (in sample)	0.001191600632	0.000139854480	-
Markowitz N titoli	0.000209859552	0.000248300560	-
Markowitz N+1 titoli	0.000104606111	0.000027398110	-
Sharpe N titoli	0.000137014361	0.000266628592	-
Sharpe N+1 titoli	-0.000176185133	0.000040331155	-
PSO no short settaggio 1	0.003082161687	0.000767153442	4.703475638354732e-04
PSO no short settaggio 2	0.003997425503	0.001102907540	4.939618874416423e-04

Tabella 5. 17 Performance titoli Hang Seng. Rendimento atteso prefissato 35% – Periodo Covid

Con un rendimento atteso pari al 4% tutti i portafogli garantiscono un rendimento positivo: le performance migliori sono quelle realizzate nel futuro virtuale dai portafogli equipesati, con e senza attività a rendimento certo, e soprattutto dai portafogli con vincoli di non negatività individuati attraverso la *PSO*. Con il rendimento atteso prefissato pari al 15% e al 35%, il portafoglio di Sharpe composto dai titoli rischiosi e dal titolo a rendimento certo è l'unico a realizzare rendimenti negativi. In questi due ultimi scenari i portafogli con vincoli di non negatività e i portafogli equipesati realizzano un rendimento superiore al rendimento atteso desiderato. La varianza associata ai portafogli è sempre superiore rispetto a quanto desiderato, tranne nel caso dei portafogli di Markowitz e di Sharpe quando introducono l'attività a rendimento certo. Senza attività a rendimento certo portafoglio di Markowitz (Grafico 5.40), il portafoglio di Sharpe (Grafico 5.42) e il *GMV Portfolio* (Grafico 5.44) dedicano le quote maggiori ai due titoli Industrial and Commercial Bank of China e China Life Insurance Company e vanno a corto sul titolo CITIC, che ha bassa volatilità e rendimento medio negativo. Nettamente più diversificati risultano i portafogli con vincolo di non negatività (Grafici 5.45, 5.46 e 5.47), che non possono sfruttare l'effetto leva delle vendite allo scoperto e comprimono il rischio suddividendo il capitale su più titoli.

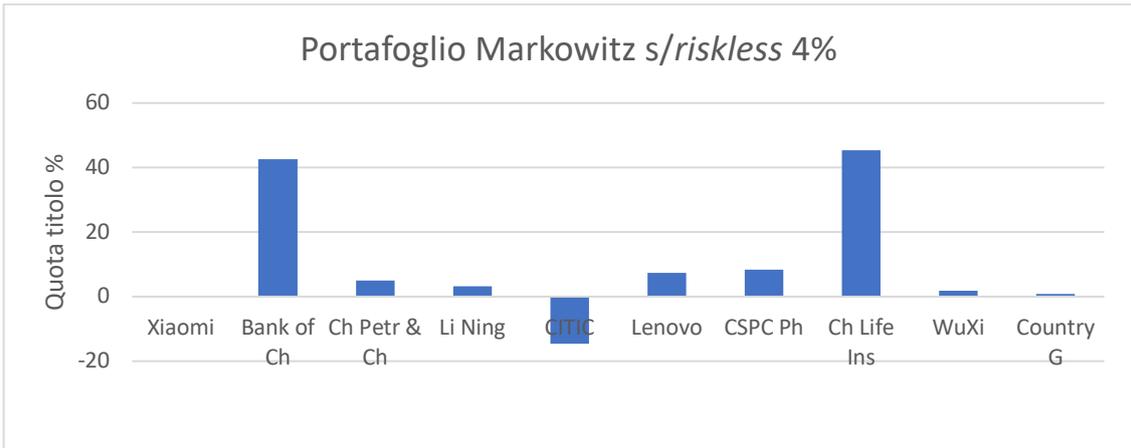


Grafico 5. 40 Composizione portafoglio Markowitz titoli Hang Seng – Periodo Covid



Grafico 5. 41 Composizione portafoglio Markowitz titoli Hang Seng – Periodo Covid

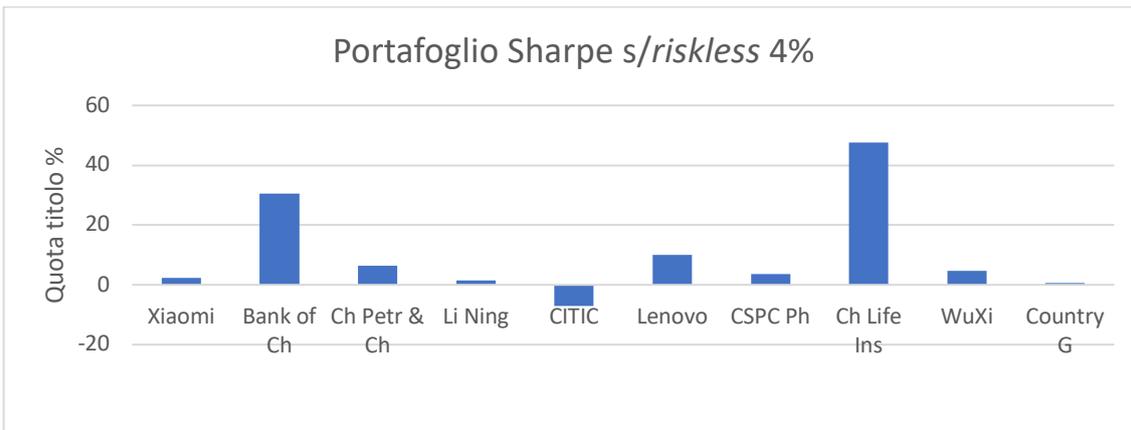


Grafico 5. 42 Composizione portafoglio Sharpe titoli Hang Seng – Periodo Covid

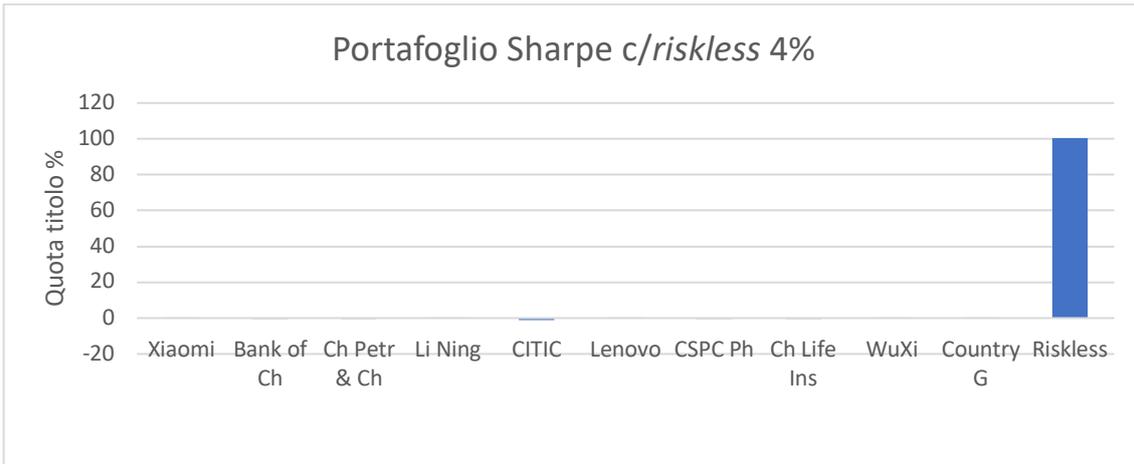


Grafico 5. 43 Composizione portafoglio Sharpe titoli Hang Seng – Periodo Covid

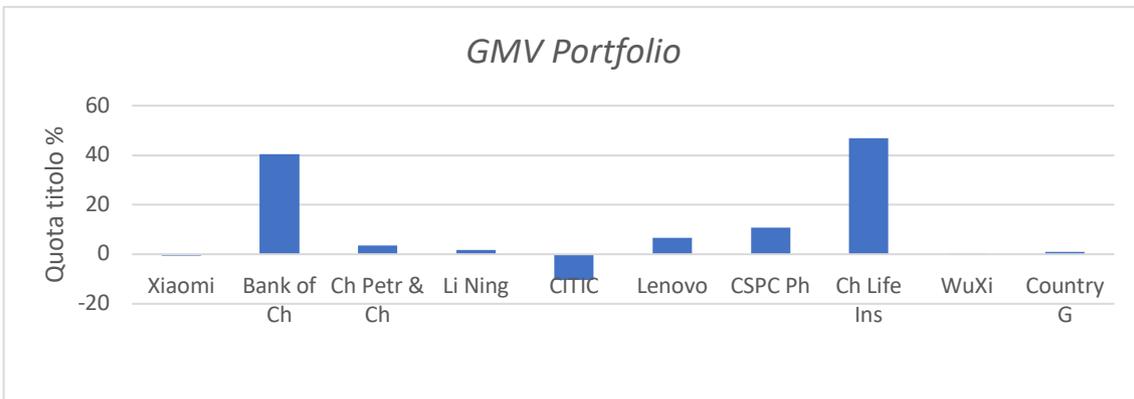


Grafico 5. 44 Composizione GMV Portfolio titoli Hang Seng – Periodo Covid

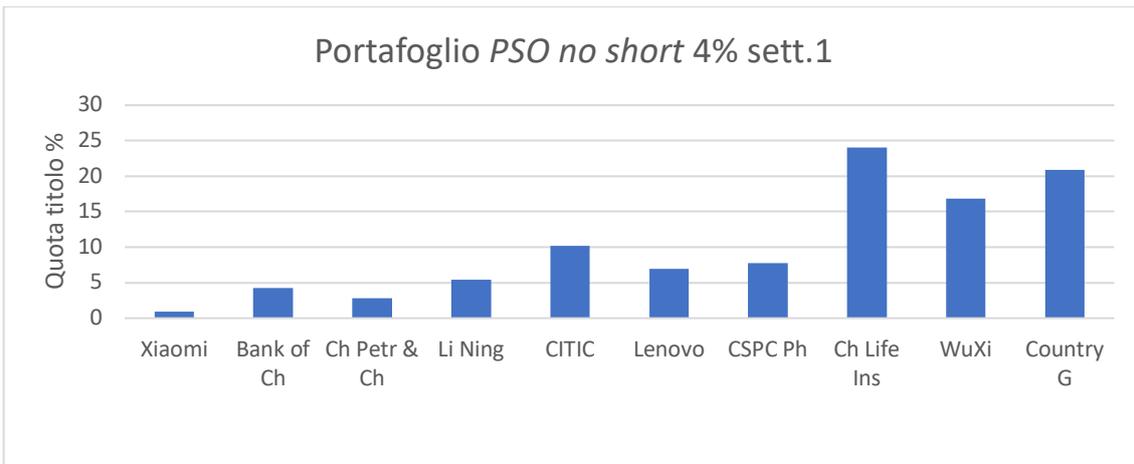


Grafico 5. 45 Composizione portafoglio con vincoli di non negatività titoli Hang Seng – Periodo Covid

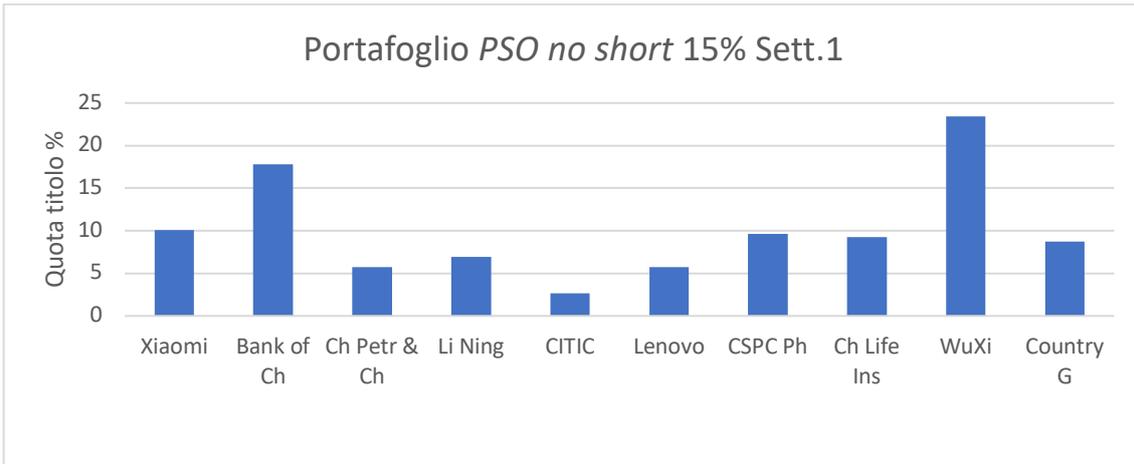


Grafico 5. 46 Composizione portafoglio con vincoli di non negatività titoli Hang Seng – Periodo Covid

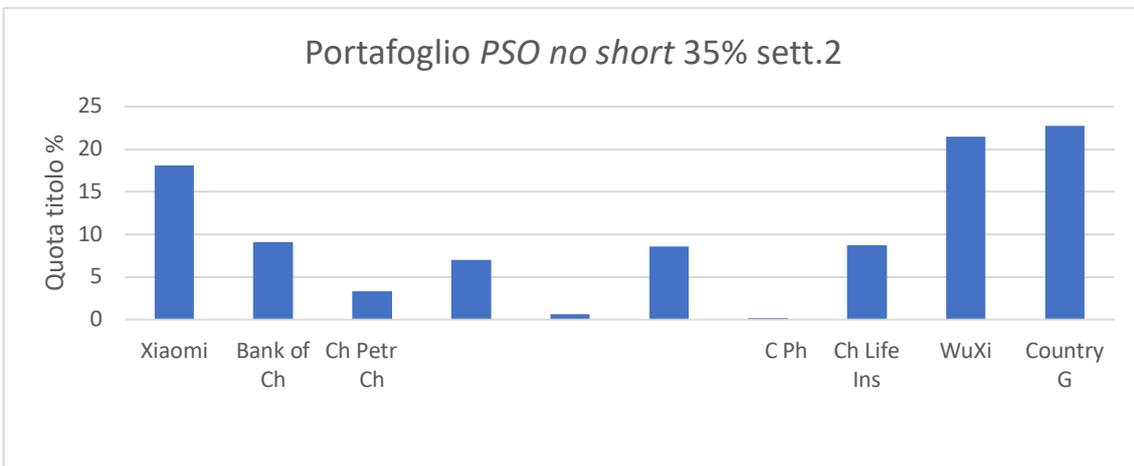


Grafico 5. 47 Composizione portafoglio con vincoli di non negatività titoli Hang Seng – Periodo Covid

#### 5.4.2 Titoli FTSE MIB Covid

Le rilevazioni dei dati storici relative al periodo di piena diffusione della pandemia effettuate dal 30/02/2020 al 30/02/2021 su dieci titoli appartenenti all'indice FTSE MIB indicano che i rendimenti medi realizzati sono positivi per quanto riguarda Moncler, Prysmian, Brembo, Campari e Intesa Sanpaolo. Di segno opposto Leonardo, Atlantia ed Eni. Dal punto di vista della rischiosità, i titoli sono diventati più volatili. Nella Tabella 5.18 sono riportati i rendimenti medi giornalieri e annui e le varianze di ciascuna attività

finanziaria, realizzate nel periodo *in-sample*. Si rappresenta inoltre il rendimento medio annuo in termini percentuali approssimato alla seconda cifra decimale. Come nel periodo precedente, nessuna frequenza dei rendimenti logaritmici giornalieri rilevati segue la distribuzione Normale.

Titoli FTSE MIB - Periodo Covid			
	Rendimento medio (d)	Rendimento medio % (y)	Varianza
Prysmian	0.0011998	35,28	0.0007124
Campari	0.00097657	27,89	0.00057809
Generali	0.00012414	3,18	0.00045927
Enel	0.00031266	8,2	0.00059452
Intesa Sanpaolo	0.00062723	17,12	0.00096116
Atlantia	-0.00064173	-14,94	0.0017865
Brembo	0.00098633	28,20	0.00079411
Eni	-0.00032976	-7,98	0.001125
Leonardo	-0.0009478	-21,26	0.00145
Moncler	0.0017475	55,27	0.00073913

Tabella 5. 18 Statistiche descrittive titoli FTSE MIB – Periodo Covid

In applicazione del Modello Classico della *MPT* di Markowitz, nel Grafico 5.48 è rappresentata la Frontiera Efficiente sul piano Media-Varianza determinata sia in presenza che in assenza di un'attività a rendimento certo. In presenza del titolo *riskless* la frontiera tocca l'asse delle ordinate in corrispondenza del portafoglio a rischio nullo costituito esclusivamente dal titolo a rendimento certo.

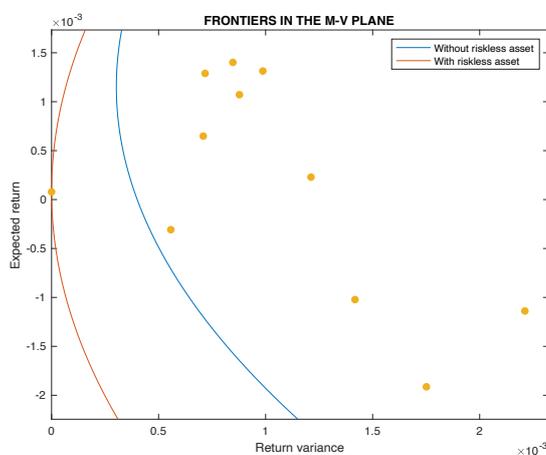


Grafico 5. 48 Frontiera Efficiente titoli FTSE MIB – Periodo Covid

Nei Grafici 5.49, 5.50, 5.51 e nelle Tabelle 5.19, 5.20 e 5.21 sono riportate le performance, espresse in termini di media e varianza, ottenute nel futuro virtuale dal portafoglio ottimo di Markowitz con e senza attività a rendimento certo nei casi di rendimento atteso prefissato annuo pari rispettivamente al 4%, al 15% e al 35%: esse vengono messe a confronto con le performance realizzate dal *GMV Portfolio*, dal portafoglio equipesato con e senza attività a rendimento certo, dal portafoglio di Sharpe con e senza attività a rendimento certo, e dai portafogli con vincolo di divieto di vendite allo scoperto e con vincoli misti-interi individuati mediante la *PSO* nei due diversi settaggi considerati<sup>74</sup>.

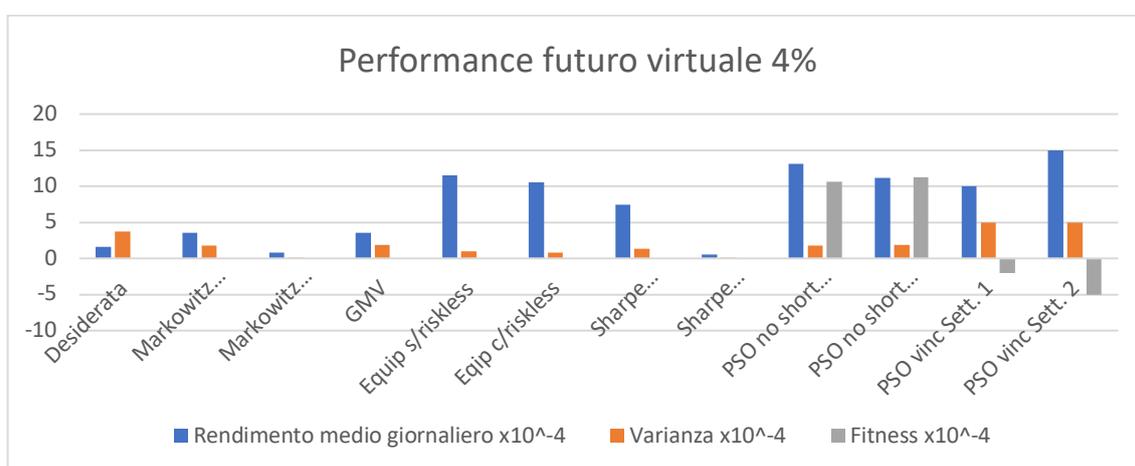


Grafico 5. 49 Performance titoli FTSE MIB – Periodo Covid

Performance futuro virtuale portafogli titoli FTSE MIB - Periodo Covid			
	Rendimento atteso	Varianza	Fitness
Desiderata 4% (in sample)	0.000155649863	0.000375526378	-
Markowitz N titoli	0.000354965055	0.000177947008	-
Markowitz N+1 titoli	0.000082735445	0.000000205931	-
<i>GMV Portfolio</i>	0.000352518496	0.000183021284	-
Equipesato N titoli	0.001154413855	0.000097849130	-

<sup>74</sup> Per quanto riguarda le performance e le composizioni dei portafogli individuati attraverso *PSO* con vincoli di non negatività e *PSO* con vincoli misti-interi, i dati inseriti nei grafici e nelle tabelle sono i risultati “al meglio di” in termini di funzione di *fitness* sulle dieci *run* effettuate per ogni settaggio

Equipurato N+1 titoli	0.001057325635	0.000080867049	-
Sharpe N titoli	0.000747994578	0.000135183551	-
Sharpe N+1 titoli	0.000052389657	0.000000176337	-

Tabella 5. 19 Performance titoli FTSE MIB. Rendimento atteso prefissato 4% – Periodo Covid

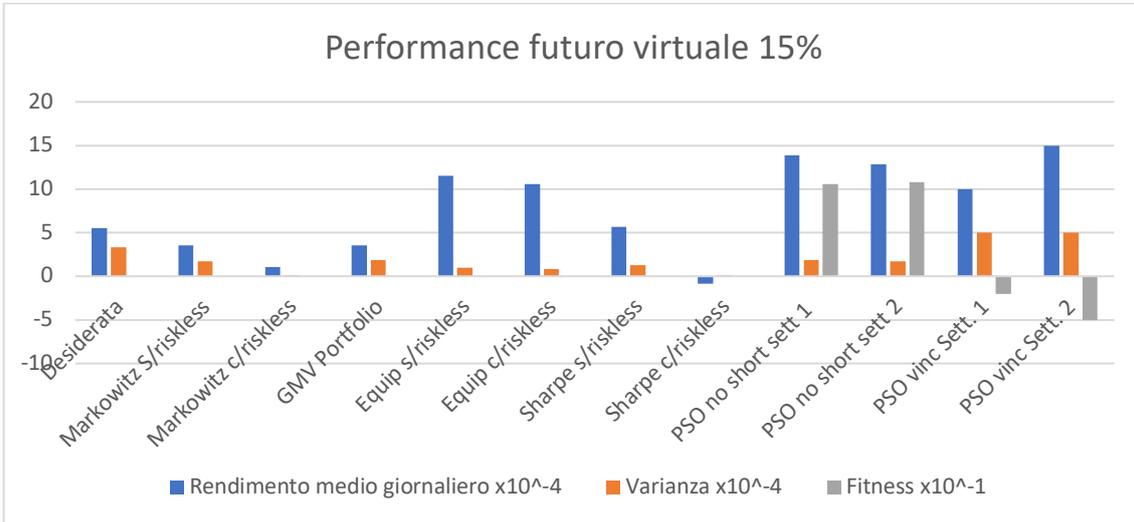


Grafico 5. 50 Performance titoli FTSE MIB – Periodo Covid

Performance futuro virtuale FTSE MIB - Periodo Covid			
	Rendimento atteso	Varianza	Fitness
Desiderata 15% (in sample)	0.000554764707	0.000328820023	-
Markowitz N titoli	0.000353984085	0.000171854018	-
Markowitz N+1 titoli	0.000104230665	0.000007862297	-
Sharpe N titoli	0.000570924597	0.000125534048	-
Sharpe N+1 titoli	-0.000083274234	0.000006732420	-
PSO no short settaggio 1	0.001388826502	0.000183351505	0.001058630287899
PSO no short settaggio 2	0.001280578979	0.000168721478	0.001077393010600
PSO vincoli settaggio 1	0.0010	0.0005	-0.0002
PSO vincoli settaggio 2	0.0015	0.0005	-0.0005

Tabella 5. 20 Performance titoli FTSE MIB. Rendimento atteso prefissato 15% – Periodo Covid

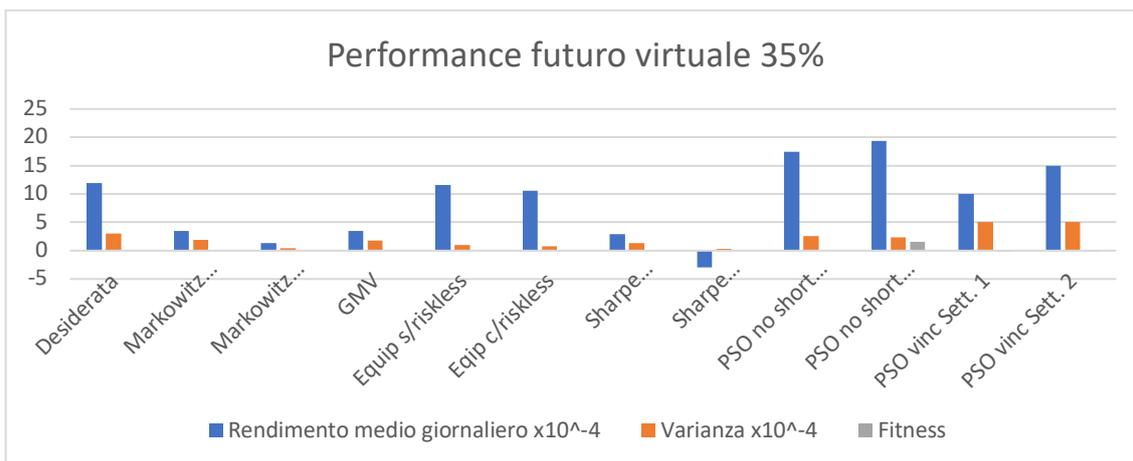


Grafico 5. 51 Performance titoli FTSE MIB – Periodo Covid

Performance futuro virtuale portafogli titoli FTSE MIB - Periodo Covid			
	Rendimento atteso	Varianza	Fitness
Desiderata 35% (in sample)	0.001191600632	0.000302799499	-
Markowitz N titoli	0.000352418828	0.000184662641	-
Markowitz N+1 titoli	0.000138528883	0.000042954644	-
Sharpe N titoli	0.000288388063	0.000131866813	-
Sharpe N+1 titoli	-0.000299742354	0.000036781710	-
PSO no short settaggio 1	0.001739355489	0.000260271190	0.152610123072459
PSO no short settaggio 2	0.001936251440	0.000232178295	1.529673966411639
PSO vincoli settaggio 1	0.0010	0.0005	-0.0002
PSO vincoli settaggio 2	0.0015	0.0005	-0.0005

Tabella 5. 21 Performance titoli FTSE MIB. Rendimento atteso prefissato 35% – Periodo Covid

Con un rendimento atteso prefissato pari al 4% i portafogli realizzano nel periodo *out-of-sample* rendimenti positivi superiori al rendimento atteso prefissato, ad eccezione dei portafogli di Markowitz e di Sharpe che inseriscono il titolo *riskless* che garantiscono un rendimento positivo ma inferiore al 4%. Nel caso del rendimento atteso prefissato pari al 15% e al 35%, solo i portafogli di Markowitz e di Sharpe con il titolo *riskless* realizzano un rendimento negativo. Le performance migliori in termini di rendimento sono realizzate dai portafogli costruiti con vincoli di non negatività e con vincoli misti-interi. Tutti i portafogli esatti e i portafogli con vincolo di non negatività permettono di ridurre la rischiosità dell'investimento: la volatilità è sempre inferiore a quanto

desiderato. Inoltre, tutti i portafogli sono meno rischiosi del titolo meno rischioso preso da solo.

Il portafoglio di Markowitz costituito dai soli titoli rischiosi (Grafico 5.52) risulta poco diversificato, andando a concentrare tutto il capitale sul titolo Generali (106%), il meno volatile. Con l'inserimento del titolo a rendimento certo, l'investimento si sposta a suo favore (Grafico 5.53). Sono costituiti nello stesso modo il *GMV Portfolio* (Grafico 5.56) e il portafoglio di Sharpe, con e senza attività a rendimento certo (Grafici 5.54 e 5.55). I portafogli con vincolo di non negatività e con vincoli misti-interi individuati mediante la *PSO* sono invece più diversificati (Grafici da 5.57 a 5.61).

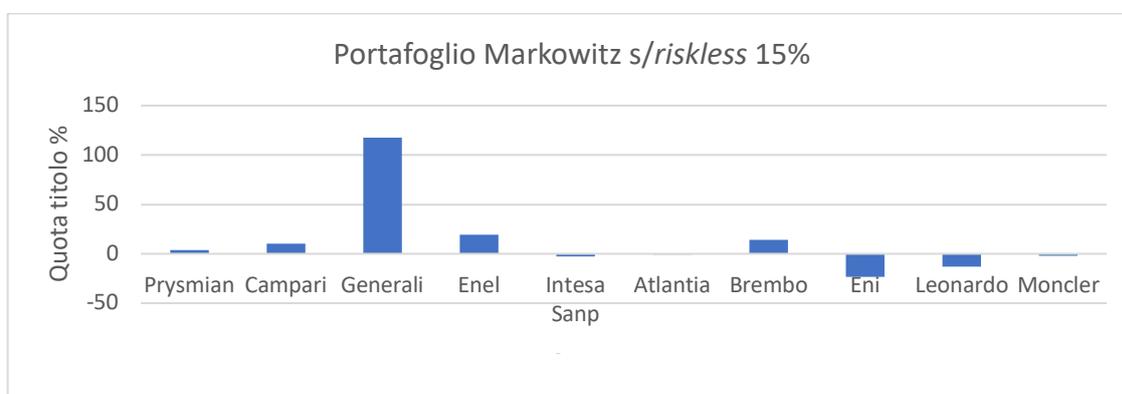


Grafico 5. 52 Composizione portafoglio Markowitz titoli FTSE MIB – Periodo Covid

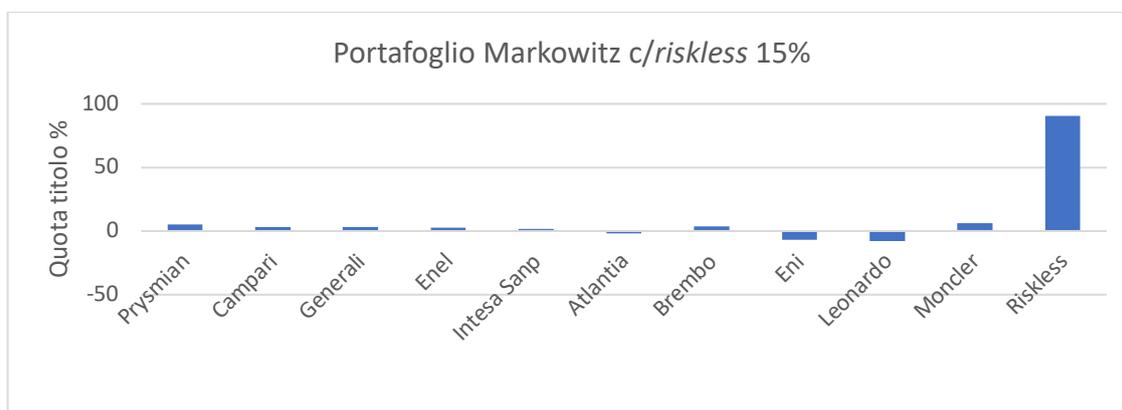


Grafico 5. 53 Composizione portafoglio Markowitz titoli FTSE MIB – Periodo Covid

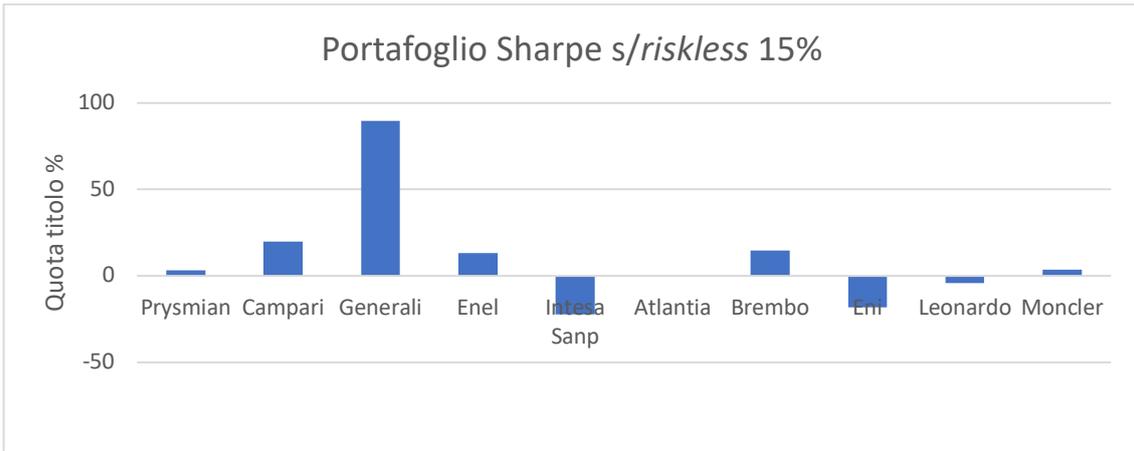


Grafico 5. 54 Composizione portafoglio Sharpe titoli FTSE MIB – Periodo Covid

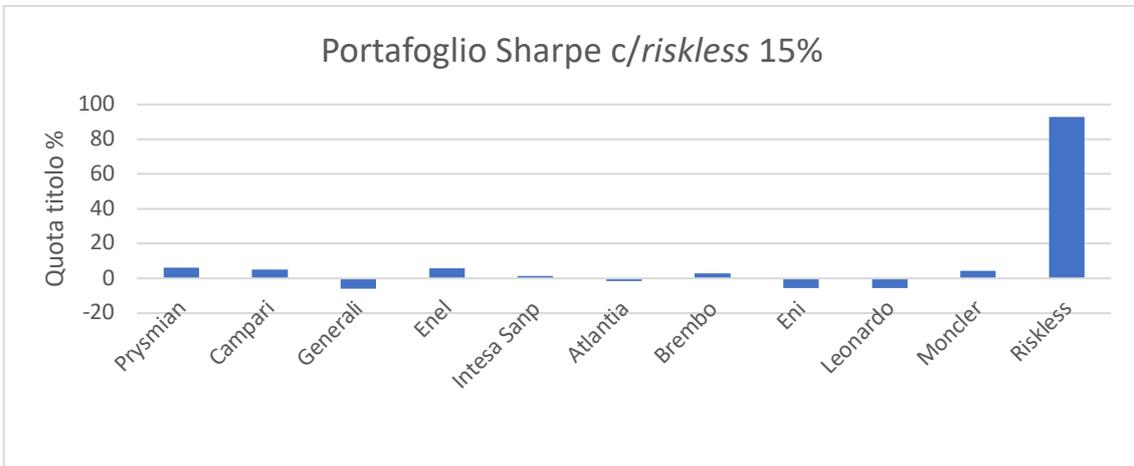


Grafico 5. 55 Composizione portafoglio Sharpe titoli FTSE MIB – Periodo Covid

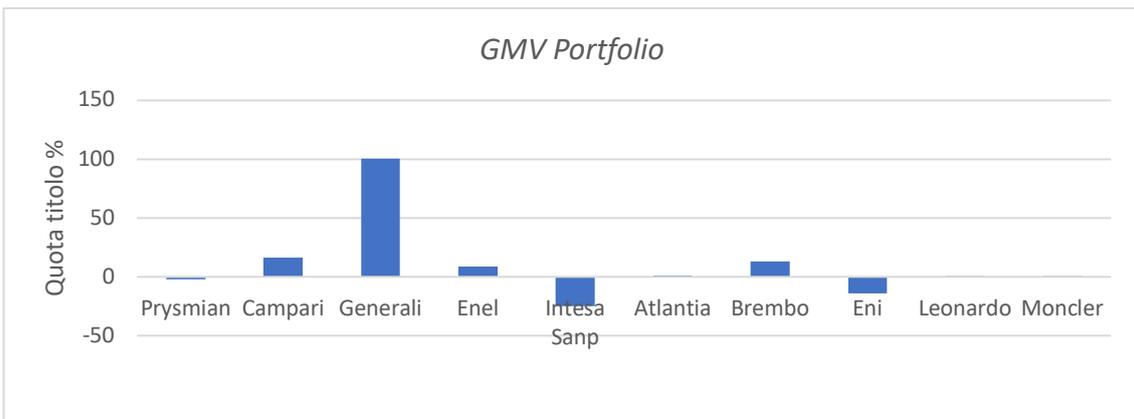


Grafico 5. 56 Composizione GMV Portfolio titoli FTSE MIB – Periodo Covid

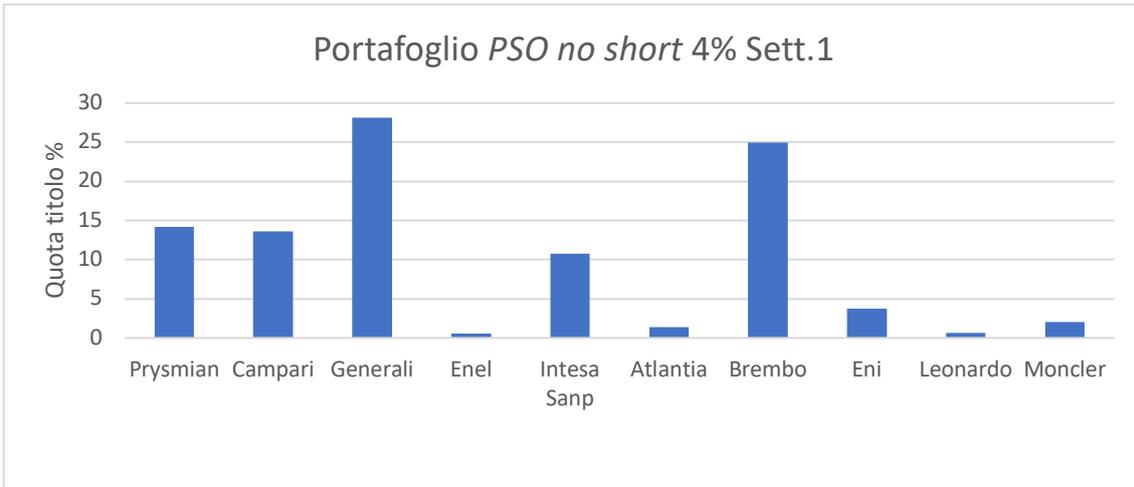


Grafico 5. 57 Composizione portafoglio con vincoli di non negatività titoli FTSE MIB – Periodo Covid

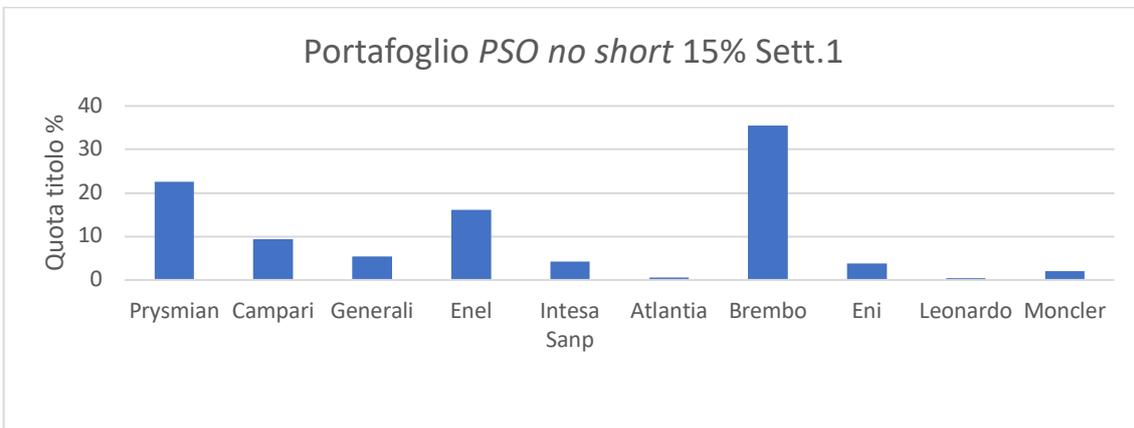


Grafico 5. 58 Composizione portafoglio con vincoli di non negatività titoli FTSE MIB – Periodo Covid

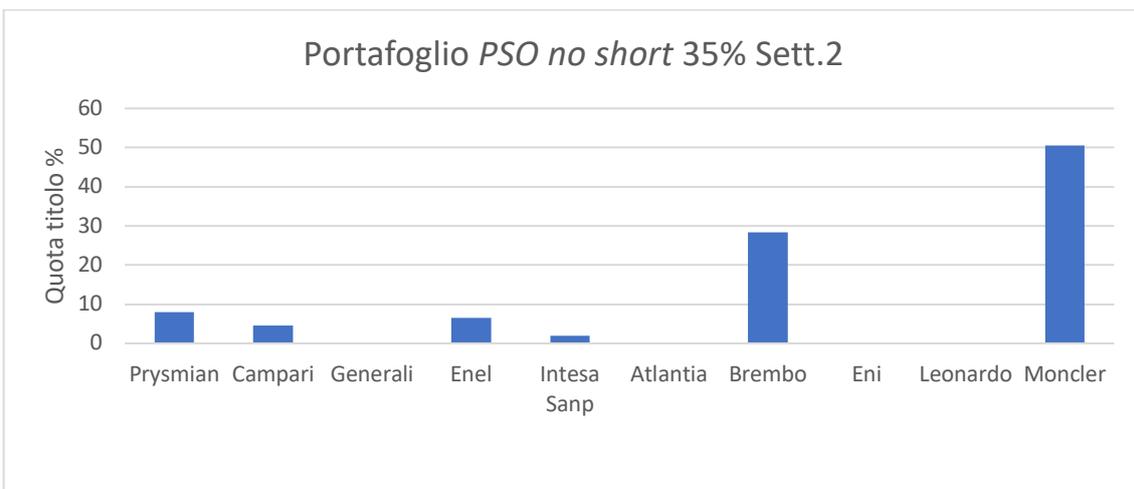


Grafico 5. 59 Composizione portafoglio con vincoli di non negatività titoli FTSE MIB – Periodo Covid

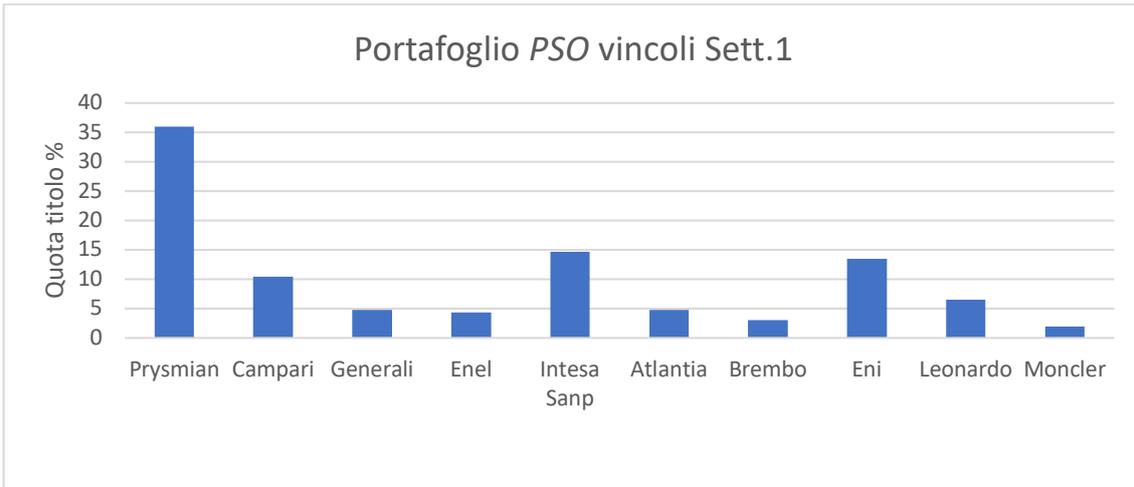


Grafico 5. 60 Composizione portafoglio con vincoli misti-interi titoli FTSE MIB – Periodo Covid

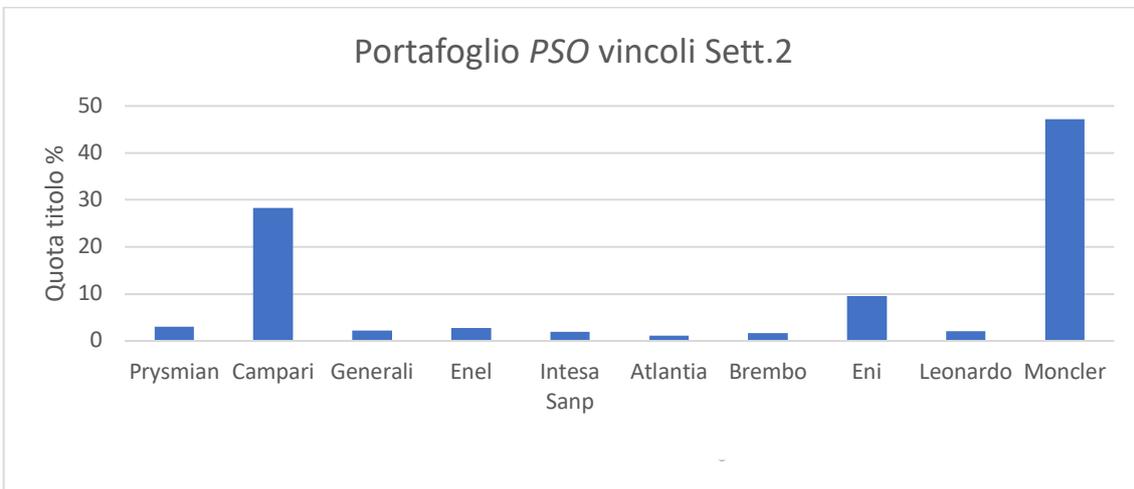


Grafico 5. 61 Composizione portafoglio con vincoli misti-interi titoli FTSE MIB – Periodo Covid

#### 5.4.3 Titoli S&P 100

Le rilevazioni dei dati storici relative al periodo di piena pandemia, effettuate dal 30/02/2020 al 30/02/2021 su dieci titoli dell'indice S&P 100, indicano che i rendimenti medi realizzati sono quasi tutti ampiamente positivi, con i titoli FedEx, Caterpillar, Apple e DuPont con la migliore redditività realizzata. Solo il titolo Boeing ha rendimento medio negativo. Come negli altri mercati finanziari considerati, i titoli risultano essere nettamente più volatili. Nella Tabella 5.22 sono riportati i rendimenti medi giornalieri e

annui e le varianze realizzate nel periodo *in-sample* calcolati a partire dalla serie storica dei rendimenti logaritmici quotidiani. Si rappresenta inoltre il rendimento medio annuo in termini percentuali approssimato alla seconda cifra decimale. In nessun caso la frequenza dei rendimenti logaritmici giornalieri segue la distribuzione Normale.

Titoli S&P 100 - Periodo Covid			
	Rendimento medio (d)	Rendimento medio % (y)	Varianza
Apple	0.0020772	68.69	0.00083599
Starbucks	0.0011246	32.74	0.0008399
BlackRock	0.0016238	50.51	0.00089132
Exxon Mobil	0.00047335	12.67	0.0011353
Caterpillar	0.0021966	73.83	0.00082055
Boeing	-0.00103	-22.87	0.0031037
Goldman Sachs	0.0019007	61.37	0.0010962
Pfizer	0.00021036	5.44	0.00048088
FedEx	0.0025166	88.40	0.0010707
DuPont de Nem.	0.0020042	65.62	0.0010651

Tabella 5. 22 Statistiche descrittive titoli S&P 100 – Periodo Covid

In applicazione del Modello Classico della *MPT* di Markowitz, nel Grafico 5.62 è rappresentata la Frontiera Efficiente sul piano Media-Varianza determinata sia in presenza che in assenza di un'attività a rendimento certo. In della presenza del titolo *riskless* la frontiera tocca l'asse delle ordinate in corrispondenza del portafoglio a rischio nullo costituito esclusivamente dal titolo a rendimento certo.

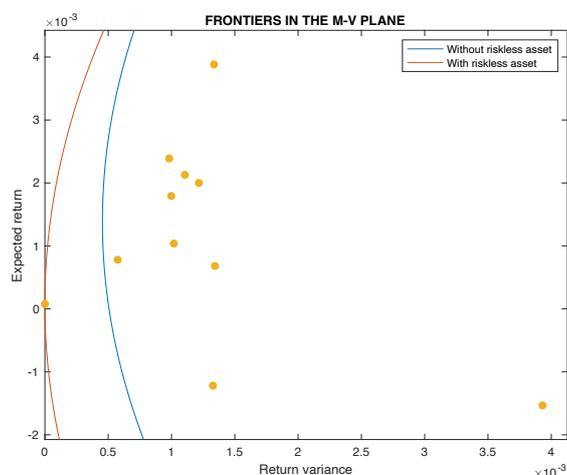


Grafico 5. 62 Frontiera Efficiente titoli S&P 100 – Periodo Covid

Nei Grafici 5.63, 5.64, 5.65 e nelle Tabelle 5.23, 5.24 e 5.25 sono riportate le performance, espresse in termini di media e varianza, ottenute nel futuro virtuale dal portafoglio ottimo di Markowitz con e senza attività a rendimento certo nei casi di rendimento atteso prefissato annuo pari rispettivamente al 4%, al 15% e al 35%: esse vengono messe a confronto con le performance realizzate dal *GMV Portfolio*, dal portafoglio equipesato con e senza attività a rendimento certo, dal portafoglio di Sharpe con e senza attività a rendimento certo, e dai portafogli con vincolo di divieto di vendite allo scoperto e con vincoli misti-interi individuati mediante la *PSO* nei due diversi settaggi considerati<sup>75</sup>.

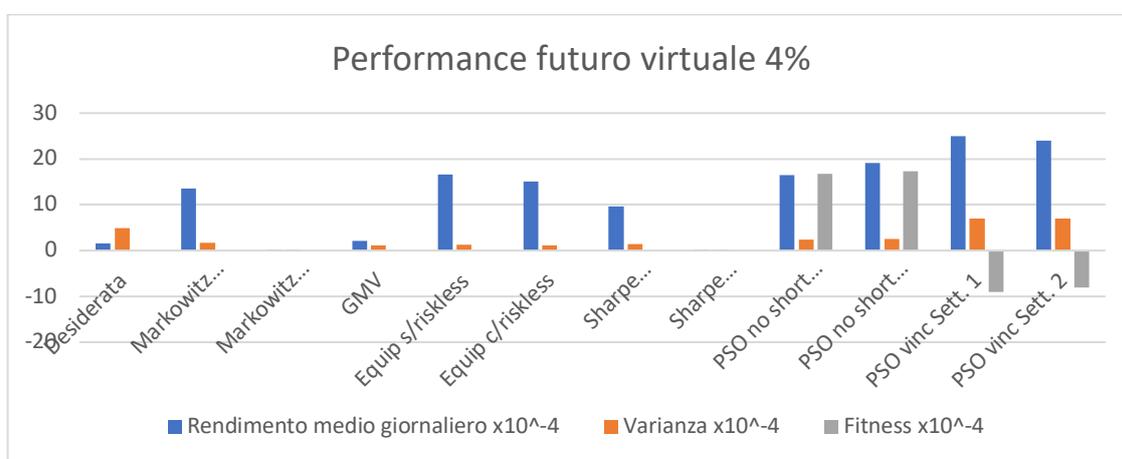


Grafico 5. 63 Performance titoli S&P 100 – Periodo Covid

Performance futuro virtuale portafogli titoli S&P 100 - Periodo Covid			
	Rendimento atteso	Varianza	Fitness
Desiderata 4% (in sample)	0.000155649863	0.000495555432	-
Markowitz N titoli	0.001351398850	0.000167727046	-
Markowitz N+1 titoli	0.000014428764	0.000000077190	-
<i>GMV Portfolio</i>	0.000209628269	0.000120280055	-
Equipesato N titoli	0.001656799969	0.000131028060	-
Equipesato N+1 titoli	0.001514040284	0.000108287653	-
Sharpe N titoli	0.000966682501	0.000142585144	-
Sharpe N+1 titoli	0.000004406286	0.000000064167	-

<sup>75</sup> Per quanto riguarda le performance e le composizioni dei portafogli individuati attraverso *PSO* con vincoli di non negatività e *PSO* con vincoli misti-interi, i dati inseriti nei grafici e nelle tabelle sono i risultati “al meglio di” in termini di funzione di *fitness* sulle dieci *run* effettuate per ogni settaggio

PSO no short settaggio 1	0.001651584746	0.000243530407	0.001673223165680
PSO no short settaggio 2	0.001915572628	0.000248790409	0.001730537038498
PSO vincoli settaggio 1	0.0025	0.0007	-0.0009
PSO vincoli settaggio 2	0.0024	0.0007	-0.0008

Tabella 5. 23 Performance titoli S&P 100. Rendimento atteso prefissato 4% – Periodo Covid

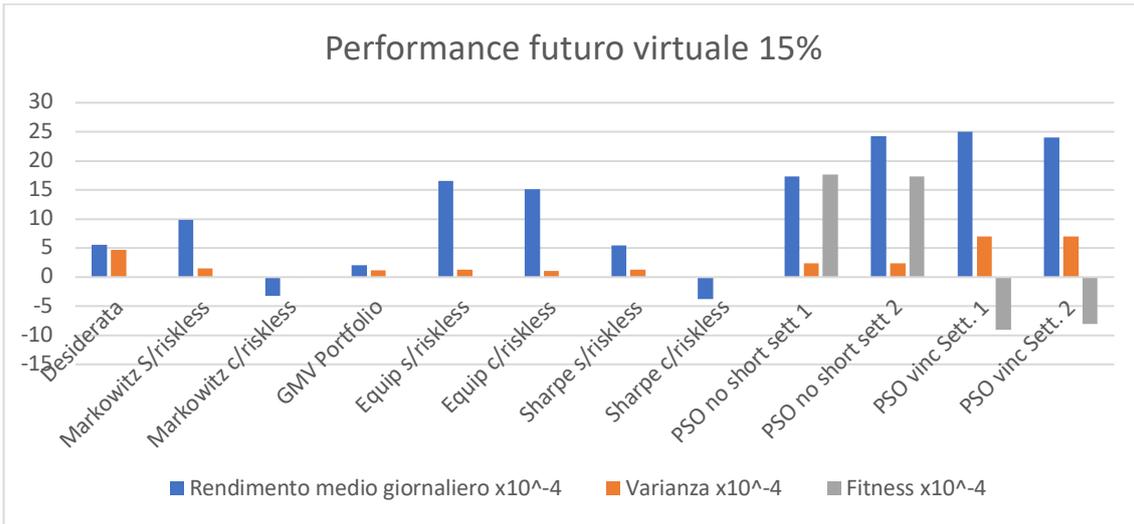


Grafico 5. 64 Performance titoli S&P 100 – Periodo Covid

Performance futuro virtuale portafogli titoli S&P 100 - Periodo Covid			
	Rendimento atteso	Varianza	Fitness
Desiderata 15% (in sample)	0.000554764707	0.000473218465	-
Markowitz N titoli	0.000981119948	0.000146870038	-
Markowitz N+1 titoli	-0.000317832433	0.000002947064	-
Sharpe N titoli	0.000549669204	0.000124866870	-
Sharpe N+1 titoli	-0.000379760759	0.000002449864	-
PSO no short settaggio 1	0.001726998337	0.000237389469	0.001762131003529
PSO no short settaggio 2	0.002426303380	0.000237361828	0.001733905096208
PSO vincoli settaggio 1	0.0025	0.0007	-0.0009
PSO vincoli settaggio 2	0.0024	0.0007	-0.0008

Tabella 5. 24 Performance titoli S&P 100. Rendimento atteso prefissato 15% – Periodo Covid

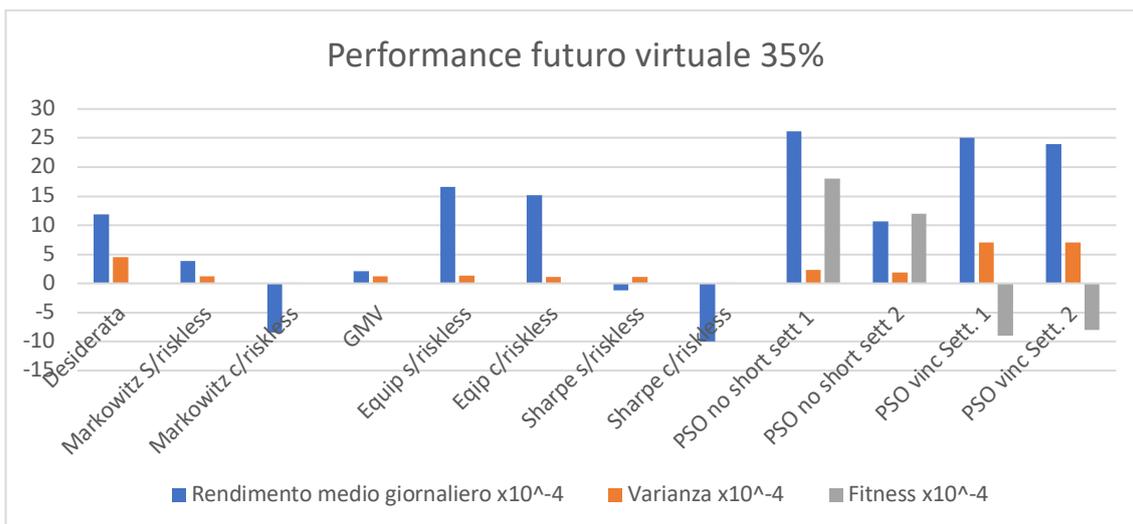


Grafico 5. 65 Performance titoli S&P 100 – Periodo Covid

Performance futuro virtuale portafogli titoli S&P 100 - Periodo Covid			
	Rendimento atteso	Varianza	Fitness
Desiderata 35% (in sample)	0.001191600632	0.000455481117	-
Markowitz N titoli	0.000390295252	0.000124463003	-
Markowitz N+1 titoli	-0.000847995293	0.000016100902	-
Sharpe N titoli	-0.000115725863	0.000105953706	-
Sharpe N+1 titoli	-0.000992745663	0.000013384518	-
PSO no short settaggio 1	0.002619546815	0.000233119236	0.001807526889685
PSO no short settaggio 2	0.001063188381	0.000193301997	0.001243889128177
PSO vincoli settaggio 1	0.0025	0.0007	-0.0009
PSO vincoli settaggio 2	0.0024	0.0007	-0.0008

Tabella 5. 25 Performance titoli S&P 100. Rendimento atteso prefissato 35% – Periodo Covid

Con un rendimento atteso prefissato pari al 4%, i portafogli realizzano buone performance nel futuro virtuale in quanto ottengono rendimenti positivi quasi sempre superiori al rendimento prefissato e sono meno volatili di quanto desiderato; solo i portafogli con vincoli misti-interi realizzano rendimenti superiori ma sono più volatili. Quando il rendimento atteso prefissato è posto al 15% e al 35%, i portafogli di Markowitz e di Sharpe realizzano nel futuro virtuale rendimenti negativi in più della metà degli scenari, a differenza degli altri portafogli esatti che realizzano rendimenti positivi in qualche caso superiori ai rendimenti attesi prefissati. Si comportano bene i portafogli

euristici, che in tre casi su quattro realizzano rendimenti nettamente superiori al rendimento atteso prefissato, e in due su quattro sono anche meno volatili. Tutte le *run* effettuate hanno prodotto rendimenti positivi.

I portafogli di Markowitz e di Sharpe composti dai soli titoli rischiosi (Grafici 5.66 e 5.68) e il *GMV Portfolio* (Grafico 5.70) sono scarsamente diversificati e con l'obiettivo di controllare la volatilità del portafoglio indirizzano il capitale sul titolo Pfizer, il meno volatile, a bassa redditività. In presenza dell'attività a rendimento certo i portafogli si presentano concentrati quasi esclusivamente sull'attività *riskless* (Grafici 5.67 e 5.69). Sono più diversificati i portafogli euristici, che distribuiscono il capitale su titoli a più alta redditività come Apple, Goldman Sachs, Caterpillar e FedEx. Il portafoglio con rendimento atteso del 35% e con vincoli di non negatività del settaggio 2 (Grafico 5.73) è il più simile nella composizione al portafoglio esatto di Markowitz e di Sharpe, puntando sul titolo Pfizer, e infatti è l'unico tra i portafogli vincolati ad ottenere nel futuro virtuale un rendimento inferiore a quanto prefissato.

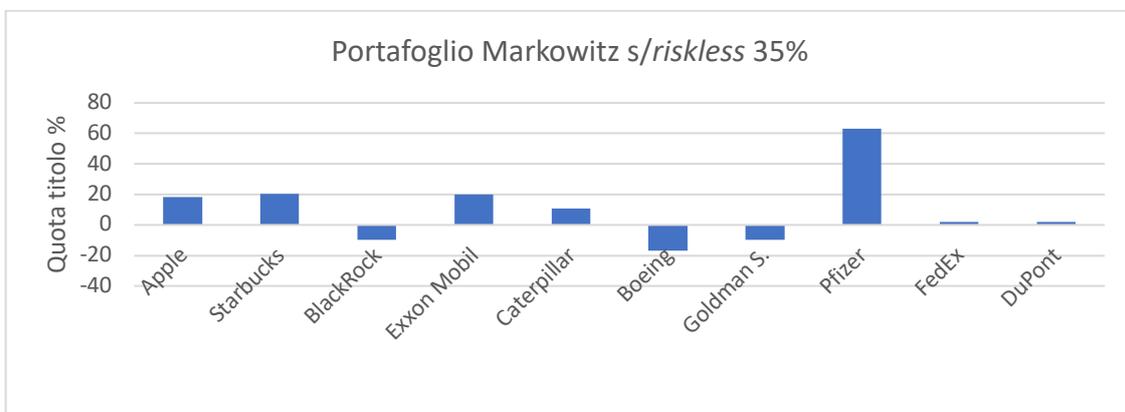


Grafico 5. 66 Composizione portafoglio Markowitz titoli S&P 100 – Periodo Covid

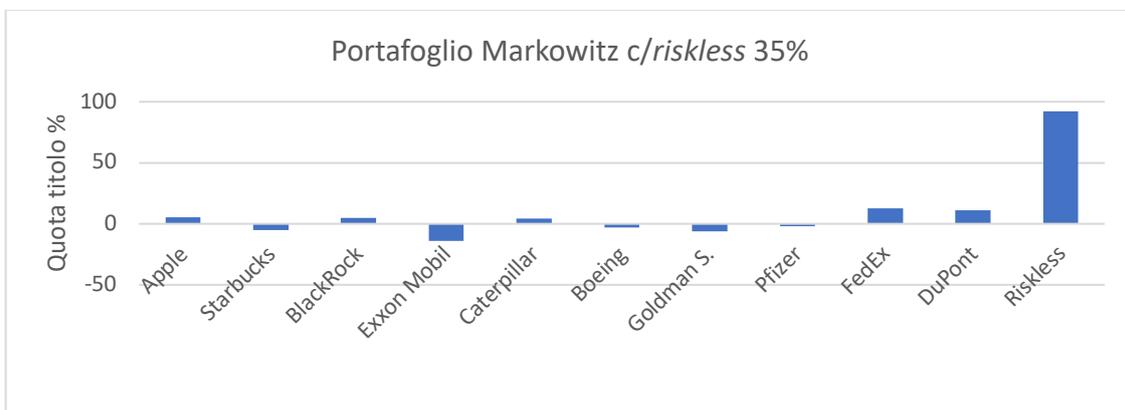


Grafico 5. 67 Composizione portafoglio Markowitz titoli S&P 100 – Periodo Covid

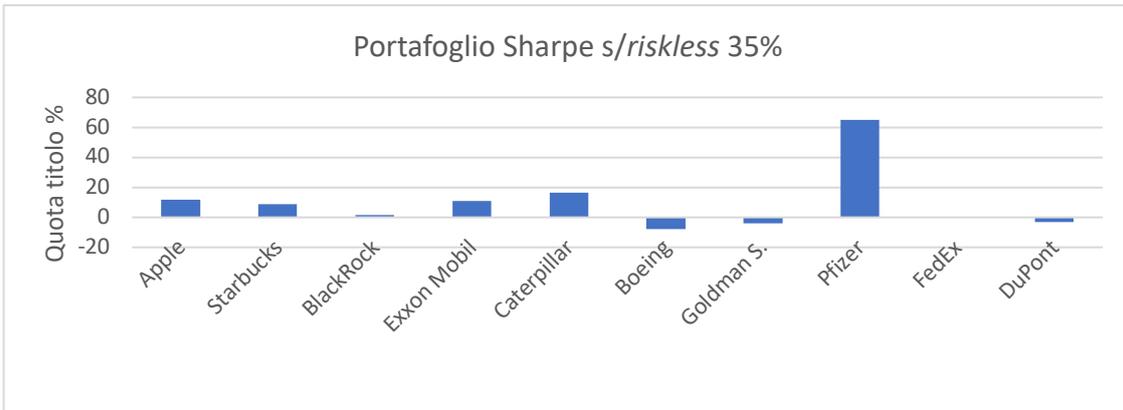


Grafico 5. 68 Composizione portafoglio Sharpe titoli S&P 100 – Periodo Covid

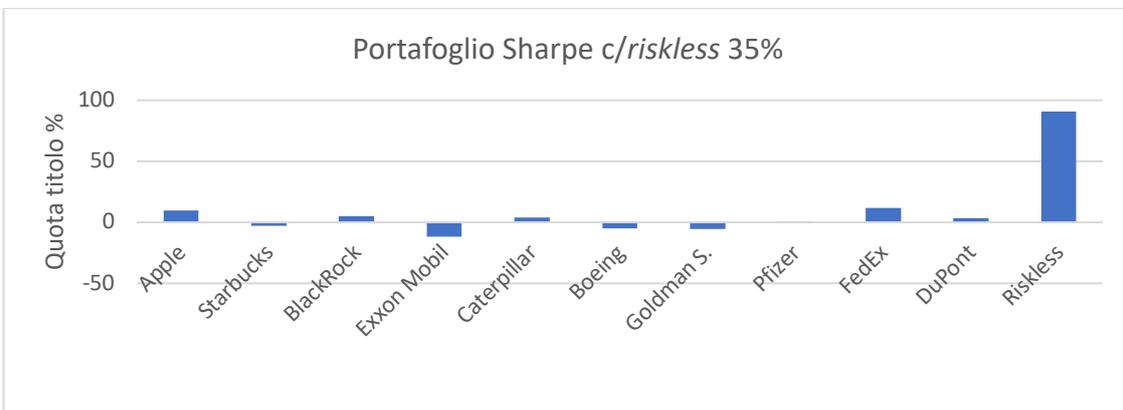


Grafico 5. 69 Composizione portafoglio Sharpe titoli S&P 100 – Periodo Covid

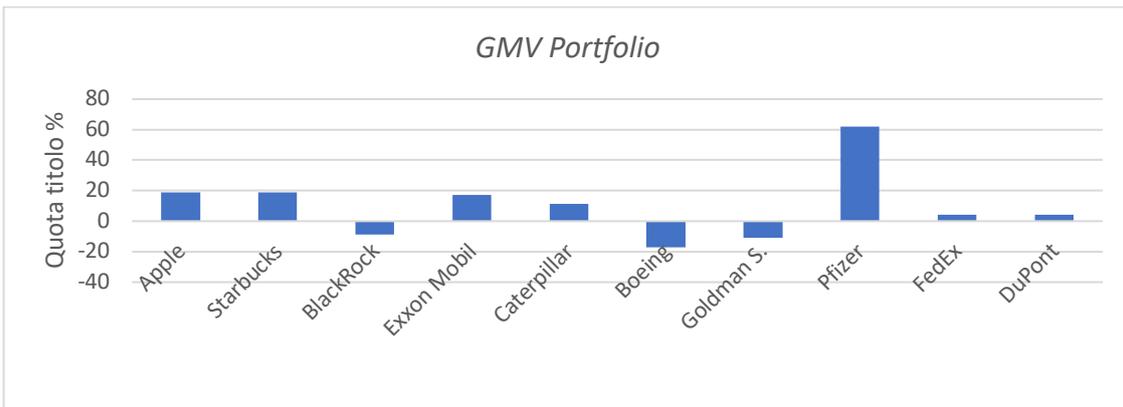


Grafico 5. 70 Composizione GMV Portfolio titoli S&P 100 – Periodo Covid

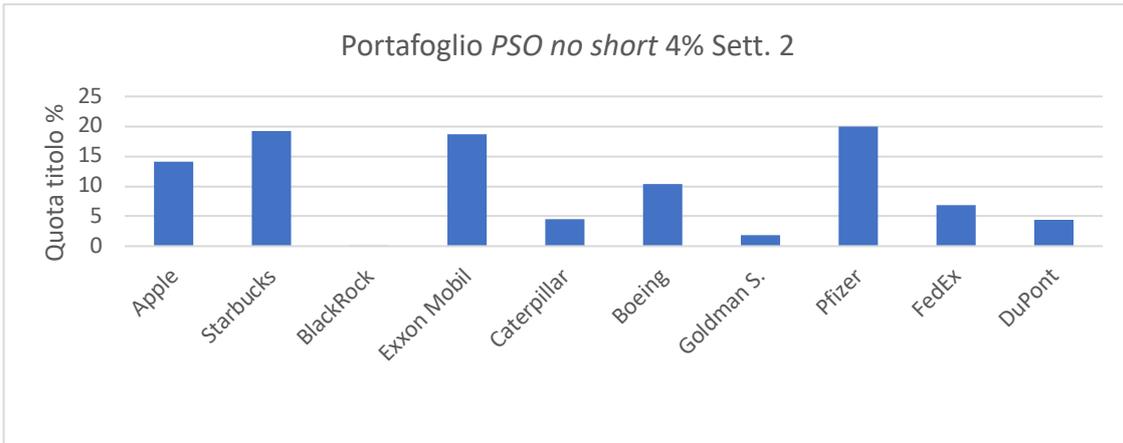


Grafico 5. 71 Composizione portafoglio con vincoli di non negatività titoli S&P 100 – Periodo Covid

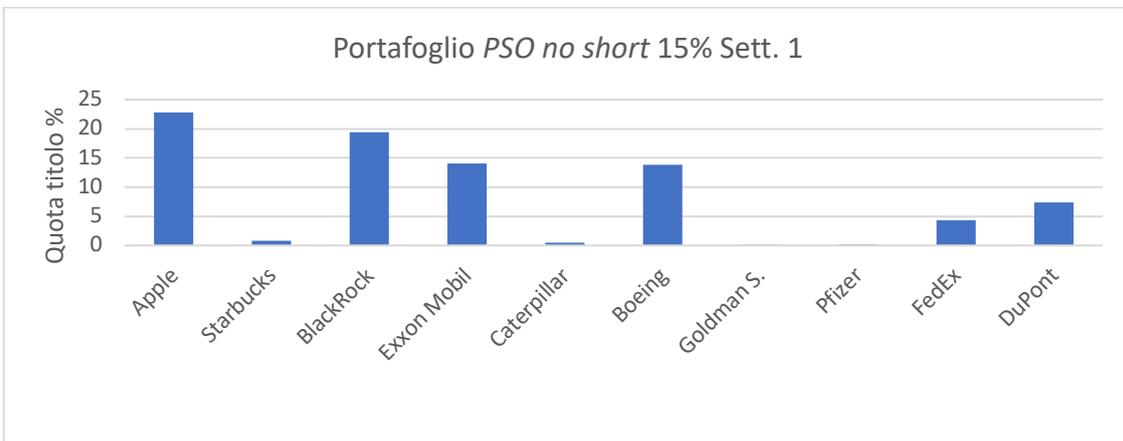


Grafico 5. 72 Composizione portafoglio con vincoli di non negatività titoli S&P 100 – Periodo Covid

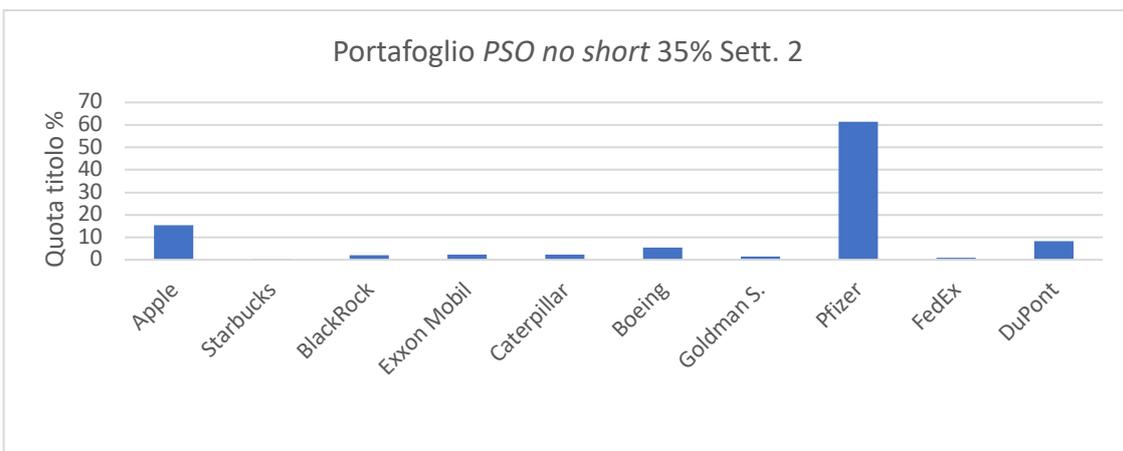


Grafico 5. 73 Composizione portafoglio con vincoli di non negatività titoli S&P 100 – Periodo Covid

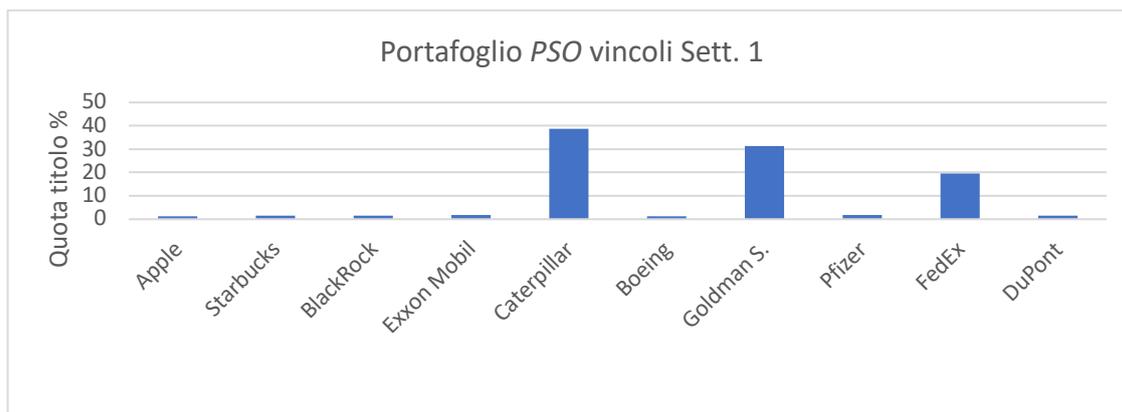


Grafico 5. 74 Composizione portafoglio con vincoli misti-interi titoli S&P 100 – Periodo Covid

## 5.5 Periodo post-Covid

### 5.5.1 Titoli Hang Seng

Le rilevazioni dei dati storici relative al periodo successivo alla pandemia, effettuate dal 30/02/2021 al 30/02/2022 sui titoli dell'indice Hang Seng, mostrano che i rendimenti medi realizzati sono negativi in sette sui dieci casi considerati. Più in dettaglio, i rendimenti sono positivi solo per i titoli Li Ning, CITIC e CSPC Pharmaceutical Group, negativi in particolare per Xiaomi, WuXi Biologics e Country Garden Services Holdings. Per quanto riguarda la volatilità, i dati indicano nella maggior parte dei casi una riduzione rispetto al periodo precedente, che rimane comunque superiore a quanto osservato nel periodo iniziale. Quanto detto è confermato nella Tabella 5.26 dove sono riportati i rendimenti medi giornalieri e annui e le varianze realizzate nel periodo *in-sample*. Si rappresenta inoltre il rendimento medio annuo in termini percentuali approssimato alla seconda cifra decimale. In nessun caso la frequenza dei rendimenti logaritmici giornalieri rilevati segue la distribuzione Normale.

Titoli Hang Seng - Periodo post-Covid			
	Rendimento medio (d)	Rendimento medio % (y)	Varianza
Xiaomi	-0.0027383	-49.89	0.00056307
Ind. Bank of Ch.	-0.00016691	-4.12	0.00011576
Ch. Petr. & Chem.	-0.00024204	-5.92	0.00028679
Li Ning	0.0014696	44.78	0.0013492
CITIC	0.0014526	44.17	0.00027138
Lenovo	-0.0010082	-22.45	0.00073239
CSPC Pharm.	0.00032461	8.52	0.00061774
Ch. Life Insurance	-0.00094984	-21.30	0.00015048
WuXi Biologics	-0.0023982	-45.40	0.0019005
Country Garden S.	-0.0017997	-36.49	0.001593

Tabella 5. 26 Statistiche descrittive titoli Hang Seng – Periodo post- Covid

In applicazione del Modello Classico della *MPT* di Markowitz, nel Grafico 5.75 è rappresentata la Frontiera Efficiente sul piano Media-Varianza sia in presenza che in assenza di un'attività a rendimento certo, una parabola la cui parte crescente individua le infinite possibili combinazioni di portafogli efficienti e quella decrescente gli infiniti portafogli inefficienti. Nel caso della presenza del titolo *riskless* la frontiera tocca l'asse delle ordinate, in corrispondenza del portafoglio a rischio nullo costituito esclusivamente dal titolo a rendimento certo.

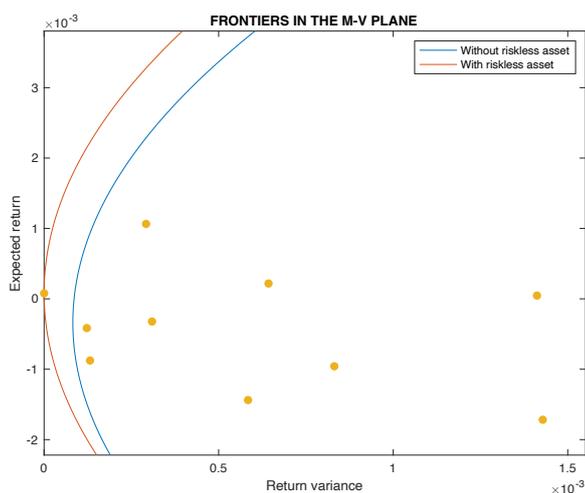


Grafico 5. 75 Frontiera Efficiente titoli Hang Seng – Periodo post-Covid

Nei Grafici 5.76, 5.77, 5.78 e nelle Tabelle 5.27, 5.28 e 5.29 sono riportate le performance, espresse in termini di media e varianza, ottenute nel futuro virtuale dal

portafoglio ottimo di Markowitz con e senza attività a rendimento certo nei casi di rendimento atteso prefissato annuo pari rispettivamente al 4%, al 15% e al 35%: esse vengono messe a confronto con le performance realizzate dal *GMV Portfolio*, dal portafoglio equipesato con e senza attività a rendimento certo, dal portafoglio di Sharpe con e senza attività a rendimento certo, e dai portafogli con vincolo di divieto di vendite allo scoperto e con vincoli misti-interi individuati mediante la *PSO* nei due diversi settaggi considerati<sup>76</sup>.

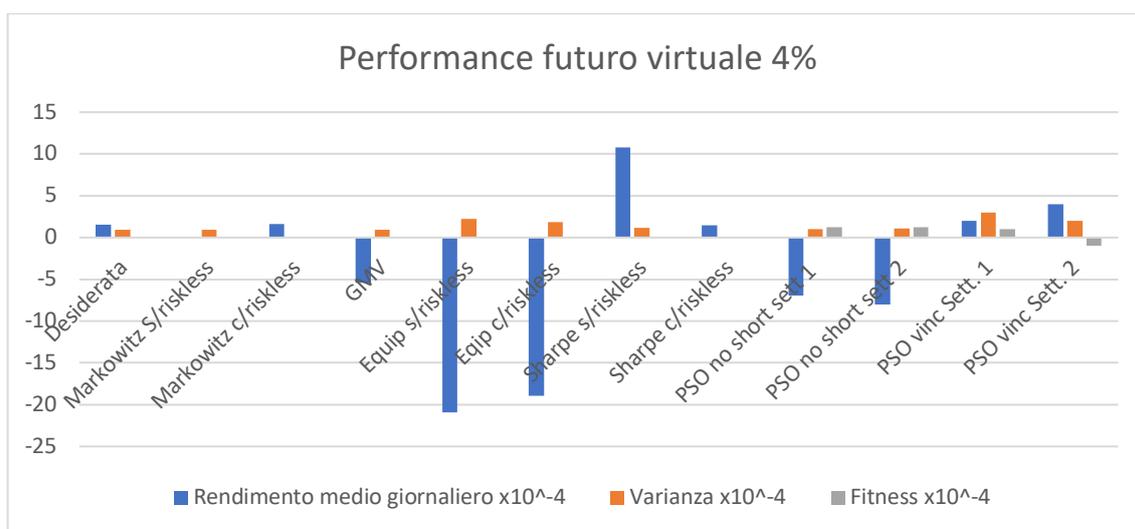


Grafico 5.76 Performance titoli Hang Seng – Periodo post-Covid

Performance futuro virtuale portafogli titoli Hang Seng - Periodo post-Covid			
	Rendimento atteso	Varianza	Fitness
Desiderata 4% (in sample)	0.000155649863	0.000089821217	-
Markowitz N titoli	0.000008763069	0.000092133145	-
Markowitz N+1 titoli	0.000165495438	0.00000107119	-
<i>GMV Portfolio</i>	-0.000538812511	0.000093560305	-
Equipesato N titoli	-0.002093333507	0.000224060879	-
Equipesato N+1 titoli	-0.001895171967	0.000185174280	-
Sharpe N titoli	0.001077213082	0.000117017785	-
Sharpe N+1 titoli	0.000144486908	0.00000157098	-

<sup>76</sup> Per quanto riguarda le performance e le composizioni dei portafogli individuati attraverso *PSO* con vincoli di non negatività e *PSO* con vincoli misti-interi, i dati inseriti nei grafici e nelle tabelle sono i risultati “al meglio di” in termini di funzione di *fitness* sulle dieci *run* effettuate per ogni settaggio

PSO no short settaggio 1	-0.000692946107	0.000098455821	1.196804886795064e-04
PSO no short settaggio 2	-0.000799501453	0.000111642571	1.239672670774683e-04
PSO vincoli settaggio 1	0.0002	0.0003	0.0001
PSO vincoli settaggio 2	0.0004	0.0002	-0.0001

Tabella 5. 27 Performance titoli Hang Seng. Rendimento atteso prefissato 4% – Periodo post-Covid

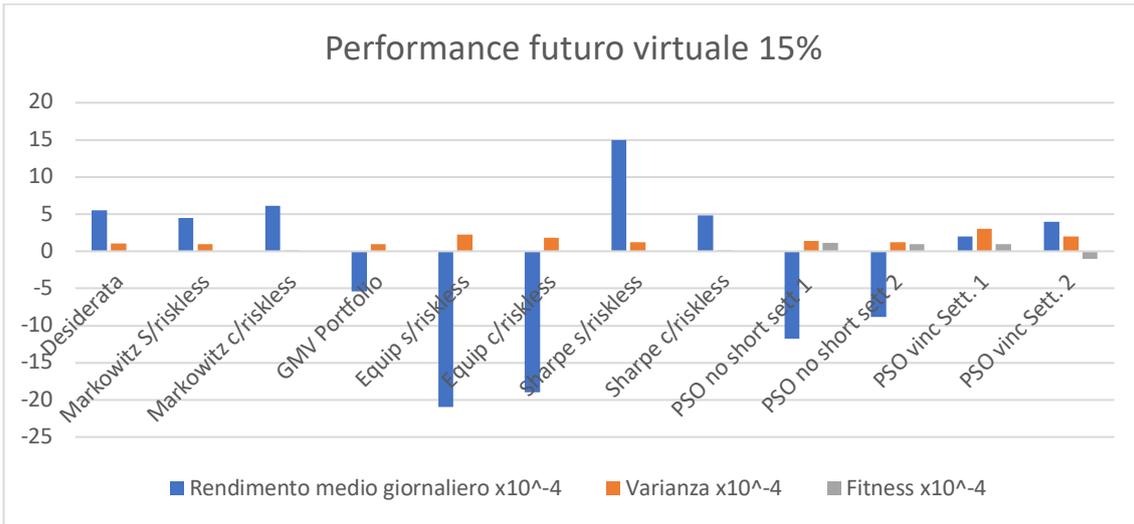


Grafico 5. 77 Performance titoli Hang Seng – Periodo post-Covid

Performance futuro virtuale portafogli titoli Hang Seng - Periodo post-Covid			
	Rendimento atteso	Varianza	Fitness
Desiderata 15% (in sample)	0.000554764707	0.000106676648	-
Markowitz N titoli	0.000449899345	0.000096876312	-
Markowitz N+1 titoli	0.000615599957	0.000004089739	-
Sharpe N titoli	0.001496483764	0.000120243120	-
Sharpe N+1 titoli	0.000485789446	0.000005997896	-
PSO no short settaggio 1	-0.001174722563	0.000139632692	1.174439452692582e-04
PSO no short settaggio 2	-0.000886703587	0.000121927639	9.569568205164009e-05
PSO vincoli settaggio 1	0.0002	0.0003	0.0001
PSO vincoli settaggio 2	0.0004	0.0002	-0.0001

Tabella 5. 28 Performance titoli Hang Seng. Rendimento atteso prefissato 15% – Periodo post-Covid

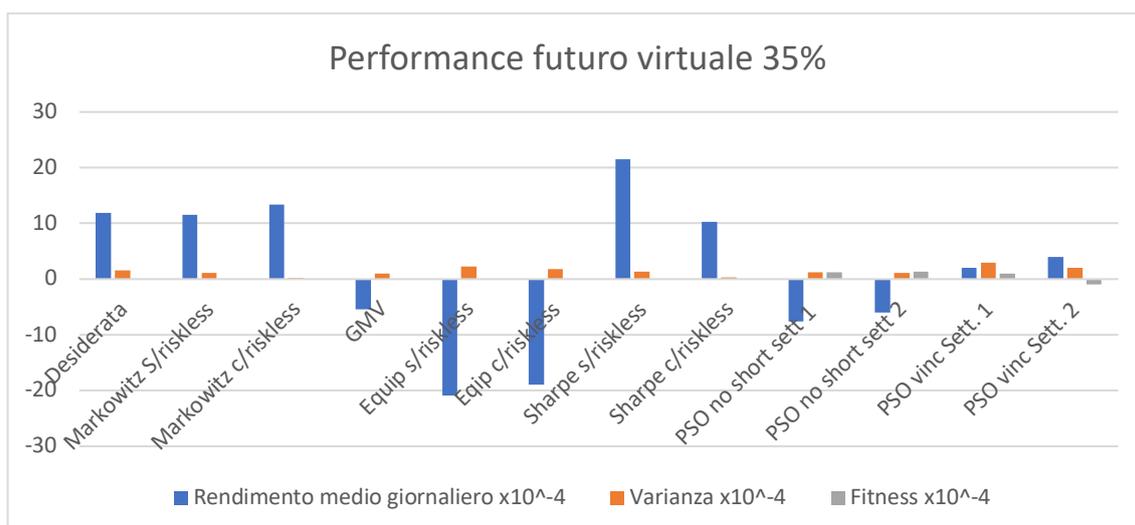


Grafico 5. 78 Performance titoli Hang Seng – Periodo post-Covid

Performance futuro virtuale portafogli titoli Hang Seng - Periodo post-Covid			
	Rendimento atteso	Varianza	Fitness
Desiderata 35% (in sample)	0.001191600632	0.000153616755	-
Markowitz N titoli	0.001153785538	0.000115334005	-
Markowitz N+1 titoli	0.001333796063	0.000022343762	-
Sharpe N titoli	0.002165480760	0.000138883993	-
Sharpe N+1 titoli	0.001030378855	0.000032768733	-
PSO no short settaggio 1	-0.000760162750	0.000128036937	1.242724505259663e-04
PSO no short settaggio 2	-0.000604355230	0.000111877747	1.304329181965887e-04
PSO vincoli settaggio 1	0.0002	0.0003	0.0001

Tabella 5. 29 Performance titoli Hang Seng. Rendimento atteso prefissato 35% – Periodo post-Covid

Questo scenario si caratterizza per la performance positiva dei portafogli di Sharpe e di Markowitz sia in termini di redditività che di rischiosità: il miglior rendimento è realizzato dal portafoglio di Sharpe che introduce nel portafoglio l'attività a rendimento certo. Al contrario, il *GMV Portfolio* e i portafogli equipesati realizzano rendimenti negativi.

Le tecniche euristiche faticano molto: tutte le *run* effettuate per l'individuazione del portafoglio con vincolo di non negatività hanno realizzato nel futuro virtuale un rendimento negativo. Nel portafoglio di Markowitz (Grafico 5.79) e di Sharpe (Grafico 5.81) il capitale viene distribuito tra il titolo ad alta redditività CITIC e i titoli a bassa volatilità China Life Insurance Company e Industrial and Commercial Bank of China. Con l'inserimento del titolo *riskless*, è verso questo titolo che entrambi i portafogli

indirizzano tutto il capitale a disposizione, scelta che ha l'effetto di comprimere la volatilità (Grafici 5.80 e 5.82). I portafogli con vincoli di non negatività e con vincoli misti- interi sono poco diversificati: in un settaggio i portafogli con vincoli di non negatività investono in due titoli circa l'80% del capitale a disposizione (Grafico 5.83) e in un altro il 70% (Grafico 5.84) quando i rendimenti attesi sono pari al 4% e al 15%, e anche nel portafoglio con vincoli misti-interi il 70% circa del capitale viene investito su tre titoli (Grafico 5.86).

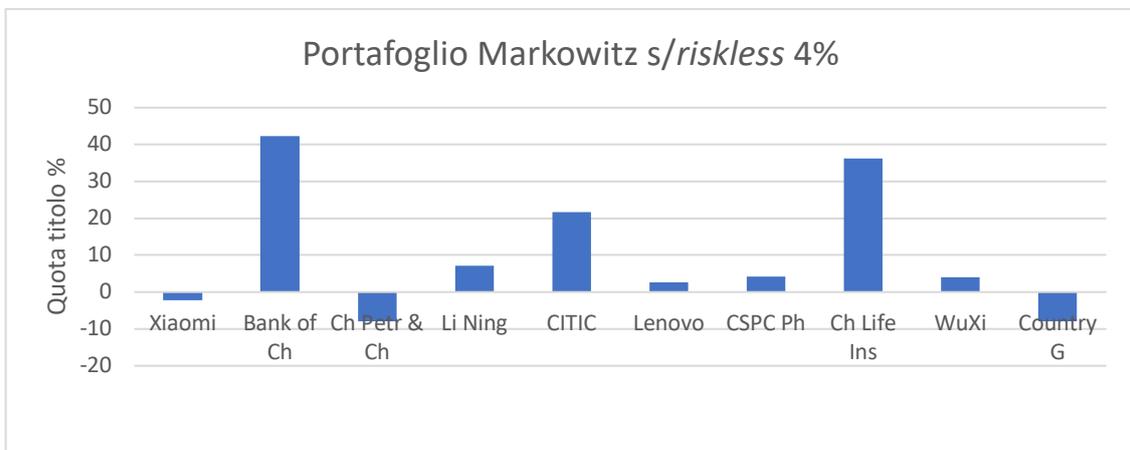


Grafico 5. 79 Composizione portafoglio Markowitz titoli Hang Seng – Periodo post-Covid

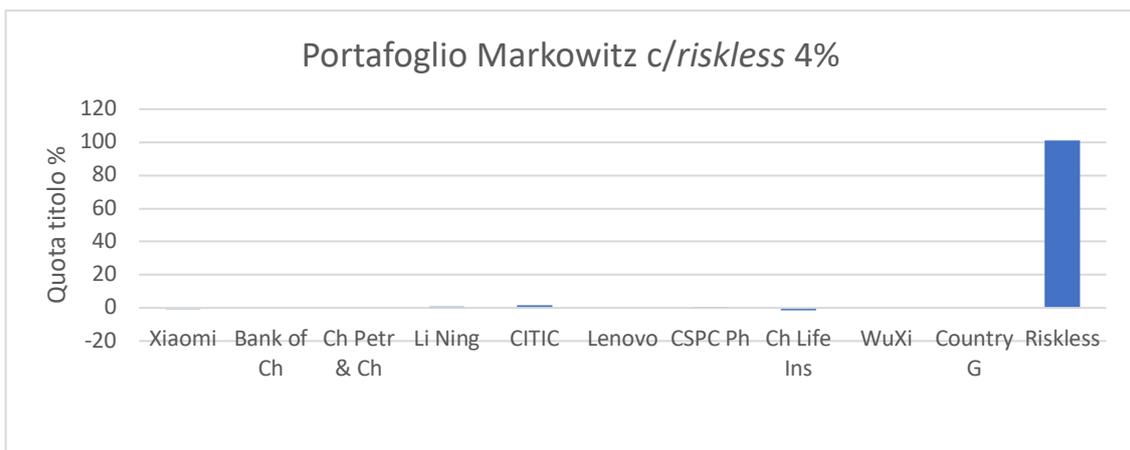


Grafico 5. 80 Composizione portafoglio Markowitz titoli Hang Seng – Periodo post-Covid

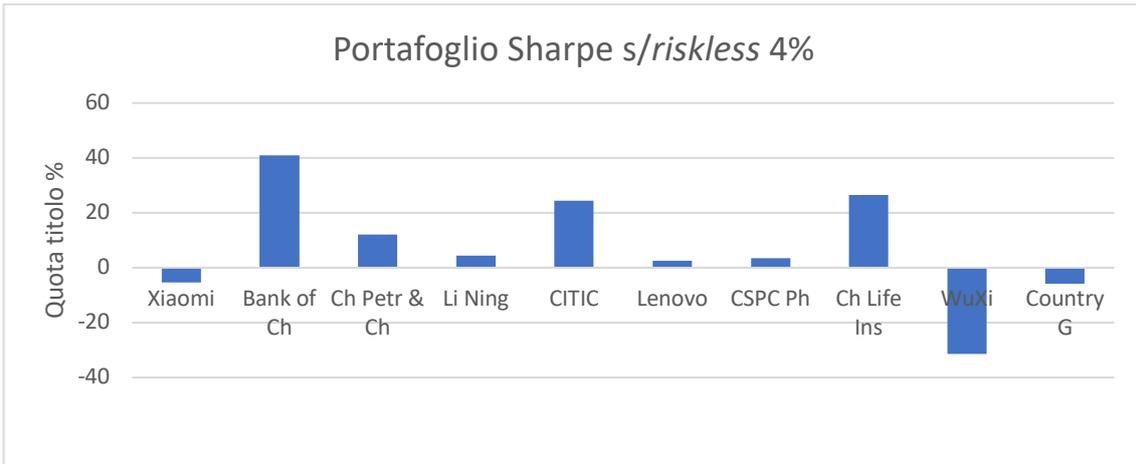


Grafico 5. 81 Composizione portafoglio Sharpe titoli Hang Seng – Periodo post-Covid

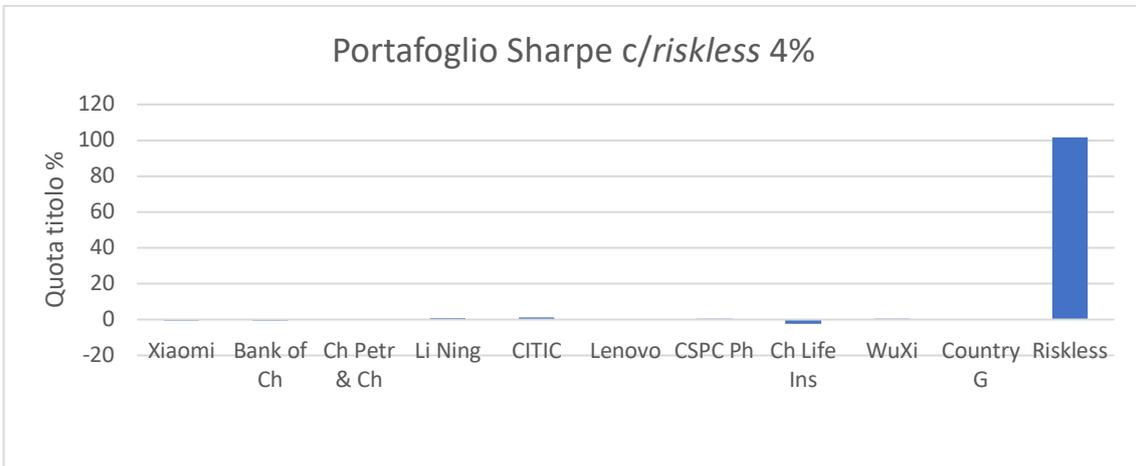


Grafico 5. 82 Composizione portafoglio Sharpe titoli Hang Seng – Periodo post-Covid

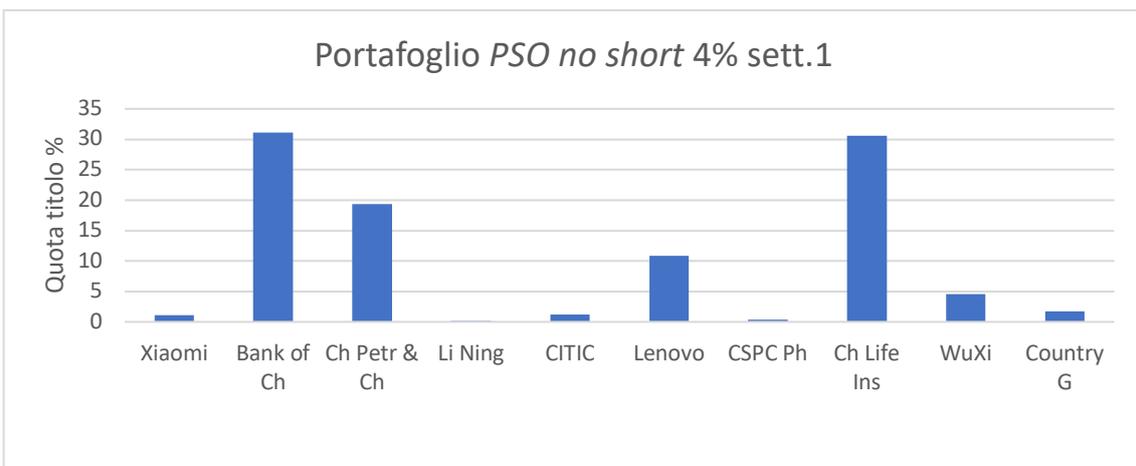


Grafico 5. 83 Composizione portafoglio con vincoli di non negatività titoli Hang Seng – Periodo post-Covid

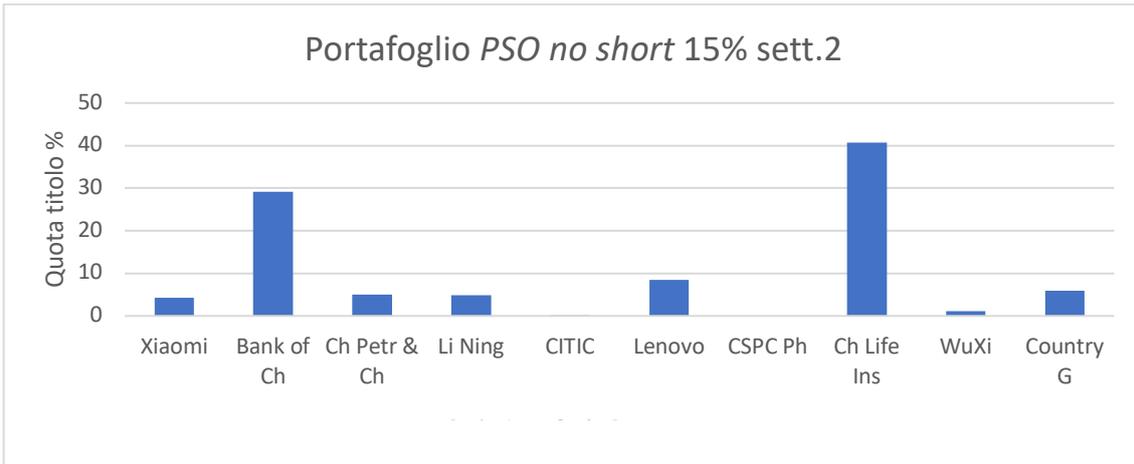


Grafico 5. 84 Composizione portafoglio con vincoli di non negatività titoli Hang Seng – Periodo post-Covid

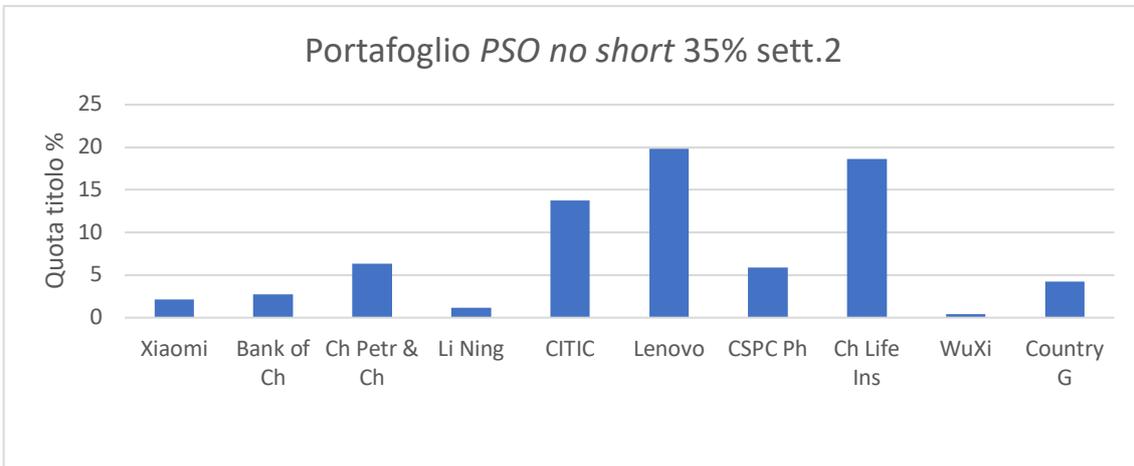


Grafico 5. 85 Composizione portafoglio con vincoli di non negatività titoli Hang Seng – Periodo post-Covid

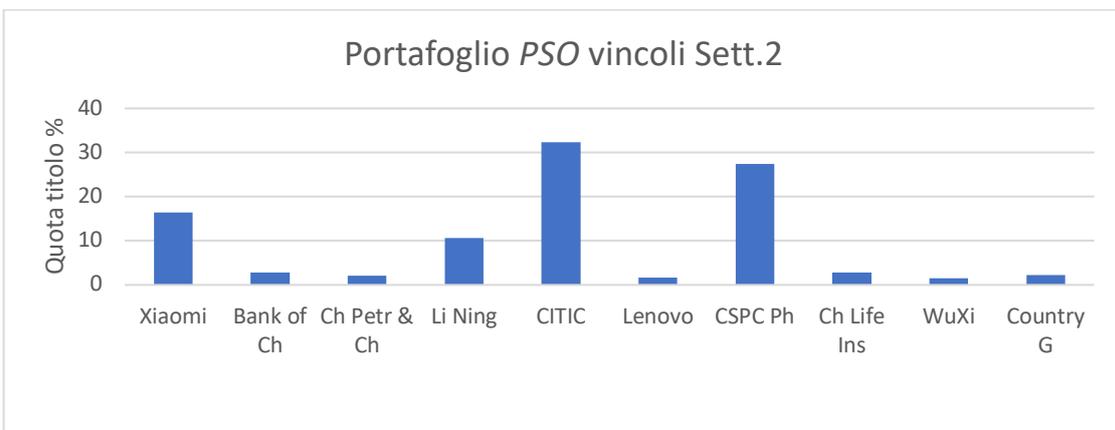


Grafico 5. 86 Composizione portafoglio con vincoli misti-interi titoli Hang Seng – Periodo post-Covid

### 5.5.2 Titoli FTSE MIB

Le rilevazioni dei dati storici relative al periodo successivo alla pandemia effettuate dal 30/02/2021 al 30/02/2022 sui titoli appartenenti all'indice FTSE MIB indicano che i rendimenti medi realizzati sono positivi in otto casi su dieci, con buone performance in particolare per quanto riguarda Eni, Intesa Sanpaolo e Generali. Dal punto di vista della rischiosità, si rileva il fatto che tutti i titoli sono meno volatili rispetto ai valori riscontrati nei due periodi precedenti. Nella Tabella 5.30 sono riportati i rendimenti medi giornalieri e annui e le varianze di ciascuna attività finanziaria, realizzate nel periodo *in-sample*. Si rappresenta inoltre il rendimento medio annuo in termini percentuali approssimato alla seconda cifra decimale. La frequenza dei rendimenti logaritmici giornalieri rilevati segue la distribuzione Normale solo nel caso del titolo Prysmian.

Titoli FTSE MIB - Periodo post-Covid			
	Rendimento medio (d)	Rendimento medio % (y)	Varianza
Prysmian	0.00017311	4.46	0.00024159
Campari	0.00033543	8.82	0.00015109
Generali	0.00086749	24.42	9.6557e-05
Enel	-0.0006024	-14.09	0.00017295
Intesa Sanpaolo	0.0011685	34.22	0.00019432
Atlantia	8.8047e-05	2.24	0.00017566
Brembo	0.00029598	7.74	0.00021741
Eni	0.00162	50.37	0.00017911
Leonardo	-0.00028465	-6.92	0.00029157
Moncler	0.00022466	5.82	0.00031142

Tabella 5. 30 Statistiche descrittive titoli FTSE MIB – Periodo post- Covid

In applicazione del Modello Classico della *MPT* di Markowitz, nel Grafico 5.87 è rappresentata la Frontiera Efficiente sul piano Media-Varianza sia in presenza che in assenza di un'attività a rendimento certo, una parabola la cui parte crescente individua le infinite possibili combinazioni di portafogli efficienti e quella decrescente gli infiniti portafogli inefficienti. Nel caso della presenza del titolo *riskless* la frontiera tocca l'asse delle ordinate, in corrispondenza del portafoglio a rischio nullo costituito esclusivamente dal titolo a rendimento certo.

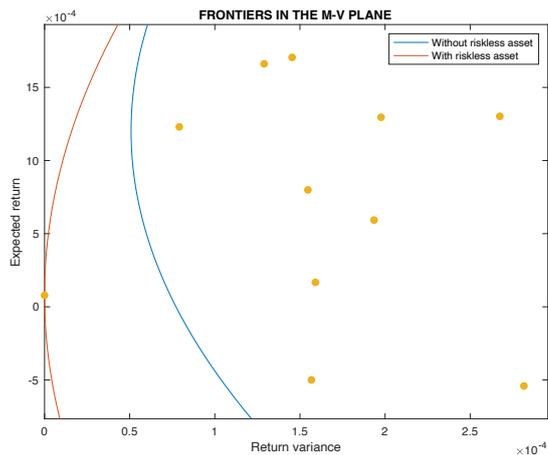


Grafico 5. 87 Frontiera Efficiente titoli FTSE MIB – Periodo post-Covid

Nei Grafici 5.88, 5.89, 5.90 e nelle Tabelle 5.31, 5.32 e 5.33 sono riportate le performance, espresse in termini di media e varianza, ottenute nel futuro virtuale dal portafoglio ottimo di Markowitz con e senza attività a rendimento certo nei casi di rendimento atteso prefissato annuo pari rispettivamente al 4%, al 15% e al 35%: esse vengono messe a confronto con le performance realizzate dal *GMV Portfolio*, dal portafoglio equipesato con e senza attività a rendimento certo, dal portafoglio di Sharpe con e senza attività a rendimento certo, e dai portafogli con vincolo di divieto di vendite allo scoperto e con vincoli misti-interi individuati mediante la *PSO* nei due diversi settaggi considerati<sup>77</sup>.

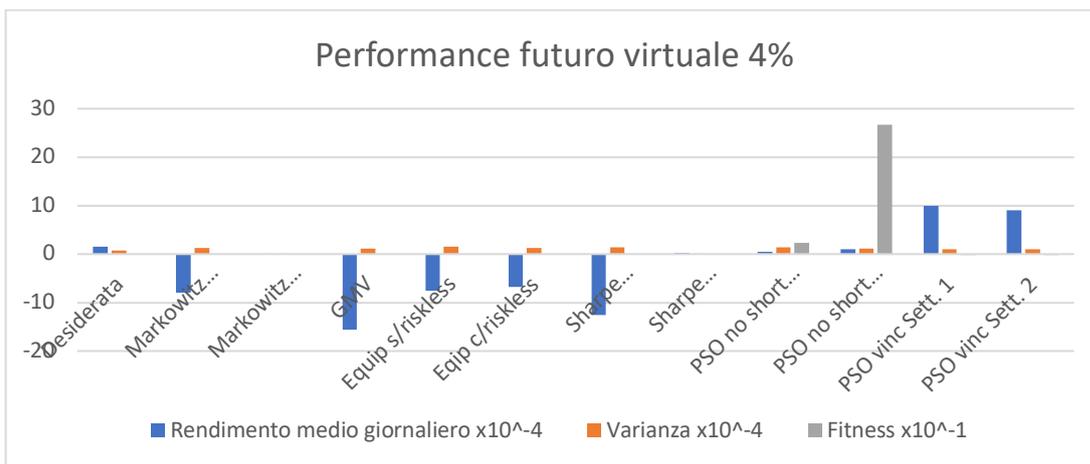


Grafico 5. 88 Performance titoli FTSE MIB – Periodo post-Covid

<sup>77</sup> Per quanto riguarda le performance e le composizioni dei portafogli individuati attraverso *PSO* con vincoli di non negatività e *PSO* con vincoli misti-interi, i dati inseriti nei grafici e nelle tabelle sono i risultati “al meglio di” in termini di funzione di *fitness* sulle dieci *run* effettuate per ogni settaggio

Performance futuro virtuale portafogli titolo FTSE MIB - Periodo post-Covid			
	Rendimento atteso	Varianza	Fitness
Desiderata 4% (in sample)	0.000155649863	0.000070809882	-
Markowitz N titoli	-0.000800666567	0.000129613534	-
Markowitz N+1 titoli	0.000004920847	0.000000136240	-
GMV Portfolio	-0.001560698038	0.000115930204	-
Equipesato N titoli	-0.000759015997	0.000149576343	-
Equipesato N+1 titoli	-0.000682156048	0.000123616812	-
Sharpe N titoli	-0.001261837322	0.000137480121	-
Sharpe N+1 titoli	0.000026604281	0.000000137862	-
PSO no short settaggio 1	0.000047596111	0.000142828227	0.232306336561371
PSO no short settaggio 2	0.000098932700	0.000115882301	2.667263057809595
PSO vincoli settaggio 1	0.0010	0.0001	-0.0004
PSO vincoli settaggio 2	0.0009	0.0001	-0.0004

Tabella 5. 31 Performance titoli FTSE MIB. Rendimento atteso prefissato 4% – Periodo post-Covid

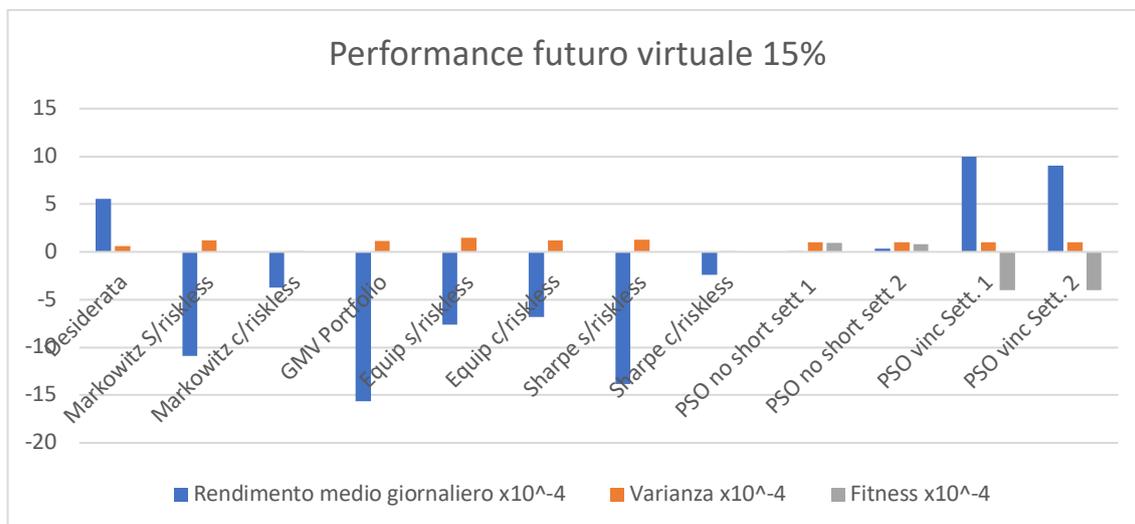


Grafico 5. 89 Performance titoli FTSE MIB – Periodo post-Covid

Performance futuro virtuale FTSE MIB - Periodo post-Covid			
	Rendimento atteso	Varianza	Fitness
Desiderata 15% (in sample)	0.000554764707	0.000058463650	-
Markowitz N titoli	-0.001090866977	0.000118073153	-
Markowitz N+1 titoli	-0.000376581314	0.000005201564	-
Sharpe N titoli	-0.001384121424	0.000126058319	-

Sharpe N+1 titoli	-0.000242600606	0.000005263483	-
PSO no short settaggio 1	0.000003280258	0.000101516222	9.310321615326870e-05
PSO no short settaggio 2	0.000031270065	0.000103569962	8.353720547882777e-05
PSO vincoli settaggio 1	0.0010	0.0001	-0.0004
PSO vincoli settaggio 2	0.0009	0.0001	-0.0004

Tabella 5. 32 Performance titoli FTSE MIB. Rendimento atteso prefissato 15% – Periodo post-Covid

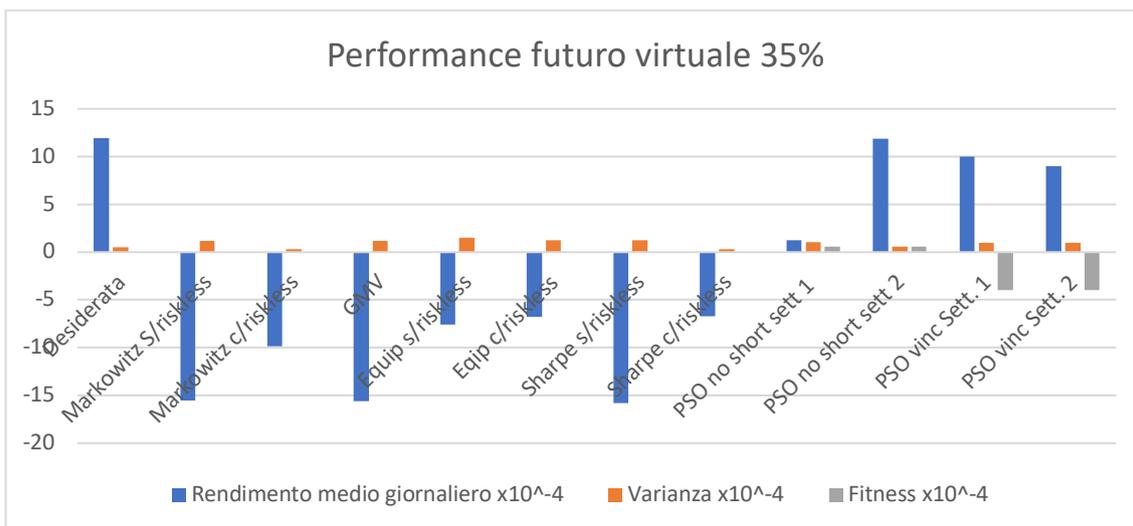


Grafico 5. 90 Performance titoli FTSE MIB – Periodo post-Covid

Performance futuro virtuale portafogli titolo FTSE MIB - Periodo post-Covid			
	Rendimento atteso	Varianza	Fitness
Desiderata 35% (in sample)	0.001191600632	0.000050829287	-
Markowitz N titoli	-0.001553916771	0.000115815682	-
Markowitz N+1 titoli	-0.000985314076	0.000028418077	-
Sharpe N titoli	-0.001579240473	0.000123620235	-
Sharpe N+1 titoli	-0.000672149508	0.000028756362	-
PSO no short settaggio 1	0.000126157054	0.000104693936	5.743617099675734e-05
PSO no short settaggio 2	0.001191600632	0.000056287060	5.628759556486583e-05
PSO vincoli settaggio 1	0.0010	0.0001	-0.0004
PSO vincoli settaggio 2	0.0009	0.0001	-0.0004

Tabella 5. 33 Performance titoli FTSE MIB. Rendimento atteso prefissato 35% – Periodo post-Covid

Nessun portafoglio individuato attraverso tecniche esatte riesce a realizzare un rendimento positivo nel futuro virtuale, ad eccezione dei due portafogli di Markowitz e di Sharpe che inseriscono il titolo a rendimento certo. I portafogli con vincoli realizzati

attraverso la *PSO* realizzano nel futuro virtuale rendimenti sempre positivi, in qualche caso ampiamente superiori al rendimento atteso prefissato, anche se sono più volatili rispetto a quanto desiderato.

I portafogli di Markowitz e di Sharpe costituiti dai soli titoli rischiosi concentrano il 40% circa del capitale sul titolo Enel, poco volatile ma a bassa redditività, scelta che evidentemente spiega la performance negativa nel futuro virtuale (Grafici 5.91 e 5.92). I portafogli approssimati ottenuti attraverso la *PSO* risultano più diversificati, con alcune differenze nelle composizioni dei diversi scenari (Grafici da 5.93 a 5.96).

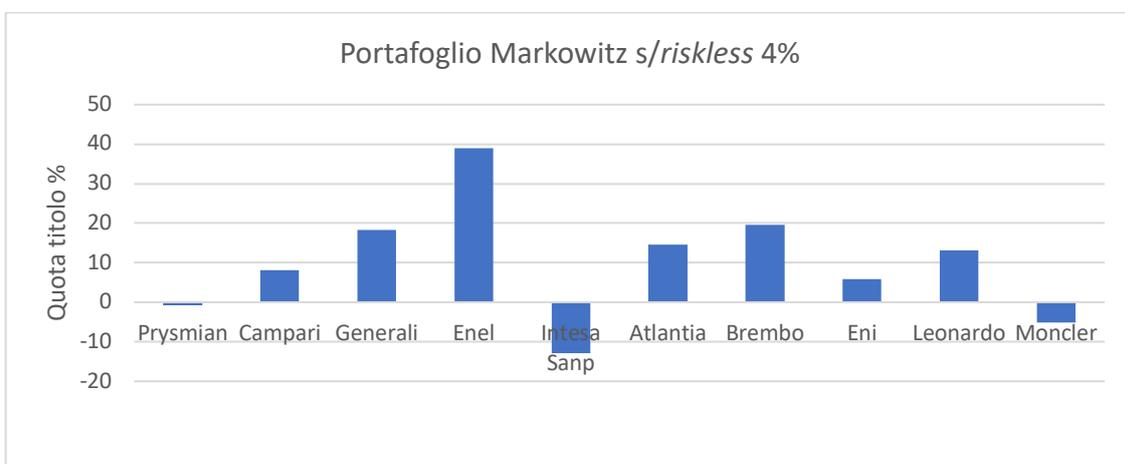


Grafico 5. 91 Composizione portafoglio Markowitz titoli FTSE MIB – Periodo post-Covid

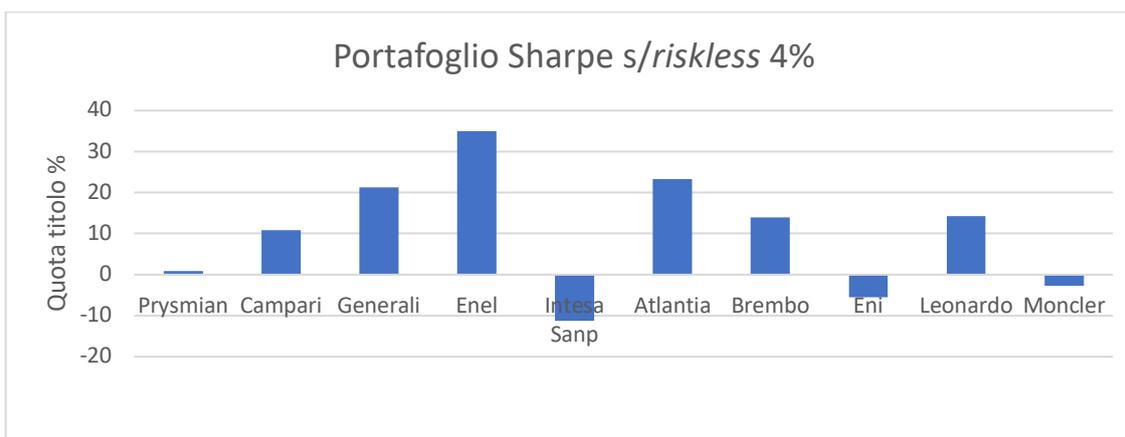


Grafico 5. 92 Composizione portafoglio Sharpe titoli FTSE MIB – Periodo post-Covid

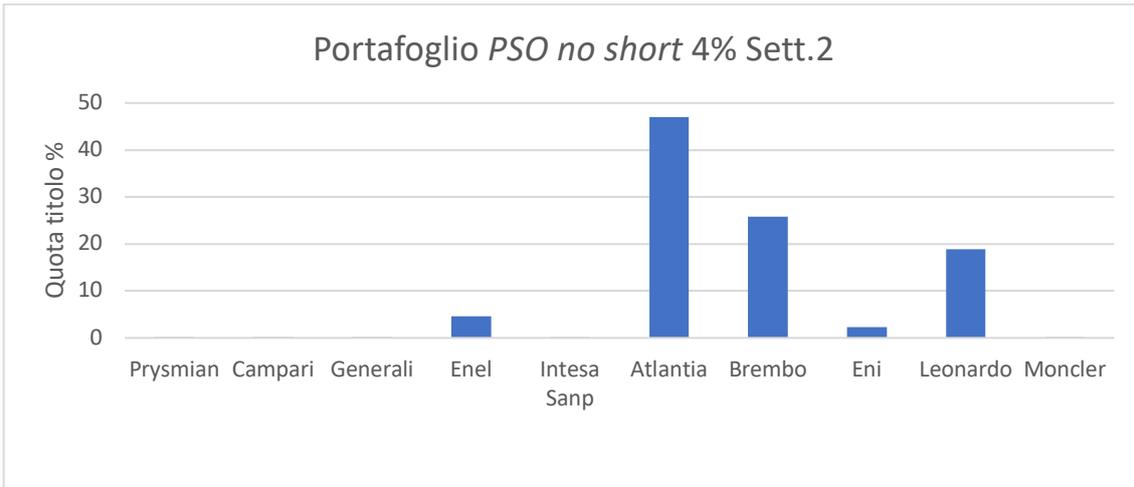


Grafico 5. 93 Composizione portafoglio con vincoli di non negatività titoli FTSE MIB – Periodo post-Covid

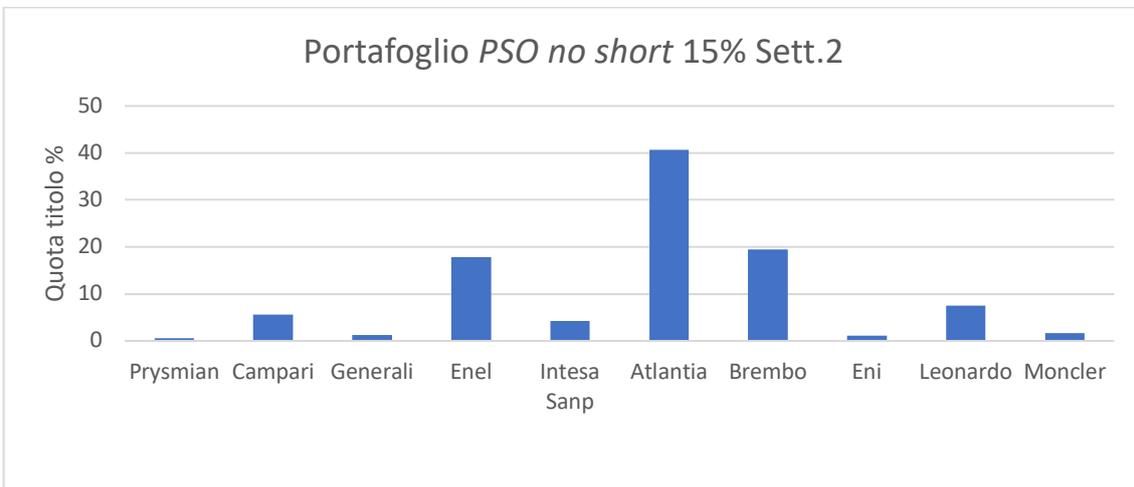


Grafico 5. 94 Composizione portafoglio con vincoli di non negatività titoli FTSE MIB – Periodo post-Covid

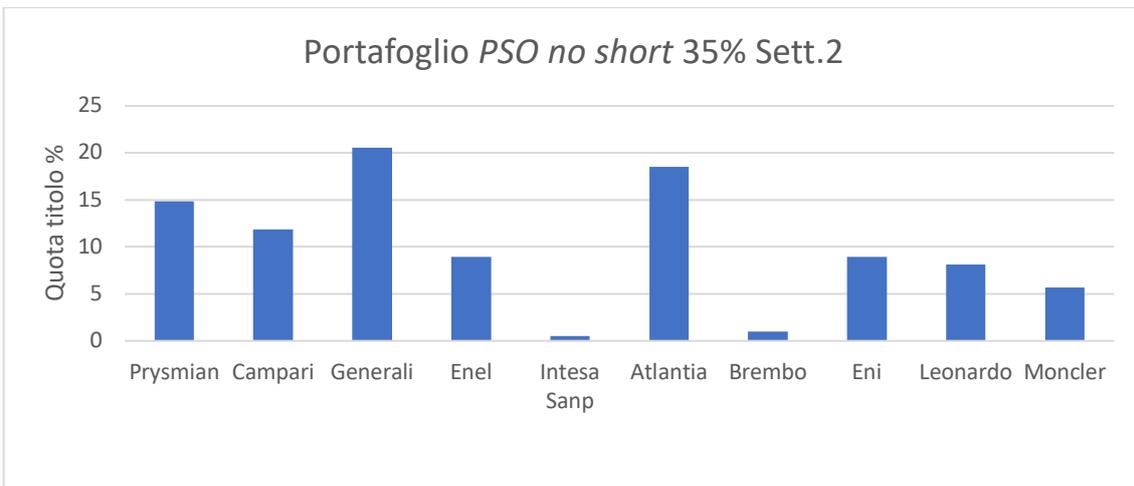


Grafico 5. 95 Composizione portafoglio con vincoli di non negatività titoli FTSE MIB – Periodo post-Covid

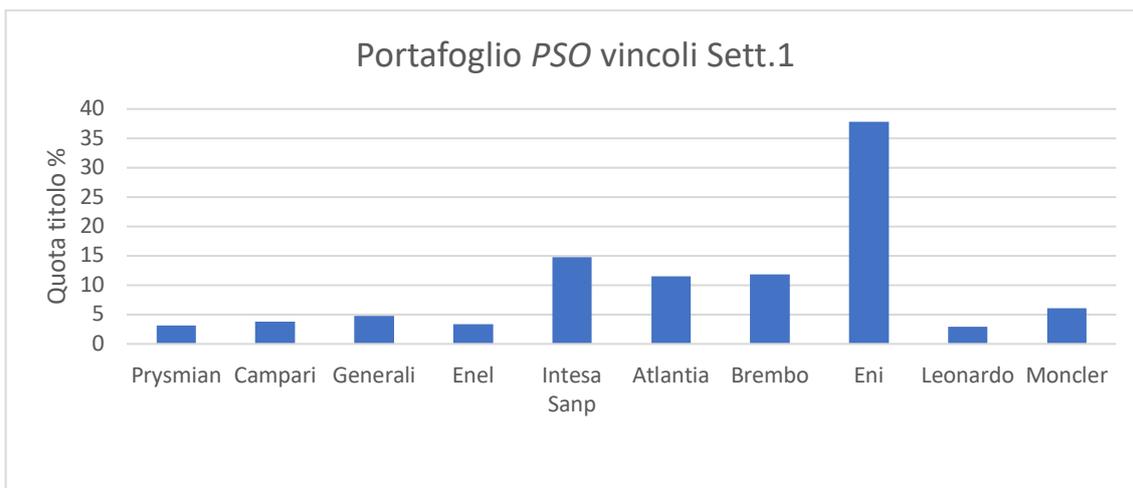


Grafico 5. 96 Composizione portafoglio con vincoli misti-interi titoli FTSE MIB – Periodo post-Covid

### 5.5.3 Titoli S&P 100

Le rilevazioni dei dati storici relative al periodo successivo alla pandemia, effettuate dal 30/02/2021 al 30/02/2022 sui titoli dell'indice S&P 100, indicano che i rendimenti medi realizzati sono ancora quasi tutti positivi, anche se con valori inferiori al periodo precedente: ora sono i titoli Pfizer ed Exxon Mobil a realizzare i rendimenti più alti. Come nel mercato finanziario italiano, in questo periodo la volatilità dei titoli è diminuita, e in alcuni casi è inferiore alla volatilità registrata nel periodo precedente la pandemia. Nella Tabella 5.34 sono riportati i rendimenti medi giornalieri e annui e le varianze realizzate dai titoli nel periodo *in-sample* calcolati a partire dalla serie storica dei rendimenti logaritmici quotidiani. Si rappresenta inoltre il rendimento medio annuo in termini percentuali approssimato alla seconda cifra decimale. In due casi (BlackRock ed Exxon Mobil) la frequenza dei rendimenti logaritmici giornalieri segue la distribuzione Normale.

Titoli S&P 100 - Periodo post-Covid			
	Rendimento medio (d)	Rendimento medio % (y)	Varianza
Apple	0.0010407	29.97	0.00023411
Starbucks	-0.00053555	-12.63	4.267e-05
BlackRock	0.00021144	5.47	0.00020013
Exxon Mobil	0.0015218	46.70	0.00030869
Caterpillar	0.00012759	3.27	0.00027427
Boeing	-0.00035206	-8.49	0.00047829
Goldman Sachs	0.00017465	4.5	0.00025564
Pfizer	0.0014561	44.29	0.00030412
FedEx	-0.00061042	-14.26	0.00027445
DuPont de Nem.	0.00026502	6.91	0.00026679

Tabella 5. 34 Statistiche descrittive titoli S&P 100 – Periodo post- Covid

In applicazione del Modello Classico della *MPT* di Markowitz, nel Grafico 5.97 è rappresentata la Frontiera Efficiente sul piano Media-Varianza sia in presenza che in assenza di un'attività a rendimento certo, che nel caso della presenza del titolo *riskless* tocca l'asse delle ordinate in corrispondenza del portafoglio a rischio nullo costituito esclusivamente dal titolo a rendimento certo.

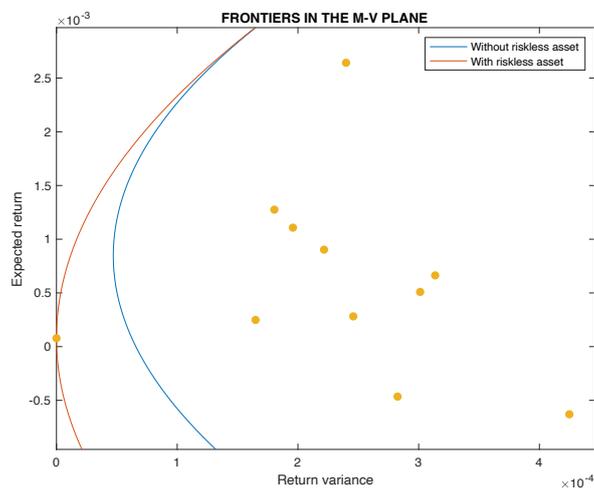


Grafico 5. 97 Frontiera Efficiente titoli S&P 100 – Periodo post-Covid

Nei Grafici 5.98, 5.99, 5.100 e nelle Tabelle 5.35, 5.36 e 5.37 sono riportate le performance, espresse in termini di media e varianza, ottenute nel futuro virtuale dal portafoglio ottimo di Markowitz con e senza attività a rendimento certo nei casi di

rendimento atteso prefissato annuo pari rispettivamente al 4%, al 15% e al 35%: esse vengono messe a confronto con le performance realizzate dal *GMV Portfolio*, dal portafoglio equipesato con e senza attività a rendimento certo, dal portafoglio di Sharpe con e senza attività a rendimento certo, e dai portafogli con vincolo di divieto di vendite allo scoperto e con vincoli misti-interi individuati mediante la *PSO* nei due diversi settaggi considerati<sup>78</sup>.

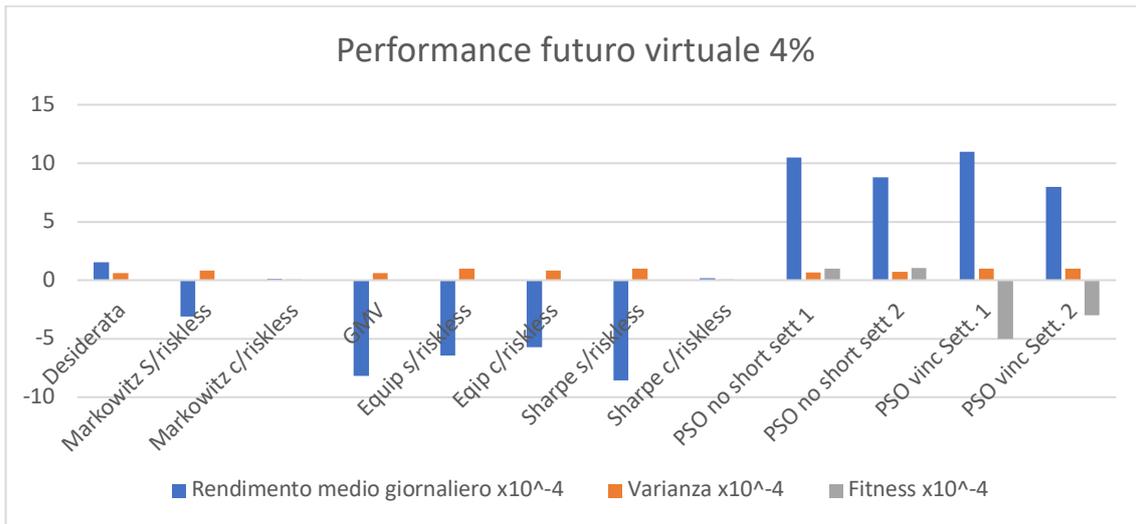


Grafico 5.98 Performance titoli S&P 100 – Periodo post-Covid

Performance futuro virtuale portafogli titoli S&P 100 - Periodo post-Covid			
	Rendimento atteso	Varianza	Fitness
Desiderata 4% (in sample)	0.000155649863	0.000059511593	-
Markowitz N titoli	-0.000316250003	0.000080439213	-
Markowitz N+1 titoli	0.000014412712	0.000000298698	-
<i>GMV Portfolio</i>	-0.000815954447	0.000061667356	-
Equipesato N titoli	-0.000641132859	0.000098527064	-
Equipesato N+1 titoli	-0.000574989560	0.000081427326	-
Sharpe N titoli	-0.000856371505	0.000100003355	-
Sharpe N+1 titoli	0.000017919258	0.000000297688	-
PSO no short settaggio 1	0.001047546175	0.000066768049	9.741965084153060e-05

<sup>78</sup> Per quanto riguarda le performance e le composizioni dei portafogli individuati attraverso *PSO* con vincoli di non negatività e *PSO* con vincoli misti-interi, i dati inseriti nei grafici e nelle tabelle sono i risultati “al meglio di” in termini di funzione di *fitness* sulle dieci *run* effettuate per ogni settaggio

PSO no short settaggio 2	0.000881389448	0.000071342839	1.036585520324808e-04
PSO vincoli settaggio 1	0.0011	0.0001	-0.0005
PSO vincoli settaggio 2	0.0008	0.0001	-0.0003

Tabella 5. 35 Performance titoli S&P 100. Rendimento atteso prefissato 4% – Periodo post-Covid

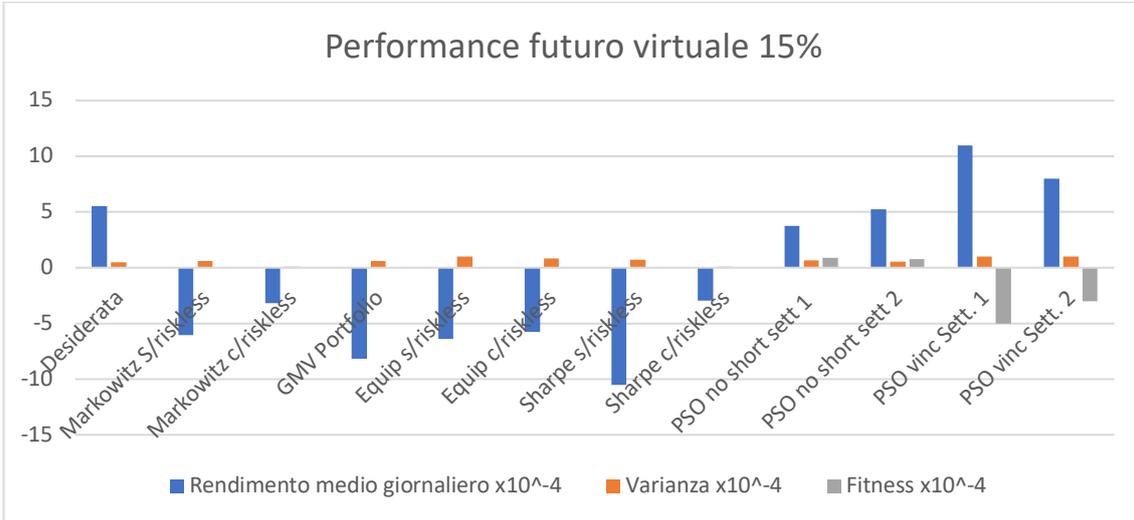


Grafico 5. 99 Performance titoli S&P 100 – Periodo post-Covid

Performance futuro virtuale portafogli titoli S&P 100 - Periodo post-Covid			
	Rendimento atteso	Varianza	Fitness
Desiderata 15% (in sample)	0.000554764707	0.000049271054	-
Markowitz N titoli	-0.000605127041	0.000061595931	-
Markowitz N+1 titoli	-0.000317931620	0.000011404078	-
Sharpe N titoli	-0.001048932584	0.000073477867	-
Sharpe N+1 titoli	-0.000296264874	0.000011365531	-
PSO no short settaggio 1	0.000372684493	0.000064458178	8.565508731829922e-05
PSO no short settaggio 2	0.000523503081	0.000056373631	7.951798438823136e-05
PSO vincoli settaggio 1	0.0011	0.0001	-0.0005
PSO vincoli settaggio 2	0.0008	0.0001	-0.0003

Tabella 5. 36 Performance titoli S&P 100. Rendimento atteso prefissato 15% – Periodo post-Covid

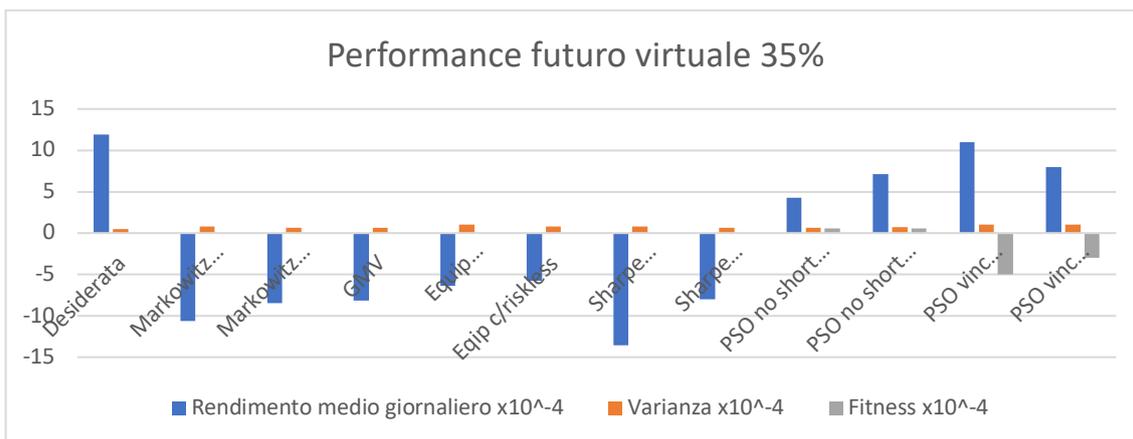


Grafico 5. 100 Performance titoli S&P 100 – Periodo post-Covid

Performance futuro virtuale portafogli titoli S&P 100 - Periodo post-Covid			
	Rendimento atteso	Varianza	Fitness
Desiderata 35% (in sample)	0.001191600632	0.000050174449	-
Markowitz N titoli	-0.001066065235	0.000076879172	-
Markowitz N+1 titoli	-0.000848227130	0.000062304708	-
Sharpe N titoli	-0.001356187036	0.000080098338	-
Sharpe N+1 titoli	-0.000797583590	0.000062094112	-
PSO no short settaggio 1	0.000427258691	0.000061057351	5.739197059897874e-05
PSO no short settaggio 2	0.000709581370	0.000069239194	5.539038107045983e-05
PSO vincoli settaggio 1	0.0011	0.0001	-0.0005
PSO vincoli settaggio 2	0.0008	0.0001	-0.0003

Tabella 5. 37 Performance titoli S&P 100. Rendimento atteso prefissato 35% – Periodo post-Covid

I portafogli esatti si rivelano deludenti dal punto di vista della redditività con tutti i rendimenti attesi prefissati, anche se sono poco volatili. I portafogli euristici realizzano rendimenti positivi superiori al rendimento atteso prefissato quando questo è pari al 4%; con il rendimento atteso prefissato del 15%, esso viene superato solo dai portafogli con vincolo di non negatività. Tutte le *run* effettuate per individuare i portafogli con vincolo di non negatività hanno realizzato rendimenti positivi. In tutti gli altri scenari i rendimenti effettivamente realizzati rimangono comunque positivi.

I portafogli di Markowitz e di Sharpe sono abbastanza diversificati: il titolo che compare con la quota maggiore non supera il 24% del capitale a disposizione. L'investimento è distribuito sui tre titoli Caterpillar, Starbucks ed Apple nel portafoglio di Markowitz

(Grafico 5.101) e sui titoli Caterpillar e Starbucks nel portafoglio di Sharpe (Grafico 5.102). In questo scenario sono i portafogli con vincoli di non negatività ad essere meno diversificati: concentrano quasi metà del capitale sui soli due titoli Caterpillar ed Apple (Grafici 5.103, 5.104 e 5.105). Anche il portafoglio più complesso costruito mediante la PSO risulta poco diversificato, indirizzando il capitale principalmente sul titolo Apple (Grafico 5.106).

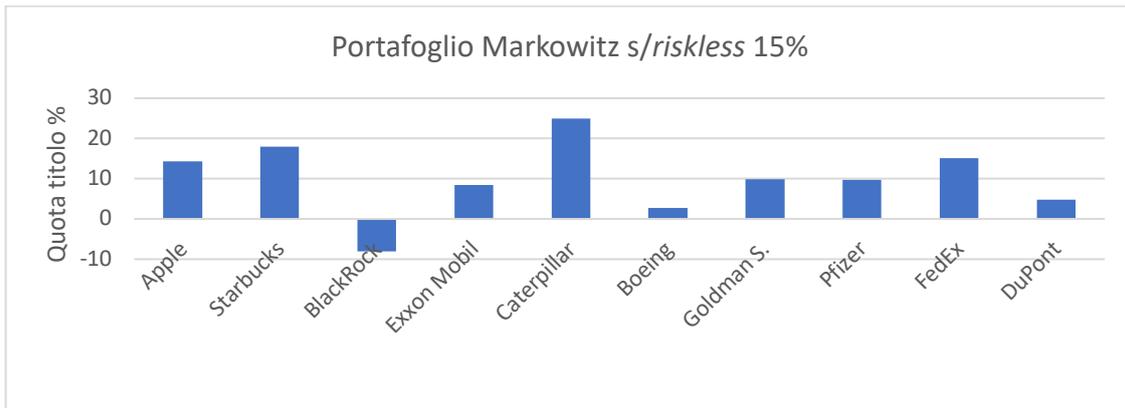


Grafico 5. 101 Composizione portafoglio Markowitz titoli S&P 100 – Periodo post-Covid

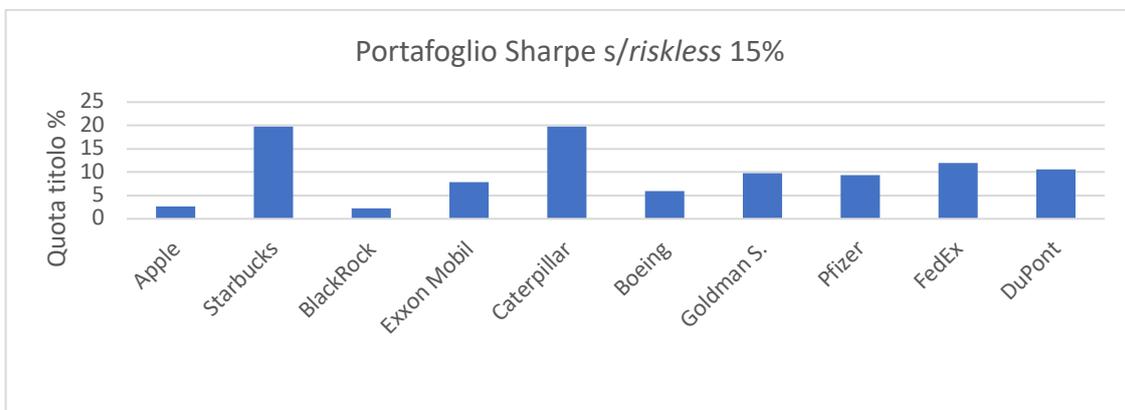


Grafico 5. 102 Composizione portafoglio Sharpe titoli S&P 100 – Periodo post-Covid

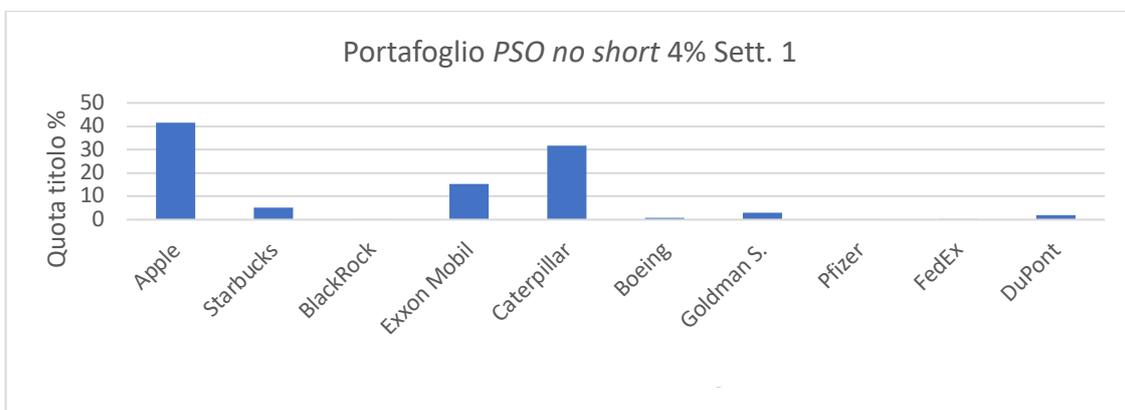


Grafico 5. 103 Composizione portafoglio con vincoli di non negatività titoli S&P 100 – Periodo post-Covid

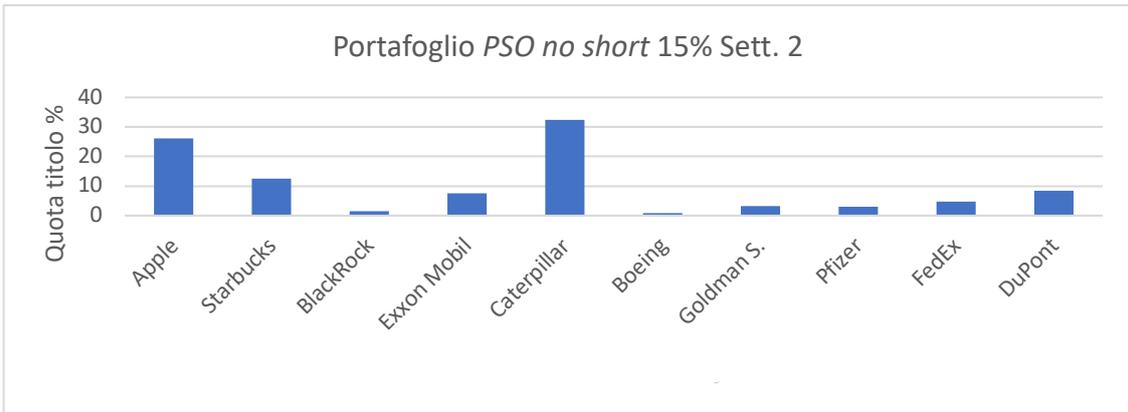


Grafico 5. 104 Composizione portafoglio con vincoli di non negatività titoli S&P 100 – Periodo post-Covid

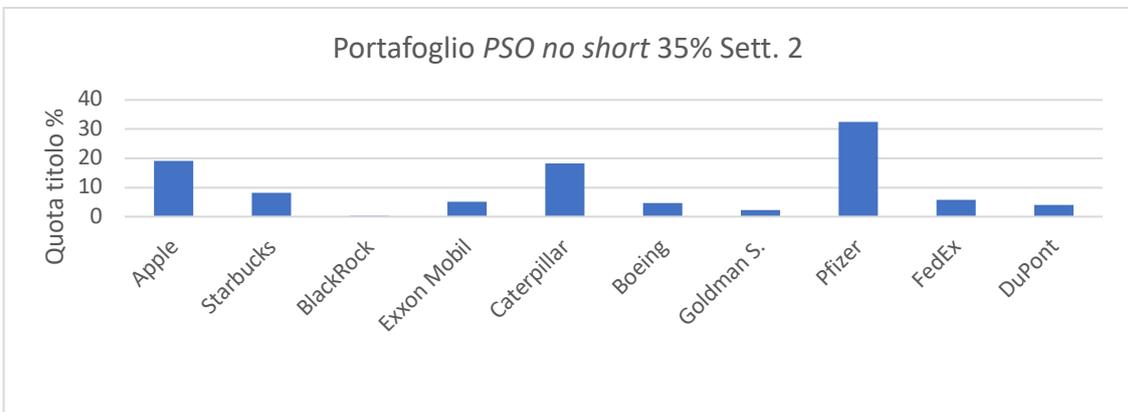


Grafico 5. 105 Composizione portafoglio con vincoli di non negatività titoli S&P 100 – Periodo post-Covid

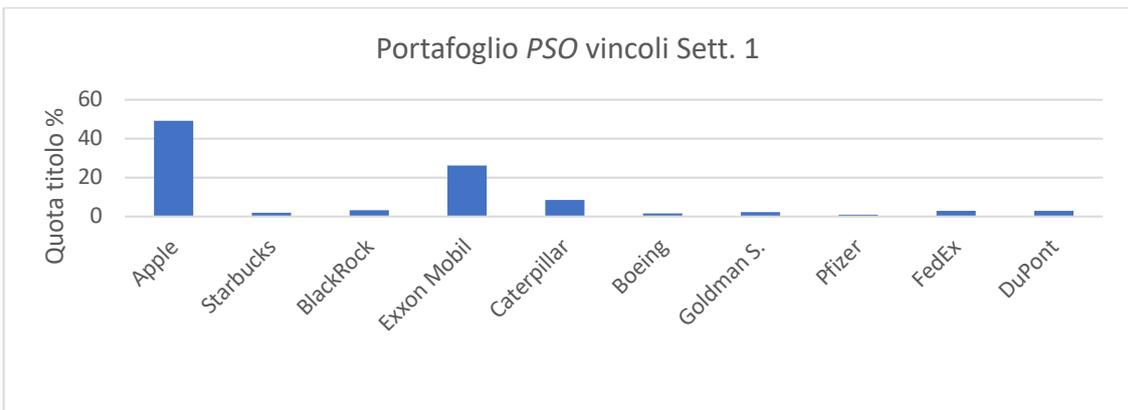


Grafico 5. 106 Composizione portafoglio con vincoli misti interi titoli S&P 100 – Periodo post-Covid

## 5.6 Analisi e confronto

Nei paragrafi 5.3, 5.4 e 5.5 sono state riportate le performance ottenute nel futuro virtuale da ciascuno dei portafogli oggetto di indagine, con l'indicazione del rendimento e della varianza effettivamente realizzati e le rispettive composizioni. La loro valutazione attraverso il Criterio Media-Varianza è poco significativa: i portafogli a rendimento negativo sono senza dubbio dominati dagli altri, ma i portafogli a maggior rendimento sono spesso anche i più rischiosi e quindi non è sempre possibile stabilire quale sia il portafoglio che domina gli altri. La prima comparazione sulla validità e l'efficacia dei modelli viene effettuata per ogni periodo rappresentando il rendimento percentuale effettivamente realizzato nel futuro virtuale dai portafogli dei tre mercati, opportunamente annualizzato.

Nel periodo precedente al Covid quasi tutti i portafogli composti da titoli appartenenti all'indice Hang Seng realizzano rendimenti positivi, anche se spesso inferiori al rendimento atteso prefissato (Tabella 5.38): la presenza di titoli ad alta redditività permette al portafoglio equipesato di ottenere rendimenti superiori al rendimento atteso prefissato quando questo è fissato al 4% e al 15%. Nonostante la presenza di vincoli, le performance migliori si osservano nei portafogli individuati attraverso la *PSO*, che realizzano rendimenti sempre superiori ai rendimenti prefissati. Come illustrato nei paragrafi precedenti, i portafogli risultano più volatili di quanto desiderato, ad eccezione dei portafogli di Markowitz e di Sharpe quando inseriscono l'attività a rendimento certo. Nel mercato finanziario italiano tra i portafogli individuati attraverso tecniche esatte solo i portafogli di Markowitz e di Sharpe che inseriscono l'attività a rendimento certo realizzano nel futuro virtuale un rendimento positivo, inferiore al rendimento atteso prefissato, ma accompagnato da una riduzione del rischio. Sono negative le performance dei portafogli di Markowitz e di Sharpe costituiti dai soli titoli rischiosi, del *GMV Portfolio* e dei portafogli equipesati, sia in termini di redditività che di volatilità. I rendimenti realizzati dai portafogli con divieto di vendite allo scoperto sono positivi: in uno scenario associato al rendimento atteso prefissato del 4% e nei due scenari

nell'ipotesi del rendimento atteso prefissato del 15% la *PSO* individua portafogli che realizzano rendimenti positivi superiori al rendimento prefissato.

I portafogli esatti composti dai dieci titoli appartenenti all'indice S&P 100 realizzano nel periodo precedente al Covid performance negative, in termini di redditività e volatilità, ad eccezione dei portafogli di Markowitz e di Sharpe quando inseriscono il titolo a rendimento certo e del portafoglio di Sharpe costituito dai soli titoli rischiosi quando il rendimento atteso è 35%. I portafogli individuati mediante *PSO* sono più rischiosi rispetto a quanto desiderato e realizzano nel periodo *out-of-sample* rendimenti positivi, superiori al rendimento atteso prefissato in due scenari; il portafoglio con vincoli misti-interi del settaggio 1 ottiene rendimenti negativi.

Rendimento % annuo effettivamente realizzato periodo pre-Covid – Tre mercati									
Mercato	Hang Seng			FTSE MIB			S&P 100		
	4	15	35	4	15	35	4	15	35
Markowitz N	-0,37	3,92	11,15	-53,20	-44,32	-26,56	-38,56	-27,67	-6,18
Markowitz N+1	2,85	7,36	14,97	3,5	11,61	25,89	5,38	24,74	63,23
<i>GMV Portfolio</i>	-6,51	-6,51	-6,51	-37,49	-37,49	-37,49	-42,84	-42,84	-42,84
Equipesato N	19,12	19,12	19,12	-37,29	-37,29	-37,29	-37,50	-37,50	-37,50
Equipesato N+1	17,47	17,47	17,47	-34,44	-34,44	-34,44	-34,64	-34,64	-34,64
Sharpe N	-11,46	-7,16	0,12	-50,69	-41,33	-22,60	-34,36	-22,02	2,65
Sharpe N+1	3,03	8,55	17,97	3,36	10,69	23,48	5,61	26,42	68,41
PSO no short 1	39,29	48,62	92,64	0,24	16,83	6,21	10,64	2,01	10,28
PSO no short 2	36,84	48,34	72,12	4,56	16,30	9,67	3,88	19,75	14,91
PSO vincoli 1	45,89	45,89	45,90	-	-	-	-2,49	-2,49	-2,49
PSO vincoli 2	53,42	53,42	53,42	-	-	-	2,55	2,55	2,55

Tabella 5. 38 Rendimento realizzato futuro virtuale tre mercati – Periodo pre-Covid

Nel periodo di diffusione della pandemia si osserva una elevata instabilità dei prezzi nei mercati oggetto di indagine. I portafogli composti da titoli dell'indice Hang Seng sono più volatili rispetto a quanto desiderato, ad eccezione dei portafogli di Markowitz e di Sharpe che inseriscono l'attività *riskless*. Sono proprio i portafogli di Sharpe gli unici che con il rendimento atteso prefissato del 15% e del 35% realizzano un rendimento negativo nel futuro virtuale (Tabella 5.39). Le migliori performance in termini di

redditività, con rendimenti effettivamente realizzati superiori ai rendimenti attesi prefissati, spettano ai portafogli con vincoli di non negatività, e in misura minore ai portafogli equipesati.

Nel mercato italiano e in quello americano durante il periodo di piena pandemia quasi tutti i portafogli realizzano nel futuro virtuale rendimenti positivi superiori al rendimento atteso prefissato se questo viene fissato al 4%, ad eccezione dei portafogli di Markowitz e di Sharpe che inseriscono l'attività riskless, che producono comunque rendimenti positivi ma inferiori al rendimento atteso prefissato. Quando il rendimento atteso è 15%, tra i portafogli esatti solo i portafogli equipesati realizzano rendimenti superiori, soprattutto per quanto riguarda i titoli S&P 100, mentre gli altri portafogli realizzano rendimenti positivi, ma sempre inferiori al rendimento atteso prefissato, o negativi, come nel caso del portafoglio di Sharpe con il titolo riskless. I rendimenti dei portafogli equipesati del mercato americano sono sempre superiori al rendimento atteso prefissato. Quasi tutti i portafogli ottenuti con la *PSO* superano ampiamente il rendimento atteso prefissato. Dai dati illustrati in precedenza si rappresenta che in questi scenari la costruzione dei portafogli diversificati riduce la volatilità nella quasi totalità dei casi.

<b>Rendimento % annuo effettivamente realizzato periodo Covid – Tre mercati</b>									
<b>Mercato</b>	Hang Seng			FTSE MIB			S&P 100		
<b>Rendimento</b>	4	15	35	4	15	35	4	15	35
Markowitz N	4,71	4,99	5,43	9,36	9,33	9,29	40,54	28,03	10,33
Markowitz N+1	2,05	2,29	2,67	2,11	2,66	3,55	0,36	-7,70	-19,25
<i>GMV Portfolio</i>	4,52	4,52	4,52	9,29	9,29	9,29	5,42	5,42	5,42
Equiposato N	36,16	36,16	36,16	33,74	33,74	33,74	51,77	51,77	51,77
Equiposato N+1	32,66	32,66	32,66	30,51	30,51	30,51	46,41	46,41	46,41
Sharpe N	9,60	7,22	3,51	20,73	15,47	7,54	27,57	14,85	-2,87
Sharpe N+1	1,55	-0,76	-4,34	1,33	-2,08	-7,28	0,11	-9,13	-22,14
PSO no short 1	105,36	96,85	117,17	39,01	41,87	54,95	51,57	54,47	93,34
PSO no short 2	94,91	87,87	173,28	32,39	38,06	62,82	61,97	84,17	30,71

PSO vincoli 1	-	-	-	28,64	28,64	28,64	87,61	87,61	87,61
PSO vincoli 2	-	-	-	45,89	45,89	45,89	82,96	82,96	82,96

Tabella 5. 39 Rendimento realizzato futuro virtuale tre mercati – Periodo Covid

Nel periodo post-Covid i dati osservati rappresentano situazioni diverse nei tre mercati finanziari (Tabella 5.40). Tra i portafogli composti da titoli appartenenti all'indice Hang Seng, i portafogli di Markowitz e di Sharpe realizzano un rendimento positivo, in qualche caso superiore al rendimento atteso, e sono in genere meno volatili rispetto a quanto desiderato; i portafogli equipesati e il *GMV Portfolio* realizzano sempre rendimenti negativi. I portafogli con vincoli di non negatività danno rendimenti negativi e sono anche caratterizzati da una maggiore volatilità. I portafogli più complessi con vincoli misti-interi realizzano rendimenti positivi, inferiori ai rendimenti attesi prefissati.

Nel mercato italiano e anche in quello americano i portafogli costruiti con tecniche esatte realizzano nel futuro virtuale rendimenti negativi con ogni rendimento atteso prefissato considerato e sono anche più rischiosi, ad eccezione dei portafogli di Markowitz e di Sharpe che inseriscono l'attività a rendimento certo, meno volatili, e a rendimento positivo con il rendimento prefissato del 4%. I portafogli ottenuti mediante *PSO* sono invece tutti a rendimento positivo, con valori generalmente più alti nel mercato americano: i portafogli con vincoli di non negatività realizzano rendimenti positivi ma inferiori ai rendimenti prefissati, mentre i portafogli con vincoli misti-interi riescono a superare i rendimenti attesi prefissati quando questi sono il 4% e il 15%.

Rendimento % annuo effettivamente realizzato periodo post-Covid – Tre mercati									
Mercato	Hang Seng			FTSE MIB			S&P 100		
	4	15	35	4	15	35	4	15	35
Markowitz N	0,22	12,00	33,72	-18,28	-24,05	-32,42	-7,66	-14,15	-23,57
Markowitz N+1	4,26	16,78	39,92	0,12	-9,06	-22,00	0,36	-7,70	-19,25
<i>GMV Portfolio</i>	-12,70	-12,70	-12,70	-32,54	-32,54	-32,54	-18,59	-18,59	-18,59
Equipesato N	-41,03	-41,03	-41,03	-17,41	-17,42	-17,42	-14,92	-14,92	-14,92
Equipesato N+1	-38,00	-38,00	-38,00	-15,80	-15,80	-15,80	-13,49	-13,49	-13,49
Sharpe N	31,17	45,77	72,48	-27,25	-29,46	-32,85	-19,42	-23,24	-28,96
Sharpe N+1	3,71	13,02	29,63	0,67	-5,93	-15,59	0,45	-7,20	-18,21

PSO no short 1	-16,03	-25,64	-17,44	1,21	0,08	3,23	30,19	9,84	11,37
PSO no short 2	-18,25	-20,03	-14,13	2,52	0,79	35,00	24,86	14,10	19,57
PSO vincoli 1	5,17	5,17	5,17	28,64	28,64	28,64	31,92	31,92	31,92
PSO vincoli 2	10,60	10,60	10,60	25,45	25,45	25,45	22,33	22,33	22,33

Tabella 5. 40 Rendimento realizzato futuro virtuale tre mercati – Periodo post-Covid

Il secondo aspetto dell'analisi prende in considerazione l'evolversi nel tempo delle performance realizzate dai portafogli nell'ambito di ciascun rispettivo mercato mobiliare. Il mercato finanziario di Hong Kong, per quanto riguarda i dieci titoli oggetto di indagine, risulta caratterizzato nel primo periodo osservato dalla presenza di titoli ad alta redditività e altrettanto alta volatilità, e di titoli con rendimento medio negativo meno volatili. Nel periodo Covid la volatilità dei singoli titoli quasi raddoppia; nel successivo si riduce ma non abbastanza da tornare ai valori del primo periodo osservato. Come si può vedere nei Grafici 5.107, 5.108 e 5.109, le performance del modello di Markowitz e del modello Diagonale sono altalenanti nel periodo precedente la pandemia e nel periodo di maggiore instabilità, e in generale tendono a migliorare nel periodo successivo. I portafogli equipesati realizzano performance positive nei primi due periodi. Allo stesso modo, i modelli PSO individuano portafogli che performano bene nel primo periodo e ancora meglio nel periodo Covid, sotto le aspettative nel periodo successivo<sup>79</sup>. In conclusione, il mercato sembra patire per più tempo e non aver superato del tutto l'instabilità. In questo scenario, nella situazione di particolare turbolenza si rivela vincente la composizione del portafoglio equipesato e soprattutto l'utilizzo di metodologie euristiche. C'è una netta differenza tra le ottime performance realizzate dalle metodologie euristiche nel periodo di elevata instabilità, e quelle deludenti, qualche volta negative, realizzate nel periodo immediatamente successivo.

<sup>79</sup> Si ricorda che in questo mercato la risoluzione attraverso la PSO non ha prodotto risultati nella costruzione di portafogli con vincoli misti-interi nel periodo Covid

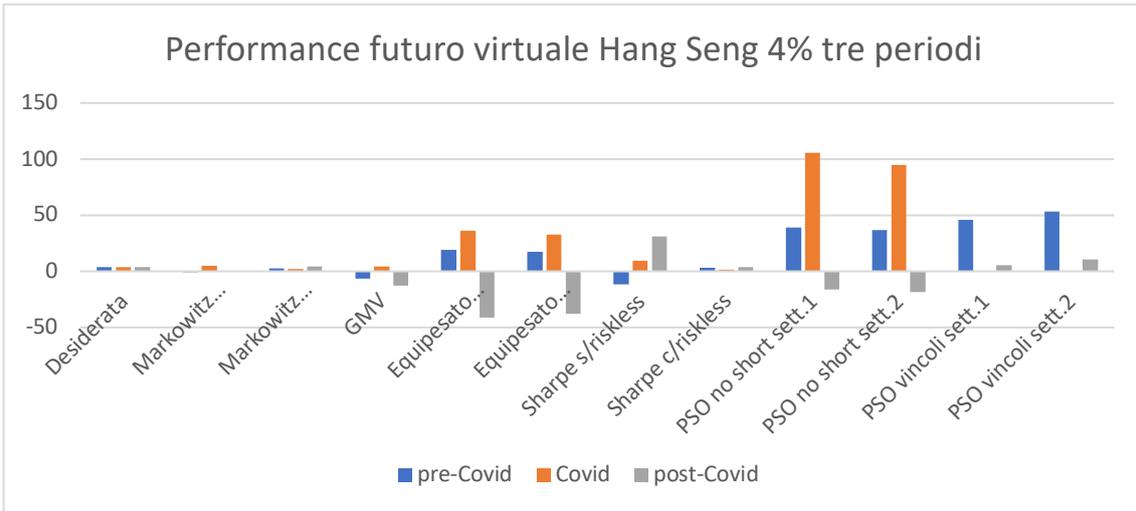


Grafico 5. 107 Performance portafogli Hang Seng – Rendimento atteso prefissato 4%

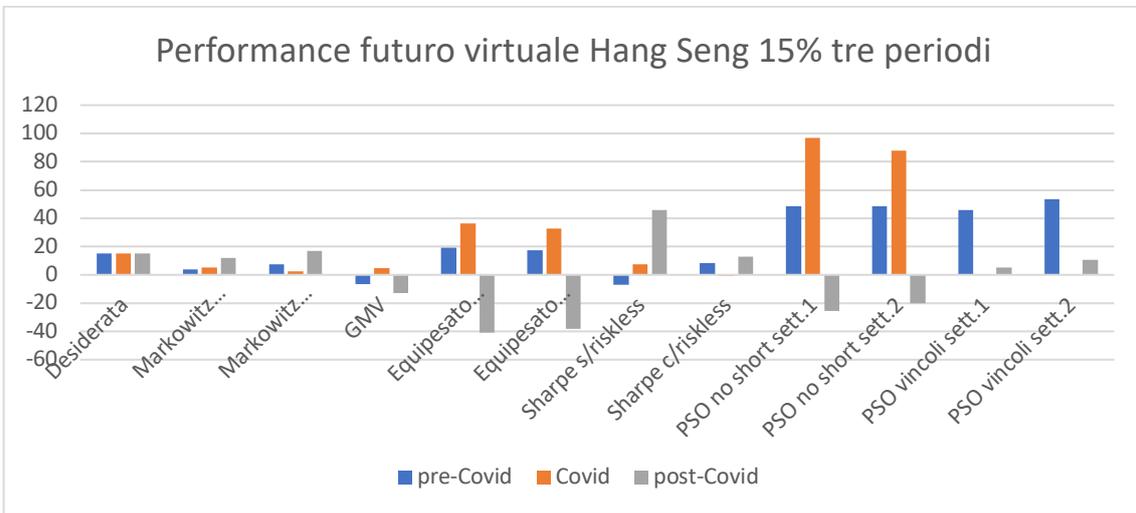


Grafico 5. 108 Performance portafogli Hang Seng – Rendimento atteso prefissato 15%

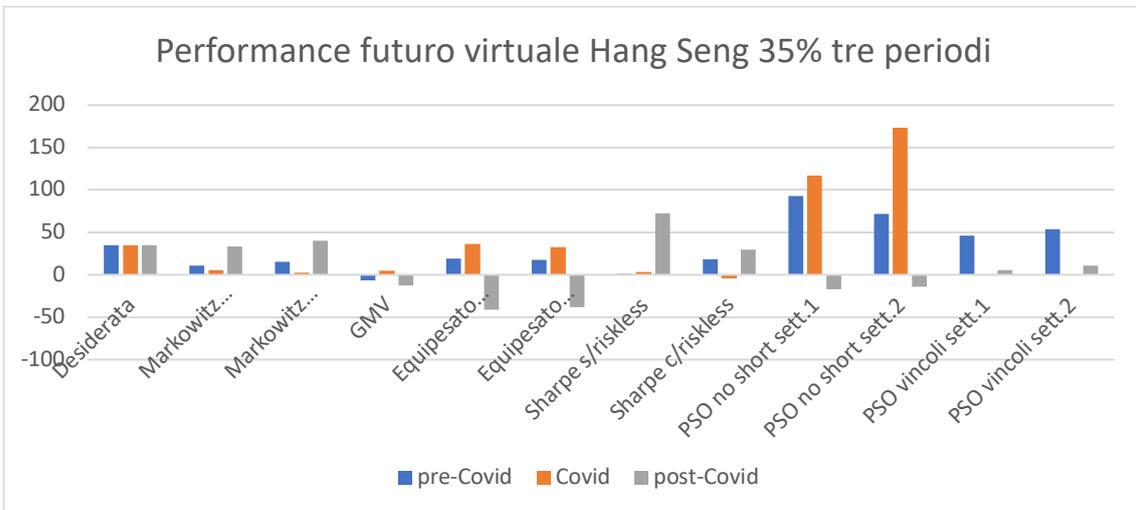


Grafico 5. 109 Performance portafogli Hang Seng – Rendimento atteso prefissato 35%

Nel periodo pre-Covid i titoli del mercato mobiliare italiano appartenenti all'indice FTSE MIB non sono particolarmente attrattivi se presi singolarmente, sia per la loro redditività che per la loro volatilità. Durante la pandemia la volatilità si fa più consistente; per alcuni titoli nel periodo post-Covid essa scende a valori inferiori rispetto a quelli iniziali. In questo contesto i portafogli di Markowitz e di Sharpe costituiti dai soli titoli rischiosi sono deludenti nel periodo precedente e in quello successivo al Covid (Grafici 5.110, 5.111 e 5.112); con l'inserimento del titolo a rendimento certo le performance migliori si osservano nel periodo che precede la pandemia. Il *GMV Portfolio* e i portafogli equipesati realizzano performance positive solo durante il periodo Covid. Similmente, le performance migliori dei portafogli ottenuti attraverso metodologie euristiche si registrano durante la pandemia; nel caso dei portafogli con vincoli misti-interi i rendimenti realizzati sono notevoli anche nel periodo post-Covid<sup>80</sup>. Il mercato italiano sembra aver superato la fase di instabilità, pur non essendo particolarmente attrattivo: in questo scenario la buona performance realizzata nel periodo di pandemia grazie all'utilizzo di tecniche euristiche si prolunga anche nel periodo successivo, anche se con valori più contenuti.

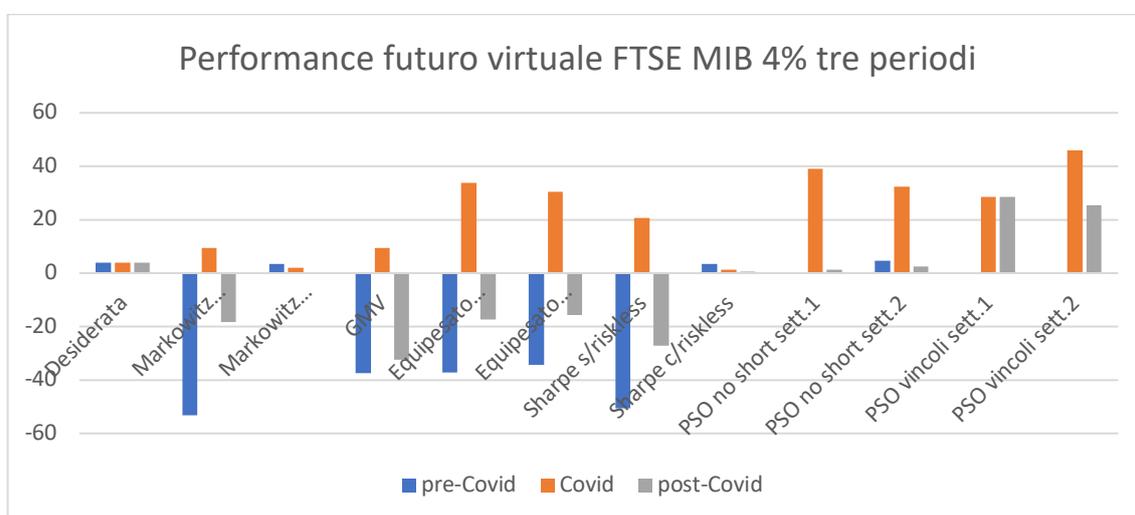


Grafico 5. 110 Performance portafogli FTSE MIB – Rendimento atteso prefissato 4%

<sup>80</sup> Si ricorda che in questo mercato la risoluzione attraverso la *PSO* non ha prodotto risultati nella costruzione di portafogli con vincoli misti-interi nel periodo pre-Covid

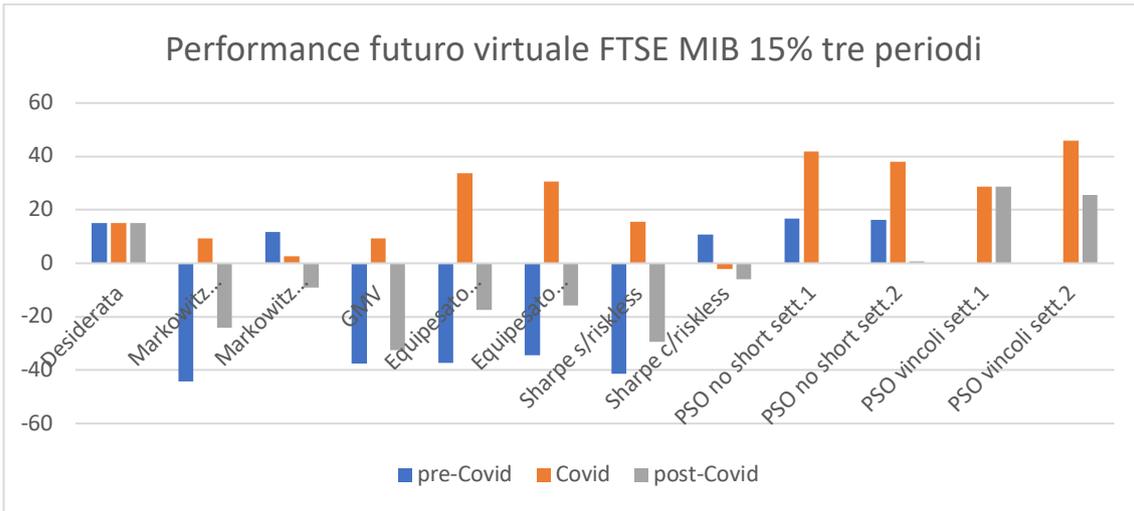


Grafico 5.111 Performance portafogli FTSE MIB – Rendimento atteso prefissato 15%

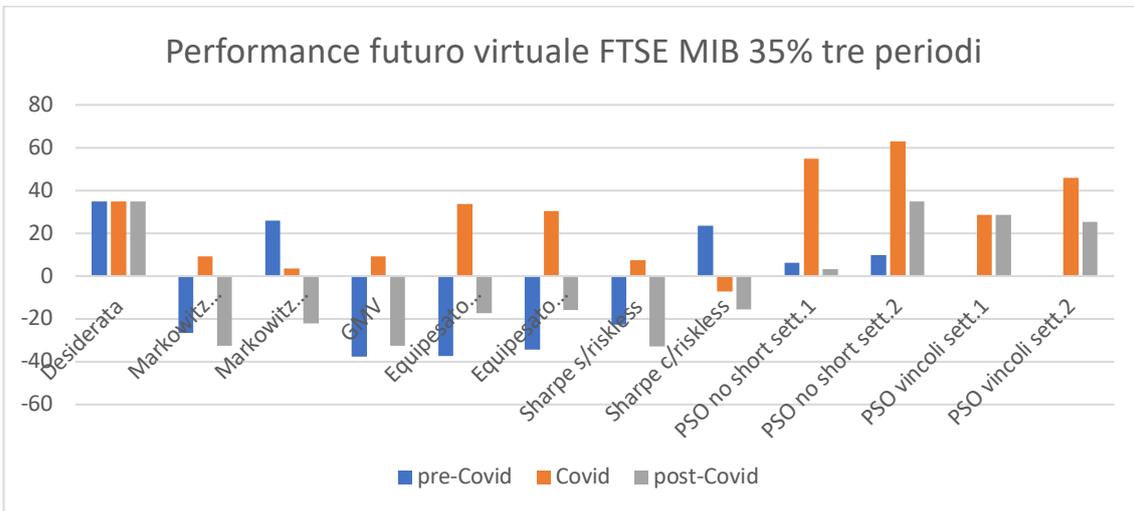


Grafico 5.112 Performance portafogli FTSE MIB – Rendimento atteso prefissato 35%

I dati relativi al mercato finanziario americano, con i titoli appartenenti all'indice S&P 100, lo classificano come il migliore tra quelli considerati: ci sono titoli ad alta redditività che non sono tra i più volatili. In alcuni casi la varianza cresce nel periodo di pandemia e poi diminuisce fino a raggiungere valori inferiori a quelli osservati nel periodo iniziale. Come evidenziato nei Grafici 5.113, 5.114 e 5.115, i portafogli con i soli titoli rischiosi di Markowitz e di Sharpe realizzano performance positive solo durante il periodo Covid, così come il portafoglio equipeso e il *GMV Portfolio*; le performance sono deludenti nel periodo pre-Covid e nel periodo post-Covid. Con l'inserimento del titolo a rendimento certo, quando il rendimento atteso prefissato è 4% il rendimento effettivamente realizzato dal portafoglio di Markowitz e da quello di Sharpe è prossimo

allo zero nel periodo di pandemia e in quello successivo. I portafogli equipesati e il *GMV Portfolio* realizzano buone performance solo durante il periodo di pandemia. I portafogli ottenuti attraverso la *PSO* realizzano ottime performance durante il periodo Covid, e si mantengono sempre positive nel periodo post-Covid, con alcuni portafogli euristici che risultano particolarmente performanti. In conclusione, il mercato sembra aver superato la fase turbolenta: come nello scenario precedente la buona performance realizzata nel periodo di pandemia grazie all'utilizzo di tecniche euristiche si prolunga anche nel periodo successivo, anche se con valori più contenuti.

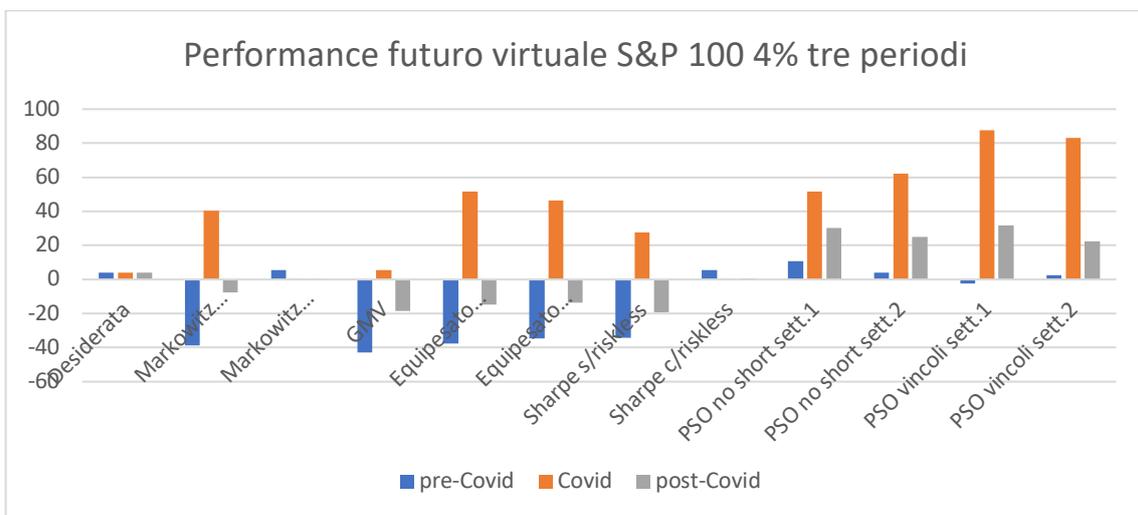


Grafico 5. 113 Performance portafogli S&P 100 – Rendimento atteso prefissato 4%

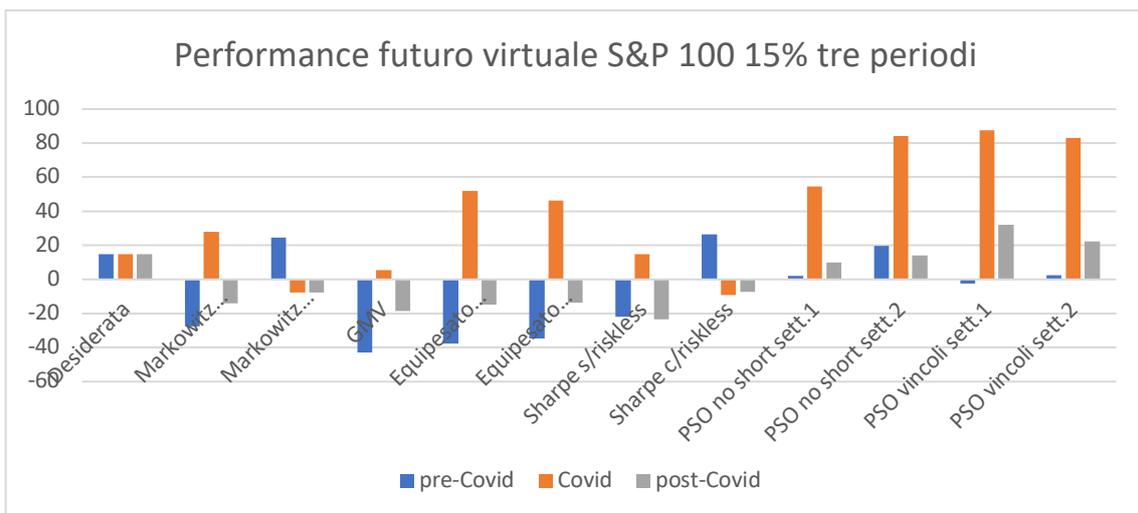


Grafico 5. 114 Performance portafogli S&P 100 – Rendimento atteso prefissato 15%

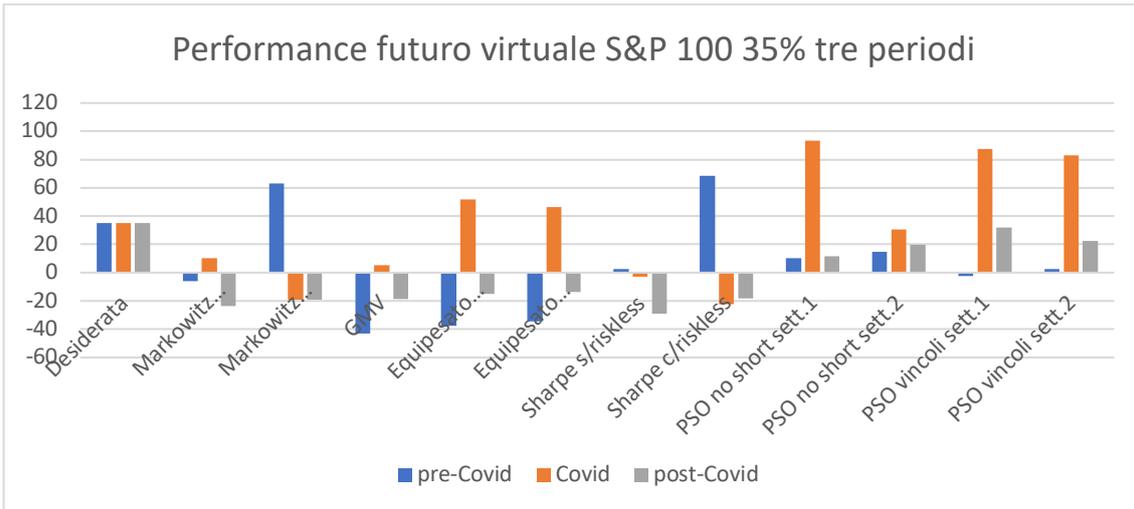


Grafico 5. 115 Performance portafogli S&P 100 – Rendimento atteso prefissato 35%

Rimane da approfondire il giudizio sul comportamento e l'evoluzione nel tempo dei principali modelli di Selezione di Portafoglio utilizzati, prendendoli in considerazione uno alla volta. A conferma di quanto rilevato finora, più che dal rendimento atteso prefissato, le performance di ciascun portafoglio risultano condizionate dal mercato finanziario sottostante. Nel mercato di Hong Kong i portafogli esatti di Markowitz (Grafico 5.116) e di Sharpe (Grafico 5.117) si dimostrano quasi sempre una scelta opportuna, mentre nel mercato italiano e in quello americano sono preferibili solo nel periodo di pandemia.

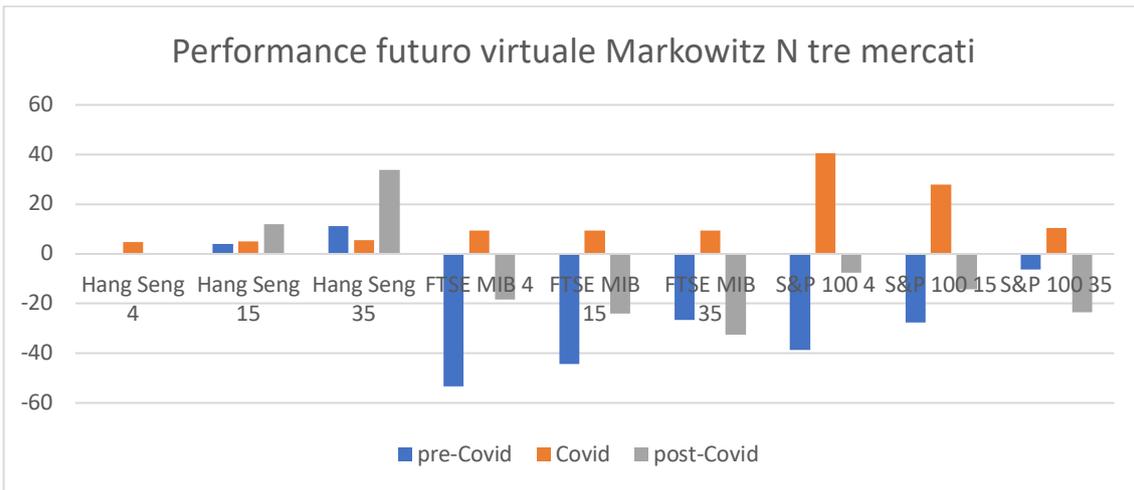


Grafico 5. 116 Performance portafogli Markowitz soli titoli rischiosi

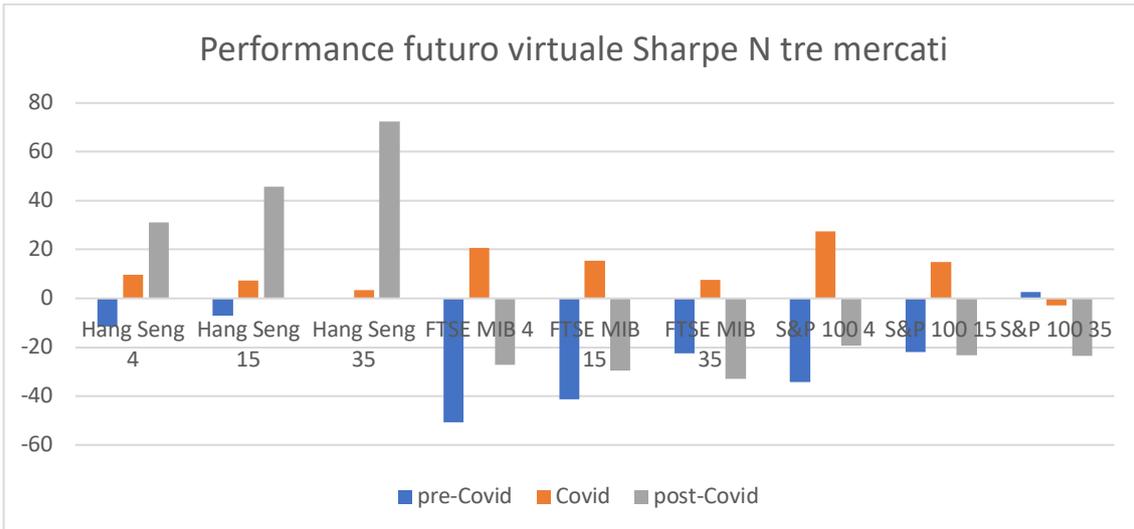


Grafico 5. 117 Performance portafogli Sharpe soli titoli rischiosi

In modo coerente con quanto già osservato, i portafogli approssimati con vincoli misti-interi si dimostrano una buona scelta soprattutto nei periodi di particolare instabilità, e in parte anche in quelli successivi, dato che non realizzano mai rendimenti negativi (Grafico 5.118). Lo stesso si può dire sui portafogli con vincoli di non negatività nei mercati occidentali, mentre nel mercato di Hong Kong essi sono da evitare nel periodo post-Covid (Grafico 5.119).

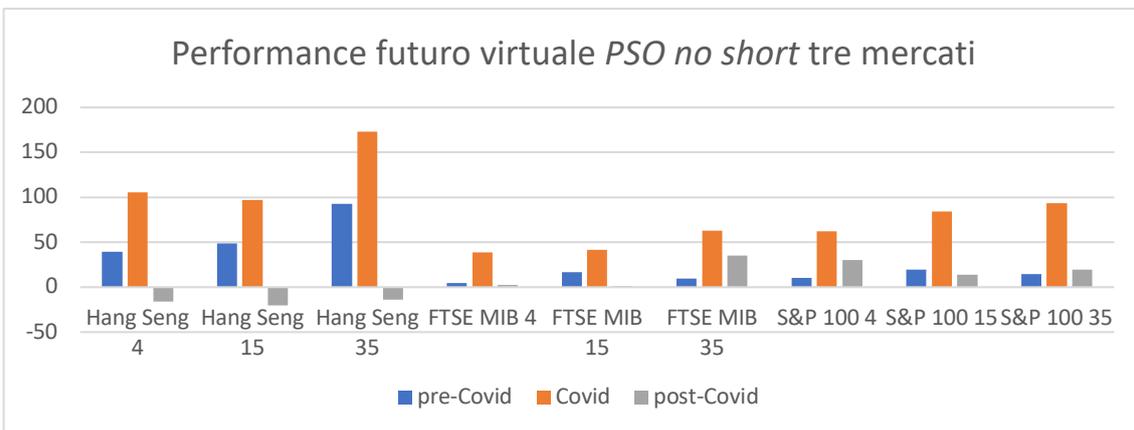


Grafico 5. 118 Performance portafogli con vincoli di non negatività

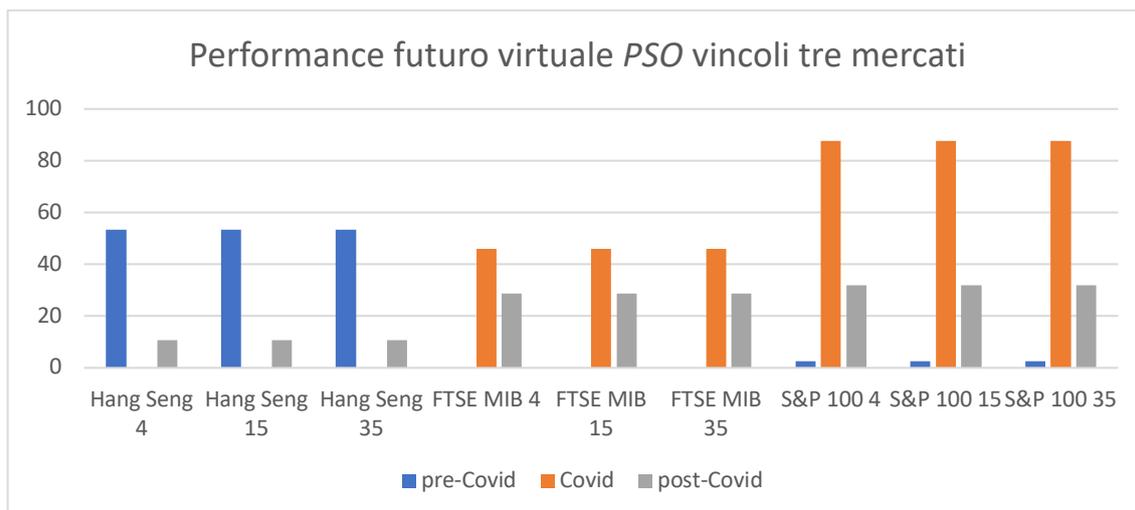


Grafico 5.119 Performance portafogli con vincoli misti-interi

A conferma o confutazione di quanto esposto sinora, l'analisi viene completata con una comparazione finale che tiene conto in modo congiunto della redditività e della volatilità dei portafogli attraverso il calcolo dell'Indice di Sharpe, misura illustrata nel Paragrafo 1.3: le migliori performance corrispondono ai portafogli con l'indice maggiore (senza prendere in considerazione i valori negativi, che possono dare risultati non corretti). I dati riportati nelle Tabelle 5.41, 5.42 e 5.43 sono coerenti con quanto già osservato. Nel periodo iniziale i migliori portafogli sono quelli esatti che inseriscono l'attività a rendimento certo; nel periodo di maggiore instabilità dei prezzi, in tutti i mercati i portafogli che reagiscono meglio sono i portafogli euristici. Nel periodo successivo, nei mercati occidentali sono ancora i portafogli euristici a confermarsi i migliori, in quello asiatico di nuovo i portafogli con il titolo a rendimento certo.

Indice di Sharpe portafogli titoli Hang Seng – Tre periodi									
Periodo	Pre-Covid			Covid			Post-Covid		
	4	15	35	4	15	35	4	15	35
Markowitz N	-0,0062	0,0048	0,0213	0,0076	0,008	0,0083	-0,0073	0,0377	0,1001
Markowitz N+1	0,146	0,1459	0,1459	0,005	0,005	0,005	<b>0,2655</b>	0,2655	0,2655
GMV Portfolio	-0,0238	-0,0238	-0,0238	0,0072	0,0072	0,0072	-0,064	-0,064	-0,064
Equipasato N	0,04	0,04	0,04	0,073	0,073	0,073	-0,1451	-0,1451	-0,1451
Equipasato N+1	0,0386	0,0386	0,0386	0,073	0,073	0,073	-0,1451	-0,1451	-0,1451
Sharpe N	-0,0385	-0,0251	-0,0047	0,0209	0,0137	0,0036	0,0923	0,0923	0,1771

Sharpe N+1	<b>0,1693</b>	0,1693	0,1693	-0,0401	-0,0401	-0,0401	0,1663	0,1663	0,1663
PSO no short 1	0,0952	0,1067	0,1677	0,09643	<b>0,1407</b>	0,1084	-0,0778	-0,0778	-0,0741
PSO no short 2	0,0839	0,1192	0,1384	0,0736	0,1097	0,1180	-0,0831	-0,0831	0,06457
PSO vincoli 1	0,1005	0,1005	0,1005	-	-	-	0,007	0,007	0,007
PSO vincoli 2	0,114	0,114	0,114	-	-	-	0,0227	0,0227	0,0227

Tabella 5. 41 Indice di Sharpe titoli Hang Seng – tre periodi

Indice di Sharpe portafogli titoli FTSE MIB – Tre periodi									
Periodo	Pre-Covid			Covid			Post-Covid		
	4	15	35	4	15	35	4	15	35
Markowitz N	-0,2693	-0,2084	-0,1057	0,0207	0,021	0,0202	-0,0772	-0,1076	-0,1517
Markowitz N+1	<b>0,127</b>	0,127	0,127	0,0091	0,0091	0,0091	-0,1996	-0,1996	-0,1996
GMV Portfolio	-0,1652	-0,1652	-0,1652	0,0202	0,0202	0,0202	-0,1522	-0,1522	-0,1522
Equipesato N	-0,145	-0,145	-0,145	0,1088	0,1088	0,1088	-0,0685	-0,0685	-0,0685
Equipesato N+1	-0,145	-0,145	-0,145	0,1088	0,1088	0,1088	-0,0684	-0,0684	-0,0684
Sharpe N	-0,251	-0,1884	-0,0871	0,0576	0,0439	0,0183	-0,1143	-0,1303	-0,1491
Sharpe N+1	0,1085	0,1085	0,1085	-0,0624	-0,0624	-0,0624	-0,14	-0,14	-0,14
PSO no short 1	-0,0067	0,0488	0,0152	0,0912	0,0968	0,1029	-0,0026	-0,0075	0,0047
PSO no short 2	0,0086	0,04916	0,0246	0,0764	0,0925	<b>0,1219</b>	0,0019	-0,0047	<b>0,1484</b>
PSO vincoli 1	-	-	-	0,0412	0,0412	0,0412	0,0921	0,0921	0,0921
PSO vincoli 2	-	-	-	0,0636	0,0636	0,0636	0,0821	0,0821	0,0821

Tabella 5. 42 Indice di Sharpe titoli FTSE MIB – tre periodi

Indice di Sharpe portafogli titoli S&P 100 – Tre periodi									
Periodo	Pre-Covid			Covid			Post-Covid		
	4	15	35	4	15	35	4	15	35
Markowitz N	-0,1603	-0,1033	-0,0227	0,0983	0,0745	0,0279	-0,044	-0,0871	-0,1305
Markowitz N+1	0,3865	0,3865	0,3865	-0,2309	-0,2309	-0,2309	-0,1174	-0,1174	-0,1174
GMV Portfolio	-0,1864	-0,1864	-0,1864	0,0119	0,0119	0,0119	-0,1139	-0,1139	-0,1139
Equipesato N	-0,1399	-0,1399	-0,1399	0,1379	0,1379	0,1379	-0,073	-0,073	-0,073
Equipesato N+1	-0,1398	-0,1398	-0,1398	0,1379	0,1379	0,1379	-0,072	-0,072	-0,072
Sharpe N	-0,14	-0,081	0,0017	0,0744	0,0422	-0,0189	-0,0935	-0,1315	-0,1603
Sharpe N+1	<b>0,4243</b>	0,4243	0,4243	-0,2928	-0,2928	-0,2928	-0,1112	-0,1112	-0,1112

PSO no short 1	0,0293	2,461e-05	0,0241	0,1008	0,107	0,1664	<b>0,1186</b>	0,0366	0,0446
PSO no short 2	0,0068	0,0546	0,0353	0,1164	<b>0,1524</b>	0,0708	0,0950	0,0593	0,0758
PSO vincoli 1	-0,0179	-0,0179	-0,0179	0,0915	0,0915	0,0915	0,1021	0,1021	0,1021
PSO vincoli 2	0,0021	0,0021	0,0021	0,0877	0,0877	0,0877	0,0721	0,0721	0,0721

Tabella 5. 43 Indice di Sharpe titoli S&P 100 – tre periodi

## 5.7 Conclusioni

Questa tesi si è proposta di valutare, da un punto di vista strettamente quantitativo, la validità e l'efficacia di diversi approcci di Selezione di Portafoglio mettendo a confronto modelli che con tecniche esatte selezionano portafogli in problemi senza vincoli, con altri modelli aggiornati che in problemi complessi di *constraints selections* costruiscono portafogli utilizzando algoritmi di intelligenza artificiale. A tal fine si è proceduto da un lato a costruire portafogli finanziari utilizzando il Modello Classico di Markowitz della *MPT* e il Modello Diagonale di Sharpe, e dall'altro a costruire portafogli approssimati mediante l'approccio euristico della *PSO* introducendo il divieto di vendite allo scoperto e vincoli misti-interi. Allo scopo di valutarne le performance in termini di redditività e di rischiosità rispetto a diverse condizioni del mercato sottostante, l'analisi è stata effettuata in tre distinti mercati finanziari e in tre periodi successivi, uno dei quali caratterizzato da una particolare turbolenza dovuta alla pandemia da Covid-19, utilizzando tre diversi rendimenti attesi prefissati.

Le serie storiche dei prezzi utilizzate sono state rilevate in periodi di un anno ciascuno, dal 30/02/2019 al 30/02/2020 (periodo precedente la pandemia), dal 30/02/2020 al 30/02/2021 (periodo di piena pandemia), e dal 30/02/2021 al 30/02/2022 (periodo successivo), con l'utilizzo dei primi nove mesi come periodo *in-sample* e dei successivi tre come periodo *out-of-sample*.

Ne è emerso che il Modello Classico della *MPT*, caratterizzato da semplicità formale e completa gestione analitica, costruisce portafogli ottimi poco diversificati e concentra il capitale su titoli a bassa volatilità, e che ciò si verifica soprattutto nel caso dell’inserimento di un titolo a rendimento certo: in presenza di volatilità, la funzione obiettivo media-varianza in qualche modo paga la sua “prudenza” rispetto alla rischiosità dei titoli. Questo limite verrebbe superato con l’utilizzo di una funzione obiettivo diversa. Il Modello Diagonale fornisce risultati simili alla *MPT*, ma in qualche caso se ne discosta nella composizione dei portafogli, essendo caratterizzato da una diversa valutazione del rischio che non richiede la conoscenza, l’elaborazione e l’aggiornamento continuo dei coefficienti di correlazione.

Gli algoritmi *PSO* individuano in tempi contenuti portafogli approssimati che ottengono ottime performance nei periodi di instabilità dei prezzi, e buone performance nel periodo successivo se caratterizzato da una minore volatilità, come accaduto soprattutto nei mercati finanziari occidentali. Si dimostrano talvolta deludenti sul mercato di Hong Kong nell’ultimo periodo, che si trascina una certa volatilità dei prezzi. L’aumento del parametro di penalizzazione e del numero delle iterazioni influisce sul tempo computazionale ma non ha effetti significativi sulla funzione di *fitness*; il vincolo di non negatività e il vincolo sulle percentuali e di bilancio sono sempre soddisfatti. In uno scenario l’elevata *fitness* dei portafogli con vincolo di non negatività suggerisce che le particelle siano incappate in un punto di minimo locale. In due scenari il modello *PSO* non ha dato risultati nell’individuazione di un portafoglio con vincoli misti-interi. Le tecniche euristiche utilizzate si sono dimostrate valide nella risoluzione di problemi complessi: sono semplici da implementare e le loro soluzioni sono buone e ottenute in un tempo ragionevole.

L’impiego di algoritmi di intelligenza artificiale in ambito finanziario è cosa nota e diffusa. Le grandi società finanziarie utilizzano sistemi che processano e analizzano i dati in modo automatico ed estremamente veloce e di conseguenza elaborano strategie di investimento, basti pensare a solo titolo di esempio al sistema di analisi dei dati *ALADDIN*<sup>81</sup> utilizzato da BlackRock. In effetti è in corso una tendenza che nell’ottica di

---

<sup>81</sup> *Asset, Liability, Debt and Derivative Investment Network*

un abbattimento dei costi delle commissioni ha portato in alcune situazioni a sostituire le figure professionali dei *financial advisors* con i *robo-advisors*.

In base a quanto emerso in questa esposizione , le metodologie euristiche si dimostrano validi strumenti nella Selezione di Portafoglio, pur manifestando gli oggettivi limiti illustrati. Il giudizio sull'utilizzo di queste metodologie è quindi positivo, sempre condizionato dalla misura in cui esse vengono in qualche modo accompagnate dalla sensibilità "umana", in grado di osservare i mercati con uno sguardo d'insieme e aggiungervi la parte insostituibile di soggettivo istinto finanziario.



## 6 APPENDICE

Si riporta in appendice una parte dei circa 350 grafici e 120 tabelle prodotti nell'elaborazione di questa tesi, non inseriti nel testo, nella convinzione che una loro completa rappresentazione nulla aggiunga alla trattazione. I grafici e le tabelle seguenti sono perciò riferiti ai tre mercati finanziari nel solo periodo pre-Covid, tralasciando i due periodi successivi.

### 6.1 Statistiche descrittive

Titoli Hang Seng – Periodo pre-Covid					
	Rendimento medio (d)	Varianza	Asimmetria	Curtosi	Normalità: Test di Jarque- Bera al 3%
Xiaomi	0.0003528	0.00054203	0.25558	4.4481	Rigettata
Bank of Ch.	-0.00027185	0.00013136	-0.21633	3.6976	Accettata
Ch. Petrol.	-0.0018534	0.0001411	-0.13038	3.6669	Accettata
Li Ning	0.0026483	0.00088335	0.69379	7.0394	Rigettata
CITIC	-0.0010902	0.00017646	-0.043873	5.5216	Rigettata
Lenovo	-0.0012546	0.00045601	-0.19957	3.6465	Accettata
CSPC	0.0014309	0.0006486	0.17269	4.8811	Rigettata
Ch. Pharm.	-0.0008798	0.00026365	-0.23613	4.1692	Rigettata
WuXi	0.0017499	0.00052309	-0.37762	3.7354	Rigettata
Country G.	0.0036461	0.0005433	0.37427	5.0092	Rigettata

Tabella 6. 1. Statistiche descrittive titoli Hang Seng. Periodo pre-Covid

<b>Titoli FTSE MIB – Periodo pre-Covid</b>					
	Rendimento medio (d)	Varianza	Asimmetria	Curtosi	Normalità: Test di Jarque-Bera al 3%
Prysmian	0.00069207	0.00046287	-0.35901	4.3102	Rigettata
Campari	-0.00043426	0.00018119	-0.57274	6.5328	Rigettata
Generali	0.00026497	9.152e-05	-0.92402	8.5257	Rigettata
Enel	0.001612	0.00014873	-0.57306	5.5321	Rigettata
Intesa Sanp.	0.00034299	0.000195	-0.33062	4.819	Rigettata
Atlantia	-0.0003018	0.00035833	-0.57274	5.8179	Rigettata
Brembo	-0.00086303	0.00038181	-0.17178	4.6432	Rigettata
Eni	-0.00096817	0.00012577	-0.80712	5.3041	Rigettata
Leonardo	0.00011665	0.00035891	0.84703	10.0096	Rigettata
Moncler	-0.00028837	0.00034331	0.51906	8.0982	Rigettata

Tabella 6. 2. Statistiche descrittive titoli FTSE MIB. Periodo pre-Covid

<b>Titoli S&amp;P 100 – Periodo pre-Covid</b>					
	Rendimento medio (d)	Varianza	Asimmetria	Curtosi	Normalità: Test di Jarque-Bera al 3%
Apple	0.0021755	0.00028993	-0.23017	7.2379	Rigettata
Starbucks	0.00066968	0.00016432	0.86673	10.8851	Rigettata
BlackRock	0.00049542	0.00021339	-0.78955	5.6647	Rigettata
Exxon Mobil	-0.00137	0.00018363	-0.34023	5.6246	Rigettata
Caterpillar	-0.00018255	0.00024544	-0.062923	3.6699	Accettata
Boeing	-0.0015759	0.00035663	-0.40348	4.3402	Rigettata
Goldman S.	0.0003086	0.00020916	-0.41649	3.7494	Rigettata
Pfizer	-0.00071266	0.00015223	-0.98675	7.0275	Rigettata
FedEx	-0.0010028	0.0004541	-1.6355	11.0768	Rigettata
DuPont	-0.0020052	0.00047099	1.2254	16.7467	Rigettata

Tabella 6. 3. Statistiche descrittive titoli S&P 100. Periodo pre-Covid

## 6.2 Distribuzioni di frequenza

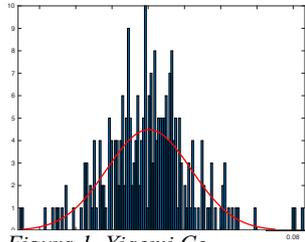


Figura 1. Xiaomi Co.

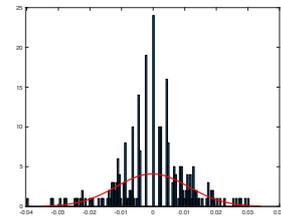


Figura 2. Ind. and Comm. Bank of Ch.

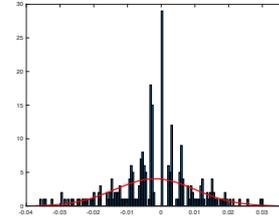


Figura 3. China Petr. & Chem.

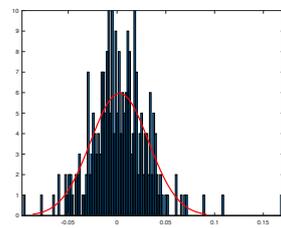


Figura 4. Li Ning

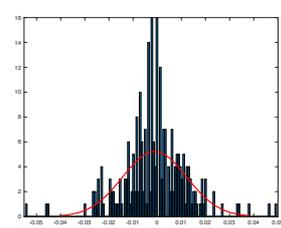


Figura 5. CITIC.

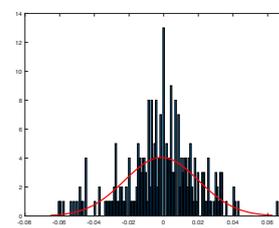


Figura 6. Lenovo

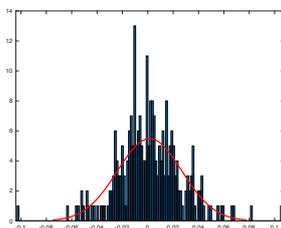


Figura 7. CSPC Ph. Group.

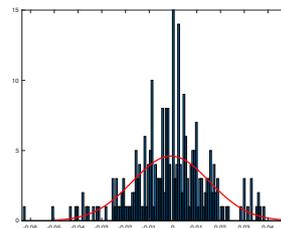


Figura 8. Ch. Life Insurance

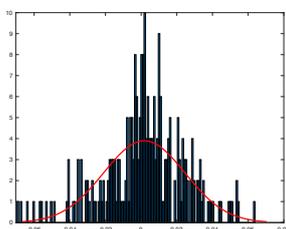


Figura 9. WuXi Biologics.

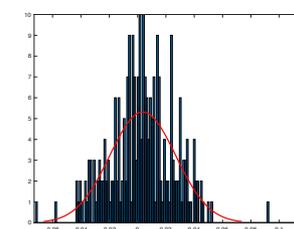
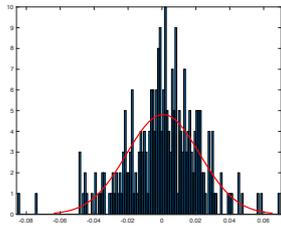
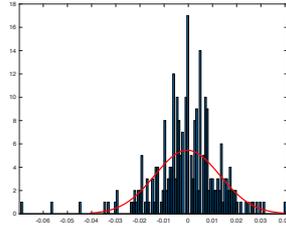


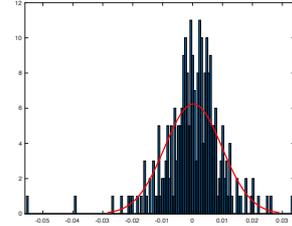
Figura 10. Country Garden S.



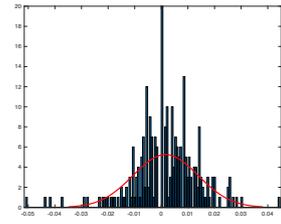
*Figura 11. Prysmian*



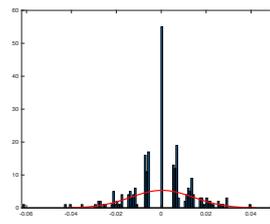
*Figura 12. Campari*



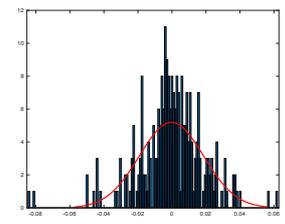
*Figura 13. Generali*



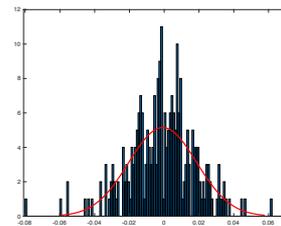
*Figura 14. Enel*



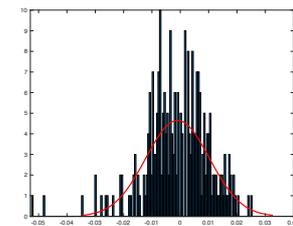
*Figura 15. Intesa Sanpaolo*



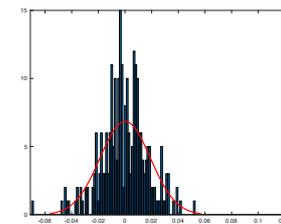
*Figura 16. Atlantia*



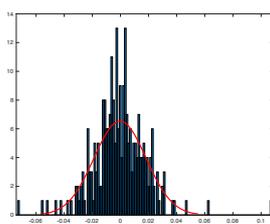
*Figura 17. Brembo*



*Figura 18. Eni*



*Figura 19. Leonardo*



*Figura 20. Moncler*

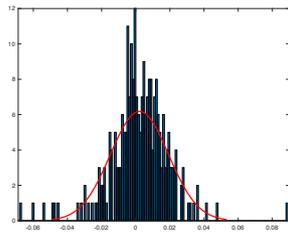


Figura 21. Apple

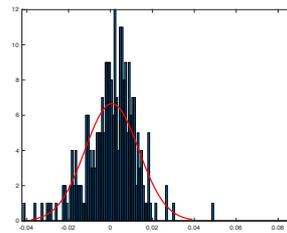


Figura 22. Starbucks

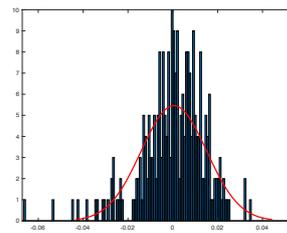


Figura 23. BlackRock

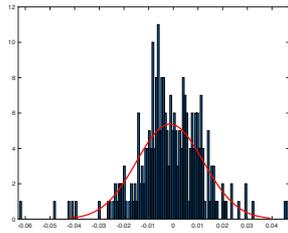


Figura 24. Exxon Mobil

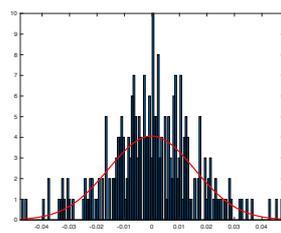


Figura 25. Caterpillar

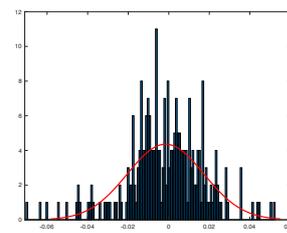


Figura 26. Boeing

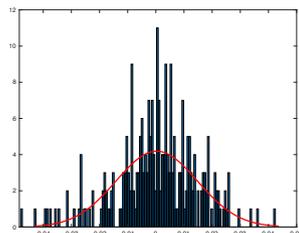


Figura 27. Goldman Sachs

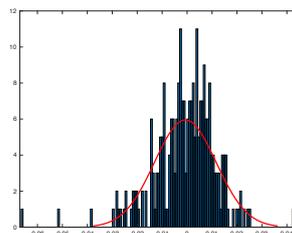


Figura 28. Pfizer

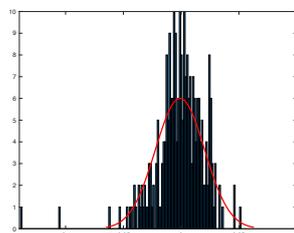


Figura 29. FedEx

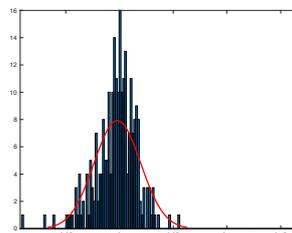


Figura 30. DuPont de N.

### 6.3 Composizioni portafogli

Titoli Hang Seng – Rendimento atteso prefissato 4% annuo – Periodo pre-Covid						
Markowitz N titoli	Xiaomi	Bank of Ch.	Ch. Petr.	Li Ning	CITIC	
	0.072933	0.432525	0.164564	0.067726	0.356395	
	Lenovo	CSPC Ph.	Ch. Life Ins.	WuXi	Country G.	
	-0.042702	-0.005242	-0.209934	0.057392	0.106341	
Markowitz N+1 titoli	Xiaomi	Bank of Ch.	Ch. Petr.	Li Ning	CITIC	
	-0.001122	0.010880	-0.013874	0.003807	-0.005380	
	Lenovo	CSPC Ph.	Ch. Life Ins.	WuXi	Country G.	Riskless
	-0.004346	0.000541	-0.000873	0.000324	0.005416	1.004629
GMV Portfolio	Xiaomi	Bank of Ch.	Ch. Petr.	Li Ning	CITIC	
	0.079036	0.332310	0.266576	0.035672	0.385416	
	Lenovo	CSPC Ph.	Ch. Life Ins.	WuXi	Country G.	
	-0.007357	-0.009260	-0.195579	0.052805	0.060381	
Sharpe N titoli	Xiaomi	Bank of Ch.	Ch. Petr.	Li Ning	CITIC	
	0.004211	0.462522	0.167550	0.075042	0.340370	
	Lenovo	CSPC Ph.	Ch. Life Ins.	WuXi	Country G.	
	-0.016993	0.017527	-0.174846	0.026118	0.098498	
Sharpe N+1 titoli	Xiaomi	Bank of Ch.	Ch. Petr.	Li Ning	CITIC	
	-0.002008	0.003093	-0.013378	0.003853	-0.004386	
	Lenovo	CSPC Ph.	Ch. Life Ins.	WuXi	Country G.	Riskless
	-0.002212	0.002393	-0.000576	0.001665	0.005367	1.006187
PSO no short Settaggio 1 Run 7	Xiaomi	Bank of Ch.	Ch. Petr.	Li Ning	CITIC	
	0.00819425	0.063878705	0.07081237	0.113543265	0.36537101	
	Lenovo	CSPC Ph.	Ch. Life Ins.	WuXi	Country G.	
	0.031528746	0.02450017	0.003745896	0.044051102	0.27437449	
PSO no short Settaggio 2 Run 7	Xiaomi	Bank of Ch.	Ch. Petr.	Li Ning	CITIC	
	0.0049111002	0.163460484	0.0630038	0.284333436	0.28975102	
	Lenovo	CSPC Ph.	Ch. Life Ins.	WuXi	Country G.	
	0.000079229	0.002790052	0.028101865	0.052870936	0.11069808	
PSO vincoli Settaggio 1 Run 2	Xiaomi	Bank of Ch.	Ch. Petr.	Li Ning	CITIC	
	0.0453	0.1598	0.0262	0.1608	0.0937	
	Lenovo	CSPC Ph.	Ch. Life Ins.	WuXi	Country G.	
	0.1430	0.0520	0.0124	0.0158	0.2909	
PSO vincoli Settaggio 2 Run 7	Xiaomi	Bank of Ch.	Ch. Petr.	Li Ning	CITIC	
	0.0535	0.0626	0.0624	0.0793	0.0398	
	Lenovo	CSPC Ph.	Ch. Life Ins.	WuXi	Country G.	
	0.1134	0.1772	0.0349	0.0375	0.3394	

Tabella 6. 4 Composizione portafogli titoli Hang Seng con rendimento atteso prefissato annuo 4%. Periodo pre-Covid

Titoli Hang Seng – Rendimento atteso prefissato annuo 15% - Periodo pre-Covid						
Markowitz N titoli 15%	Xiaomi	Bank of China	Ch. Petr. & C	Li Ning	CITIC	
	0.068889	0.498932	0.096967	0.088966	0.337165	
	Lenovo	CSPC	Ch. Life Ins.	WuXi	Country G.	
	-0.066122	-0.002579	-0.219445	0.060432	0.136796	
Markowitz N+1 titoli 15%	Xiaomi	Bank of China	Ch. Petr. & C	Li Ning	CITIC	
	-0.006933	0.067226	-0.085729	0.023522	-0.033243	
	Lenovo	CSPC	Ch. Life Ins.	WuXi	Country G.	Riskless
	-0.026851	0.003341	-0.005397	0.002002	0.033462	1.028599
Sharpe N titoli 15%	Xiaomi	Bank of China	Ch. Petr. & C	Li Ning	CITIC	
	-0.005988	0.493174	0.104028	0.097264	0.328638	
	Lenovo	CSPC	Ch. Life Ins.	WuXi	Country G.	
	-0.028917	0.030404	-0.183378	0.035518	0.129258	
Sharpe N+1 titoli 15%	Xiaomi	Bank of China	Ch. Petr. & C	Li Ning	CITIC	
	-0.012404	0.019113	-0.082662	0.023808	-0.027098	
	Lenovo	CSPC	Ch. Life Ins.	WuXi	Country G.	Riskless
	-0.013665	0.014789	-0.003558	0.010285	0.033160	1.038232
PSO no short Settaggio 1 Run 2 15%	Xiaomi	Bank of China	Ch. Petr. & C	Li Ning	CITIC	
	0.0086509	0.34598718	0.006177196	0.29294835	0.14594433	
	Lenovo	CSPC	Ch. Life Ins.	WuXi	Country G.	
	0.006025459	0.028181084	0.005489884	0.018555139	0.14204568	
PSO no short Settaggio 2 Run 3 15%	Xiaomi	Bank of China	Ch. Petr. & C	Li Ning	CITIC	
	0.000812536	0.55474538	0.000316715	0.12793681	0.0055861	
	Lenovo	CSPC	Ch. Life Ins.	WuXi	Country G.	
	0.03216101	0.00387893	0.00242062	0.002049801	0.27009211	

Tabella 6. 5. Composizione portafogli titoli Hang Seng con rendimento atteso prefissato annuo 15%. Periodo pre-Covid

Titoli Hang Seng - Rendimento atteso prefissato annuo 35% - Periodo pre-Covid						
Markowitz N titoli 35%	Xiaomi	Bank of China	Ch. Petr. & C.	Li Ning	CITIC	
	0.062437	0.604892	-0.010892	0.122858	0.306480	
	Lenovo	CSPC	Ch. Life Ins.	WuXi	Country G.	
	-0.103493	0.001669	-0.234622	0.065282	0.185390	
Markowitz N+1titoli 35%	Xiaomi	Bank of China	Ch. Petr. & C.	Li Ning	CITIC	
	-0.016205	0.157133	-0.200382	0.054980	-0.077701	
	Lenovo	CSPC	Ch. Life Ins.	WuXi	Country G.	Riskless
	-0.062761	0.007810	-0.012614	0.004679	0.078214	1.066848
GMV Portfolio	Xiaomi	Bank of China	Ch. Petr. & C.	Li Ning	CITIC	
	0.079036	0.332310	0.266576	0.035672	0.385416	
	Lenovo	CSPC	Ch. Life Ins.	WuXi	Country G.	

	-0.007357	-0.009260	-0.195579	0.052805	0.060381	
Sharpe N titoli 35%	Xiaomi	Bank of China	Ch. Petr. & C.	Li Ning	CITIC	
	-0.022261	0.542082	0.002671	0.132722	0.309917	
	Lenovo	CSPC	Ch. Life Ins.	WuXi	Country G.	
	-0.047944	0.050952	-0.196993	0.050516	0.178339	
Sharpe N+1 titoli 35%	Xiaomi	Bank of China	Ch. Petr. & C.	Li Ning	CITIC	
	-0.028994	0.044675	-0.193214	0.055649	-0.063338	
	Lenovo	CSPC	Ch. Life Ins.	WuXi	Country G.	Riskless
	-0.031941	0.034568	-0.008317	0.024041	0.077508	1.089363
PSO no short 35% Settaggio 1 Run 2	Xiaomi	Bank of China	Ch. Petr. & C.	Li Ning	CITIC	
	0.00531137	0.022590917	0.01717366	0.041254451	0.1811492	
	Lenovo	CSPC	Ch. Life Ins.	WuXi	Country G.	
	0.01462235	0.097656123	0.00799816	0.113674283	0.4985695	
PSO no short 35% Settaggio 2 Run 1	Xiaomi	Bank of China	Ch. Petr. & C.	Li Ning	CITIC	
	0.00073837	0.012662237	0.0960155	0.035742345	0.2364264	
	Lenovo	CSPC	Ch. Life Ins.	WuXi	Country G.	
	0.00332841	0.035614389	0.0141157	0.0279795339	0.5373771	
PSO vincoli Settaggio 1 Run 2	Xiaomi	Bank of China	Ch. Petr. & C.	Li Ning	CITIC	
	0.0453	0.1598	0.0262	0.1608	0.0937	
	Lenovo	CSPC	Ch. Life Ins.	WuXi	Country G.	
	0.1430	0.0520	0.0124	0.0158	0.2909	
PSO vincoli Settaggio 2 Run 7	Xiaomi	Bank of China	Ch. Petr. & C.	Li Ning	CITIC	
	0.0535	0.0626	0.0624	0.0793	0.0398	
	Lenovo	CSPC	Ch. Life Ins.	WuXi	Country G.	
	0.1134	0.1772	0.0349	0.0375	0.3394	

Tabella 6.6. Composizione portafogli titoli Hang Seng con rendimento atteso prefissato annuo 35%. Periodo pre-Covid

Titoli FTSE MIB – Rendimento atteso prefissato 4% annuo – Periodo pre-Covid						
Markowitz N titoli	Prysmian	Campari	Generali	Enel	Intesa Sanp	
	-0.042837	0.270079	0.317501	-0.025098	-0.024970	
	Atlantia	Brembo	Eni	Leonardo	Moncler	
	0.050281	0.004252	0.502150	-0.082589	0.031230	
Markowitz N+1 titoli	Prysmian	Campari	Generali	Enel	Intesa Sanp	
	0.002320	-0.009657	0.035241	0.021794	-0.000667	
	Atlantia	Brembo	Eni	Leonardo	Moncler	Riskless
	-0.005727	-0.003064	-0.020606	0.001912	0.001717	0.976737
GMV Portfolio	Prysmian	Campari	Generali	Enel	Intesa Sanp	
	-0.013531	0.129231	0.563634	0.172631	-0.025727	
	Atlantia	Brembo	Eni	Leonardo	Moncler	

	-0.010657	-0.023698	0.216854	-0.048718	0.039979	
Sharpe N titoli	Prysmian	Campari	Generali	Enel	Intesa Sanp	
	-0.063119	0.250240	0.330495	0.031599	-0.105334	
	Atlantia	Brembo	Eni	Leonardo	Moncler	
	0.076165	0.002500	0.491639	-0.061491	0.047306	
Sharpe N+1 titoli	Prysmian	Campari	Generali	Enel	Intesa Sanp	
	0.000685	-0.004219	0.036380	0.020982	0.002416	
	Atlantia	Brembo	Eni	Leonardo	Moncler	Riskless
	-0.004475	-0.004273	-0.021469	0.002171	-0.001552	0.973354
PSO no short Settaggio 1 Run 1	Prysmian	Campari	Generali	Enel	Intesa Sanp	
	0.016872002	0.110004677	0.41733795	0.048713422	0.01177193	
	Atlantia	Brembo	Eni	Leonardo	Moncler	
	0.0447241	0.119920695	0.04599472	0.003426695	0.181233835	
PSO no short Settaggio 2 Run 10	Prysmian	Campari	Generali	Enel	Intesa Sanp	
	0.04941602	0.00780514	0.0329651	0.192173616	0.1227348	
	Atlantia	Brembo	Eni	Leonardo	Moncler	
	0.27279386	0.086304299	0.181258814	0.006162618	0.04838573	

Tabella 6. 7 Composizione portafogli titoli FTSE MIB con rendimento atteso prefissato annuo 4%. Periodo pre-Covid

Titoli FTSE MIB – Rendimento atteso prefissato annuo 15% - Periodo pre-Covid						
Markowitz N titoli	Prysmian	Campari	Generali	Enel	Intesa Sanp	
	-0.025251	0.185560	0.465198	0.093554	-0.025424	
	Atlantia	Brembo	Eni	Leonardo	Moncler	
	0.013714	-0.012520	0.330952	0.062264	0.036480	
Markowitz N+1 titoli	Prysmian	Campari	Generali	Enel	Intesa Sanp	
	0.014336	-0.059672	0.217755	0.134661	-0.004119	
	Atlantia	Brembo	Eni	Leonardo	Moncler	Riskless
	-0.035386	-0.018934	-0.127324	0.011814	0.010607	0.856261
Sharpe N titoli	Prysmian	Campari	Generali	Enel	Intesa Sanp	
	-0.050527	0.192313	0.477204	0.138760	-0.077544	
	Atlantia	Brembo	Eni	Leonardo	Moncler	
	0.041557	-0.020588	0.307706	-0.041221	0.032340	
Sharpe N+1 titoli	Prysmian	Campari	Generali	Enel	Intesa Sanp	
	0.004231	-0.026070	0.224787	0.129649	0.014930	
	Atlantia	Brembo	Eni	Leonardo	Moncler	Riskless
	-0.027651	-0.026401	-0.132655	0.013416	-0.009592	0.835356
PSO no short Settaggio 1 Run 6	Prysmian	Campari	Generali	Enel	Intesa Sanp	
	0.03895968	0.098640415	0.0796995	0.315611738	0.17842819	
	Atlantia	Brembo	Eni	Leonardo	Moncler	

	0.15658095	0.0350026	0.000695232	0.045304666	0.05107702	
PSO no short Settaggio 2 Run 7	Prysmian	Campari	Generali	Enel	Intesa Sanp	
	0.0109407	0.06199893	0.16994625	0.28595849	0.1925377	
	Atlantia	Brembo	Eni	Leonardo	Moncler	
	0.0962461	0.01806874	0.00609795	0.066040457	0.09216466	

Tabella 6. 8 Composizione portafogli titoli FTSE MIB con rendimento atteso prefissato annuo 15%. Periodo pre-Covid

Titoli FTSE MIB – Rendimento atteso prefissato annuo 35% - Periodo pre-Covid						
Markowitz N titoli	Prysmian	Campari	Generali	Enel	Intesa Sanp	
	0.002809	0.050700	0.700868	0.282876	-0.026149	
	Atlantia	Brembo	Eni	Leonardo	Moncler	
	-0.044634	-0.039282	0.057785	0.029832	0.044858	
Markowitz N+1 titoli	Prysmian	Campari	Generali	Enel	Intesa Sanp	
	0.033509	-0.139476	0.508976	0.314755	-0.009627	
	Atlantia	Brembo	Eni	Leonardo	Moncler	Riskless
	-0.082710	-0.044255	-0.297605	0.027615	0.024794	0.664026
GMV Portfolio	Prysmian	Campari	Generali	Enel	Intesa Sanp	
	-0.013531	0.129231	0.563634	0.172631	-0.025727	
	Atlantia	Brembo	Eni	Leonardo	Moncler	
	-0.010657	-0.023698	0.216854	0.048718	0.039979	
Sharpe N titoli	Prysmian	Campari	Generali	Enel	Intesa Sanp	
	-0.30435	0.099884	0.711296	0.309750	-0.033202	
	Atlantia	Brembo	Eni	Leonardo	Moncler	
	-0.013666	-0.057428	0.014220	-0.008877	0.008460	
Sharpe N+1 titoli	Prysmian	Campari	Generali	Enel	Intesa Sanp	
	0.009889	-0.060935	0.525414	0.303040	0.034896	
	Atlantia	Brembo	Eni	Leonardo	Moncler	Riskless
	-0.064631	-0.061708	-0.310067	0.031357	-0.022419	0.615163
PSO no scoperto Settaggio 1 Run 4	Prysmian	Campari	Generali	Enel	Intesa Sanp	
	0.002793	0.083674	0.341945	0.228707	0.0225368	
	Atlantia	Brembo	Eni	Leonardo	Moncler	
	0.1207663	0.03735025	0.00051703	0.1563537	0.0053563	
PSO no scoperto Settaggio 2 Run 10	Prysmian	Campari	Generali	Enel	Intesa Sanp	
	0.0203854	0.05370651	0.13118733	0.2909475	0.07620994	
	Atlantia	Brembo	Eni	Leonardo	Moncler	
	0.220313391	0.01564598	0.0054067	0.18146226	0.00473493	

Tabella 6. 9 Composizione portafogli titoli FTSE MIB con rendimento atteso prefissato annuo 35%. Periodo pre-Covid

Titoli S&P 100 – Rendimento atteso prefissato 4% annuo – Periodo pre-Covid						
Markowitz N titoli	Apple	Starbucks	BlackRock	Exxon Mobil	Caterpillar	
	0.063565	0.338384	-0.124975	0.281697	0.026528	
	Boeing	Goldman S.	Pfizer	FedEx	DuPont	
	0.096892	0.105715	0.237633	-0.039687	0.014248	
Markowitz N+1 titoli	Apple	Starbucks	BlackRock	Exxon Mobil	Caterpillar	
	0.017022	0.005796	0.004306	-0.013965	0.005452	
	Boeing	Goldman S.	Pfizer	FedEx	DuPont	Riskless
	-0.005235	0.003678	-0.009817	-0.006342	-0.003011	1.002116
GMV Portfolio	Apple	Starbucks	BlackRock	Exxon Mobil	Caterpillar	
	0.024299	0.323480	-0.134225	0.312295	0.013921	
	Boeing	Goldman S.	Pfizer	FedEx	DuPont	
	0.108404	0.096785	0.258950	-0.024980	0.021071	
Sharpe N titoli	Apple	Starbucks	BlackRock	Exxon Mobil	Caterpillar	
	0.052771	0.309024	-0.011046	0.222289	0.028858	
	Boeing	Goldman S.	Pfizer	FedEx	DuPont	
	0.087357	0.064904	0.271879	-0.040552	0.014516	
Sharpe N+1 titoli	Apple	Starbucks	BlackRock	Exxon Mobil	Caterpillar	
	0.018271	0.007694	0.003814	-0.013992	-0.000586	
	Boeing	Goldman S.	Pfizer	FedEx	DuPont	Riskless
	-0.004579	0.002521	-0.007973	-0.004741	-0.003635	1.003206
PSO no short Settaggio 1 Run 4	Apple	Starbucks	BlackRock	Exxon Mobil	Caterpillar	
	0.141004	0.423492	0.0504217	0.1549599	0.0199658	
	Boeing	Goldman S.	Pfizer	FedEx	DuPont	
	0.00304236	0.04093177	0.1240289	0.0026459	0.0395073	
PSO no short Settaggio 2 Run 1	Apple	Starbucks	BlackRock	Exxon Mobil	Caterpillar	
	0.05662765	0.37425458	0.1139416	0.001541985	0.10249587	
	Boeing	Goldman S.	Pfizer	FedEx	DuPont	
	0.00033286	0.00650575	0.25207962	0.000163219	0.0920569	
PSO vincoli Settaggio 1 Run 2	Apple	Starbucks	BlackRock	Exxon Mobil	Caterpillar	
	0.0567	0.1900	0.0363	0.0210	0.3410	
	Boeing	Goldman S.	Pfizer	FedEx	DuPont	
	0.1008	0.0233	0.1582	0.0103	0.0623	
PSO vincoli Settaggio 2 Run 5	Apple	Starbucks	BlackRock	Exxon Mobil	Caterpillar	
	0.0358	0.0966	0.04159	0.0718	0.0789	
	Boeing	Goldman S.	Pfizer	FedEx	DuPont	
	0.0497	0.0290	0.1221	0.0645	0.0358	

Tabella 6. 10 Composizione portafogli titoli S&P 100 con rendimento atteso prefissato annuo 4%. Periodo pre-Covid

Titoli S&P 100 - Rendimento atteso prefissato 15% annuo – pre-Covid						
Markowitz N titoli	Apple	Starbucks	BlackRock	Exxon Mobil	Caterpillar	
	0.152229	0.372037	-0.104087	0.212605	0.054996	
	Boeing	Goldman S.	Pfizer	FedEx	DuPont	
	0.070899	0.125879	0.189498	-0.072897	-0.001158	
Markowitz N+1 titoli	Apple	Starbucks	BlackRock	Exxon Mobil	Caterpillar	
	0.105177	0.035812	0.026608	-0.086291	0.033690	
	Boeing	Goldman S.	Pfizer	FedEx	DuPont	Riskless
	-0.032345	0.022726	-0.060659	-0.039187	-0.018606	1.013076
Sharpe N titoli	Apple	Starbucks	BlackRock	Exxon Mobil	Caterpillar	
	0.147968	0.353857	0.008461	0.153737	0.026309	
	Boeing	Goldman S.	Pfizer	FedEx	DuPont	
	0.065165	0.078991	0.235219	-0.065697	-0.004011	
Sharpe N+1 titoli	Apple	Starbucks	BlackRock	Exxon Mobil	Caterpillar	
	0.112897	0.047539	0.023568	-0.086454	-0.003623	
	Boeing	Goldman S.	Pfizer	FedEx	DuPont	Riskless
	-0.028292	0.015575	-0.049265	-0.029292	-0.022463	1.019810
PSO no short Settaggio 1 Run 5	Apple	Starbucks	BlackRock	Exxon Mobil	Caterpillar	
	0.05005285	0.05372336	0.06453392	0.015114509	0.010299443	
	Boeing	Goldman S.	Pfizer	FedEx	DuPont	
	0.004733993	0.025868166	0.1511215	0.00196991	0.1390721	
PSO no short Settaggio 2 Run 4	Apple	Starbucks	BlackRock	Exxon Mobil	Caterpillar	
	0.15694354	0.540422535	0.1118745	0.001917991	0.00076296	
	Boeing	Goldman S.	Pfizer	FedEx	DuPont	
	0.00305332	0.01464738	0.12125759	0.0011924283	0.04792777	

Tabella 6. 11 Composizione portafogli titoli S&P 100 con rendimento atteso prefissato annuo 15%. Periodo pre-Covid

Titoli S&P 100 - Rendimento atteso prefissato annuo 35% – periodo pre-Covid						
Markowitz N titoli	Apple	Starbucks	BlackRock	Exxon Mobil	Caterpillar	
	0.293703	0.425735	-0.070758	0.102359	0.100420	
	Boeing	Goldman S.	Pfizer	FedEx	DuPont	
	0.029423	0.158052	0.112691	-0.125887	-0.025740	
Markowitz N+1 titoli	Apple	Starbucks	BlackRock	Exxon Mobil	Caterpillar	
	0.245839	0.083706	0.062193	-0.201696	0.078746	
	Boeing	Goldman S.	Pfizer	FedEx	DuPont	Riskless
	-0.075604	0.053119	-0.141784	-0.091596	-0.043489	1.030564
GMV Portfolio	Apple	Starbucks	BlackRock	Exxon Mobil	Caterpillar	

	0.024299	0.323480	-0.134225	0.312295	0.013921	
	Boeing	Goldman S.	Pfizer	FedEx	DuPont	
	0.108404	0.096785	0.258950	-0.024980	0.021071	
Sharpe N titoli	Apple	Starbucks	BlackRock	Exxon Mobil	Caterpillar	
	0.299866	0.425393	0.039588	0.044355	0.022241	
	Boeing	Goldman S.	Pfizer	FedEx	DuPont	
	0.029757	0.101468	0.176724	-0.105818	-0.033573	
Sharpe N+1 titoli	Apple	Starbucks	BlackRock	Exxon Mobil	Caterpillar	
	0.263884	0.111118	0.055087	-0.202077	-0.008469	
	Boeing	Goldman S.	Pfizer	FedEx	DuPont	Riskless
	-0.066129	0.036405	-0.115151	-0.068467	-0.052504	1.046305
PSO no short Settaggio 1 Run 10	Apple	Starbucks	BlackRock	Exxon Mobil	Caterpillar	
	0.016379866	0.8453298	0.013944609	0.000131503	0.0018961	
	Boeing	Goldman S.	Pfizer	FedEx	DuPont	
	0.000547247	0.00955066	0.05765038	0.000733795	0.05383613	
PSO no short Settaggio 2 Run 2	Apple	Starbucks	BlackRock	Exxon Mobil	Caterpillar	
	0.038028835	0.89699041	0.010334263	0.0000921763	0.00194241	
	Boeing	Goldman S.	Pfizer	FedEx	DuPont	
	0.000359414	0.0059673	0.00456644	0.00114583	0.04057293	
PSO vincoli Settaggio 1 Run 2	Apple	Starbucks	BlackRock	Exxon Mobil	Caterpillar	
	0.0567	0.1900	0.0363	0.0210	0.3410	
	Boeing	Goldman S.	Pfizer	FedEx	DuPont	
	0.1008	0.0233	0.1582	0.0103	0.0623	
PSO vincoli Settaggio 2 Run 5	Apple	Starbucks	BlackRock	Exxon Mobil	Caterpillar	
	0.0358	0.0966	0.04159	0.0718	0.0789	
	Boeing	Goldman S.	Pfizer	FedEx	DuPont	
	0.0497	0.0290	0.1221	0.0645	0.0358	

Tabella 6. 12 Composizione portafogli titoli S&P 100 con rendimento atteso prefissato annuo 35%. Periodo pre-Covid

## 6.4 Output PSO

<b>PSO no short titoli Hang Seng - Periodo pre-Covid</b>				
	4%	Rendimento out-of-sample	Varianza out-of-sample	Fitness
Sett.1	Run 1	0.001549370220	0.000156035384	1.976800668690016e-04
Sett.1	Run 2	0.001876218786	0.000173388097	2.204403913294369e-04
Sett.1	Run 3	0.001757976619	0.000170578600	2.306053881488725e-04
Sett.1	Run 4	0.002422904786	0.000211423551	2.779322564852570e-04
Sett.1	Run 5	0.002172906811	0.000201167134	2.833918312690624e-04
Sett.1	Run 6	0.002274732991	0.000205520321	2.837950518685490e-04
<b>Sett.1</b>	<b>Run 7</b>	<b>0.001315917055</b>	<b>0.000169040737</b>	<b>1.738844034487233e-04</b>
Sett.1	Run 8	0.002239573546	0.000252183806	3.194492131976831e-04
Sett. 1	Run 9	0.001883379578	0.000290221377	3.637322660019147e-04
Sett. 1	Run 10	0.002411273582	0.000197536336	3.605343773556669e-04
Sett. 2	Run 1	0.002142452841	0.000249460323	3.212446991518762e-04
Sett. 2	Run 2	0.002401434916	0.000223865760	3.597045654752583e-04
Sett. 2	Run 3	0.002736335627	0.000201495831	3.655536040839816e-04
Sett. 2	Run 4	0.001827471431	0.000156905083	2.124266167926619e-04
Sett. 2	Run 5	0.001775366107	0.000172253860	2.245229192186180e-04
Sett. 2	Run 6	0.002409218872	0.000211378265	3.016221246488578e-04
Sett. 2	Run 7	0.001245271728	0.000193528162	1.992826627047690e-04
Sett. 2	Run 8	0.002223450403	0.000185312343	2.653722737918786e-04
Sett. 2	Run 9	0.002190159484	0.000181799755	2.828209785899369e-04
Sett. 2	Run 10	0.002173655315	0.000259279423	3.041917831591192e-04

Tabella 6. 13 Output settaggi PSO no short portafogli titoli Hang Seng con rendimento atteso prefissato annuo 4%. Periodo pre-Covid

<b>PSO no short titoli Hang Seng - Periodo pre-Covid</b>				
	15%	Rendimento out-of-sample	Varianza out-of-sample	Fitness
Sett.1	Run 1	0.002199563804	0.000227565764	3.361564734019264e-04
<b>Sett.1</b>	<b>Run 2</b>	<b>0.001573543977</b>	<b>0.000196402363</b>	<b>2.172751105092977e-04</b>
Sett.1	Run 3	0.002318229764	0.000206580036	3.036828961426253e-04

Sett.1	Run 4	0.002260292117	0.000214162452	2.969182996931696e-04
Sett.1	Run 5	0.001969551040	0.000178440746	2.505429047605111e-04
Sett.1	Run 6	0.002033297864	0.000196221307	2.674016666364277e-04
Sett.1	Run 7	0.001886221169	0.000172201011	2.317711185473234e-04
Sett.1	Run 8	0.002167689852	0.000183977482	2.847362349154106e-04
Sett. 1	Run 9	0.002566408090	0.000199618285	3.213029434903555e-04
Sett. 1	Run 10	0.002380990547	0.000207166680	2.886075229849360e-04
Sett. 2	Run 1	0.002655804101	0.000213664087	3.720815620084402e-04
Sett. 2	Run 2	0.002368492329	0.000353916637	4.435875315727492e-04
<b>Sett. 2</b>	<b>Run 3</b>	<b>0.001565986873</b>	<b>0.000155655809</b>	<b>1.869624898029086e-04</b>
Sett. 2	Run 4	0.002095919986	0.000291441770	3.520375921612094e-04
Sett. 2	Run 5	0.003061208195	0.000232036885	4.364094641392231e-04
Sett. 2	Run 6	0.001789385338	0.000235663465	2.915968217974315e-04
Sett. 2	Run 7	0.002330454966	0.000247310604	3.764686578111512e-04
Sett. 2	Run 8	0.002220196914	0.000208182977	2.973794411040592e-04
Sett. 2	Run 9	0.002059927172	0.000189727782	2.633694714902205e-04
Sett. 2	Run 10	0.002035473118	0.000224297513	3.011075319660136e-04

Tabella 6. 14 Output settaggi PSO no short portafogli titoli Hang Seng con rendimento atteso prefissato annuo 15%. Periodo pre-Covid

<b>PSO no short titoli Hang Seng - Periodo pre-Covid</b>				
	35%	Rendimento out-of-sample	Varianza out-of-sample	Fitness
Sett.1	Run 1	0.002937860915	0.000243359848	4.190957498660690e-04
<b>Sett.1</b>	<b>Run 2</b>	<b>0.002605258187</b>	<b>0.000227094771</b>	<b>3.376011995155678e-04</b>
Sett.1	Run 3	0.002355127431	0.000376881573	4.852828356295374e-04
Sett.1	Run 4	0.002440980484	0.000259620162	3.665770061461933e-04
Sett.1	Run 5	0.002476402571	0.000308735744	4.141835834871950e-04
Sett.1	Run 6	0.002503589469	0.000299057033	4.100575599047743e-04
Sett.1	Run 7	0.003064886730	0.000298864691	3.984314666534955e-04
Sett.1	Run 8	0.002856242627	0.000220938718	3.741221410244192e-04
Sett. 1	Run 9	0.002134961766	0.000326022901	3.822824626366652e-04
Sett. 1	Run 10	0.002051085667	0.000320455668	3.627215758303810e-04
<b>Sett. 2</b>	<b>Run 1</b>	<b>0.002157078954</b>	<b>0.000225417645</b>	<b>3.042703342097627e-04</b>
Sett. 2	Run 2	0.003018774682	0.000269580153	4.098553663620132e-04
Sett. 2	Run 3	0.002516006395	0.000241826042	3.684086782975213e-04

Sett. 2	Run 4	0.002561651083	0.000218463545	3.510685860971062e-04
Sett. 2	Run 5	0.002832918057	0.000263259064	3.608524254273662e-04
Sett. 2	Run 6	0.002736263692	0.000266071522	4.345597888157680e-04
Sett. 2	Run 7	0.002673037971	0.000237043579	3.324232945666403e-04
Sett. 2	Run 8	0.002408757865	0.000233198473	3.544846224303595e-04
Sett. 2	Run 9	0.002828754596	0.000249621729	3.771881644378988e-04
Sett. 2	Run 10	0.002692258269	0.000233684065	3.492452188422740e-04

Tabella 6. 15 Output settaggi PSO no short portafogli titoli Hang Seng con rendimento atteso prefissato annuo 35%. Periodo pre-Covid

<b>PSO vincoli titoli Hang Seng - Periodo pre-Covid</b>				
		Rendimento out-of-sample	Varianza out-of-sample	Fitness
Sett.1	Run 1	0.0009	0.0002	-0.0003
<b>Sett.1</b>	<b>Run 2</b>	<b>0.0015</b>	<b>0.0002</b>	<b>-0.0006</b>
Sett.1	Run 3	0.0001	0.0002	0.0000
Sett.1	Run 4	0.0001	0.0002	0.0000
Sett.1	Run 5	0.0001	0.0002	0.0000
Sett.1	Run 6	0.0013	0.0002	-0.0006
Sett.1	Run 7	0.0009	0.0002	-0.0003
Sett.1	Run 8	0.0005	0.0002	-0.0002
Sett. 1	Run 9	0.0004	0.0002	-0.0001
Sett. 1	Run 10	0.0007	0.0002	-0.0002
Sett. 2	Run 1	0.0009	0.0002	-0.0003
Sett. 2	Run 2	0.0007	0.0002	-0.0002
Sett. 2	Run 3	0.0016	0.0003	-0.0007
Sett. 2	Run 4	0.0003	0.0002	-0.0001
Sett. 2	Run 5	0.0010	0.0002	-0.0004
Sett. 2	Run 6	-0.0006	0.0001	0.0004
<b>Sett. 2</b>	<b>Run 7</b>	<b>0.0017</b>	<b>0.0002</b>	<b>-0.0007</b>
Sett. 2	Run 8	0.0018	0.0003	-0.0007
Sett. 2	Run 9	0.0021	0.0002	-0.0010
Sett. 2	Run 10	0.0021	0.0002	-0.0010

Tabella 6. 16 Output settaggi PSO vincoli misti-interi portafogli titoli Hang Seng. Periodo pre-Covid

<b>PSO no short titoli FTSE MIB - Periodo pre-Covid</b>				
	4%	Rendimento out-of-sample	Varianza out-of-sample	Fitness
<b>Sett.1</b>	<b>Run 1</b>	<b>0.00009482888</b>	<b>0.000106055564</b>	<b>6.405733331173044e-05</b>
Sett.1	Run 2	0.000024380473	0.000142649340	9.432567675809186e-05
Sett.1	Run 3	0.000280287339	0.000112131492	6.526209153397324e-05
Sett.1	Run 4	0.000080753071	0.000115939730	7.271393186863733e-05
Sett.1	Run 5	0.000492306707	0.000126273888	8.666752993425009e-05
Sett.1	Run 6	0.000099393725	0.000134480474	8.006599233225361e-05
Sett.1	Run 7	0.000105820717	0.000128486368	7.924549323492779e-05
Sett.1	Run 8	0.000083886775	0.000126180936	7.371680386428041e-05
Sett. 1	Run 9	0.000003899872	0.000112521549	7.298773505566207e-05
Sett. 1	Run 10	0.000422059450	0.000145270663	6.767093150512159e-05
Sett. 2	Run 1	0.000541976865	0.000191190132	1.642624839592657e-04
Sett. 2	Run 2	0.000113370539	0.000112545266	7.121953938443967e-05
Sett. 2	Run 3	0.000142173469	0.000151509603	1.143570286492906e-04
Sett. 2	Run 4	0.000207888893	0.000117855193	8.397123043663338e-05
Sett. 2	Run 5	0.000028289378	0.000128281109	6.668958301592251e-05
Sett. 2	Run 6	0.000318801438	0.000119084211	9.864716572776194e-05
Sett. 2	Run 7	0.000089393586	0.000099526585	6.632992711289452e-05
Sett. 2	Run 8	0.000197546810	0.000138262951	9.079671459584292e-05
Sett. 2	Run 9	0.000344514863	0.000136066002	8.747523390050552e-05
<b>Sett. 2</b>	<b>Run 10</b>	<b>0.000177023162</b>	<b>0.000132077783</b>	<b>6.278947916847402e-05</b>

Tabella 6. 17 Output settaggi PSO no short portafogli titoli FTSE MIB con rendimento atteso prefissato annuo 4%. Periodo pre-Covid

<b>PSO no short titoli FTSE MIB - Periodo pre-Covid</b>				
	15%	Rendimento out-of-sample	Varianza out-of-sample	Fitness
Sett.1	Run 1	0.000073067997	0.000156543615	1.065550952056804e-04
Sett.1	Run 2	-0.000035855165	0.000137801680	9.980146312171055e-05
Sett.1	Run 3	0.000256811752	0.000115300742	7.062624074691525e-05
Sett.1	Run 4	-0.000184247604	0.000152477559	1.163419112782615e-04
Sett.1	Run 5	-0.000148367633	0.000121351331	8.418048895420275e-05

<b>Sett.1</b>	<b>Run 6</b>	<b>0.000617614006</b>	<b>0.000121935294</b>	<b>5.004634314994889e-05</b>
Sett.1	Run 7	0.000229372376	0.000136090717	7.732045794442492e-05
Sett.1	Run 8	0.000810948991	0.000115682469	5.971058580535185e-05
Sett. 1	Run 9	-0.000039549818	0.000126999500	8.286004697279340e-05
Sett. 1	Run 10	0.000028960441	0.000164362427	1.397412829443373e-04
Sett. 2	Run 1	0.000059916801	0.000109198698	7.086702680996875e-05
Sett. 2	Run 2	0.000309299156	0.000116410032	8.593816417882530e-05
Sett. 2	Run 3	0.000442313545	0.000139205509	9.692629450471208e-05
Sett. 2	Run 4	0.000100481899	0.000162839113	1.346878184978869e-04
Sett. 2	Run 5	0.000140033300	0.000113123939	6.648121999228479e-05
Sett. 2	Run 6	-0.000149209662	0.000112655615	5.921007496297282e-05
<b>Sett. 2</b>	<b>Run 7</b>	<b>0.000599238914</b>	<b>0.000112192220</b>	<b>5.128066593696473e-05</b>
Sett. 2	Run 8	-0.000083869154	0.000153400017	7.901447054471120e-05
Sett. 2	Run 9	-0.000182712691	0.000137986631	6.378158998259028e-05
Sett. 2	Run 10	-0.000015733515	0.000163145842	7.430576343503461e-05

Tabella 6. 18 Output settaggi PSO no short portafogli titoli FTSE MIB con rendimento atteso prefissato annuo 15%. Periodo pre-Covid

<b>PSO no short titoli FTSE MIB - Periodo pre-Covid</b>				
	35%	Rendimento out-of-sample	Varianza out-of-sample	Fitness
Sett.1	Run 1	-0.000338726589	0.000124226424	8.027204437466713e-05
Sett.1	Run 2	-0.000114696270	0.000121306974	0.106920268961611
Sett.1	Run 3	-0.000060742982	0.000165786328	5.593556395463080e-05
<b>Sett.1</b>	<b>Run 4</b>	<b>0.000238966169</b>	<b>0.000111774768</b>	<b>5.357244101091117e-05</b>
Sett.1	Run 5	0.001191600634	0.000073991974	7.399304578741938e-05
Sett.1	Run 6	-0.000022440688	0.000135619522	9.557615820889108e-05
Sett.1	Run 7	0.000713134340	0.000138636582	6.611046830672833e-05
Sett.1	Run 8	-0.000273032791	0.000146394458	1.184195318249398e-04
Sett. 1	Run 9	-0.000135920297	0.000156724815	1.430349686715723e-04
Sett. 1	Run 10	-0.000128700222	0.000132406478	9.524824084195481e-05
Sett. 2	Run 1	-0.000201830423	0.000129918603	6.662152934393969e-05
Sett. 2	Run 2	-0.000187855715	0.000167183680	1.323394035654055e-04
Sett. 2	Run 3	-0.000103912422	0.000140674067	1.096409246598843e-04
Sett. 2	Run 4	-0.000331007139	0.000152986942	1.356232155380644e-04
Sett. 2	Run 5	0.000004344805	0.000122578081	8.531093141604096e-05

Sett. 2	Run 6	0.000040402240	0.000141635226	5.990600018414277e-05
Sett. 2	Run 7	0.000524876277	0.000149937487	0.438326384585905
Sett. 2	Run 8	-0.000124607623	0.000182841746	1.862097873339656e-04
Sett. 2	Run 9	0.000812168870	0.000137482144	8.536479599657030e-05
<b>Sett. 2</b>	<b>Run 10</b>	<b>0.000366447457</b>	<b>0.000136719081</b>	<b>5.686485826027804e-05</b>

Tabella 6. 19 Output settaggi PSO no short portafogli titoli FTSE MIB con rendimento atteso prefissato annuo 35%.  
Periodo pre-Covid

<b>PSO no short titoli S&amp;P - Periodo pre-Covid</b>				
	4%	Rendimento out-of-sample	Varianza out-of-sample	Fitness
Sett.1	Run 1	0.000269514104	0.000139913190	0.074211639562324
Sett.1	Run 2	0.000042609514	0.000132763263	1.086728206465377e-04
Sett.1	Run 3	0.000354424013	0.000125654333	6.567285796861148e-05
<b>Sett.1</b>	<b>Run 4</b>	<b>0.000401221047</b>	<b>0.000121098542</b>	<b>5.540636617295842e-05</b>
Sett.1	Run 5	0.000299975152	0.000127819825	8.268259840626587e-05
Sett.1	Run 6	0.000582362704	0.000126737285	7.191130526283103e-05
Sett.1	Run 7	0.000155540582	0.000159524746	3.228575080227134e-04
Sett.1	Run 8	-0.000090439968	0.000154143479	1.561460478516732e-04
Sett. 1	Run 9	0.000138122639	0.000136386713	9.887111275879102e-05
Sett. 1	Run 10	0.000273511732	0.000134142300	9.555732430469720e-05
<b>Sett. 2</b>	<b>Run 1</b>	<b>0.000151090400</b>	<b>0.000112708149</b>	<b>6.872557073097531e-05</b>
Sett. 2	Run 2	0.001058886462	0.000153289237	1.299252369467962e-04
Sett. 2	Run 3	0.000060204768	0.000117547882	0.083566647701879
Sett. 2	Run 4	-0.000298312978	0.000175352830	2.209953159843008e-04
Sett. 2	Run 5	0.000649918282	0.000141639778	9.237089377786231e-05
Sett. 2	Run 6	-0.000429917908	0.000123257608	9.034847982941989e-05
Sett. 2	Run 7	0.000241668340	0.000118983664	6.885747420870659e-05
Sett. 2	Run 8	0.000883622122	0.000148888974	1.019545306514724e-04
Sett. 2	Run 9	-0.000597815177	0.000167358926	2.137284996764665e-04
Sett. 2	Run 10	0.000313876360	0.000136952516	9.605567326724563e-05

Tabella 6. 20 Output settaggi PSO no short portafogli titoli S&P100 con rendimento atteso prefissato annuo 4%.  
Periodo pre-Covid

<b>PSO no short S&amp;P 100 - Periodo pre-Covid</b>				
	15%	Rendimento out-of-sample	Varianza out-of-sample	Fitness
Sett.1	Run 1	0.001071058276	0.000154044869	0.392699916293196
Sett.1	Run 2	0.000502062064	0.000122834336	0.466256535859865
Sett.1	Run 3	0.000502062064	0.000122834336	0.110775594570570
Sett.1	Run 4	0.000847396350	0.000146678026	0.004586339984817
<b>Sett.1</b>	<b>Run 5</b>	<b>0.000078860903</b>	<b>0.000125745605</b>	<b>7.172968316986376e-05</b>
Sett.1	Run 6	0.000440807236	0.000137764284	2.837804527039311e-04
Sett.1	Run 7	0.000019867333	0.000136987533	0.047803876434838
Sett.1	Run 8	0.001004269982	0.000149882446	1.470199785640494e-04
Sett. 1	Run 9	0.000825670721	0.000146393501	0.116411160933315
Sett. 1	Run 10	0.000458433861	0.000136332879	0.010493843427715
Sett. 2	Run 1	0.001155491795	0.000144297605	2.635643870346266
Sett. 2	Run 2	0.000542621681	0.000143363265	2.977918794033263e-04
Sett. 2	Run 3	0.001567439063	0.000184164443	3.511036757755146
Sett. 2	Run 4	0.000715487013	0.000135921894	6.388923264109184e-05
Sett. 2	Run 5	0.000431939276	0.000135846318	0.157739964710914
Sett. 2	Run 6	0.000158798034	0.000126765739	2.597140350999617
Sett. 2	Run 7	0.000075233413	0.000138381889	6.902824269725038e-05
Sett. 2	Run 8	0.000296533161	0.000140587362	1.857001431650366
Sett. 2	Run 9	0.000040267465	0.000142711453	1.121274121948979e-04
Sett. 2	Run 10	0.000877052303	0.000138789771	9.877210394344305e-05

Tabella 6. 21 Output settaggi PSO no short portafogli titoli S&P100 con rendimento atteso prefissato annuo 15%. Periodo pre-Covid

<b>PSO no short titoli S&amp;P 100 - Periodo pre-Covid</b>				
	35%	Rendimento out-of-sample	Varianza out-of-sample	Fitness
Sett.1	Run 1	0.000432792330	0.000149858297	0.611033951596607
Sett.1	Run 2	0.000253485068	0.000159980135	0.245130869814592
Sett.1	Run 3	0.001279193638	0.000157933688	0.623990974121237
Sett.1	Run 4	0.000197106767	0.000163276334	1.292399919934525
Sett.1	Run 5	0.000188638859	0.000141465446	0.613129220739320
Sett.1	Run 6	0.001626838724	0.000174749114	1.157177835820262

Sett.1	Run 7	-0.000104306375	0.000134777393	0.783511100037945
Sett.1	Run 8	0.000341928058	0.000127207703	0.577889208510418
Sett. 1	Run 9	0.000550638712	0.000144141769	0.608437231862802
<b>Sett. 1</b>	<b>Run 10</b>	<b>0.000388546404</b>	<b>0.000165794139</b>	<b>0.156943670444408</b>
Sett. 2	Run 1	0.000372315607	0.000150617569	7.875663028365914
<b>Sett. 2</b>	<b>Run 2</b>	<b>0.000551778682</b>	<b>0.000179451777</b>	<b>0.743100530200554</b>
Sett. 2	Run 3	0.000676477625	0.000146879698	5.381586947097260
Sett. 2	Run 4	0.000639346683	0.000145748895	6.940845607043310
Sett. 2	Run 5	0.000044669849	0.000142188942	6.870883933199001
Sett. 2	Run 6	0.000832109490	0.000148001317	8.310096751399797
Sett. 2	Run 7	0.000106299618	0.000140210510	6.483430797915165
Sett. 2	Run 8	0.000617306901	0.000147525131	3.698175975171848
Sett. 2	Run 9	0.000073000686	0.000157536654	2.021332517600254
Sett. 2	Run 10	0.000549022523	0.000137500775	5.954448012435242

Tabella 6. 22 Output settaggi PSO no short portafogli titoli S&P100 con rendimento atteso prefissato annuo 35%.  
Periodo pre-Covid

PSO vincoli titoli S&P 100 - Periodo pre-Covid				
		Rendimento out-of-sample	Varianza out-of-sample	Fitness
Sett.1	Run 1	-0.0007	0.0001	0.0004
<b>Sett.1</b>	<b>Run 2</b>	<b>-0.0001</b>	<b>0.0001</b>	<b>0.0001</b>
Sett.1	Run 3	-0.0001	0.0001	0.0001
Sett.1	Run 4	0.0000	0.0002	0.0001
Sett.1	Run 5	-0.0004	0.0001	0.0003
Sett.1	Run 6	-0.0003	0.0002	0.0002
Sett.1	Run 7	-0.0003	0.0001	0.0002
Sett.1	Run 8	-0.0004	0.0001	0.0003
Sett. 1	Run 9	-0.0001	0.0002	0.0002
Sett. 1	Run 10	-0.0008	0.0002	0.0005
Sett. 2	Run 1	-0.0003	0.0001	0.0002
Sett. 2	Run 2	-0.0004	0.0001	0.0002
Sett. 2	Run 3	-0.0004	0.0001	0.0002
Sett. 2	Run 4	-0.0004	0.0001	0.0002

<b>Sett. 2</b>	<b>Run 5</b>	<b>0.0001</b>	<b>0.0001</b>	<b>0.0000</b>
Sett. 2	Run 6	0.0008	0.0001	-0.0003
Sett. 2	Run 7	0.0002	0.0002	0.0000
Sett. 2	Run 8	0.0003	0.0002	-0.0001
Sett. 2	Run 9	-0.0002	0.0001	0.0002
Sett. 2	Run 10	-0.0002	0.0001	0.0002

*Tabella 6. 23 Output settaggi PSO vincoli misti-interi portafogli titoli S&P 100. Periodo pre-Covid*

## 7 BIBLIOGRAFIA

- Bell D., Risk, Return and Utility. *Management Science*, (1995), vol.41, fasc. 1, p.23-30
- Canestrelli E., Nardelli C., *Criteri per la Selezione del Portafoglio*, Giappichelli, Torino (1998)
- Cassese G., Pelagatti M., Finanza quantitativa. Risk Management e Statistica dei Mercati Monetari e Finanziari, Università Milano Bicocca, p. 14
- Castagnoli E., Peccati L., *Introduzione alla Selezione di Portafoglio*, Cooperativa di Cultura Lorenzo Milani, Torino (1991), p.10
- Chang T., Yang S., Chang K., Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm. *Expert systems with applications* (2009) Vol. 36, pp. 10529-10537
- Chen H., Tsai H., Lin D., Optimal Mean-variance portfolio selection using Cauchy-Schwarz Maximization. *Applied economics* (2011), Vol. 43, p. 2795-2801
- Cheng S., Qin Q., Shi Y., Population diversity based study on search information propagation in particle swarm optimization. *IEEE Congress on Evolutionary Computation* (2012) pp.1-8
- Clerc M., Kennedy J., The particle swarm - Explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* (2002) Vol. 6, pp.58-73
- Clerc M., From theory to practice in particle swarm optimization. *Handbook of Swarm Intelligence* (2010) Vol. 8, pp.3-36
- Corazza M., Fasano G., Gusso R., Particle Swarm Optimization with non-smooth penalty reformulation for a complex portfolio selection problem. *Applied Mathematics and Computation* (2013), 224, pp. 611-624
- Constantinides G. M., Malliaris A.G., Finance. *Finance*, Jarrow R.A., Maksimovic V. e Ziemba W.T. eds, (1995)
- Deng G., Lin W., Lo C., Markowitz-based portfolio selection with cardinality constraints using improved particle swarm optimization. *Expert Systems with Applications* (2012) Vol. 39, pp.4558-4566
- Ferrari A. et al., *Il Sistema finanziario: funzioni, mercati e intermediari*, Giappichelli, Torino (2016)
- Goldberg D., *Genetic algorithms in search: Optimization and machine learning*, Addison-Wesley, Reading, MA (1997)
- Holland J.H., *Adaptation in natural and artificial system: an introductory analysis with applications to biology, control and artificial intelligence*, University of Michigan Press, Ann Arbor, (1975)
- Jia J., Dyer J., A Standard measure of Risk and Risk-Value Models. *Management Science* (1996) Vol. 42, pp.1691-1705
- Jobst N.J., Horniman M.D., Lucas C.A. e Mitra G., Computational Aspects of Alternative Portfolio Selection Models in the Presence of Discrete Asset Choice Constraints. *Quantitative Finance*, 2001

- Kennedy J. e Eberhart, R., Particle Swarm Optimization. *Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks*, (1995) Vol. 4, pp. 1942-1948
- Kennedy, J. The behavior of particles. *Lecture notes in computer science. Evolutionary programming VII: proceedings of the 7-th annual conference on evolutionary programming* (1998) pp. 581–589
- Konno H., Yamakazi H., Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its application to the Tokyo Stock Market. *Management Science* (1991) 37, pp.519-531
- Luenberger D.G., *Investment Science* 2<sup>nd</sup> ed. Oxford Print, New York (2014)
- Markowitz H.M., Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, (1952) Vol 7, No. 1, pp. 77-91
- Markowitz H.M., *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, Yale University Press (1959)
- Merton R., An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier. *Journal of financial and quantitative analysis* (1972), Vol. 7, pp. 1851-187
- Merton R., Samuelson P. *Continuous-time Finance*, Basil Blackwell, Cambridge, MA (1990), p. 18
- Mitchell M., An introduction to genetic algorithms. *Computers & Mathematics with Applications*, MIT Press, Cambridge, MA (1996)
- Poli R., Kennedy J, Bratton D., Blackwell T. Theoretical derivation, analysis and empirical evaluation of a simpler Particle Swarm Optimizer. *IEEE Congress on Evolutionary Computation* (2007) pp.1955-1962
- Sharpe W.F., A simplified model for portfolio analysis. *Management Science* (1963) Vol.9, pp. 277-293
- Sharpe W.F., Capital Asset Prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*, (1964) 19
- Sharpe W.F., Mutual Fund Performance. *The Journal of Business*, (1966) Vol. 39, No. 1, pp 119-138
- Sharpe W.F., Portfolio Analysis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 2.2 (1967) p. 82
- Szegö G., *Portfolio Theory with Application to Bank Asset Management*, Academy Print, New York (1980), p.130
- Szegö G., Measures of risk. *European Journal of Operational Research*, (2005) Vol.163(1) pp.5-19
- Tobin J., Liquidity preference as behavior toward risk. *Review of Economic Studies* (1958) Vol. 25, pp.65-86
- Von Neumann J., Morgenstern O., Theory of Games and Economic Behavior. *The Journal of Philosophy* 42.20 (1945) 548
- Zhang Y., Wang S., Ji G., Wang S., A Comprehensive Survey on Particle Swarm Optimization Algorithm and Its Applications. *Mathematical Problems in Engineering* (2015), pp.1-38