



Università
Ca' Foscari
Venezia

Corso di laurea magistrale
in economia e finanza

Tesi di Laurea

**Selezione di portafogli “Enhanced Indexing”:
applicazione ai mercati internazionali
mediante l’uso della PSO**

Relatore

Ch. Prof. Marco Corazza

Laureando

Barbui Christian Giuseppe

Matricola 862019

Anno accademico

2020/2021

Indice

Introduzione	5
1 Strategie di gestione di portafoglio	8
1.1 Modello di selezione di portafoglio à la Markovitz.....	8
1.2 Passive and active portfolio management	18
1.3 Enhanced Index Tracking	23
1.4 Modelli di programmazione lineare.....	27
1.4.1 Modello di Konno e Hatagi.....	28
1.4.2 Modello di Canagkoz e Beasley	31
1.5 Criterio di Dominanza stocastica.....	37
1.5.1 Il modello di Guastaroba, Mansini, Speranza e Ogryczak	39
1.6 Tecniche risolutive basate su euristiche e metaeuristiche	45
1.6.1 Modello di Kaucic, Barbini, Verdù	48
2 Particle Swarm Optimization	52
2.1 Problemi di ottimizzazione	52
2.2 Euristiche e Metaeuristiche	54
2.3 Introduzione alla PSO	58
2.3.1 Inertia Weight Particle Swarm Optimization.....	63
2.3.2 Constriction Factor Approach	65
2.3.3 Fully Informed Particle Swarm	66
2.3.4 Improved PSO.....	67
2.4 Topologia	69
2.5 Problemi di ottimizzazione vincolata	73
3 Applicazione di modelli di selezione di portafoglio del tipo Enhanced Indexing su dati reali	78
3.1 Trattazione dei vincoli	78
3.2 Modelli sotto esame: EIT with semivariance	80
3.2.1 EIT with Conditional Value at Risk.....	84
3.3 Misure di rischio coerenti	85
3.3.1 Value at Risk	89
3.3.2 Tail Conditional Expectation e Worst Conditional Expectation.....	90
3.3.3 Expected shortfall, o Conditional Value at risk	91
3.4 Applicazione dei modelli di selezione di portafogli Enhanced Indexing	93
3.4.1 Parametri.....	99
3.4.2 Applicazione dei modelli e analisi dei risultati	101
Conclusioni	117
Appendice A	119
Appendice B(1)	137
Appendice B(2)	141
Bibliografia	146

Introduzione

Il tema di una efficiente e razionale selezione di portafoglio ha raggiunto notevole importanza e sviluppo a partire dal lavoro pionieristico di Markovitz, il quale nel 1952 con lo scritto “Modern Portfolio Theory” ha posto le basi della finanza quantitativa. Il modello originale, tuttavia, si è dimostrato lacunoso in alcuni aspetti, tra i quali vale la pena evidenziare un insieme di assunzioni di base distanti dalla pratica operativa dei mercati finanziari, ed una misura di rischio (la varianza) ritenuta non idonea ad una corretta quantificazione del rischio. In ogni caso, questa prima teoria moderna per la selezione di portafoglio ha dato avvio ad una letteratura corposa, in cui diversi accademici e professionisti del settore, hanno cercato di individuare i modelli che fossero più realistici e applicabili alla realtà dei mercati finanziari.

All'interno del tema, a partire dagli anni '70 si è aperta un'altra area di dibattito, che vede contrapposti i sostenitori delle strategie di gestione di portafoglio attive da un lato, e i sostenitori delle strategie passive dall'altro. I sostenitori delle gestioni attive pongono in evidenza la capacità sistematica dei gestori di investire, riuscendo ad ottenere rendimenti superiori rispetto al benchmark di riferimento, mediante un'attenta attività di stock selection e asset allocation, volta a sfruttare le inefficienze del mercato. Questa strategia, che risulta ancora la più praticata a livello mondiale in termini di masse gestite, richiede spese importanti in termini di risorse monetarie e di tempo in quanto si basa su una costante attività di ricerca e analisi; da ciò deriva la presa di distanza da parte di alcuni esperti del settore, tra cui il famoso economista William Sharpe, che affermano che generare un rendimento abbastanza elevato tale da coprire i costi di gestione in maniera sistematica sia un evento molto raro, se non mediante investimenti molto rischiosi. Uno studio fatto nel '91 da Sharpe stesso mette in evidenza come in media i rendimenti netti delle gestioni passive siano superiori rispetto ai rendimenti netti delle gestioni attive. I fautori delle gestioni passive, quindi, sostengono fortemente l'ipotesi di efficienza dei mercati, la quale porta con sé l'impossibilità di sfruttare eventuali errori di pricing compiuti dal mercato, col fine di ottenere sistematicamente un rendimento in eccesso limitando i rischi. Essi propongono quindi come strada maestra l'investimento in fondi passivi, del tipo ETF, i quali sono caratterizzati da costi di gestione molto contenuti in quanto il replicare un benchmark di riferimento non richiede attività di stock selection e risulta molto meno rischioso (grazie anche alla diversificazione dell'indice stesso).

Nel primo capitolo dopo una breve descrizione degli aspetti caratterizzanti di entrambe le strategie, viene presentata una potenziale terza strada che cerca di unificare i punti di forza dell'una e dell'altra, ossia l'enhanced index tracking.

Questa strategia di gestione, proposta per la prima volta alla fine degli anni 90', sta riscuotendo sempre più successo in quanto coniuga alcuni aspetti delle gestioni attive e passive: da un lato il primo obiettivo è la replicabilità di un benchmark di riferimento (tipico fattore chiave delle gestioni passive), mentre il secondo è riuscire ad ottenere un rendimento in eccesso rispetto al benchmark (anche contenuto) limitando la rischiosità dell'investimento. Risulta chiaro, quindi, che un altro aspetto caratterizzante la seguente strategia è la possibilità di ridurre i costi che ricadono sugli investitori, in quanto viene fortemente limitata l'attività di asset allocation e selezione dei titoli in cui investire svolta da analisti e gestori.

L'obiettivo dell'elaborato è quindi testare due differenti modelli in grado di selezionare portafogli del tipo Enhanced Indexing, in mercati internazionali che si differenziano per volatilità e numerosità dell'indice di riferimento. Nello specifico verrà testato un modello che può essere definito più "classico", nel quale si utilizza come misura di rischio la semi-varianza per il calcolo del Tracking Error (che misura l'aderenza all'indice di riferimento), e un modello più "moderno" che si basa sulla costruzione di un indice di rischio-rendimento mediante l'utilizzo del Conditional Value at Risk. I modelli verranno testati su 4 differenti mercati: il mercato italiano con benchmark dato dall'FTSE Mib 40, il mercato tedesco con il DAX 30, il mercato indiano con il Nifty 50 e il mercato messicano con l'IPC 35.

Per la risoluzione del problema di ottimizzazione si farà ricorso ad una metaeuristica conosciuta come Particle Swarm Optimization. La PSO, alla quale viene dedicato l'intero capitolo 2, è una metaeuristica proposta per la prima volta nel 1995, che per la ricerca della soluzione ottima si ispira al comportamento di stormi di uccelli e banchi di pesci nella ricerca del cibo. La necessità di utilizzare una metaeuristica, e nello specifico un algoritmo bio-ispirato del tipo PSO, deriva dal fatto che il problema da risolvere è NP-Hard, quindi un metodo di risoluzione "esatto" potrebbe avere difficoltà nel trovare una soluzione.

Per rendere il problema ancora più aderente alla reale operatività dei mercati finanziari, sono stati introdotti dei vincoli, alcuni per controllare i costi di transazione, alcuni per rispettare la normativa vigente nelle Borse Valori di vari paesi; l'introduzione dei vincoli ha complicato ulteriormente il problema sotto esame, e ha introdotto un'ulteriore criticità, nel senso che la PSO è stata sviluppata per la risoluzione di problemi non vincolati. Per permettere quindi all'algoritmo di agire per cercare una soluzione ottimale, è stato necessario riscrivere l'intero sistema dei vincoli in forma di uguaglianza e introdurre una penalità che fosse in grado di "pesare" eventuali violazioni dei vincoli che influiscono sulla funzione obiettivo.

Nel terzo capitolo, viene presentata in maniera dettagliata la formulazione dei modelli che verranno applicati sui dati reali: nello specifico si tratteranno in maniera precisa i vincoli che si è deciso di considerare, e verrà trattato in breve il tema delle misure di rischio coerenti.

Successivamente, vengono presentati i risultati ottenuti dall'applicazione su dati reali; nello specifico si evidenzia che la codifica dei modelli e la relativa implementazione dell'algoritmo PSO si sono realizzati mediante l'utilizzo del software MATLAB.

Per concludere, nell'appendice A sono riportate le tabelle contenenti alcuni dei diversi esiti delle simulazioni effettuate, mentre nell'appendice B troviamo i codici completi utilizzati in ambiente MATLAB, sviluppati per l'applicazione dei modelli di selezione di portafogli Enhanced Indexing.

Capitolo 1

1 Strategie di gestione di portafoglio

Questo primo capitolo si apre con una breve digressione sul modello di selezione di portafoglio introdotto da Harry Markovitz nel 1952, considerato il pilastro della moderna teoria di portafoglio e famoso per aver favorito l'introduzione per la prima volta della finanza all'interno delle scienze economiche riconosciute. L'introduzione delle basi del modello è funzionale ad una generale comprensione dei temi alla base dell'elaborato e alla categorizzazione delle strategie di portafoglio presentata nei paragrafi successivi del capitolo. La definizione delle classiche strategie di gestione attive e passive, con i rispettivi pro e contro, anticipa il vero oggetto di studio, ossia l'enhanced index tracking che rappresenta una strategia di selezione di portafoglio che ha l'obiettivo di coniugare alcuni aspetti delle gestioni passive (come, ad esempio, il replicare un benchmark di riferimento) e delle gestioni attive (come, ad esempio, la volontà di ottenere un rendimento in eccesso rispetto al benchmark).

La seconda metà del capitolo verrà dedicata, di conseguenza, ad una review della letteratura scientifica circa gli approcci rilevanti proposti finora per la risoluzione del problema dell'enhanced indexation: si analizzeranno modelli di programmazione lineare, criteri di selezione basati sulla dominanza stocastica e l'implementazione di algoritmi euristici. Quest'ultima categoria farà da collante tra il primo ed il secondo capitolo, nel quale si darà una descrizione precisa della tecnica di ottimizzazione Particle Swarm Optimization che verrà implementata per la risoluzione di un caso pratico.

1.1 Modello di selezione di portafoglio à la Markovitz

Con il termine portoflio management si fa riferimento all'attività di creazione e gestione di un portafoglio di investimenti, mediante l'opportuna selezione delle attività rischiose, indirizzata al raggiungimento di predeterminati obiettivi in termini di rischio e rendimento, generalmente in un orizzonte di lungo periodo, da parte di istituzioni, aziende o risparmiatori.

Il tema dell'ottimizzazione di portafoglio si è affermato in ambito finanziario a partire dagli anni 50, grazie soprattutto al lavoro pionieristico di Harry Markovitz¹: lo studioso, vincitore del premio Nobel per l'economia proprio grazie ai suoi scritti circa la teoria di portafoglio, introduce la Modern

¹ Markovitz (1952). Portfolio selection. The journal of finance, 77-91.

Portfolio Theory (MPT), ossia una teoria che da delle linee guide che tutti gli investitori avversi al rischio dovrebbero perseguire per ottimizzare il rendimento del proprio portafoglio, a partire da un predeterminato livello di rischio (o viceversa, minimizzare il rischio dato un predeterminato livello di rendimento atteso).

Di seguito si introducono soltanto brevemente i caratteri principali della moderna teoria di portafoglio per permettere al lettore di orientarsi all'interno dei temi che verranno affrontati in seguito.

Se si prende in considerazione un individuo che possiede alcune basi di educazione finanziaria, risulta razionale affermare che nel momento in cui l'individuo stesso si ritrova con un reddito (al netto di tutti i costi e le spese) positivo, debba differire il risparmio non consumato nel periodo corrente ad un periodo futuro t_1 investendo il proprio capitale in asset finanziari, i quali andranno a costituire il suo portafoglio. Il portafoglio in questione viene solitamente indicato come un vettore contenente i pesi, espressi in termini di percentuale di ricchezza, investiti nei singoli asset selezionati dall'investitore:

$$x' = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1)$$

Investire in attività finanziarie rappresenta un processo il cui esito è gravato da incertezza, in quanto nel momento in cui si investe in un titolo al tempo t_0 , non si ha la possibilità di conoscere e prevedere con esattezza quale sarà la dinamica futura del prezzo di tale attività, e di conseguenza conoscere preventivamente il profit&loss al periodo t_1 : l'investimento in questione può essere di conseguenza associato ad una infinità di possibili stati del mondo, ognuno dei quali caratterizzato da una propria probabilità di realizzazione. Il rendimento viene rappresentato in termini di variabile casuale, e di conseguenza le informazioni a riguardo sono contenute nelle sue funzioni di ripartizione e di distribuzione di probabilità; tuttavia, queste due funzioni sono incognite dal punto di vista analitico (potrebbero essere stimate, però con diverse difficoltà) e potrebbero non essere facili da gestire dal punto di vista computazionale. Al problema in questione, cercò di dare una prima soluzione Markovitz.

Considerando il rendimento come una variabile casuale continua R , Markovitz propose di considerare il valore medio del rendimento di un asset come una misura di performance dell'investimento, e la varianza dello stesso tasso di rendimento come una misura in grado di rappresentare la rischiosità associata all'investimento stesso. Di seguito vengono proposte le formulazioni per il calcolo di media e varianza per una variabile casuale continua:

$$E(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} t dF(t); \quad (1.1)$$

$$Var(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} ((t - E(R))^2 dF(t); \quad (1.2)$$

dove:

- $F(t)$ rappresenta la funzione di distribuzione di probabilità cumulativa, o funzione di densità di probabilità.

La notazione appena introdotta per calcolare rendimento atteso e varianza del singolo titolo può essere ampliata e contestualizzata in ambito di portafoglio. Per quanto concerne la valutazione delle performance di un portafoglio azionario, il suo tasso di rendimento in termini di variabile casuale può essere definito come segue:

$$R_p = \sum_{i=1}^N x_i R_i \quad (1.3)$$

con:

- R_p = rendimento aleatorio di portafoglio;
- x_i , con $i = 1, 2, \dots, N$ peso dell'i-esimo titolo;
- R_i = rendimento aleatorio dei singoli titoli.

Di conseguenza la misura di performance, ossia il rendimento atteso, può essere definito come segue:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^N x_i r_i \quad (1.4)$$

con:

- r_i = rendimento atteso del titolo i-esimo.

Per quanto concerne invece la misura della rischiosità del portafoglio, ossia la varianza del rendimento aleatorio, si utilizza la seguente formulazione:

$$Var(R_p) = \sum_{i=1}^N x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N x_i x_j \sigma_{ij} \quad (1.5)$$

dove:

- σ_i rappresenta la varianza del rendimento del titolo i-esimo;
- σ_{ij} rappresenta la covarianza tra i rendimenti dei titoli i-esimo e il titolo j-esimo.

Questa formulazione si può riformulare mediante l'introduzione del coefficiente di correlazione tra i rendimenti dei titoli:

$$Var(R_P) = \sum_{i=1}^N x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N x_i x_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (1.6)$$

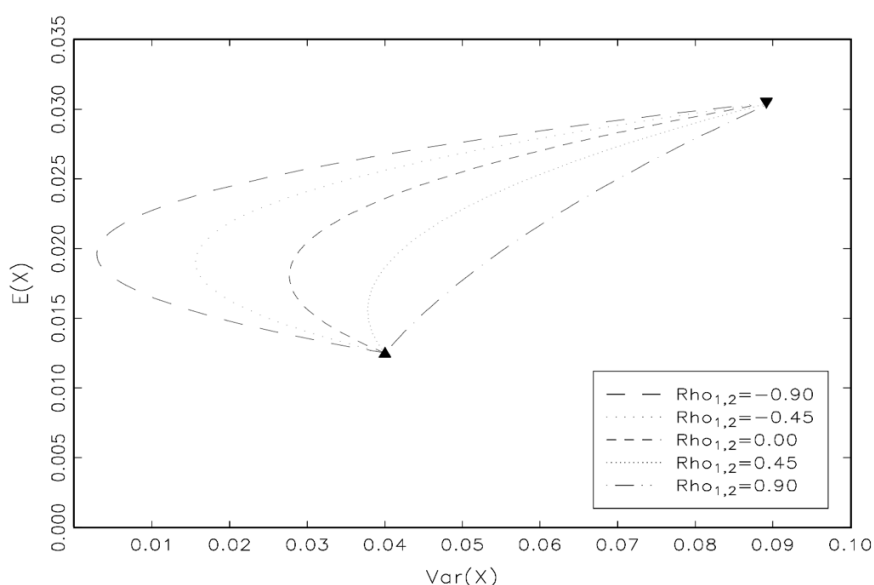
dove:

- ρ_{ij} indica la correlazione tra i rendimenti dei titoli i-esimo e j-esimo. Il coefficiente di correlazione assume valori compresi tra -1 e 1: $\rho_{ij} \in [-1,1]$.

L'introduzione del coefficiente di correlazione risulta di diretta interpretazione: risulta limitante soffermarsi sull'analisi del comportamento del rischio dei singoli titoli compresi nel portafoglio, in quanto quello che sarà il rischio complessivo dell'investimento al termine dell'orizzonte temporale, sarà frutto di fattori specifici ai singoli titoli, ma anche della relazione esistente tra i titoli stessi. Dalla formula sopra riportata, emerge come la rischiosità del portafoglio dipenda certamente dalla rischiosità dei singoli titoli, ma possa essere attenuata dalla loro dipendenza: nell'ambito di selezione di portafoglio un tema essenziale è il concetto di diversificazione, secondo il quale la selezione di titoli inversamente correlati o poco correlati, permette una forte riduzione (fino all'eliminazione) del rischio specifico del singolo titolo, lasciando il portafoglio esposto al solo rischio sistematico (ineliminabile).

Nei mercati finanziari risulta alquanto improbabile (se non impossibile) individuare titoli con rendimento avente coefficiente di correlazione pari esattamente a -1, il che rende impossibile ottenere un portafoglio azionario a rischio 0. Nonostante ciò, è possibile ottenere una riduzione del rischio di portafoglio anche con valori del coefficiente di correlazioni meno estremi.

Figura 1 Frontiera dei portafogli con due titoli rischiosi, al variare della correlazione



M. Corazza, *Appunti su "metodi per la gestione dei portafogli personali"*, Università Ca' Foscari di Venezia, 2020

La figura 1 presenta le frontiere efficienti relative ad un portafoglio composto da due titoli rischiosi, al variare del valore del coefficiente di correlazione; qui si può notare quanto detto in precedenza,

ossia che il beneficio della diversificazione è evidente anche per valori del coefficiente di correlazione non estremi. Di rilievo è altresì la diminuzione del rischio che si ottiene anche nella situazione in cui ci sia una correlazione positiva tra i rendimenti dei titoli.

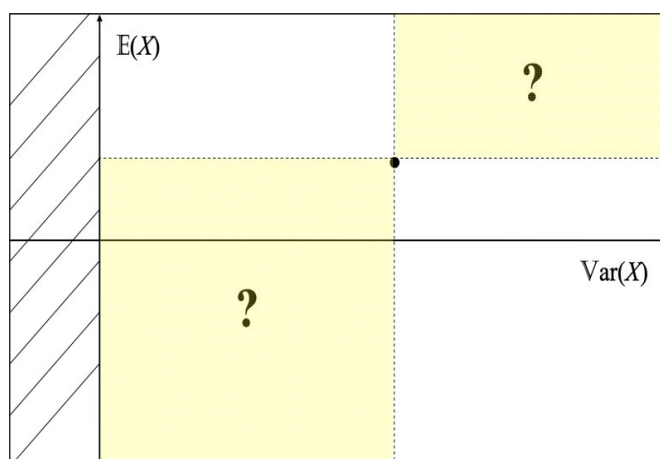
La contenuta correlazione tra i titoli tipica della realtà dei mercati finanziari (fatta eccezione periodi di crisi in cui la correlazione tra i titoli può aumentare in modo anomalo) spiega uno dei limiti del modello proposto da Markovitz, ossia una scarsa diversificazione: per ridurre la varianza del portafoglio, a causa dello scarso contributo della correlazione, il modello tende a sovrappesare i titoli con varianza minore, piuttosto che sfruttare le relazioni inverse dei prezzi di mercato dei titoli.

Sugli indicatori di performance e rischiosità appena descritti, si fonda anche il criterio di efficienza media-varianza individuato dall'autore per la selezione dei titoli più efficienti da inserire in portafoglio; in quest'ottica verranno preferiti in quanto più efficienti, i titoli caratterizzati da maggior rendimento atteso a parità di rischio, o meno rischiosi a parità di rendimento atteso. Di conseguenza, se si ipotizza di avere due titoli X_1 e X_2 , il primo titolo domina il secondo sulla base del criterio media-varianza se:

$$E(R_1) \geq E(R_2) \quad \text{e} \quad Var(R_1) \leq Var(R_2) \quad (1.7)$$

con almeno una delle due disuguaglianze vera in senso stretto. Ciò recepisce la preferenza degli investitori per i titoli a rendimento maggiore a parità di rischio (principio di non sazietà), o per i titoli a varianza minore a parità di rendimento (in quanto investitori avversi al rischio). Il criterio individuato da Markovitz, tuttavia, non permette di ordinare tutte le potenziali scelte di investimento, in quanto ci sono delle "aree grigie" in cui il criterio non riesce a restituire una soluzione coerente: in questo caso si suppone che entrambe attività finanziarie siano efficienti.

Figura 2 Impossibilità di ordinare tutte le scelte d'investimento



Come emerge dalla figura 2, il portafoglio rappresentato dal punto nero risulta dominato dai potenziali portafogli individuabili nel riquadro bianco in alto a sinistra e dominante rispetto ai potenziali portafogli individuabili nel riquadro bianco in basso a destra. Relativamente ai potenziali portafogli appartenenti ai due riquadri gialli, invece, il criterio media-varianza non riesce a determinare se il portafoglio rappresentato dal punto nero è dominante o dominato da essi.

Una volta data la definizione del criterio media-varianza, si può procedere con l'introduzione della frontiera efficiente (per portafogli di $N > 2$ titoli), ossia la frontiera che individua tutti i possibili portafogli che a parità di rischio massimizzano il rendimento atteso, o a parità di rendimento atteso minimizzano la varianza. Per ricavare in maniera analitica la frontiera efficiente, è necessario risolvere un problema di minimizzazione basato sulle formule viste in precedenza, solamente espresse in termini vettoriali:

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2, \dots, x_N} \quad & x'Vx \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x'r = \pi \\ x'e = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.8)$$

con:

- V = matrice di varianza-covarianza dei rendimenti di ordine N ;
- $x'r$ = rendimento atteso di portafoglio, dato dal vettore dei pesi x (trasposto) e dal vettore colonna dei rendimenti di ciascun titolo r , entrambi di ordine N ;
- π = rendimento atteso desiderato dall'investitore;
- e = vettore di 1, sempre di ordine N ;
- $x'e$ = vincolo di bilancio, che richiede di investire tutta la ricchezza disponibile.

Il problema nel modello à la Markovitz richiede quindi di minimizzare la varianza, una volta scelto dall'investitore l'obiettivo di rendimento. La soluzione del problema di ottimizzazione vincolato si ottiene mediante l'applicazione della Lagrangiana, che permette di determinare il vettore ottimo delle quote d'investimento, mediante la seguente formulazione chiusa:

$$x^* = \frac{(\gamma V^{-1}r - \beta V^{-1}e)\pi + (\alpha V^{-1}e - \beta V^{-1}r)}{\alpha\gamma - \beta^2} \quad (1.9)$$

dove:

- $\alpha = r'V^{-1}r$;

- $\beta = r'V^{-1}e = e'V^{-1}r;$
- $\gamma = e'V^{-1}r.$

L'applicazione della Lagrangiana permette quindi di ottenere il vettore ottimo delle quote d'investimento, che minimizza la varianza dato il rendimento atteso desiderato dall'investitore; andando poi a risolvere il problema per differenti valori di π si ottiene la frontiera efficiente, ossia il luogo dei portafogli aventi minima varianza per differenti valori del rendimento atteso desiderato. Quindi, per ogni differente livello di rendimento atteso desiderato, questa frontiera indica la miglior strategia d'investimento.

L'equazione della frontiera efficiente² dimostra che essa assume la forma di una parabola nel piano media-varianza (mentre risulta essere rappresentabile come un'iperbole nel piano media-deviazione standard³). Se si decide inoltre di inserire un titolo a rendimento certo nel portafoglio, si avrà uno spostamento del vertice della parabola e dell'iperbole, il quale si troverà sull'asse delle ordinate rappresentando il potenziale portafoglio risk-free che può essere costruito investendo tutto il capitale nel suddetto titolo.

Va inoltre evidenziato che, affinché il problema abbia un'unica soluzione, è necessario che la matrice di varianza-covarianza V sia non singolare e definita positiva, e che almeno due dei titoli sotto esame abbiano rendimento atteso differente $R_i \neq R_j$ per un $i,j=1,2,\dots,N$ (altrimenti l'applicazione del criterio media-varianza non sarebbe possibile). Prima di procedere risulta importante dare un'interpretazione finanziaria alle due proprietà della matrice di varianza-covarianza sopra citate:

- Una matrice non singolare garantisce la non replicabilità della struttura di rischio di un titolo mediante la combinazione lineare delle strutture di rischio degli altri titoli in portafoglio. Garantisce che non ci sia ridondanza in termini di struttura di rischio;
- Una matrice è definita positiva se non ci sono rischi degeneri, ossia se tutti i titoli hanno rendimento aleatorio e varianza non nulla.

Nella figura 2 viene raffigurata la frontiera efficiente ricavata mediante l'utilizzo del software MATLAB (sono stati considerati a titolo meramente esemplificativo 8 titoli presenti nell'S&P500, considerando 252 prezzi e di conseguenza 251 rendimenti logaritmici), la quale permette di individuare per vari livelli di rendimento atteso il portafoglio che minimizza la varianza.

² $\sigma_{p^*}^2 = \frac{\gamma\pi^2 - \beta\pi + \alpha}{\alpha\gamma - \beta^2}.$

³ $\sigma_{p^*} = \left(\frac{\gamma\pi^2 - \beta\pi + \alpha}{\alpha\gamma - \beta^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$

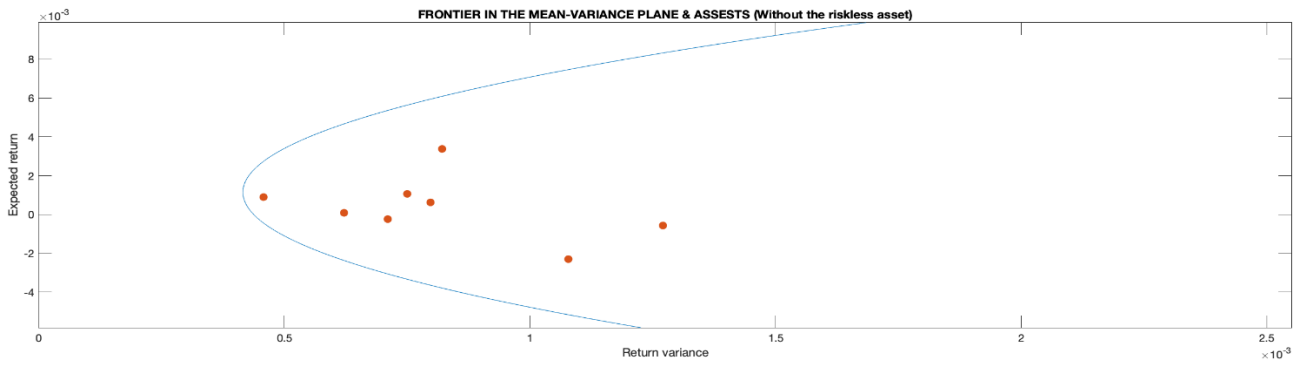


Figura 3 Frontiera efficiente media-varianza, ottenuta mediante l'utilizzo del software MATLAB

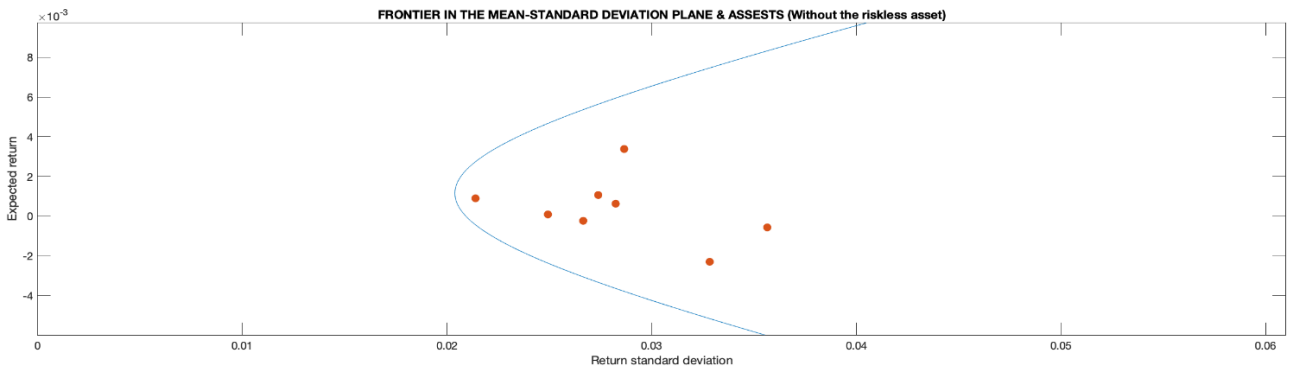
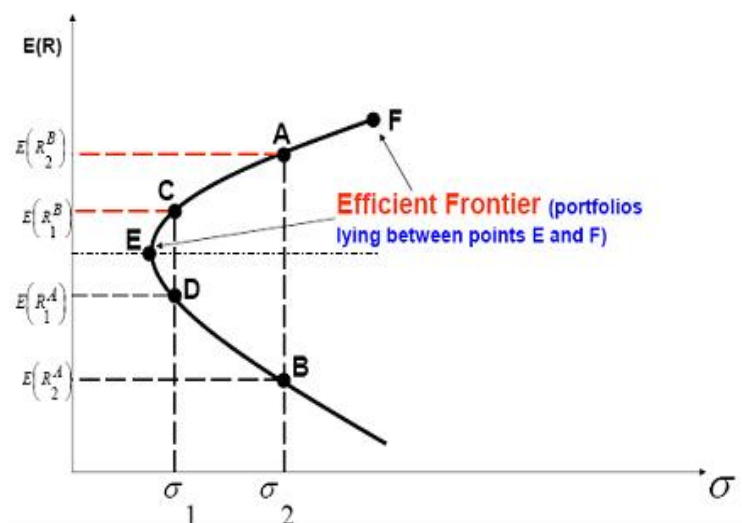


Figura 4 Frontiera efficiente media-semivarianza ottenuta mediante l'utilizzo del software MATLAB

Un portafoglio efficiente importante è il cosiddetto Global Minimum Variance Portfolio, il portafoglio situato nel vertice della parabola, il quale è il portafoglio efficiente con varianza minore. Tutti i portafogli situati sulla parte inferiore della frontiera, infine, appartengono alla parte inefficiente della frontiera, in quanto per ognuno di essi a parità di rischio possono essere individuati portafogli con rendimenti superiori nella parte efficiente.

5 Global minimum variance portfolio



Una volta individuata la frontiera dei portafogli efficienti, la domanda che sorge spontanea è: qual è il portafoglio ottimo per l'investitore? Per rispondere alla domanda è necessario trovare un criterio che permetta di coniugare le preferenze dell'investitore e il suo grado di avversione al rischio, ottenendo quindi una gerarchia. Il portafoglio ottimo viene individuato andando a calcolare il punto di tangenza tra la frontiera dei portafogli efficienti e la più alta curva di isoutilità dell'utilità attesa⁴ dell'investitore. Si parla di utilità attesa in quanto, a differenza che in ambito microeconomico in cui si calcola l'utilità fornita da un paniere di beni e servizi, in questo caso specifico si vuole calcolare l'utilità fornita da un rendimento aleatorio: dal calcolo della funzione di utilità attesa si otterrà una funzione che ha come argomento le variabili x_1 e x_2 , che secondo il criterio stabilito da Markovitz altro non possono essere che media e varianza⁵.

A questo punto un'altra domanda sorge spontanea: che funzione di utilità si può utilizzare per rappresentare al meglio le preferenze dell'investitore? Il criterio media-varianza, alla base della selezione dei titoli efficienti, risulta essere coerente con l'utilità attesa solo in due distinte situazioni:

- le preferenze dell'investitore sono rappresentabili mediante la funzione di utilità quadratica;
- la distribuzione di probabilità congiunta dei rendimenti aleatori è ellittica⁶.

Tuttavia, la seconda ipotesi non è utilizzabile da un punto di vista operativo in quanto da diversi studi empirici è emersa l'impossibilità di rappresentare il mercato mediante delle distribuzioni ellittiche, a causa dell'asimmetria nella distribuzione dei rendimenti.

Risulta quindi chiaro che, la funzione di utilità adatta a rappresentare le preferenze dell'investitore, è la funzione di utilità quadratica:

$$u(R_p) = R_p - (\alpha/2)R_p^2 \quad \text{con } \alpha > 0 \quad (1.10)$$

dove:

- R_p = rendimento aleatorio di portafoglio;
- α = coefficiente di avversione al rischio.

A conferma di quanto detto in precedenza, viene proposta la formulazione dell'utilità attesa:

⁴ L'utilità attesa è il criterio che, considerata l'avversione al rischio dell'investitore, permette di ottenere una gerarchia delle preferenze dell'investitore stesso.

⁵ Con la formula 1.11 si dà spiegazione di quanto affermato circa le due variabili x_1 e x_2 .

⁶ Una distribuzione ellittica è qualsiasi componente di una famiglia di distribuzione di probabilità che approssimano la distribuzione normale multivariata. In statistica le distribuzioni ellittiche vengono utilizzate per studiare distribuzioni simmetriche con code pesanti (es. distribuzione t multivariata) o leggere rispetto alla distribuzione normale. Nel caso bidimensionale, ad esempio, la distribuzione forma un'ellisse nei grafici di iso-densità.

$$E[U(R_p)] = E(R_p) - (\alpha/2)E(R_p^2) = r_p - \alpha/2 (r_p^2 + \sigma_p^2) \quad (1.11)$$

dove viene messo in evidenza il fatto che la funzione di utilità quadratica dipende solo da media e varianza, in quanto $\sigma_p^2 = E(R_p^2) - [E(R_p)]^2$.

È stato messo in evidenza, quindi, come questa funzione di utilità sia coerente col criterio di efficienza media-varianza. Il criterio dell'utilità attesa inoltre, risulta coerente con quelle che sono le aspettative dell'investitore avverso al rischio: la funzione in questione, infatti, risulta essere crescente e concava rispetto al capitale dell'investitore.

La funzione da utilizzare deve essere obbligatoriamente strettamente crescente, in quanto l'obiettivo dell'investitore è quello di massimizzare il rendimento che ricava dagli investimenti. Infatti, se valutiamo due alternative di investimento X_1 e X_2 con i rispettivi rendimenti aleatori R_1 ed R_2 , si ottiene che:

$$R_1 > R_2 \text{ allora } U(R_1) > U(R_2) \quad (1.12)$$

Per quanto concerne la concavità si può invece dire che questa proprietà viene richiesta in quanto permette di mettere in rilievo l'avversione al rischio dell'investitore. Se infatti consideriamo due diversi investitori (A e B) con un capitale rispettivamente di w_1 e w_2 , con $w_1 < w_2$, si può tranquillamente affermare che un aumento del valore del capitale di pari entità genererà un'utilità maggiore per l'individuo A che ha un capitale inferiore.

Concludendo la digressione sulla funzione di utilità, risulta fondamentale citarne un limite, ossia che essa ha un dominio limitato. La funzione di utilità quadratica $U(X)$ è crescente solo se $X \leq 1/\alpha$, quindi per poterla usare correttamente tutte le realizzazioni di X devono essere minori o uguali a $1/\alpha$.

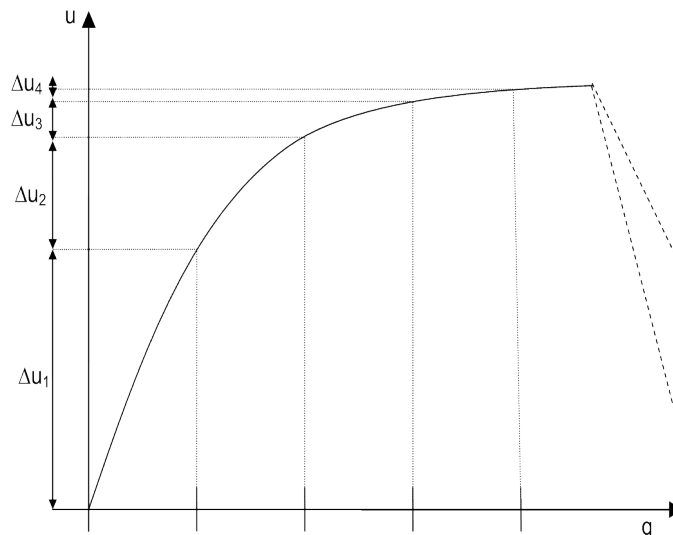


Figura 6 Funzione di utilità Von Neumann Morgenstern

A questo punto, per individuare il portafoglio ottimale tra quelli presenti nella parte efficiente della frontiera, si procede con la massimizzazione dell' utilità attesa tenendo sempre presente il grado di avversione al rischio dell' investitore. Dal punto di vista analitico il tutto si traduce in un problema di massimizzazione del tipo:

$$\begin{aligned} \max \quad & E[U(R_p)] \\ \text{s. t.} \quad & \sigma_p^2 = f(R_p) \end{aligned} \quad (1.13)$$

che porta ad individuare come portafoglio ottimo il punto di tangenza tra la frontiera efficiente ricavata in precedenza e le preferenze individuali di un investitore avverso al rischio.

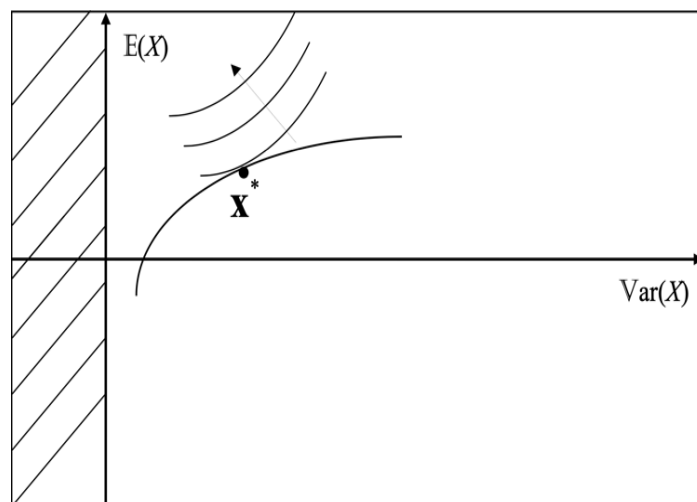


Figura 7 Portafoglio ottimo secondo le preferenze dell'investitore

1.2 Passive and active portfolio management

Una volta ricordate le basi per una gestione di portafoglio che segue criteri di efficienza, si apre il dibattito tra quale sia la strategia preferibile tra una strategia di investimento attiva e una strategia di investimento passiva.

Le strategie di gestione di portafoglio passive si fondano sul concetto di efficienza dei mercati, secondo il quale i prezzi delle attività incorporano tutte le informazioni disponibili relativamente ad una impresa, e di conseguenza risulta molto difficile (se non impossibile) ottenere un vantaggio rispetto agli altri investitori; anche nel momento in cui giungano nuove informazioni, esse vengono prontamente incorporate dai prezzi in modo da rappresentare il “valore vero” del titolo. Secondo questa teoria tutte le risorse monetarie investite nella ricerca e nell'analisi di informazioni funzionali

ad individuare quei titoli con α positivo⁷, che si tramutano in costi che poi ricadono sugli investitori, non portano a vantaggi in termini di extra-rendimento. Per i fautori del passive portfolio management, proposto per la prima volta negli Stati Uniti nel 1976 con il primo fondo comune di investimento indicizzato venduto da Vanguard Inc., non è possibile battere il mercato in modo sistematico e quindi l'unica via percorribile per incrementare il rendimento netto è una riduzione dei costi di investimento. Ma come viene messa in pratica una gestione passiva? La necessità di contenere i costi, pone il gestore di fronte ad una limitata flessibilità in termini di scelte d'investimento e si traduce in una strategia in cui l'obiettivo è quello di tracciare e replicare l'andamento di un indice che viene scelto come benchmark; risulta quindi chiaro che questo metodo di investimento è meno rischioso e altresì dispendioso in termini di risorse, in quanto prescinde dalle fasi di analisi orientate all'asset allocation e alla stock selection, tramutandosi in commissioni di gran lunga inferiori rispetto ai fondi gestiti attivamente. Un altro aspetto che impatta sui costi (riducendoli) è la minor necessità di ribilanciamento di portafoglio, che generalmente in una gestione attiva avviene con maggior frequenza, incrementando i costi di transazione a carico poi del cliente finale.

Le strategie passiva si possono concretizzare in fondi comuni di investimento passivi o mediante l'utilizzo di Exchange Traded Funds (ETF). Nello specifico gli ETF sono fondi o SICAV⁸, che hanno come obiettivo la replicabilità di un indice di riferimento, il cui funzionamento può essere brevemente così descritto:

- Nel mercato primario, in cui operano solo gli investitori autorizzati (investitori professionali) avviene la creazione delle quote degli ETF, mediante un processo definito "creation in kind" ossia sottoscrizione in natura;
- Una volta create le quote, l'investitore autorizzato acquista sul mercato i titoli relativi al portafoglio del fondo nelle dovute proporzioni, costituendo il creation basket. Una volta avvenuto l'acquisto, si concretizza lo scambio in natura, con il fondo che riceve dall'investitore autorizzato i titoli che compongono il creation basket e in cambio consegna le quote ETF corrispondenti;
- Le quote ETF ricevute dall'investitore autorizzato vengono poi immesse nel mercato secondario (mercato ETFPlus in Italia), dove possono essere acquistate dai risparmiatori.

⁷ Il CAPM è un modello di rischio-rendimento ideato da Sharpe nel 1964, il quale fornisce un rendimento atteso "conforme" alle rischiosità del titolo stesso (indicata dal parametro β). L' α di Jensen, invece, è una misura di performance che calcola il rendimento in eccesso di una attività finanziaria, rispetto al rendimento di equilibrio che avrebbe dovuto generare sulla base del livello di rischio sistematico misurato dal β . $\alpha = (R_i - R_f) + \beta(R_m - R_f)$, dove R_i è il rendimento atteso del titolo i-esimo, R_f è il rendimento del titolo risk-free ed R_m è il rendimento atteso del mercato. Cercare titoli con α positivo significa, quindi, cercare titoli sottovalutati che hanno rendimento atteso superiore al rendimento di equilibrio, che quindi possono permettere di ottenere un rendimento superiore a quello di mercato.

⁸ Le SICAV sono società di investimento a capitale variabile avente come attività esclusiva la gestione del capitale raccolto mediante l'emissione al pubblico di proprie azioni.

Proprio grazie ai vantaggi in termini di ridotti costi per i risparmiatori e di ridotta rischiosità, le gestioni passive negli ultimi 20 anni hanno ottenuto il supporto di numerosi accademici ed investitori professionali, dato che può essere confermato da un articolo interessante pubblicato dal Financial Times l'8 Dicembre 2020⁹: nell'articolo troviamo infatti un insieme di dati che certificano come in ambito europeo ad ottobre 2020 il 20% del totale degli asset under management (per un totale di €9.5 trilioni, in crescita del 9.5% rispetto all'anno precedente) è investito in fondi passivi, mentre negli Stati Uniti questo valore raggiunge il 41.4% (un valore raddoppiato negli ultimi 10 anni). Questi dati evidenziano la crescita degli asset gestiti mediante gestioni passive, che sebbene siano ancora limitate rispetto alle gestioni attive, stanno guadagnando importanza.

Per quanto concerne le modalità mediante le quali si concretizza la gestione passiva, la più intuitiva è la cosiddetta “*full replication*”, strategia che mira ad investire in tutti i titoli che compongono l'indice di riferimento. Nonostante ciò, questa strategia sebbene così lineare dal punto di vista teorico, presenta diversi impedimenti:

- Una replicazione completa di un indice molto vasto (come, ad esempio, l'S&P500 composto da 500 titoli), oltre ad essere costosa potrebbe richiedere risorse monetarie che il fondo non possiede;
- Se l'indice di riferimento è caratterizzato da frequenti modifiche in termini di composizione (pratica diffusa soprattutto in mercati o periodi caratterizzati da elevata volatilità), una replicazione completa potrebbe portare a elevati costi di transazione;
- In determinati mercati la regolamentazione prevede l'obbligo di investire acquisendo dei lotti minimi di transazione, che nell'ambito del portafoglio passivo potrebbero portare ad un *overweight* di determinati asset;
- In ambito europeo, ad esempio, la normativa sui fondi d'investimento prevede l'obbligo di detenere un ammontare di risorse liquide per far fronte alle richieste di liquidazione da parte degli investitori. Questa è un'ulteriore limitazione al patrimonio investibile che limita, di conseguenza, le possibilità di una replicazione completa;
- L'indice potrebbe essere composto da titoli talvolta poco liquidi, implicando una difficoltà nel reperire tali strumenti.

A causa dei suddetti impedimenti, perciò, si sono affermate delle strategie di gestione passiva che mirano a replicare il benchmark di riferimento utilizzando un numero limitato di titoli: la replicazione parziale rappresenta un buon trade-off tra le limitazioni precedentemente citate e l'obiettivo di

⁹ Passive funds' share of European Investment market jumps to 20%. Financial Times, 08/12/2020

limitare il tracking error (TE) tra fondo e benchmark. Il tracking error è una misura di performance che calcola la differenza tra il rendimento ottenuto da un portafoglio e il rendimento di un benchmark. Sebbene siano state proposte diverse formulazioni, una definizione generale può essere data da $TE(t) = R(t) - R_b(t)$ con $R_b(t)$ che rappresenta il rendimento del benchmark, e t che rappresenta il periodo temporale a cui si fa riferimento.

Prima di passare alla disamina delle strategie di gestione attive, vale la pena citare la posizione assunta a riguardo dall'economista e premio Nobel William Sharpe, il quale nel 1991 presentò uno studio¹⁰ in cui mette in evidenza il suo favore per i fondi passivi, sostenuto da un insieme di analisi volte a confermare che fatta eccezione per alcuni limitati casi specifici (probabilmente dovuti ad investitori fortunati) il rendimento medio al netto delle commissioni delle gestioni passive risulta essere superiore al rendimento medio netto delle gestioni attive.

Come detto in precedenza, tuttavia, il mondo finanziario non ha accettato all'unanimità l'ipotesi di efficienza di mercato, e di conseguenza una gestione attiva di portafoglio viene tutt'ora vista come la miglior strategia per generare un rendimento migliore dai propri risparmi. L'active portfolio management è un'attività alquanto complessa che necessita di una quantità di dati importante per supportare le analisi indirizzate ad individuare quei titoli "*mispriced*", ossia quei titoli in cui si evidenzia una divergenza tra valore di mercato e valore intrinseco¹¹, i quali potrebbero generare un extra-rendimento rispetto al rendimento di equilibrio. L'idea di fondo in questo caso è che i mercati compiano degli errori di valutazione che gli investitori possono cercare di sfruttare; le strategie attive a differenza di quelle passive, infatti, mirano ad individuare nell'insieme dei titoli che compongono i vari indici quelli che ritengono possano ben performare, evitando di esporsi nei confronti degli altri titoli ritenuti meno attraenti.

I gestori di fondi attivi, perciò, godono di un grado di flessibilità di gran lunga maggiore, in quanto nella strutturazione del portafoglio limiti troppo stringenti impedirebbero un adeguato stock picking¹² per quanto riguarda i titoli che si pensa possano sovraperformare rispetto agli altri; un altro aspetto fondamentale che viene richiesto ad un investitore attivo è la cosiddetta abilità di market-timing, ossia di entrare o uscire dal mercato nei periodi più opportuni per cercare di sovraperformare il mercato nei periodi "bullish" e contenere le perdite nei periodi "bearish". Un ulteriore aspetto fondamentale che fa propendere una buona parte dei risparmiatori ad affidarsi ad una gestione attiva, fa riferimento alla

¹⁰ The Arithmetic of Active Management, in Financial Analyst Journal, Feb 1991, Vol.47, pp 7-9.

¹¹ Il valore intrinseco è un valore calcolato su assunzioni semplificate. Per quanto concerne un titolo azionario, il valore intrinseco viene calcolato mediante l'analisi fondamentale, e si concretizza nel calcolo del valore attuale dei flussi di cassa attesi della società oggetto di studio.

¹² Lo stock picking è quell'attività che svolge il gestore di un fondo azionario, che porta una volta selezionate le classi di attività generiche in cui investire (ad esempio titoli americani, inglesi, bancari, tecnologici), all'individuazione delle specifiche azioni da inserire in portafoglio.

capacità del gestore persona fisica di calibrare gli investimenti in modo ma meglio rispettare le preferenze e gli obiettivi del cliente; in questo caso infatti la composizione del portafoglio senza la rigidità imposta dalla replicazione di un benchmark, può da un lato calibrare al meglio la strategia d'investimento rispetto agli obiettivi del cliente in termini di rischio-rendimento (il cliente può avere diversi obiettivi tra i quali garantirsi una pensione aggiuntiva in futuro o proteggere il capitale che poi darà in eredità ai figli) e dall'altro in termini di un'adeguata gestione della tassazione sui redditi, sui dividendi. Affidarsi ad un gestore attivo conferisce quindi maggior libertà anche al cliente di calibrare gli investimenti in base ai redditi che già percepisce e alla normativa del paese in cui paga le tasse (soprattutto se si parla di clientela corporate, composta da imprese dotate di forma societaria aventi solitamente dimensioni non piccole).

Se a sostegno delle gestioni passive è stato citato in precedenza il lavoro di Sharpe, a sostegno delle gestioni attive troviamo un altrettanto ricca letteratura che cerca, appellandosi alle inefficienze del mercato, di giustificare la scelta di affidarsi ad un gestore attivo.

Innanzitutto, affidandosi al libro del professore della Columbia Joel Greenblatt "The Little Book That Still Beats The Market", si può riflettere su alcuni casi di borsa che possono rendere scettici circa l'efficienza dei mercati: ad esempio nel 2018 il prezzo delle azioni di Apple è passato da 147\$ ad azione fino ad un massimo di 232\$ per azione, che in termini di capitalizzazione rappresenta una differenza di 419 miliardi di dollari. Lo stesso discorso può essere fatto per Amazon, con una variazione di circa 422 miliardi di dollari nello stesso anno. Di sicuro questi due esempi non possono essere ritenuti esaustivi per rifiutare l'ipotesi di mercati efficienti, nonostante ciò, fanno aumentare lo scetticismo circa la capacità dei prezzi di riflettere in ogni momento, in un mercato adeguatamente liquido, tutte le informazioni disponibili su un determinato titolo.

Sempre a sostegno dell'ipotesi di anomalie nei prezzi di mercato, viene proposta una teoria figlia della finanza comportamentale che introduce il concetto di *anchoring*: in ambito finanziario gli investitori si ancorano ai dati del recente passato e tendono a proiettarli nel futuro ed estrapolano informazioni da questa loro proiezione. Ecco perché spesso si assiste a fenomeni di sottovalutazione di società che nel recente passato hanno ottenuto risultati poco convincenti (si è infatti influenzati ad affermare che questi risultati si ripeteranno anche in futuro) e sopravvalutazione di società che hanno ottenuto risultati sopra le attese. Sempre rimanendo nell'ambito della behavioral finance, in uno scritto del premio Nobel Richard Thaler del 1993¹³ vengono individuati altri due fattori che rendono inefficienti i mercati: in primo luogo si afferma che gli investitori detestano le perdite più di quanto apprezzano i guadagni (il trade-off è generalmente 1:2), inoltre il periodo di valutazione degli

¹³ Myopic Loss Aversion and the Equity Premium Puzzle, National Bureau of Economic Research, NBER working papers 4369.

investitori è ridotto rispetto al loro attuale orizzonte d'investimento. Questo secondo aspetto può essere spiegato facendo riferimento ad un fondo pensione: i fondi pensione investono con un'ottica di lungo periodo, tuttavia, spesso le performance vengono valutate nel breve periodo, creando un disallineamento tra la tolleranza del fondo alla volatilità dei rendimenti, e la tolleranza del board in carica responsabile degli investimenti. Il fondo ha un orizzonte temporale "infinito", quindi, è in grado di sopportare la volatilità temporanea, ma la reputazione dei soggetti responsabili degli investimenti è valutata in un orizzonte sicuramente minore di "infinito". Questo conflitto risulta quindi essere una delle cause della popolarità delle gestioni passive.

Infine, l'incapacità degli investitori di battere il mercato può essere determinata dal timore di sviluppare una strategia che punti ad essere il più differente possibile dal mercato¹⁴, in quanto:

- Per adottare una tale strategia è richiesta una visione sugli investimenti che può risultare inadeguata nel breve termine, e che richiede molta ricerca individuale;
- Tale strategia basata sulle convinzioni¹⁵ può portare a perdite nel breve periodo, comportando pressioni nel team investimenti e la perdita di alcuni clienti;
- È necessaria molta pazienza da parte dei gestori e dei clienti.

1.3 Enhanced Index Tracking

A partire dalla fine degli anni '90, nel contesto del portfolio management, ha iniziato a prendere corpo una sorta di terza strada, una via di mezzo tra le gestioni attive e passive che si prefigge come obiettivo quello di coniugare gli aspetti positivi di entrambe le strategie: con il termine Enhanced Index Tracking si fa quindi riferimento ad una strategia ibrida, a metà tra una gestione attiva e una passiva, che ha come obiettivo quello di ottenere un rendimento superiore al benchmark di riferimento, minimizzando al contempo il rischio di deviare dal benchmark stesso (*tracking risk*). In parole povere, il gestore in questo caso si prefigge l'obiettivo di aggiungere valore relativamente all'indice di riferimento cercando di emulare nella maniera più precisa possibile il comportamento del benchmark stesso: i punti di forza di questi strumenti sono l'offerta di un prodotto d'investimento con profilo di rischio di un portafoglio molto diversificato, ma con un valore aggiunto in termini di rendimento derivante da una gestione attiva.

¹⁴ L' Active Share è una misura proposta da Cremers e Petajisto in un paper del 2009 per misurare quanto è diverso un portafoglio dal benchmark. Un valore pari a 0 indica che il portafoglio è completamente differente dal benchmark, mentre un valore pari a 100 indica una congruenza del 100% in termini di posizioni e pesi.

¹⁵ L'high conviction investing è una particolare strategia di investimento adottata da diverse società di asset management, che punta ad essere differenti dal benchmark di riferimento, investendo in un numero limitato di titoli considerati di elevata qualità, e considerati aventi una buona quota di mercato e una posizione competitiva.

Questa particolare tipologia di strategia sta guadagnando significativi consensi in ambito sia accademico che operativo, il che può essere confermato dai dati che vengono forniti in un paper di Jorion¹⁶ in cui viene proposto il risultato di un sondaggio in cui tra il 1994 e il 2000 la percentuale di ricchezza investita in questi strumenti è cresciuta da \$33 miliardi a \$365 miliardi, e in un paper di Koshizuka et al. del 2009¹⁷ dove si afferma che la metà dei fondi investiti nella borsa giapponese sono gestiti in maniera passiva, e la metà mediante fondi del tipo enhanced index, ossia fondi che hanno come obiettivo la minimizzazione della rischiosità e la contestuale volontà di generare un rendimento in eccesso rispetto al benchmark di riferimento.

In precedenza, parlando delle differenze tra gestioni attive e passive, è stato sottolineato come la scelta dell'una o dell'altra strategia si indentifica nella concezione circa l'efficienza o meno dei mercati. Dal punto di vista puramente teorico, una giustificazione allo sviluppo dell'enhanced indexing può essere fornita dalla cosiddetta *Adaptive Market Hypothesis* proposta da Andrew Lo nel 2005; nello specifico questa ipotesi cerca di coniugare le teorie economiche basate sull'ipotesi di mercato efficiente con le teorie di finanza comportamentale¹⁸ affermando che effettivamente i mercati si adattano alle informazioni che ricevono e siano generalmente efficienti, con i prezzi che riflettono buona parte dell'informazione che deriva dalla combinazione tra le condizioni ambientali e il numero e la natura delle specie¹⁹ nel mercato. Il mercato, quindi, sarà molto efficiente quando ci sarà un numero significativo di agenti che competono per sfruttare risorse scarse (informazioni); tuttavia, ci sono periodi e mercati in cui la scarsità di agenti e l'abbondanza di risorse rendono il mercato meno efficiente dando agli investitori l'opportunità di ottenere un rendimento in eccesso a quello generato dal mercato. Questa teoria afferma che l'efficienza di mercato dipende dal contesto di riferimento ed è dinamica; quindi, dal punto di vista teorico può giustificare l'enhanced indexation che cerca di individuare e sfruttare le inefficienze, pur mantenendosi nel perimetro dell'indice di riferimento.

Dal punto di vista operativo invece, la suddetta strategia può essere perseguita principalmente con due approcci, uno basato sugli investimenti diretti in azioni e uno che richiede l'utilizzo di contratti derivati²⁰. Prima di descrivere brevemente l'approccio derivative-based, si danno due definizioni utili alla comprensione:

¹⁶ Enhanced Index Funds and Tracking Error Optimization, Jorion 2002. Working paper, University of California.

¹⁷ Koshizuka, T., Konno, H., & Yamamoto, R. (2009). Index-plus-alpha tracking subject to correlation constraint. *International Journal of Optimization: Theory, Methods and Applications*, 1(2), 215–224

¹⁸ La finanza comportamentale è una disciplina che studia i comportamenti dei mercati finanziari, le scelte degli agenti economici e il loro effetto sui prezzi di mercato e sull'allocazione delle risorse, mediante l'utilizzo della psicologia. L'interesse è quindi orientato verso la razionalità, o meno, degli agenti economici.

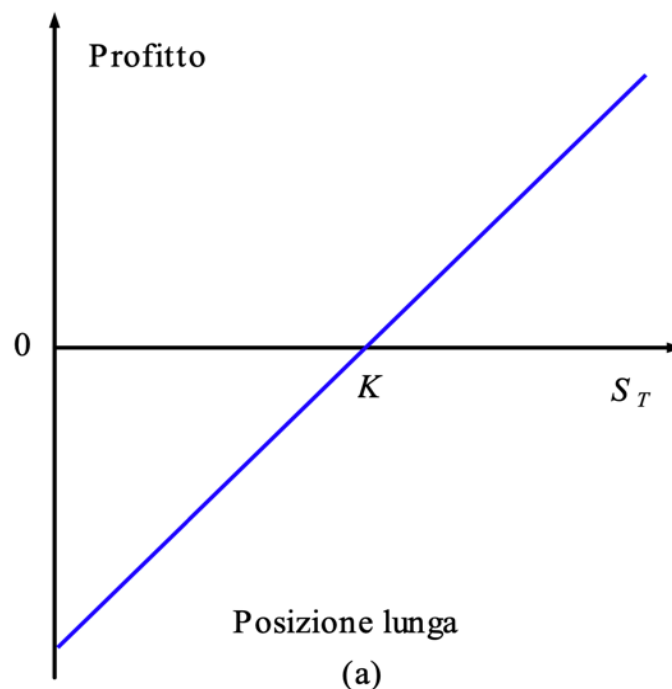
¹⁹ Con il termine specie, l'autore si riferisce a gruppi distanti di partecipanti al mercato, ognuno dei quali si comporta in modo ordinario. Tra le specie troviamo ad esempio fondi pensione, hedge fund e investitori retail.

²⁰ I derivati sono dei contratti il cui valore dipende da una o più "variabili sottostanti". Tra le variabili sottostanti rientrano, ad esempio, i prezzi delle attività negoziabili (come il prezzo di una azione o il prezzo del petrolio al barile) o i tassi d'interesse.

- L' α di un portafoglio rappresenta il suo rendimento in eccesso rispetto ad un portafoglio di mercato utilizzato come benchmark per la comparazione. Quindi denota il valore aggiunto dal gestore o dalla tipologia di strategia implementata;
- Il β di un portafoglio rappresenta l'esposizione al mercato, che si guadagna investendo in indici di mercato come il FTSE100. Inoltre, a livello di singolo titolo, rappresenta la sensibilità del titolo a movimenti del mercato.

Per quanto concerne l'approccio *derivative-based*, esso consiste nell'assumere una posizione lunga sull'indice desiderato mediante l'acquisto di contratti derivati (generalmente futures, altrimenti opzioni o swap). Con questa strategia un investitore non investe direttamente in un fondo β (quindi un indice di mercato), bensì assume una posizione nell'indice mediante l'utilizzo dei derivati i quali, visto il loro costo contenuto, permettono di assumere un'esposizione che sia poco costosa e nel frattempo investire la parte restante di capitale in un altro strumento. Gli investimenti in grado di generare un alfa, nei quali si investe l'avanzo di capitale, sono generalmente titoli del mercato monetario a breve termine a rendimento certo, caratterizzati da buona liquidità. La scelta di tali strumenti è basata sulla volontà di ridurre la rischiosità dell'operazione, e di investire in titoli che abbiano correlazione contenuta col fondo β . Nello specifico, la rischiosità derivante dall'operare con contratti derivati, fa riferimento principalmente all'aspetto della leva finanziaria: mediante un derivato è infatti possibile assumere posizioni consistenti con un esborso iniziale limitato, il che in base ai movimenti del mercato si può tramutare in grandi guadagni o in grandi perdite.

Figura 8 Payoff contratto futures, posizione lunga



J.C.Hull. Opzioni, futures e altri derivati, Pearson

La figura 8 è funzionale a spiegare quanto appena detto circa la leva finanziaria: nello specifico, è importante porre l'attenzione come nel caso dell'assunzione di una posizione di acquisto sui futures (posizione lunga) in caso di movimento avverso del mercato le perdite siano potenzialmente molto elevate.

Questa strategia, quindi, cerca di generare un extra-rendimento mediante l'investimento in suddetti titoli a rendimento certo agendo anche sulla duration²¹, assumendo il nome di "alpha transportation strategy" dato che si crea valore aggiunto nei mercati obbligazionari e si trasporta nel mercato azionario.

Tuttavia, la strategia potrebbe risultare molto costosa in termini di rischiosità, andando ad eliminare quei benefici derivanti dal tracking del benchmark: operare con contratti derivati oltre che essere rischioso richiede di sostenere importanti costi nel momento in cui i contratti scadono e c'è necessità di rinnovarli (il rollover è necessario in quanto i contratti derivati hanno una scadenza, la quale potrebbe risultare inferiore rispetto all'orizzonte di investimento dell'investitore), e al contempo il continuo acquisto di titoli a breve termine comporta un aumento dei costi del fondo stesso. L'approccio che perciò risulta essere il più utilizzato dai gestori professionali prevede di investire direttamente nei titoli azionari cercando di sfruttare le inefficienze di mercato di cui si è parlato in precedenza. Tra le possibili strategie finora messe in campo in ambito operativo, oltre alla già citata strategia *derivative-based* (o *enhanced-cash*) vale la pena citare:

- *Trading Enhancements*: si fa utilizzo di algoritmi intelligenti per creare valore mediante i profitti da trading comprando titoli illiquidi a sconto (quando si valutano titoli illiquidi, come le azioni di una società non quotata, nella determinazione del prezzo si deve considerare nel tasso di sconto per la determinazione del prezzo il rischio sistematico derivante dalla difficoltà di liquidare l'investimento);
- *Index Construction Enhancements*: la strategia si basa sull'utilizzo di indici costruiti dalla società di gestione, che si differenziano dagli indici di mercato più dinamici in quanto invece che essere costituiti sulla base della capitalizzazione delle società (come capita per il FTSE Mib), si basano su altri fattori come la volatilità o l'ammontare di dividendi che paga la società. Essendo gli indici gravati da diritti di proprietà, la costruzione degli indici in proprio permette di diminuire le commissioni da pagare ai provider di indici, e che permettono un minor turnover mantenendo le posizioni anche se dalle analisi emergono segnali di vendita;

²¹ La duration, o durata media finanziaria, è la scadenza media dei flussi di cassa attesi, ponderata per il contributo del valore attuale di ciascun flusso alla formazione del prezzo. Viene utilizzata come misura di rischio, in quanto permette di determinare la sensibilità del prezzo dell'attività finanziaria al variare del tasso di rendimento.

- *Tax-Managed Strategies*: le decisioni di acquisto e vendita titoli vengono prese con l'obiettivo di creare il maggior beneficio fiscale al cliente (sempre cercando di replicare il benchmark).

Ricordando gli aspetti negativi delle gestioni attive, tra le quali elevati costi di transazione e maggior rischio, risulta quindi chiaro come una strategia del tipo Enhanced Indexation, una volta posti gli adeguati limiti alla flessibilità e libertà del gestore, possa da un lato sfruttare i punti di forza delle gestioni passive e dall'altro generare un possibile rendimento in eccesso costruendo delle strategie *index-oriented* con la minima possibilità di sottoperformare il proprio riferimento. Difficilmente questa particolare tipologia di investimento difficilmente andrà a generare rendimenti stellari, nonostante ciò, si può rivelare una buona alternativa per gli investitori retail che sono disposti ad assumersi qualche rischio in più (seppur contenuto) per ottenere un buon rendimento, a costi contenuti.

Posto che l'obiettivo di questi fondi è ottenere un rendimento superiore al benchmark, ma minimizzando il rischio assunto, la strada più percorribile è quella di adottare una strategia che si avvicini il più possibile ad una gestione passiva classica, piuttosto che dare troppa attenzione alla selezione dei titoli più performanti.

Come anticipato all'inizio del paragrafo, l'enhanced indexing è una pratica che ha iniziato a diffondersi alla fine degli anni '90 suscitando molto interesse in accademici e investitori professionali; questo interesse ha dato avvio ad un insieme di studi sull'argomento, tutti aventi come obiettivo quello di individuare dei modelli che dal punto di vista matematico riuscissero a dimostrare la validità della tecnica, e che riuscissero a risolvere il problema di ottimizzazione associato a tali portafogli, considerando un insieme di vincoli per renderlo il più vicino possibile alla pratica operativa. A riguardo sono state proposte numerose famiglie di modelli, le quali possono essere suddivise in 3 categorie principali:

- Modelli che prevedono la formulazione di un problema di programmazione lineare;
- Modelli basati sulla dominanza stocastica (più recenti);
- Problemi risolti mediante l'utilizzo di metaeuristiche.

1.4 Modelli di programmazione lineare

L'ottimizzazione di portafoglio in ottica di Enhanced Indexation è stata affrontata con modalità molto differenti tra loro; i primi studi a riguardo, si sono concentrati sul cercare di formulare e risolvere il problema di ottimizzazione utilizzando dei modelli di programmazione lineare, che risultassero relativamente semplici da trattare dal punto di vista computazionale. In questa sezione verranno presentati alcuni modelli risolutivi per permettere di cogliere i punti di forza e le limitazioni della

strategia, cercando di proporre spunti di analisi per ognuna delle categorie che verrà trattata e dare una visione d'insieme della tematica.

1.4.1 Modello di Konno e Hatagi

Per quanto concerne i modelli di programmazione lineare, vale la pena citare uno dei primi lavori a riguardo scritto da Konno e Hatagi nel 2005, i quali hanno come obiettivo quello di costruire un portafoglio che sia in grado di tracciare l'andamento di un portafoglio *index-plus-alpha*²² minimizzando i costi di transazione associati.

Si usa n per identificare il numero di asset disponibili in cui si può investire, P_j per rappresentare la variabile casuale che si riferisce ai prezzi del j -esimo titolo ($j = 1, 2, \dots, n$) con il vettore delle variabili casuali (P_1, P_2, \dots, P_n) distribuito su un insieme di punti finiti $(p_{1t}, p_{2t}, \dots, p_{nt})$ e I_t per rappresentare il valore dell'indice di riferimento al tempo t , con $t = 1, 2, \dots, n$. Con la variabile $X_j (j = 1, 2, \dots, n)$ invece si rappresenta il vettore delle unità degli asset che viene acquistato (il vettore $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ è stato ristretto per essere negativo). A questo il valore del portafoglio viene definito come $\sum_{j=1}^n p_{jt} X_j$ con p_{jt} che rappresenta il prezzo del j -esimo asset al tempo t ; infine, si pone un ulteriore vincolo circa il valore del portafoglio che deve eguagliare il valore dell'investimento M ($\sum_{j=1}^n p_{jt} X_j = M$).

Gli autori nello specifico hanno deciso di utilizzare come misura di rischio il *Mean Absolute Deviation*, una misura di rischio classica molto utilizzata nei modelli di ottimizzazione di portafoglio. L'absolute deviation risulta essere coerente con la teoria dell'utilità quadratica di Von Neumann Morgestern²³ e col relativo teorema della massimizzazione dell'utilità attesa. Di conseguenza la misura di rischio $W(\mathbf{X})$ può essere scritta come segue:

$$W(\mathbf{X}) = \sum_{t=1}^T \left| \theta_{it}(1 + \alpha) - \sum_{j=1}^n p_{jt} X_j \right| \quad (2)$$

dove:

²² Index-plus-alpha: è un portafoglio che ha come obiettivo quello di ottenere un rendimento pari a quello di un indice azionario di riferimento scelto come benchmark, più un extra-rendimento α , il cui valore viene determinato in base agli obiettivi dello studio o dell'investitore.

²³ Ogryczak, W. and Ruszczyński, A. (1999). From Stochastic Dominance to Mean-Risk Model, European Journal of Operational Research, vol. 116, pp. 33-50.

- $W(\mathbf{X})$ indica l'absolute deviation utilizzata per calcolare il trackign error tra il portafoglio index-plus-alpha e il portafoglio classico;
- $\theta = \frac{M}{I_t}$;
- M rappresentare il valore del capitale investito.

A questo punto gli autori, per completare lo studio e rendere il problema affine alla pratica borsistica, introducono un ulteriore vincolo per controllare i costi di transazione associati a \mathbf{X} :

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^n c(x_j) \quad (2.1)$$

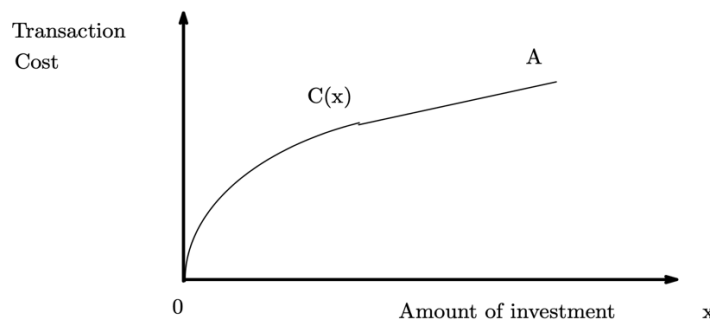
dove $c(x_j)$ rappresenta il costo di transazione associato all'investimento:

$$x_j = \frac{p_{jt}X_j}{M} \quad (2.2)$$

al tempo della costruzione del portafoglio.

I costi di transazione vengono considerati come una funzione lineare concava, e calcolati sulla base dei costi di transazione relativi ai titoli del mercato giapponese, all'epoca dello studio.

Figura 9 Funzione dei costi di transazione



Konno, Hatagi, "Index-plus-alpha tracking under concave transaction cost, Journal of industrial and management optimization, 2005

Il problema di tracking portfolio associato ad un index-plus-alpha, con l'obiettivo di minimizzare i costi può essere quindi formulato come segue:

$$\min f(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^n c(x_j) \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
\text{subject to } & \sum_{t=1}^n \left| \theta I_t(1 + \alpha) - \sum_{j=1}^n p_{jt} X_j \right| \leq \varepsilon M \\
& \sum_{j=1}^n p_{jT} X_j = M \\
& 0 \leq X_j \leq u_j, j = 1, 2, \dots, n
\end{aligned}$$

con εM che rappresenta la deviazione massima dall'indice accettata, e u_j una costante che rappresenta il numero massimo di unità acquistabili per l'asset j -esimo.

Affinchè il modello sia lineare, oltre alla linearità della funzione obiettivo, è necessario garantire che tutti i vincoli siano espressi in forma lineare: nella funzione (2.3) compare il valore assoluto, il quale è un operatore non lineare, che deve per forza essere riscritto in forma lineare. A tal fine gli autori introducono un insieme di variabili non negative $Y_t, Z_t (t = 1, 2, \dots, T)$ che soddisfano le seguenti condizioni:

$$Y_t - Z_t = \theta I_t(1 + \alpha) - \sum_{j=1}^n p_{jt} X_j, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (2.4)$$

$$Y_t, Z_t \geq 0, \quad Y_t \geq 0, \quad Z_t \geq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (2.5)$$

Da ciò si ricava:

$$\left| \theta I_t(1 + \alpha) - \sum_{j=1}^n p_{jt} X_j \right| = Y_t + Z_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (2.6)$$

A questo punto può essere descritto il modello di minimizzazione vincolata lineare come segue:

$$\begin{aligned}
\min f(\mathbf{X}) &= \sum_{j=1}^n c(x_j) & (2.7) \\
\text{subject to } & \sum_{t=1}^T (Y_t + Z_t) \leq \varepsilon M \\
Y_t - Z_t + \sum_{j=1}^n p_{jt} X_j &= \theta I_t(1 + \alpha) \quad t = 1, 2, \dots, T \\
\sum_{j=1}^n p_{jt} X_j &= M \\
0 \leq X_j \leq \mu_j, & \quad j = 1, 2, \dots, n
\end{aligned}$$

$$Y_t \geq 0, Z_t \geq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

I due autori testano il loro modello nel mercato azionario giapponese e giungono alla conclusione che per valori moderati di alpha (<0.2%) il portafoglio da loro costruito riesce ad ottenere una performance netta superiore rispetto al benchmark di riferimento (per periodi brevi) limitando i costi di transazione ad un valore compreso tra lo 0.47% e lo 0.49% dell'ammontare investito.

Sebbene i risultati ottenuti dai due autori siano a favore dei sostenitori dell'enhanced indexation, il problema risolto risulta essere circoscritto in quanto non vengono introdotti vincoli per garantire una buona diversificazione, vincoli per il controllo dell'imposizione fiscale o vincoli relativi all'operatività come i vincoli sui lotti minimi di transazione. Inoltre, è vero che dal punto di vista computazionale il tempo per la soluzione è accettabile, nonostante ciò, questo è figlio della semplicità del modello e dei livelli di alpha contenuti. Infine, può essere criticata la scelta della misura di rischio, in quanto sebbene il MAD sia coerente con la teoria dell'utilità attesa, rimane pur sempre una misura statistica di variabilità che considera allo stesso modo scostamenti positivi e negativi dal valor medio di riferimento, e risulta molto sensibile ai valori estremi (outliers).

1.4.2 Modello di Canagkoz e Beasley

Tra gli studi più rappresentativi nell'ambito di riferimento, troviamo un paper molto interessante e pionieristico di Canagkoz e Beasley²⁴ (citato spesso come fonte in molti studi successivi), i quali affrontano il tema dell'Enhanced Index Tracking utilizzando il metodo della regressione. Precedentemente è stato citato come sinonimo al portafoglio che stiamo cercando di costruire, il termine *index-plus-alpha*, il quale è stato sviluppato in ottica di modelli basati sulla regressione: l'obiettivo dell'enhanced indexation risulta infatti quello di ottenere un'intercetta positiva (α) regredendo i rendimenti del portafoglio enhanced sui rendimenti del benchmark.

L'utilizzo di un modello basato sulla regressione, permette di trovare una soluzione al problema di ottimizzazione mediante una programmazione lineare, e può risultare perciò di facile risoluzione. Gli autori nel paper fanno ricorso alla seguente nomenclatura:

- ε_i e δ_i rappresentano rispettivamente lower e upper bound da detenere se il titolo viene inserito nel portafoglio;
- X_i rappresenta il numero di unità dell'i-esimo titolo nel tracking portfolio;
- V_{it} è il prezzo del titolo i-esimo;

²⁴ Mixed-Integer Programming approaches for Index Tracking and Enhanced Indexation, Canagkoz & Beasley, European Journal of Operational Research, 2008.

- I_t è il valore dell'indice al tempo t
- R_t ed r_{it} rappresentano rispettivamente il rendimento logaritmico dell'indice al tempo t , e il rendimento logaritmico dell' i -esimo titolo al tempo t ;
- $C = \sum_{i=1}^n X_i V_{it}$ rappresenta il valore del tracking portfolio al tempo t ;
- f_i^s ed f_i^b rappresentano rispettivamente il costo di vendere (s=sell) o acquistare (b=buy) una unità dell' i -esima azione al tempo t ;
- $\gamma \in [0,1]$ rappresenta il limite di capitale che può essere eroso dai costi di transazione;
- x_i rappresenta il numero di unità dell' i -esimo titolo che decidiamo di detenere in portafoglio, con z_i variabile binaria che può assumere valore 0 se il titolo viene escluso dal portafoglio e 1 se viene incluso;
- G_i costi di transazione per la vendita o acquisto di titoli.

Indicate le variabili si può procedere con l'indicare i vincoli associati al problema di enhanced index tracking:

$$\sum_{i=1}^N z_i = K \quad (1)$$

$$\varepsilon_i z_i \leq x_i V_{it} / C \leq \delta_i z_i \quad (2)$$

$$G_i \geq f_i^s (X_i - x_i) V_{iT} \quad (3)$$

$$G_i \geq f_i^b (x_i - X_i) V_{iT} \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^N G_i \leq \gamma C \quad (5)$$

$$c \sum_{i=1}^N x_i V_{iT} = C - \sum_{i=1}^N G_i \quad (6)$$

$$x_i, G_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

$$z_i \in [0,1] \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

Il primo vincolo impone che il numero di titoli detenuti in portafoglio sia esattamente pari a K , mentre il secondo fa sì che se il titolo non è detenuto anche x_i sia uguale a 0, e se il titolo viene acquistato rispetti i vincoli sui bounds. I vincoli 3 e 4 definiscono i costi di transazione, mentre il quinto vincolo pone un limite massimo ai costi di transazione stessi. Il vincolo numero 6, invece, permette di ottenere un effetto di bilanciamento nel senso che il valore del nuovo tracking portfolio al tempo T equivalga

il valore dell'attuale TP al tempo T più il cambio nel valore del cash meno la somma dei costi di transazione.

Il metodo di Index Tracking basato sulla regressione prevede di selezionare un Tracking portfolio tale per cui, una volta regrediti i rendimenti del TP sull'indice di riferimento, si ottenga una retta di regressione con intercetta $\alpha = 0$ e pendenza $\beta = 1$. Prima di specificare come applicare il metodo a fini di Enhanced Indexation, è fondamentale andare a lavorare un po' sulla formulazione precedentemente riportata; innanzitutto, il rendimento logaritmico del portafoglio di tracking è una funzione non lineare delle variabili decisionali x_i , perciò per essere utilizzati in ottica di un problema di programmazione lineare devono essere linearizzati. Il rendimento del portafoglio di tracking può essere come $\sum_{i=1}^N W_{it} r_{it}$, con $W_{it} = x_i V_{it} / \sum_{j=1}^N x_j V_{jt}$ che rappresenta il peso dell'investimento nel titolo i al tempo t, e $\sum_{i=1}^N W_{it} = 1 \forall t$. A questo punto gli autori decidono di approssimare W_{it} ad un valore costante rendendolo indipendente dal tempo, rimpiazzandolo con il termine w_i dove $w_i = x_i V_{iT} / \sum_{j=1}^N x_j V_{jT}$ rappresenta la porzione di capitale investita nel titolo i al tempo T. Così facendo il rendimento del TP viene espresso come $\sum_{i=1}^N w_i r_{it}$. A questo punto, l'espressione non lineare indicante w_i , viene linearizzata avvalendosi del vincolo (6) descritto alla pagina precedente che porta alla sostituzione di $\sum_{j=1}^N x_j V_{jT}$ con $C - \sum_{i=1}^N G_i$. Questa ultima espressione rimane comunque dipendente dalle variabili, ma richiamando il vincolo (5) proposto sempre nella pagina precedente, si può approssimare w_i utilizzando la seguente espressione lineare:

$$w_i = x_i V_{iT} / (C - \gamma C) \quad (2.8)$$

Una volta che si esegue la regressione dei rendimenti del TP sui rendimenti dell'indice, si ottengono le stime dell'intercetta e della pendenza, che possono essere indicate come segue:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \sum_{i=1}^N w_i \hat{\alpha}_i \\ \hat{\beta} &= \sum_{i=1}^N w_i \hat{\beta}_i \end{aligned} \quad (2.9)$$

dove $\hat{\alpha}_i$ ed $\hat{\beta}_i$ sono l'intercetta e la pendenza che otteniamo nel momento in cui andiamo a regredire il rendimento del titolo i-esimo sul rendimento dell'indice.

A questo vengono presentati nel paper diversi modalità per affrontare il problema dell'Enhanced Index Tracking, avendo sempre ben saldo l'obiettivo di tracciare l'indice ottenendo un extra-

rendimento. Come primo approccio, per esempio, si potrebbe cercare inizialmente di ottenere una pendenza pari a 1 (che sta a significare una replicazione perfetta dell'indice) e in seguito massimizzare l'intercetta α (che rappresenta il rendimento in eccesso rispetto al benchmark. Nei problemi di Index Tracking l'intercetta vale 0, mentre nei problemi di enhanced indexation si cerca di ottenere un valore positivo che rappresenta un rendimento in eccesso rispetto al benchmark).

Altrimenti si può ricorrere ad un approccio a due stage, in cui nel primo si cerca di ottenere una pendenza il più vicino possibile a 1 e come secondo obiettivo si ha la massimizzazione dell'intercetta.

$$\text{first minimise } |\hat{\beta} - 1| \text{ and then maximise } \hat{\alpha} \quad (2.10)$$

Lo stesso approccio a duplice stage può essere applicato invertendo l'ordine degli obiettivi, lavorando quindi prima sull'intercetta e poi sulla pendenza.

Infine, si può implementare un approccio a unico stage nel quale l'obiettivo è quello di ottenere il valore desiderato della pendenza pari a 1, posto un valore desiderato di alfa:

$$\text{minimise } |\hat{\beta} - 1| \text{ subject to } \hat{\alpha} = \alpha^* \quad (2.11)$$

con α^* che rappresenta l'extra-rendimento desiderato.

Tutti i metodi citati possono essere implementati in ambito operativo, nonostante ciò, gli autori decidono di proseguire prendendo come punto di riferimento un approccio mono-obiettivo il quale sembra fornire risultati più interessanti (il quale verrà poi ampliato ad approccio bi-obiettivo per riuscire ad avere un controllo sui costi di transazione). Prima di indicare la struttura del problema di ottimizzazione, è necessario rendere lineari i vincoli sopra citati posti in valore assoluto, in quanto sono non lineari. A tal fine, vengono introdotte le variabili D ed E tali per cui:

$$D \geq \hat{\alpha} \quad 12$$

$$D \geq -\hat{\alpha} \quad 13$$

$$E \geq \hat{\beta} - 1 \quad 14$$

$$E \geq -(\hat{\beta} - 1) \quad 15$$

$$D, E \geq 0 \quad 16$$

Il problema di ottimizzazione può essere quindi così strutturato:

$$\text{minimise } E$$

Subject to (1)-(8) e (12)-(16) e inoltre a

$$\hat{\alpha} = \alpha^*$$

Gli autori decidono di testare il loro modello considerando 8 indici azionari con differente numerosità, dai 31 dell'Hang Seng fino ai 3000 del Russell3000, partendo da un portafoglio di tracking iniziale equi-pesato, composto da K titoli tale per cui $X_i = \frac{C/K}{V_{i0}}$, $X_i = 0 \forall i > K$, e $C = 10^6$. Inoltre $\varepsilon_i = 0.01$ e $\delta_i = 1$, e $f_i^s = f_i^b = 0.01$ per dire che i costi di transazione sono l'1% del valore del titolo acquistato o venduto.

Lo studio è stato costruito in maniera tale da andare a testare differenti valori di γ , associati a differenti obiettivi in termini di rendimento in eccesso desiderato (dall'1% al 10%). Analizzando i risultati, la misura su cui concentrarsi è l'Average Excess Return (AER) che rivela la capacità del modello di selezionare portafogli di tracking in grado di sovraperformare l'indice in termini di rendimento; inoltre vengono presentati i valori in-sample ed out-of-sample dei parametri α e β .

Un ulteriore aspetto importante e innovativo presentato dai due autori, si ritrova nel test di significatività dei rendimenti in eccesso implementato utilizzando la statistica test t-Student, avente come ipotesi nulla $H_0: AER = 0$ e come ipotesi alternativa $H_1: AER > 0$ (nel testo vengono anche proposti i valori di significatività del test di ipotesi). Il livello di significatività può essere considerato come la probabilità di ottenere l'AER indicato (dal punto di vista statistico) quando il valore attuale dell'AER è statisticamente uguale a 0 (come sotto l'ipotesi H_0). Per esempio, per quanto concerne uno dei mercati in cui gli autori hanno testato il modello, ossia il DAX, il livello di significatività è 0% e questo implica che:

- si rifiuta l'ipotesi nulla H_0 in favore dell'ipotesi alternativa H_1 ;
- Il valore dell'AER ottenuto (4,74%) è una chiara indicazione che l'AER è maggiore di 0.

Inoltre, per investigare la bontà del modello in termini di enhanced indexation nel tempo, è stata applicata anche una revisione al TP, in 7 differenti istanti temporali, ponendo diversi limiti al massimo costo di transazione possibile. L'importanza del paper appena descritto è molteplice: da un lato viene proposto un modello che possiamo definire completo nel senso che riesce a cogliere diversi aspetti dell'operatività di gestori professionali e dei mercati in cui operano, inoltre vengono analizzati indici con numerosità diversa e diversi valori di excess return, svolgendo allo stesso tempo una verifica circa la significatività dei risultati ottenuti. Un ulteriore aspetto che permette di premiare gli autori è il fatto di aver costruito un modello che da una soluzione in breve tempo (sempre inferiore ai 50 secondi) anche a problemi relativi ad indici con numerosità importante.

I modelli presentati finora, come sancito dal modello di selezione di portafoglio à la Markovitz, tengono fortemente in considerazione le relazioni che si instaurano tra i diversi titoli presenti in portafoglio, mediante l'analisi del coefficiente di correlazione. Tuttavia, un filone interessante della

letteratura ha proposto di utilizzare il concetto di cointegrazione introdotto da Granger nel 1981²⁵, in grado di individuare e studiare le relazioni di lungo periodo tra i titoli presenti in portafoglio e il benchmark. È stato evidenziato in vari studi, come l'approccio basato sulla correlazione possa portare alla costituzione di portafogli di tracking instabili; l'utilizzo della cointegrazione, in questo caso dovrebbe essere in grado di individuare una relazione stabile di lungo periodo tra il TP e l'indice di riferimento, in quanto permette di modellare la dinamica dei prezzi delle azioni nel lungo periodo. Alcune delle caratteristiche chiave del concetto, tra le quali troviamo il mean-reverting tracking error, una migliore stabilità dei pesi nell'enhanced portfolio e un miglior uso delle informazioni che incorporano i prezzi permettono di delineare in maniera più flessibile differenti strategie di portafoglio, tra le quali l'enhanced index tracking. Nello specifico, il concetto di mean-reverting tracking error è stato coniato per la prima volta da Jhon Goodwin della Northern Trust Quantitative Advisors e si riferisce ad un valore del tracking error che può essere positivo o negativo nel breve periodo, ma che nel lungo periodo ritorna a 0 (nello specifico, ritorna a 0 lo spread tra il tracking portfolio e l'indice). La proprietà di ritorno alla media viene garantita dal fatto che se le serie storiche dei prezzi sono cointegrate, esse presentano una relazione di lungo periodo stabile e stazionaria (che garantisce il riavvicinamento della serie alla media). Tendenzialmente i portafogli di tracking mean-reverting non contengono tutti i titoli dell'indice in quanto si presuppone che nel lungo periodo tutti i titoli avranno rendimento simile all'indice e ritorneranno alla media. Portafogli di tracking che non investono in tutti i titoli dell'indice avranno valore maggiore di 0 nel breve periodo, ma torneranno a 0 nel lungo periodo²⁶.

L'utilizzo di un approccio basato sulla cointegrazione permette di ottenere una differenza stazionaria tra il prezzo del benchmark e quello del portafoglio di tracking, perciò il portafoglio risulta legato al benchmark nel lungo periodo. Inoltre, i pesi di portafoglio basati sulla cointegrazione e che utilizzano una serie storica dei prezzi abbastanza lunga, sono dotati di maggior stabilità, permettendo di beneficiare di una minore necessità di ribilanciamento rispetto all'utilizzo della correlazione.

Nonostante questi numerosi vantaggi dal punto di vista teorico, lo studio di Sant'Anna et al. (2017), dimostra come in ambito operativo il confronto tra i risultati ottenuti mediante l'utilizzo di un approccio basato sulla correlazione e uno basato sulla cointegrazione, porti ad un sostanziale

²⁵ Prima di descrivere il concetto di cointegrazione è utile introdurre il concetto di processo stocastico e di stazionarietà. Un processo stocastico è un insieme ordinato di variabili casuali indicizzate dal parametro t , definite su uno stesso spazio di probabilità. La serie storica, invece, è una parte finita di una realizzazione di un processo stocastico. Un processo stocastico viene definito stazionario quando la sua distribuzione di probabilità congiunta è invariante rispetto ad una traslazione del processo nell'asse dei tempi. A questo punto si può definire la cointegrazione: il concetto di cointegrazione prevede che la combinazione lineare di due o più serie storiche non stazionarie, può essere stazionaria. Se una combinazione lineare stazionaria esiste, la serie storica non stazionaria è detta cointegrata. La proprietà della cointegrazione prevede, inoltre, che due o più serie storiche condividano lo stesso trend stocastico.

²⁶ C.Tobe (1999). Tracking Error: an essential tool in evaluating index funds, The Journal of Investment Consulting, Vol.2,

pareggio, nel senso che non si è in grado di determinare in maniera univoca un approccio superiore o preferibile rispetto all'altro. Nello specifico, gli autori vanno a implementare una strategia del tipo enhanced indexing in due differenti mercati, utilizzando l'indice azionario brasiliano Ibovespa e l'indice americano S&P100, utilizzando un sample molto ampio (10 anni) e dei portafogli endogeni al problema di ottimizzazione, generati mediante tecniche di simulazione. I risultati come già detto evidenziano l'incapacità di individuare un approccio migliore, in quanto mentre l'approccio basato sulla cointegrazione permette di ottenere rendimenti leggermente superiori, l'approccio basato sulla correlazione permette di ridurre i costi. A differenza delle aspettative basate sulla teoria, i portafogli costruiti mediante l'utilizzo della cointegrazione presentano buone performance in termini di tracking error, ma risultano essere più volatili e richiedono un maggior turnover imponendo costi di transazione superiori. Infine, il metodo della cointegrazione è stato implementato mediante un modello lineare.

La cointegrazione dal punto di vista empirico non ha finora messo in evidenza i benefici previsti dal punto di vista teorico, nonostante ciò, la letteratura a riguardo non è ancora così corposa e c'è ampia possibilità di ampliare l'analisi concentrandosi su diversi mercati e diversi periodi temporali.

1.5 Criterio di Dominanza stocastica

Sebbene nessun metodo sia stato universalmente accettato, un filone molto promettente della letteratura si sviluppa attorno a modelli che prevedono di strutturare l'enhanced indexation utilizzando un prescelto criterio di dominanza stocastica; quest'approccio viene oramai riconosciuto come rilevante nell'ambito della selezione di portafoglio in quanto risulta essere coerente con il comportamento di un investitore avverso al rischio. Nonostante ciò, la letteratura a riguardo risulta ancora essere abbastanza limitata in quanto fino a pochi anni fa il metodo sotto esame risultava essere troppo oneroso dal punto di vista computazionale.

Due variabili casuali possono essere comparate mediante la teoria dell'utilità attesa, secondo la quale una variabile è preferibile ad un'altra se presenta un valore maggiore della funzione di utilità rispetto all'altra (ovviamente in questo caso è richiesta la specificazione di una funzione di utilità, che si sa essere soggettiva ad ogni agente). Il criterio di dominanza stocastica considerato è strettamente collegato alla teoria dell'utilità attesa e permette di ottenere un ordine parziale nello spazio delle variabili casuali evitando la specificazione di una funzione di utilità specifica, assicurando che investitori che appartengono alla stessa classe di funzioni di utilità siano classificati allo stesso

modo²⁷. Nello specifico, le ricerche analizzate hanno come base di studio la dominanza stocastica di secondo ordine, la quale risulta coerente con la classe degli investitori razionali avversi al rischio aventi funzioni di utilità non decrescenti e concave; dire quindi che un portafoglio domina il benchmark secondo questo criterio, significa affermare che la sua utilità attesa è superiore rispetto a quella del benchmark.

Prima di proseguire con la review della letteratura, è necessario dare una breve presentazione dei concetti di dominanza stocastica qui di interesse.

Supponendo di avere due variabili casuali X e Y definite in uno spazio di probabilità, con x_t e y_t loro realizzazioni al tempo t , possiamo specificare la loro funzione di densità di probabilità come f_x e f_y e la distribuzione di probabilità cumulata come $F_x(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f_x(\tau) d\tau$ e $F_y(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f_y(\tau) d\tau$. A questo punto il confronto tra le due variabili può essere condotto utilizzando 3 diversi approcci relativi alla dominanza stocastica:

- Dominanza stocastica di ordine zero: X domina Y se $x_t \geq y_t \forall t$ e la disuguaglianza vale almeno una volta in senso stretto. Ciò significa che $P(X \leq Y) = 0$;
- Dominanza stocastica di primo ordine: X domina Y se $F_X(\alpha) \leq F_Y(\alpha) \forall \alpha \in (-\infty, \infty)$ e la disuguaglianza è stretta per almeno un α ;
- Dominanza stocastica di secondo ordine: X domina Y se $\int_{-\infty}^{\alpha} F_X(\tau) d\tau \leq \int_{-\infty}^{\alpha} F_Y(\tau) d\tau \forall \alpha \in (-\infty, \infty)$ e la disuguaglianza è stretta per almeno un α .
- Dominanza stocastica di terzo ordine: $\int_{-\infty}^{\alpha} \int_{-\infty}^{\beta} [F_X(\tau) - F_Y(\tau)] d\tau d\beta \geq 0 \forall \alpha$ e la disuguaglianza vale almeno una volta in senso stretto.

Analizzando il criterio dal punto di vista economico invece, considerando come variabili i rendimenti aleatori R_x ed R_y , i tre ordini appena indicati possono essere spiegati come segue:

- criterio di dominanza stocastica di primo ordine (FSD) afferma che $X \succ_{(1)} Y \leftrightarrow (E(U(R_x))) \geq (E(U(R_y)))$ con almeno una disuguaglianza in senso stretto per tutte le funzioni di utilità non decrescenti;
- criterio di dominanza stocastica di secondo ordine (SSD) afferma che $x \succ_{(2)} y \leftrightarrow (E(U(R_x))) \geq (E(U(R_y)))$ con almeno una disuguaglianza in senso stretto per tutte le funzioni di utilità non decrescenti e concave che rappresentano la classe degli investitori razionali avversi al rischio;

²⁷ Bruni, R., Cesarone, F., Scozzari, A., Tardella, F., 2012. A New Stochastic Dominance Approach to Enhanced Index Tracking Problems, Economics Bulletin, vol. 32, issue 4, pp. 3460-3470

- criterio di dominanza stocastica di terzo ordine (TSD) afferma che $x \succ_{(3)} y \leftrightarrow (E(U(R_x))) \geq (E(U(R_y)))$ con almeno una disuguaglianza in senso stretto per tutte le funzioni di utilità non decrescenti e concave, con derivata prima convessa, che rappresentano la classe degli investitori razionali avversi al rischio e avversi alla rovina (ruin averse²⁸).

1.5.1 Il modello di Guastaroba, Mansini, Speranza e Ogryczak

Tra i diversi modelli proposti in letteratura, si è deciso di presentare come riferimento la proposta fatta da Guastaroba, Mansini, Speranza e Ogryczak in un paper molto recente in quanto datato Gennaio 2020.

Innanzitutto, rispetto ad altre proposte che si trovano in letteratura, gli autori decidono di non implementare un problema di ottimizzazione basato su una funzione bi-obiettivo, bensì decidono di fare affidamento su un indice di rischio-rendimento che sia in grado di coniugare in una funzione mono-obiettivo sia il tracking di portafoglio che l'ottenere un rendimento in eccesso rispetto al benchmark di riferimento. Questo approccio ha come finalità principale il fornire un'unica soluzione ottimale all'investitore, a differenza di altri modelli multi-obiettivo che spesso forniscono un insieme di soluzioni efficienti, dove poi l'investitore farà una scelta basandosi sulle proprie preferenze individuali.

Un altro aspetto a cui è necessario prestare attenzione, è la misura di rischio che gli autori decidono di utilizzare: è stato detto in precedenza come l'utilizzo di misure di rischio simmetriche (come la deviazione standard o il MAD) porti a problemi di coerenza nel momento in cui vengono definite le funzioni bi-obiettivo in ambito di Enhanced Indexation, perciò nel caso specifico si è deciso di utilizzare il Weighted Conditional VaR (WCVAR). Questa particolare misura di rischio, che altro non è che un'estensione del classico CVAR, permette all'investitore mediante la selezione dei pesi da associare al WCVAR e al parametro che controlla il rendimento in eccesso, di gestire la propria tolleranza al rischio (la misura verrà descritta in seguito, con l'aiuto della formulazione).

Gli autori ipotizzano di analizzare come case-study un investitore che seleziona in modo ottimale i titoli in cui investire e li mantiene fino al termine dell'holding period (buy and hold strategy).

Si definisce con $J=\{1,2,\dots,n\}$ l'insieme delle possibili scelte di investimento, e ad ogni titolo $j \in J$ si associa un rendimento (definito come una variabile casuale) R_j con media $\mu_j = E(R_j)$. Il vettore dei pesi associati ad ogni j-esimo titolo è rappresentato da $X = (x_j)_{j=1,\dots,n}$, la somma dei pesi come di consueto deve dare valore 1 = $\sum_{j=1}^n x_j$ e sono vietate le vendite allo scoperto $x_j \geq 0$ per $j = 1, \dots, n$.

²⁸ Gli investitori "ruin averse" hanno come obiettivo la minimizzazione della probabilità che il rendimento del loro portafoglio scenda al di sotto di un livello definito "di rovina", ossia la minimizzazione della probabilità di incorrere in gravi perdite.

Ogni portafoglio ha rendimento aleatorio del tipo $R_X = \sum_{j=1}^n R_j x_j$, con valor medio pari a $\mu(R_X) = E(R_X) = \sum_{j=1}^n \mu_j x_j$. Vengono considerati T scenari ($T=1, \dots, n$), ognuno con probabilità p_t , e la realizzazione del rendimento aleatorio R_j sotto lo scenario t che definiamo come r_{jt} viene presa come nota per ogni $j \in J$ e permette di definire il rendimento medio della realizzazione come $\mu_j = \sum_{t=1}^T r_{jt} p_t$. Di conseguenza, la realizzazione del rendimento del portafoglio R_X sotto lo scenario t viene indicata come $y_t = \sum_{j=1}^n r_{jt} x_j$. Per quanto concerne il benchmark esso ha rendimento aleatorio R^I , con le sue realizzazioni sotto lo scenario t definite come r_t^I con $t=1, \dots, T$ e con rendimento medio $\mu^I = \sum_{t=1}^T r_t^I p_t$. Posto che l'obiettivo principale dell'enhanced indexation è ottenere un rendimento superiore a quello del benchmark, il rendimento in eccesso target viene definito $R^\alpha = R^I + \alpha$. Le sue realizzazioni di conseguenza sotto lo scenario t sono $r_t^\alpha = r_t^I + \alpha$ con $t=1, \dots, T$, e con rendimento medio $\mu^\alpha = \sum_{t=1}^T r_t^\alpha p_t$.

Come anticipato poco sopra, gli autori hanno deciso di utilizzare come misura di rischio una particolare estensione del classico Conditional Value at Risk (CVaR). Il Conditional VaR relativo alla distribuzione dei rendimenti R_X , al livello di confidenza β può essere definito come:

$$CVaR_\beta(R_X) = -[expectation\ of\ R_X\ in\ its\ lower\ \beta\ tail\ distribution] \quad (2.12)$$

Allo stesso modo la stessa misura, che punta a massimizzare la media del quantile delle peggiori realizzazioni, per un livello di confidenza $0 \leq \beta \leq 1$ può essere definita come:

$$M_\beta(R_X) = \int_0^\beta F_{R_X}^{-1} \xi d(\xi) \quad (2.13)$$

dove $F_{R_X}^{-1}(\xi) = \inf\{\eta: F_{R_X}(\eta) \geq \xi\}$ per $0 < \xi \leq 1$ è la funzione inversa della funzione di distribuzione cumulata $F_{R_X}(\eta) = P\{R_X \leq \eta\}$. Secondo Rockafeller et. al (2006) il CVaR può essere utilizzato come misura di rischio e la rispettiva misura di deviazione dal valore atteso può essere calcolata come $\Delta_\beta(R_X) = CVaR_\beta(R_X - \mu(R_X)) = \mu R_X - M_\beta(R_X)$.

Uno dei limiti del CVaR in ambito di selezione di portafoglio è che, essendo la media dei valori presenti nella coda della distribuzione dei rendimenti, potrebbe rivelarsi limitata nel momento in cui si vadano a modellare diversi livelli di avversione al rischio e preferenze degli investitori, in quanto a tal fine risulterebbe più efficiente modellare varie preferenze trattando in maniera diversa eventi che possono essere più o meno estremi. Per modellare in maniera più dettagliata l'avversione al rischio degli investitori, si propone di considerare simultaneamente diverse misure di CVaR, ognuna

specificata da un diverso livello di tolleranza, e infine combinarle assieme in un'unica misura di rischio. Gli autori considerano “m” differenti livelli di tolleranza $0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_m < 1$ e combinano assieme i relativi valori del CVaR mediante una somma pesata ottenendo la misura di rischio precedentemente citata, ossia il WCVaR. Il WCVaR, di conseguenza, può essere espresso in termini di misura di deviazione come la somma pesata di singole deviazioni convesse $\Delta_{\beta_k}(R_X)$, combinate mediante l'utilizzo di pesi positivi (w_k) :

$$\Delta_w^{(m)}(R_X) = \sum_{k=1}^m w_k \Delta_{\beta_k}(R_X), \quad \sum_{k=1}^m w_k = 1, \quad w_k > 0, \quad k = 1, \dots, m \quad (2.14)$$

dove dato un insieme di m livelli di tolleranza $0 < \beta_1 < \dots < \beta_K < \dots < \beta_m$, i pesi w_k vengono calcolati come:

$$w_k = \frac{\beta_k(\beta_{k+1} - \beta_{k-1})}{\beta^2}, \quad k = 1, \dots, m-1 \quad w_m = \frac{\beta_m(\beta_m - \beta_{m-1})}{\beta^2}, \quad \text{con } \beta_0 = 0 \quad (2.15)$$

Prima di descrivere la funzione obiettivo utilizzata dagli autori per la selezione di portafogli del tipo enhanced indexing, è necessario richiamare brevemente la moderna teoria di portafoglio di Markovitz.

Il modello di selezione di portafoglio à la Markovitz viene affrontato mediante la determinazione di un livello di rendimento atteso desiderato dall'investitore, relativamente al quale poi si va a minimizzare il criterio di rischio (nello specifico la varianza). Lo stesso problema può essere risolto in maniera alternativa, andando ad individuare il portafoglio rischioso che offre il massimo incremento del rendimento medio del portafoglio comparato con un target di rendimento dato, per unità di rischio. Il concetto può essere così espresso:

$$\max \left\{ \frac{\mu(R_X) - \tau}{\varrho(R_X)} : x \in P \right\} \quad (2.16)$$

dove:

- $\mu(R_X)$ rappresenta il rendimento medio del portafoglio;
- τ rappresenta il target di rendimento;
- $\varrho(R_X)$ rappresenta la misura di rischio

Lo stesso problema, può essere rappresentato invece che mediante la massimizzazione di una misura di rischio-rendimento, mediante la minimizzazione della misura stesso. La formulazione in questo caso è:

$$\min \left\{ \frac{\varrho(R_X)}{\mu(R_X) - \tau} : x \in P \right\} \quad (2.17)$$

Secondo quest'ultimo modello, due potenziali portafogli aventi rischio pari a 0 sarebbero entrambi ottimi, anche se caratterizzati da differenti rendimenti medi. Per risolvere questa problematica, il problema può essere riformulato introducendo il parametro ε_2 (con valore positivo ma contenuto):

$$\min \left\{ \frac{\varrho(R_X) + \varepsilon_2}{\mu(R_X) - \tau} : \mu(R_X) - \tau \geq \varepsilon_1, x \in P \right\} \quad (2.18)$$

con il parametro ε_1 (avente valore positivo e contenuto) utilizzato per controllare la positività del denominatore.

A questo punto, si introduce la novità adottata dagli autori, ossia il ricorso ad una funzione mono-obiettivo basata su un indice di rischio-rendimento che si andrà poi a minimizzare, per individuare il portafoglio ottimo in termini di EITP (Enhanced Index Tracking Portfolio):

$$\min \left\{ \frac{\Delta_w^{(m)}(R_X - R^\alpha) + \varepsilon_2}{\mu(R_X - R^\alpha)} : \mu(R_X - R^\alpha) \geq \varepsilon_1, X \in P \right\} \quad (2.19)$$

dove:

- ε_1 ed ε_2 sono i due parametri maggiori di 0 precedentemente descritti;
- R_X e R^α rappresentano rispettivamente il rendimento del portafoglio EIT e il rendimento del benchmark;
- $\Delta_w^{(m)}$ rappresenta la misura di rischio utilizzata, ossia il WCVaR.

L'indice appena descritto risulta inoltre coerente con il criterio della dominanza stocastica di secondo ordine. A questo punto gli autori propongono il loro modello di ottimizzazione, sotto la condizione che il rendimento dei titoli sia rappresentato da variabili casuali discrete, dove per ogni titolo $j \in J$, si hanno le realizzazioni dei rendimenti r_{jt} nello scenario t , con $t = 1, 2, \dots, T$:

$$\min_{x, y, d, \eta, z, z_1} \frac{z - \mu^\alpha - z_1 + \varepsilon_2}{z - \mu^\alpha} \quad (2.20)$$

$$s. t. \quad z - \mu^\alpha \geq \varepsilon_1 \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1; \quad x_j \geq 0 \text{ per } j = 1, \dots, n \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n r_{jt} x_j = y_t \text{ per } t = 1, \dots, T \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n \mu_j x_j = z \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n w_k \eta_k - \sum_{k=1}^m \frac{w_k}{\beta_k} \sum_{t=1}^T p_t d_{tk} = z_1 \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n w_k \eta_k - \sum_{k=1}^m \frac{w_k}{\beta_k} \sum_{t=1}^T p_t d_{tk} = z_1 \quad (6)$$

L'obiettivo è quindi la minimizzazione dell'indice di rischio-rendimento che abbiamo specificato in (2.14), la cui formulazione semplificata viene giustificata dai vincoli (5)-(6), i quali permettono di scrivere $\Delta_w^{(m)}(R_X - R^\alpha)$ come $z - \mu^\alpha - z_1$. Il vincolo (1) garantisce la positività del denominatore, mentre il vincolo (12) assicura che i pesi siano positivi e che sommino a 1. I vincoli (3) e (4) invece si utilizzano per rappresentare rispettivamente la realizzazione del rendimento del portafoglio al tempo t e il rendimento medio di portafoglio a cui si attribuisce la variabile z .

Per rendere questo problema lineare, gli autori di seguito propongono l'utilizzo della trasformazione di Charnes e Cooper; nello specifico si utilizzano le sostituzioni del tipo $v_0 = 1/(z - \mu^\alpha)$, $v_1 = z_1/(z - \mu^\alpha)$, $v = z/(z - \mu^\alpha)$, $\tilde{x}_j = x_j/(z - \mu^\alpha)$, $\tilde{d}_{tk} = d_{tk}/(z - \mu^\alpha)$, $\tilde{\eta}_k = \eta_k/(z - \mu^\alpha)$, $\tilde{y}_t = y_t/(z - \mu^\alpha)$.

A questo punto propongono il problema in forma lineare:

$$\min_{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{d}, v, v_0, v_1} v - v_1 + (\varepsilon_2 - \mu^\alpha) v_0 \quad (2.21)$$

$$s. t. \quad v - \mu^\alpha v_0 = 1 \quad (1)$$

$$v_0 \leq 1/\varepsilon_1 \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n \tilde{x}_j = v_0, \tilde{x}_j \geq 0, \text{ per } j = 1, \dots, n \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n r_{jt} \tilde{x}_j = \tilde{y}_t, \text{ per } t = 1, \dots, T \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n \mu_j \tilde{x}_j = v, \sum_{k=1}^m w_k \tilde{\eta}_k - \sum_{k=1}^m \frac{w_k}{\beta_k} \sum_{t=1}^T p_t \tilde{d}_{tk} = v_1 \quad (5)$$

$$\tilde{d}_{tk} \geq \tilde{\eta}_k - \tilde{y}_t + r_t^\alpha v_0, \tilde{d}_{tk} \geq 0, \text{ con } t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, m \quad (6)$$

Per ottenere la formulazione finale circa il modello che hanno utilizzato gli autori, però, è necessario un ultimo passaggio che sfruttando la formulazione in (2.16) e l'eliminazione di alcune variabili permette di scrivere il modello come:

$$\begin{aligned} & \min_{\tilde{x}, \tilde{d}} \sum_{j=1}^n (\mu_j - \mu^\alpha + \varepsilon_2) \tilde{x}_j - \sum_{k=1}^m w_k \tilde{\eta}_k + \sum_{k=1}^m \frac{w_k}{\beta_k} \sum_{t=1}^T p_t \tilde{d}_{tk} \quad (2.22) \\ & \text{s. t. } \sum_{j=1}^n (\mu_j - \mu^\alpha) \tilde{x}_j = 1, \sum_{j=1}^n \tilde{x}_j \leq \frac{1}{\varepsilon_1}, \quad \tilde{x}_j \geq 0, \text{ per } j = 1, \dots, n \\ & \tilde{d}_{tk} \geq \tilde{\eta}_k - \sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_t^\alpha) \tilde{x}_j, \quad \tilde{d}_{tk} \geq 0, \quad t = 1, \dots, T; k = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Prima di giungere alle riflessioni su quanto proposto dagli autori, si introduce brevemente uno dei modelli che vengo presi a confronto dagli autori stessi per testare la bontà del loro nuovo modello, ossia l'Extended Omega Ratio, ossia il rapporto tra il valore atteso dei profitti e il valore atteso delle perdite. Nello specifico per un valore predeterminato τ i rendimenti del portafoglio maggiori di tale valore vengono considerati profitti, mentre quelli minori perdite. Nello specifico risulta di interesse presentare la formulazione di tale indice di rischio-rendimento, mentre si sorvolerà sul modello di

programmazione lineare ad esso associato in quanto appartenente ad un altro studio. L'Omega Ratio può essere strutturato come:

$$E\{(R_X - \tau)_+\} = \mu(R_X) - (\tau - E\{(\tau - R_X)_+\}) = \mu(R_X) - \tau + \delta_\tau(R_X) \quad (2.23)$$

In ambito di enhanced indexing, questo indice viene indicato in maniera differente, in quanto al valore τ si sostituisce con il rendimento target aleatorio R^α ; in più utilizzando la misura di rischio $\delta_0(R_X - R^\alpha)$, l'obiettivo da minimizzare diventa:

$$\min \left\{ \frac{\delta_0(R_X - R^\alpha) + \varepsilon_2}{\mu(R_X - R^\alpha)} : \mu(R_X - R^\alpha) \geq \varepsilon_1, X \in P \right\} \quad (2.24)$$

In sintesi, l'analisi svolta dagli autori si concentra sul confrontare questo nuovo modello per costruire Enhanced Index Tracking Portfolios basato su un indice di rischio-rendimento con altri modelli proposti in letteratura, tra i quali l'EOR di Guastaroba (2016), utilizzando per la prima volta come misura di rischio una somma pesata del CVaR per diversi valori di confidenza, ottenendo una miglior capacità di modellare diversi gradi di avversione al rischio degli investitori. Inoltre, un altro aspetto da non sottovalutare è la possibilità di strutturare il suddetto problema come un problema programmazione lineare che permette di ottenere una soluzione in breve tempo. I test svolti su differenti indici azionari di diverse aree geografiche, evidenziano una generale capacità di battere il benchmark, comunque mostrando un'ottima capacità di tracking, indipendentemente dal modello che si sceglie di utilizzare, sancendo l'impossibilità di individuare un metodo che domina strettamente gli altri. L'analisi, svolta considerando sia un investitore statico che un investitore che ribilancia il portafoglio a scadenze prefissate, dimostra inoltre come tutti i portafogli costruiti presentino un buon grado di diversificazione. Infine, con l'obiettivo di determinare il modello più efficiente, gli autori introducono una classifica basata sull'indice di Sortino (solitamente utilizzato per valutare le performance degli hedge fund) relativo ai portafogli ottenuti. Da questa graduatoria, emerge una leggera sovra-performance del modello che utilizza come misura di rischio il WCVaR.

1.6 Tecniche risolutive basate su euristiche e metaeuristiche

Finora il problema di costruire un portafoglio in grado di tracciare più fedelmente possibile l'indice di riferimento, e al contempo generare un rendimento in eccesso, è stato affrontato mediante un insieme di modelli che adottano metodi risolutivi di programmazione lineare, legati talvolta ad

individuare relazioni tra l'indice e il tracking portfolio (come nel caso della regressione o della cointegrazione) e talvolta ad operare mediante un reward-to-risk ratio. Sebbene diversi studi evidenzino la bontà di alcuni di questi metodi risolutivi, non sempre il problema viene formulato introducendo tutti i vincoli relativi alla pratica operativa, mentre talvolta non vengono presentati i tempi di risoluzione richiesti a livello computazionale per ottenere una soluzione. A riguardo, in ambito accademico e non solo, si sta sviluppando un filone di metodi risolutivi i quali mediante l'utilizzo di algoritmi iterativi che rientrano nelle categorie delle cosiddette metaeuristiche (le quali verranno definite nel dettaglio nel secondo capitolo), permettono di affrontare problemi con un numero importante di variabili, considerando vincoli anche non lineari a variabili miste intere, problemi di ottimizzazione vincolata quadratici, fornendo una soluzione in breve tempo e precisa. Relativamente a quest'ultima affermazione, è necessario concentrarsi su due concetti fondamentali:

- *breve tempo*: è risaputo infatti che il mondo della finanza sta attraversando da diversi anni un periodo di innovazione e trasformazione che richiede agli operatori di essere in grado di prendere decisioni ed operare in real-time;
- *soluzioni approssimate*: posta la difficoltà di risoluzione di problemi con, ad esempio, vincoli a variabili miste intere non lineari (tipiche dei problemi di selezione di portafoglio), questi metodi permettono di individuare una soluzione che non sarà quella "esatta", bensì una buona soluzione però approssimata. L'utilizzo delle metaeuristiche introduce quindi una sorta di trade-off tra l'ottenere una soluzione in brevissimo tempo, la quale però non è quella ottima, ma sufficientemente vicina a quest'ultima.

Per quanto concerne nello specifico l'oggetto di questo elaborato, in letteratura sono stati proposti diversi approcci che, implementando diverse misure di rischio e vari algoritmi risolutivi, propongono risultati incoraggianti. Si può affermare che per quanto concerne la struttura risolutiva, per buona parte dei ricercatori, tra i quali Li (2011), Chiam (2013) e Filippi (2015) si predilige l'utilizzo di una funzione bi-obiettivo o multi-obiettivo, in quanto ritenuta in grado di coniugare tutte le richieste dell'investitore. Nonostante ciò, l'utilizzo di questa tipologia di funzione obiettivo dev'essere fatta con cognizione di causa, in quanto l'utilizzo di una misura di rischio simmetrica potrebbe risultare controproducente e contraddittoria; molti autori utilizzano come misura di rischio il classico Tracking Error che penalizza allo stesso modo rendimenti al di sopra e al di sotto del benchmark, andando contro l'altro obiettivo ossia la massimizzazione del rendimento in eccesso. Per esempio, Filippi et al.(2016), utilizzano come misura di rischio il MAD, il quale ha dei vantaggi dal punto di vista della trattabilità computazionale, ma in ogni caso è una misura statistica di variabilità simmetrica; per limitare la contraddittorietà di utilizzare una misura di rischio simmetrica in un problema bi-obiettivo, gli autori decidono di utilizzare una funzione mono-obiettivo (massimizzazione del rendimento), e

inserire la misura di rischio all'interno dei vincoli da rispettare, limitandone il valore ad un livello determinato dagli autori. Inoltre gli autori nel tentativo di costruire un modello applicabile e in grado di soddisfare alcune richieste operative tipiche dei mercati finanziari, introducono una serie di vincoli per controllare l'ammontare massimo e minimo investibile in un titolo, il numero massimo di titoli in cui è possibile investire e un vincolo per garantire che il portafoglio post ribilanciamento non costi più del capitale a disposizione (gli ultimi due vincoli indirettamente permettono un controllo dei costi di transazione).

Il modello citato può essere così sintetizzato:

$$\begin{aligned} \max z_1 &= g(\mathbf{x}) & (2.25) \\ \text{s. t. } f(\mathbf{x}) &\leq \xi C \\ \mathbf{x} &\in \chi \end{aligned}$$

dove:

- g rappresenta il rendimento in eccesso;
- f rappresenta il tracking error;
- \mathbf{x} è il vettore delle variabili del problema che adesso verranno introdotte.

Il simbolo χ viene utilizzato per indicare la regione ammissibile definita mediante:

$$d_t - u_t = (\theta I_t - \sum_{j=1}^n q_{jt} X_j^1) \quad t = 1, \dots, T \quad (1)$$

$$\lambda_j C y_j \leq X_j^1 q_{jt} \leq v_j C y_j \quad j = 1, \dots, n \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \leq k \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n q_{jT} X_j^1 = C \quad (4)$$

$$b_j - s_j = (X_j^1 - X_j^0) q_{jt} \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^n (c_j^b b_j + c_j^s s_j + f_j w_j) \leq \rho C \quad (6)$$

$$X_j^1, b_j, s_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (7)$$

$$d_t, u_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T \quad (8)$$

$$y_j, w_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n \quad (9)$$

$$b_j \leq (v_j C - X_j^0 q_{jT}) w_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (10)$$

$$s_j \leq X_j^0 q_{jT} w_j \quad (11)$$

$$b_j + s_j \leq v_j C w_j \quad (12)$$

dove:

- q_{jt} è il prezzo del j-esimo titolo al tempo t, e I_t è il valore dell'indice al tempo t;
- C rappresenta il capitale dell'investitore, e $\theta = C/I_t$;

- d_t e u_t rappresentano rispettivamente le deviazioni assolute negative e positive del rendimento dell'indice rispetto al portafoglio;
- λ_j e v_j rappresentano lower e upper bound per limitare la porzione di capitale investita nel singolo titolo. Il vincolo 2 infatti è il vincolo sulle percentuali d'investimento;
- Il vincolo (3) indica il vincolo di cardinalità, dove y_j è una variabile binaria che assume valore 1 se il titolo viene inserito in portafoglio;
- X_j^0 e X_j^1 rappresentano rispettivamente il numero di titoli contenuti nel portafoglio al tempo 0 e al tempo 1 dopo il ribilanciamento;
- ρC implica che i costi di transazioni non devono superare una percentuale ρ del capitale C (vincolo 6);
- c_j^b e c_j^s rappresentano i costi di transazione associati rispettivamente alla vendita o all'acquisto di un titolo;
- b_j e s_j rappresentano rispettivamente il numero di titoli venduti e acquistati;
- w_j è una variabile binaria che può assumere valore 0 o 1. Il vincolo 12 infatti mette in evidenza che, se il j-esimo titolo viene negoziato, w_j assume necessariamente valore 1;
- I vincoli (10)-(11) limitano il capitale investibile in ogni titolo nel portafoglio ribilanciato.

1.6.1 Modello di Kaucic, Barbini, Verdù

Come fatto per le categorie precedenti, anche per i metodi risolutivi mediante euristiche si è deciso di presentare un paper rappresentativo e interessante. Nello specifico, gli autori in questo caso suppongono di valutare un investitore che opera in un ambiente dinamico²⁹ in cui la composizione di portafoglio viene aggiustata alla fine di ogni periodo d'investimento.

Si ipotizza che i prezzi passati siano informativi del futuro andamento delle quotazioni, perciò la strategia analizzata prevede di selezionare un portafoglio in base alle informazioni di mercato relative al periodo $[0, T]$ e mantenerlo per h periodi di trading. Il ribilanciamento avverrà successivamente eliminando le “ h ” informazioni più vecchie e aggiungendo le “ h ” più recenti, fissando un orizzonte fisso in cui modificare la composizione di portafoglio. Per ogni periodo $t \in [0, T]$, si conosce il prezzo del titolo i -esimo indicato con P_{it} , il prezzo del benchmark P_{bt} , il rendimento dei singoli asset e dell'indice (calcolati come rendimenti percentuali) si indicano rispettivamente con R_{it} e R_{bt} ; ne

²⁹ A differenza di quanto proposto tra le assunzioni della moderna teoria di portafoglio, dove si assume un orizzonte d'investimento unico, in questo caso si ipotizza di operare in un ambiente “dinamico” in cui le posizioni vengono aggiustate nel tempo in base all'evoluzione dei mercati.

consegue che il rendimento del portafoglio si calcoli come $R_{pt}(X) = \sum_{i=1}^n x_i R_{it}$. Il vettore dei valori attesi dei rendimenti si esprime come $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$, mentre C è la matrice delle covarianze. Si può di conseguenza esprimere il valore atteso di $R_{pt}(X)$ è $\mu_p(X) = X^T \mu$ e la sua varianza $\sigma_p^2(X) = X^T C X$. Per quanto concerne i vincoli inseriti per motivi di coerenza ed operatività, si ha un vincolo sui pesi di portafoglio $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, una variabile binaria $\delta_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ (che assume valore 0 se il titolo è escluso dal portafoglio e 1 viceversa) funzionale all'introduzione di un vincolo sul numero massimo di titoli detenibili $\sum_{i=1}^n \delta_i = K$ e un vincolo sul limite minimo (l_i) e massimo (u_i) di capitale che è permesso investire in un singolo titolo $\delta_i l_i \leq x_i \leq \delta_i u_i$ con $i=1, \dots, n$. Con l'obiettivo invece di controllare i costi di transazione derivanti dal ribilanciamento, gli autori introducono un vincolo sull'asset allocation: indicando con x_i il peso associato all'asset i al tempo $T+h$, e con x_i^+ il peso associato allo stesso titolo dopo il ribilanciamento il vincolo sul turnover viene espresso come $\sum_{i=1}^n |x_i^+ - x_i| \leq TR$, con $TR \in [0,1]$ massimo tasso di turnover³⁰.

Risulta alquanto interessante, se non innovativo, andare a vedere come gli autori hanno deciso di sviluppare la misura di rischio e la rispettiva funzione obiettivo: considerando i limiti esposti in precedenza circa il Tracking Error misurato tramite misure simmetriche, gli autori decidono di suddividere la misura di rischio in 3 componenti distinte, che rientreranno poi nella funzione obiettivo.

Indicando con S i periodi in cui il TP rende meno del benchmark, si può misurare il downside risk della strategia mediante:

$$TE^-(X) = \frac{1}{T} \sqrt{\sum_{t=1}^T ((R_{bt} - R_{pt}(X))^+)^2} \quad (3)$$

dove:

- $(a)^+ = \max(a, 0)$;
- $TE^-(X)$ rappresenta una misura di Tracking applicata al periodo in cui il rendimento del portafoglio di tracking è inferiore rispetto al rendimento dell'indice di riferimento.

Se si considerano invece solo i periodi in cui il portafoglio ottimo ottiene un rendimento maggiore rispetto al benchmark, si calcola l'upside potential come:

³⁰ Il tasso di turnover, o tasso di rotazione del portafoglio, indica la frequenza con cui vengono ruotati i titoli in portafoglio nell'arco dell'anno. Un valore del turnover rate pari a 1, indica ad esempio che durante l'anno è stato ruotato un ammontare di titoli pari al totale del patrimonio.

$$TE^+(X) = \frac{1}{T} \sqrt{\sum_{t=1}^T ((R_{bt} - R_{Pt}(X))^+)^2} \quad (3.1)$$

dove:

- $TE^+(X)$ rappresenta una misura di Tracking applicata ai periodi in cui il rendimento del portafoglio di tracking è superiore rispetto al rendimento dell'indice di riferimento.

Infine, per garantire un miglior controllo del rischio puntando a massimizzare il rendimento in eccesso, gli autori propongono di utilizzare una variante dello Sharpe ratio (il quale per rendimenti negativi tende a premiare portafogli con deviazione standard maggiore), che indicheremo con:

$$MSR(X) = \frac{\mu_P(X) - R_f}{\sigma_P^X(X)^{sign(\mu_P(X))}} \quad (3.2)$$

dove:

- $sign(\cdot)$ rappresenta la funzione segno, ossia una funzione definita a tratti che estrae il segno di un numero reale.

Considerando $\chi \subset \mathbb{R}^n$ come l'insieme dei possibili portafogli e $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \chi$, si dice che \mathbf{x} *domina* \mathbf{y} se e solo se $TE^-(\mathbf{x}) \leq TE^-(\mathbf{y})$, $TE^+(\mathbf{x}) \geq TE^+(\mathbf{y})$ e $MSR(\mathbf{x}) \geq MSR(\mathbf{y})$, con almeno una disuguaglianza in senso stretto. A questo punto risulta chiaro come per questa strategia di investimento l'unico portafoglio non dominato derivi dalla soluzione del seguente problema di ottimizzazione:

$$\begin{aligned} & \text{minimise } (TE^-(X), -TE^+(X), -MSR(X)) \\ & \text{s. t. } \mathbf{x} \in \chi \end{aligned} \quad (3.3)$$

Come metodo risolutivo gli autori si avvalgono della Particle Swarm Optimization (che verrà descritta in maniera dettagliata nel capitolo 2), un algoritmo bio-ispirato che effettua una ricerca multidimensionale nello spazio delle soluzioni, mimando opportunamente il comportamento di gruppi animali (come gli stormi di uccelli o i banchi di pesci).

Si è deciso di presentare il paper in questione in quanto uno dei pochi che utilizza come metodo risolutivo al problema di ottimizzazione la PSO, algoritmo alla base anche del presente elaborato; tuttavia, una precisa e completa descrizione dell'euristica verrà fornita nel secondo capitolo, quindi

nel presente non ci si concentrerà sulla descrizione del metodo risolutivo (in quanto non si ha avuto ancora modo di gettare le basi per una sua comprensione) e ci si limita a commentare i risultati ottenuti e le particolarità dell'articolo in considerazione.

Gli autori analizzano il problema in ottica dinamica, considerando un investitore che ha necessità di ribilanciare il proprio portafoglio con cadenza periodica: nello specifico si utilizzano le 48 azioni indicate nella tabella 1 del paper (quali ad esempio Allianz, Bayer, Intesa San Paolo, Sanofi), come benchmark si ha l'Euro Stoxx 50, il periodo in-sample è composto da 250 periodi mentre l'orizzonte d'investimento ha durata pari a 21 periodi.

La risoluzione del problema multi-obiettivo si ottiene mediante l'implementazione della PSO, e viene poi confrontato con svariate strategie passive di Index tracking. Nello specifico si calcola la ricchezza derivante dal portafoglio mediante:

$$W_t = W_{t-1}(1 + R_{pt}) - c_t(x_t, x_{t-1}) \quad (3.4)$$

dove:

- W_{t-1} rappresenta la ricchezza derivante dal portafoglio al tempo t-1;
- R_{pt} è il rendimento del portafoglio selezionato;
- $W_{t-1}(1 + R_{pt})$ rappresenta la ricchezza derivante dal portafoglio al tempo t al lordo dei costi di transazione;
- c_t rappresenta la funzione dei costi di transazione che dipende dal portafoglio corrente x_t e da quello passato x_{t-1} .

Per valutare la differenza nella redditività dei diversi investimenti viene proposto di utilizzare il compound annual growth rate proposto da Sharpe $CAGR = \left(\frac{W_T}{W_0}\right)^{250/T} - 1$. Sempre per dare una misura per comparare la bontà delle performance si utilizzano due misure di performance risk-adjusted ossia lo Sharpe ratio (che si concentra maggiormente sulla zona centrale della distribuzione) e il Rachev ratio ossia il rapporto tra la media dei migliori $\beta\%$ rendimenti del portafoglio e i peggiori $\alpha\%$, che si concentra maggiormente sul comportamento della distribuzione nelle code. Analizzando i risultati si nota come il modello proposto riesca a sovraperformare le alternative sotto ogni aspetto: innanzitutto ottiene livelli di correlazione col benchmark superiori alle normali strategie di tracking (indicandone una maggiore capacità), successivamente ottiene rendimenti in eccesso in maniera quasi costante rispetto al benchmark, e anche gli indicatori di rischio-rendimento risultano essere migliori. Inoltre, la strategia mostra risultati incoraggianti per sei diverse categorie di investitori, differenziati per preferenze, avversione al rischio ed approccio al mercato.

2 Particle Swarm Optimization

In questo secondo capitolo, il focus si sposta verso la tecnica risolutiva che verrà implementata durante l'analisi del caso pratico, ossia la Particle Swarm Optimization. Con l'obiettivo di rendere l'algoritmo e il suo funzionamento più comprensibili, dopo una preliminare introduzione al concetto di euristica e alcuni dati storici circa la natura e l'ispirazione biologica da cui la PSO trae origine, si prosegue con una descrizione della sua formulazione originaria. Di seguito vengono presentate le successive versioni, caratterizzate dall'introduzione di alcune modifiche (in termini di parametri e topologia) in grado di rendere il metodo risolutivo più performante nella risoluzione di problemi di ottimizzazione libera.

2.1 Problemi di ottimizzazione

L'ottimizzazione è una branca della matematica e delle scienze computazionali che studia le tecniche che vengono implementate per individuare la miglior soluzione ad un problema di ottimizzazione. I problemi di ottimizzazione sono ovunque attorno a noi: dalla semplice decisione sul timing per attraversare la strada, all'investimento da intraprendere per massimizzarne il rendimento atteso, alla strutturazione ottimale di un orario (orario delle lezioni, per esempio, in ambito scolastico). Tutti i problemi di ottimizzazione citati, sebbene alcuni possano sembrare semplici e "naturali", hanno come obiettivo la minimizzazione o la massimizzazione di una o più funzioni obiettivo, basate su una o più variabili dipendenti, che possono assumere valore reale o intero. L'ottimizzazione viene applicata nei campi più disparati, dall'ingegneria alla finanza, passando per i trasporti e la medicina; in ogni campo sono stati proposti metodi risolutivi a problemi di programmazione lineare e non, fino a problemi di ottimizzazione combinatoria basati su variabili reali e discrete.

Nello specifico con riferimento all'ottimizzazione combinatoria (ambito in cui rientrano molti problemi di selezione di portafoglio) va a cercare un oggetto da un insieme finito di elementi; l'oggetto in questione può essere un numero intero, un sottoinsieme o una permutazione.

Un problema di ottimizzazione $P = (S, f)$ può essere definito mediante:

- un insieme di variabili $X = (x_1, \dots, x_n)$;
- i domini delle variabili D_1, \dots, D_n ;
- vincoli sulle variabili;

- una funzione obiettivo f da essere minimizzata o massimizzata, dove $f: D_1 \times \dots \times D_n \rightarrow \mathbb{R}^+$
- $S = \{s = \{(x_1 v_1), \dots, (x_n v_n)\} | v_i \in D_i, s \text{ soddisfa tutti i vincoli}\}$.

S rappresenta lo spazio di ricerca o lo spazio delle soluzioni, in quanto tutti gli elementi di questo insieme possono essere delle possibili soluzioni. Le tecniche per la risoluzione dei suddetti problemi individuano la soluzione $s^* \in S$ con minimo valore della funzione obiettivo, ossia $f(s^*) \leq f(s) \forall s \in S$. s^* è chiamato soluzione ottima globale di (S, f) , e l'insieme $S^* \subseteq S$ è l'insieme delle soluzioni ottime globali.

Le strategie risolutive sviluppate nel corso degli anni per la risoluzione dei problemi di ottimizzazione possono essere suddivise in almeno due categorie: algoritmi esatti e algoritmi approssimati. Gli algoritmi esatti garantiscono la possibilità di individuare per ogni istante di dimensione finita del problema di ottimizzazione, una soluzione ottima in un intervallo di tempo limitato; tuttavia, se il problema da affrontare è NP-Hard³¹, non esiste un algoritmo tempo-polinomiale³² in grado di risolverlo. Ecco perché, questa tipologia di algoritmi richiede tempi di computazione esponenziali molto elevati, i quali cozzano con le necessità della pratica operativa.

Viste le limitazioni appena citate, negli anni '70 iniziarono ad essere per la prima volta implementati gli algoritmi approssimati, i quali sacrificano la garanzia di individuare per ogni situazione una soluzione ottima, con l'obiettivo di individuare una soluzione "buona" in tempi computazionali ragionevoli. Queste tecniche approssimate possono essere a loro volta suddivise in due categorie:

- *Algoritmi costruttivi*: trovano una soluzione ammissibile partendo dalla scelta di un elemento per costruire la soluzione parziale, alla quale si aggiunge un elemento individuato mediante un criterio prescelto. Una volta raggiunto un criterio di stop se la soluzione è ammissibile l'algoritmo si ferma, altrimenti ripete il procedimento. Questi sono metodi più veloci rispetto agli algoritmi di ricerca locale che però permettono di ottenere una soluzione di qualità inferiore;
- *Metodi di ricerca locale*: si sceglie una soluzione iniziale per avviare il processo di ricerca e, una volta individuato un vicinato funzionale ad individuare un intorno della soluzione corrente, si rimpiazza iterativamente la soluzione corrente con una migliore. Il vicinato ha una struttura definita come una funzione $N: S \rightarrow 2^S$, che assegna ad ogni $s \in S$ un insieme di vicini

³¹ In teoria della complessità i problemi NP-Hard (nondeterministic polynomial-time hard problem) sono una classe di problemi almeno difficili come i più difficili problemi delle classi di complessità P e NP. I problemi della classe P (polynomial) sono dei problemi di decisione che possono essere risolti da una macchina di Turing deterministica in un tempo polinomiale rispetto alla dimensione dei dati d'ingresso. I problemi della classe NP (non deterministic polynomial) invece sono problemi che possono essere risolti in tempo polinomiale da una macchina di Turing non deterministica. Informalmente una macchina di Turing è una macchina ideale che trova sempre la soluzione giusta, quindi riesce a risolvere in un tempo polinomiale un problema NP.

³² Si dice che un algoritmo è in tempo-polinomiale se il suo tempo di esecuzione è limitato superiormente da un'espressione polinomiale nella dimensione dell'input per l'algoritmo, cioè $T(n) = O(n^k)$.

$N(s) \in S$, dove $N(s)$ è il vicinato di s . La ricerca della soluzione migliore del vicinato porta ad individuare la soluzione minima locale, ossia la soluzione con funzione obiettivo minore rispetto agli altri elementi del vicinato. Quindi la soluzione \hat{s} è la soluzione minima locale rispetto al vicinato individuato se $f(\hat{s}) \leq f(s) \quad \forall s \in N(s)$.

2.2 Euristiche e Metaeuristiche

Come detto in precedenza, i problemi di ottimizzazione sono ovunque attorno a noi: gli esseri umani sembrano essere dotati, sin dalla giovane età, di una capacità naturale di risolvere un insieme innumerevole di problemi, alcuni dei quali possono essere modellati come problemi di ottimizzazione. Si ritiene che questa capacità di risoluzione di problemi di ottimizzazione (in breve tempo), sia uno degli elementi determinanti per la sopravvivenza della specie, ed è perciò stato favorito dall'evoluzione lungo il corso dei secoli. La mente umana ed animale è in grado di risolvere questi problemi in maniera euristica, ossia mediante l'individuazione in breve tempo di una soluzione "buona" (che però potrebbe non essere quella ottima). Se si pensa ai tempi antichi in cui per sopravvivere si cacciavano i mammut, l'obiettivo del cacciatore era quello di determinare una potenziale traiettoria della lancia in grado di colpire la preda, non di certo individuare la traiettoria ottimale. L'individuazione di una soluzione ottimale avrebbe richiesto uno sforzo troppo impegnativo sia in termini di energie fisiche (il cervello avrebbe prosciugato buona parte delle risorse del corpo umano per individuare una soluzione ottimale), sia in termini di tempo, e molto probabilmente avrebbe anche fatto scappare la preda.³³

Da ciò deriva quindi la capacità degli uomini di risolvere un insieme di problemi implementando strategie metaeuristiche. Per esempio, quando un uomo si trova di fronte ad un problema del tutto nuovo, automaticamente cerca di individuare problemi simili già risolti in passato, e da questi derivare le regole che ha imparato per risolvere il problema: questa è la cosiddetta strategia *learning by analogy*. Un'altra strategia che viene utilizzata è la *means-end-analysis*, la quale data una situazione corrente e una situazione obiettivo, prevede che si definisca una azione che permetta di raggiungere uno stato che sia più vicino all'obiettivo rispetto allo stato corrente; l'azione viene poi ripetuta iterativamente fino a che non si raggiunge lo stato obiettivo, o lo stato più vicino possibile all'obiettivo. Per la corretta implementazione della strategia è importante che si riescano ad individuare quelle azioni che effettivamente permettono di avvicinarsi allo stato obiettivo, ed

³³ Glover, F., Sörensen, K., Sevaux, M., 2017. A History of Metaheuristics, Handbook of Heuristics, pp. 791-808

individuare i progressi fatti. Questa strategia, sebbene più generica, risulta essere equivalente alle classiche euristiche di ottimizzazione che rientrano sotto la categoria degli algoritmi di ricerca locale. Prima di dare una definizione formale di metaeuristica, risulta interessante fare un breve excursus storico circa lo sviluppo di questo argomento; da quanto presentato precedentemente, sebbene le euristiche siano state applicate sin dallo sviluppo della specie, uno studio scientifico sull'argomento è stato avviato per la prima volta solo nel ventesimo secolo. La classificazione storica, relativa allo studio scientifico della materia, inizia a svilupparsi in un periodo precedente rispetto a quando il termine metaeuristica è stato coniato per la prima volta, in quanto fino a quel momento ci si era approcciati alle metaeuristiche con un insieme di "lenti" differenti.

Il design di strategie euristiche trova origine in uno scritto del 1945 del matematico ungherese George Pòlya intitolato "How to solve it", nel quale egli afferma che molti problemi possono essere risolti mediante strategie indirizzate a semplificare il problema stesso. Mediante il principio dell'analogia, Pòlya propone di individuare un problema simile a quello sotto esame per il quale c'è già una soluzione, e studiando le somiglianze e le differenze tra i due problemi può essere individuata una strategia risolutiva per affrontare il problema iniziale (principio dell'induzione). Sebbene non si possa ancora parlare di metaeuristiche, cercare in letteratura problemi simili e modificare i metodi risolutivi conosciuti per adattarli al proprio studio, è un metodo comune per arrivare velocemente ad una buona euristica. Questa ed altre strategie proposte da Pòlya, non risolvono alcun problema nella pratica, e non possono nemmeno essere definite algoritmi. Esse sono delle meta-strategie che permettono di indirizzare un ricercatore che ha come obiettivo quello di definire modelli euristici; possiamo dire che queste strategie costituiscono il framework metaeuristico più importante che tutt'ora abbiamo. In questo stesso periodo prendono piede per la prima volta gli algoritmi costruttivi citati nel paragrafo precedente.

La maggior parte del lavoro svolto nel periodo iniziale ricade nell'ambito dell'intelligenza artificiale (AI)³⁴, ossia una branca della scienza informatica ed ingegneristica che studia i comportamenti cognitivi che caratterizzano il comportamento degli esseri umani, con l'obiettivo di replicarli mediante computer costruendo dei dispositivi e dei processi in grado di simulare il pensiero e l'agire umano.

Un passo in avanti molto importante si fece a partire dagli anni '60 quando l'attenzione si spostò sul concetto di evoluzione. Sulla base di questo argomento, a partire dagli anni '60 vennero proposti i primi algoritmi per la risoluzione di problemi di ottimizzazione ispirati al concetto di evoluzione; gli

³⁴ L'Artificial Intelligence (AI) è una disciplina appartenente all'informatica che studia i fondamenti teorici, le metodologie e le tecniche che consentono di progettare, realizzare e sperimentare sistemi artificiali, sia simulati via software che implementati mediante hardware e sistemi di programmi software capaci di fornire prestazioni caratteristiche dell'intelligenza umana.

algoritmi evolutivi, ispirati al concetto di evoluzione degli esseri viventi, prevede di individuare una soluzione iniziale e di farla evolvere in maniera casuale per ottenere una soluzione migliore.

Nonostante ciò, l'applicabilità del concetto di evoluzione in ottica di machine learning³⁵ è stata introdotta per la prima volta nel 1975 da John Holland, il quale propose nel libro *Adaptation in Natural and Artificial Systems* gli algoritmi genetici³⁶, riconoscendo l'importanza dell'operatore mutazione e crossover³⁷.

Basandosi sulla suddivisione storica sopra riportata, un periodo di grande interesse è il periodo metodo-centrico, il quale coincide con il periodo in cui per la prima volta venne coniato il termine metaeuristica: in questo periodo si pose molta attenzione sullo sviluppo di algoritmi approssimati che fossero in grado, combinando metodi euristici classici, di esplorare in maniera più efficace ed efficiente lo spazio di ricerca. La parola apparsa per la prima volta in uno scritto di Glover del 1986, deriva dalla combinazione di due parole greche, ossia *heuriskein* che significa trovare, al quale si aggiunge il suffisso *meta* che significa "oltre, in un livello superiore".

Risulta tuttavia difficile trovare una definizione di metaeuristica universalmente accettata, in quanto diversi autori ne hanno dato una interpretazione, concentrandosi su diversi aspetti specifici. Una definizione generica è la seguente:

“Una metaeuristica è formalmente definita come un processo generatore di soluzioni iterativo, il quale governa una euristica subordinata combinando in maniera intelligente differenti concetti, per esplorare (exploration) e sfruttare (exploitation) lo spazio di ricerca; strategie di apprendimento sono utilizzate per strutturare informazioni in modo tale da individuare soluzioni efficienti prossime a quella ottima” (Blum et al., 2003).

Dalle diverse definizioni date nel corso del tempo, possono essere sintetizzate le caratteristiche fondamentali delle metaeuristiche:

- Sono strategie che guidano il processo di ricerca;
- L'obiettivo è perlustrare in maniera efficace lo spazio di ricerca per trovare soluzioni prossime alla soluzione ottima;

³⁵ Il machine learning è una branca dell'intelligenza artificiale che raccoglie un insieme di metodi (anche statistici) per migliorare le performance di un algoritmo nell'identificare pattern nei dati. Nell'ambito dell'informatica, l'apprendimento automatico è una variante della programmazione tradizionale nella quale in una macchina si predispongono l'abilità di apprendere qualcosa dai dati in maniera autonoma, senza istruzioni esplicite.

³⁶ Gli algoritmi genetici sono degli algoritmi euristici che si ispirano al principio della selezione naturale ed evoluzione biologica teorizzato da Charles Darwin. Gli algoritmi genetici valutano diverse soluzioni di partenza (come fossero diversi individui biologici) che poi ricombinano (riferimento alla riproduzione) e introducendo degli elementi di disordine (riferimento alle mutazioni genetiche) generano nuove soluzioni che vengono valutate scegliendo le migliori (selezione ambientale) nel tentativo di convergere verso soluzioni ottime. Tutte le fasi di ricombinazione e selezione possono essere definite generazioni come quelle degli esseri viventi.

³⁷ Negli algoritmi genetici si valutano diverse soluzioni di partenza, e ricombinandole (mediante l'operatore crossover) ed introducendo disordine (operatore mutazione) producono nuove soluzioni che vengono poi valutate scegliendo le migliori nel tentativo di convergere verso soluzioni di "ottimo".

- Le strategie variano da semplici procedure di ricerca locale a complessi processi di apprendimento;
- Gli algoritmi metaeuristici sono approssimati e solitamente non deterministici;
- Possono prevedere dei meccanismi per evitare di rimanere intrappolati in aree confinate dello spazio di ricerca, come ad esempio in punti di minimo locale;
- Le metaeuristiche non sono problem-specific, in quanto possono essere adattate in modo tale da essere applicate a diverse tipologie di problemi di ottimizzazione.

Gli algoritmi metaeuristici, perciò, appartengono ad una famiglia molto vasta, la quale può essere categorizzata nelle maniere più disparate. Prendendo in considerazione le modalità di classificazione più importanti, si può affermare che le metaeuristiche possono essere suddivise in:

- *Nature-inspired vs non-nature inspired*: questa classificazione si basa sull'origine dell'algoritmo e permette di distinguere tra algoritmi bio-inspired e non. Questa classificazione, tuttavia, può risultare fallace a causa dello sviluppo di euristiche ibride che non rientrano a pieno in nessuna delle due categorie;
- *Population-based vs single point search*: questa classificazione dipende dal numero di soluzioni considerate contemporaneamente. Gli algoritmi population-based svolgono la ricerca basandosi sull'evoluzione di un insieme di punti nello spazio, mentre gli altri descrivono una traiettoria nello spazio durante la ricerca (*trajectory methods*);
- *Dynamic vs static objective function*: la differenza si basa sul fatto che in alcune metaeuristiche la funzione obiettivo rimane la stessa durante la ricerca, mentre in altri casi viene modificata. Una funzione obiettivo dinamica ha come finalità l'evitare di rimanere intrappolata in punti di minimo locale, incorporando di volta in volta le informazioni che ricava durante la ricerca;
- *One vs various neighborhood structure*: questa categorizzazione si basa sulla facoltà di mantenere invariata o meno la struttura di intorno (topologia³⁸) durante l'applicazione dell'algoritmo.
- *Memory usage vs memory-less methods*: la classificazione in questo caso si basa sul fatto che l'algoritmo tenga o meno memoria dei risultati passati. Gli algoritmi che non utilizzano la memoria seguono un processo di Markov³⁹ dove l'azione successiva è determinata solo sulla base dell'informazione attuale. Per quanto concerne gli algoritmi che utilizzano la memoria, si possono distinguere in base all'utilizzo di una memoria a breve o a lungo termine. In ogni

³⁸ La topologia descrive la struttura del vicinato e il tipo di connessione che esiste tra le particelle della popolazione.

³⁹ Un processo di Markov è un processo stocastico in cui la probabilità di uno stato i al tempo k , è determinata univocamente dallo stato del sistema al tempo $k-1$ e non dalla storia dello stesso.

caso, l'utilizzo della memoria risulta ai giorni nostri uno degli aspetti fondamentali per le performance delle metaeuristiche.

2.3 Introduzione alla PSO

La natura può agire come fonte di ispirazione: gli “agenti” seguono delle regole molto semplici e non esistono delle strutture di controllo centralizzate in grado di prevedere il comportamento futuro dei singoli agenti, denominati particelle. Le iterazioni casuali di un certo grado tra le particelle forniscono una sorta di comportamento intelligente, che rimane tuttavia sconosciuto alle singole particelle; se ad esempio si studia il comportamento di uno stormo di uccelli, si scopre che lo stormo risulta organizzato e coordinato sebbene non ci sia un coordinatore.

Quanto detto è alla base della Swarm Intelligence (SI), un concetto che è stato introdotto nel campo delle scienze computazionali e dell'intelligenza artificiale per la prima volta nel 1989, come un paradigma intelligente e innovativo per risolvere problemi complessi (principalmente in ambito di ottimizzazione) senza un controllo centralizzato o la necessità di definire un modello globale. Esso si basa sul comportamento di sistemi auto-organizzati e decentralizzati nei quali una azione complessa è determinata da una “intelligenza collettiva, dove non è presente una componente centrale che supervisioni (le azioni svolte quindi non sono né controllate localmente né centralizzate): si fonda, quindi, sull'analisi collettiva dei comportamenti individuali di una popolazione che interagisce con un'altra a livello locale, e dalla quale interazione si sviluppa un comportamento globale oltre le capacità di un singolo individuo.

La SI può configurarsi come naturale o artificiale. Esempi di SI naturali si notano nel comportamento di banchi di pesci o di colonie di formiche; mentre sistemi multi-robotici o programmi per l'ottimizzazione e per problemi di analisi dei dati sono esempi di SI artificiali. Il comportamento collettivo dimostra come un sistema unificato (ossia una rete di organismi individuali che operano in sincronia, come uno sciame) sia in grado di sovra-performare la maggioranza dei membri individuali; nonostante ciò, posto che gli uomini non hanno le stesse connessioni che vediamo in banchi di pesci o sciami di vespe, la cosiddetta intelligenza artificiale degli sciami viene perseguita mediante la tecnologia.

All'interno della Swarm Intelligence, una delle metaeuristiche più promettenti è la Particle Swarm Optimization (PSO), la quale incorpora i comportamenti di sciame tipici di stormi di uccelli e banchi di pesci, e comportamenti sociali degli uomini, dai quali l'algoritmo ha preso forma. Ecco, quindi, che la PSO può essere definita come un algoritmo iterativo di ottimizzazione stocastico *population-based* (il funzionamento prevede la generazione e la gestione di un insieme di soluzioni detto

popolazione), che simula il comportamento sociale intelligente di gruppi di animali: gli animali cooperano per cercare cibo, cambiando di volta in volta l'area di ricerca basandosi sulla propria esperienza e su quella del gruppo. L'idea degli ideatori dell'algoritmo Kennedy ed Eberhart (1995) era quella di modellare intelligenza artificiale (AI) sfruttando le analogie con l'interazione sociale piuttosto che le abilità cognitive individuali.

Prima di introdurre la struttura dell'algoritmo sotto esame, vale la pena citare cinque principi alla base della costruzione mediante computer di sistemi di vita artificiale basati sullo sciame con comportamento cooperativo:

- Prossimità: lo sciame dovrebbe essere in grado di effettuare semplici computazioni in termini di tempo e spazio;
- Qualità: lo sciame dovrebbe percepire i cambiamenti nella qualità dell'ambiente e rispondere di conseguenza;
- Diversità di risposta: lo sciame non deve limitarsi a ottenere risorse in un campo ristretto, ma deve cercare di analizzare un'area più ampia possibile nello spazio di ricerca;
- Stabilità: lo sciame non deve cambiare il proprio comportamento ad ogni cambio di ambiente;
- Adattabilità: lo sciame deve modificare il proprio comportamento solo quando può risultare funzionale all'individuazione di soluzione più vicine alla soluzione ottima.

L'algoritmo proposto da Kennedy ed Eberhart nel 1995 prende spunto dal lavoro di Reynolds (1978), che tenta di strutturare un modello che simuli il comportamento degli stormi di uccelli. In tale modello ogni individuo viene rappresentato come un punto nel piano cartesiano, con velocità e posizione assegnati in maniera casuale. Successivamente l'algoritmo considera il principio "*nearest proximity velocity match rule*" che fa sì che l'individuo abbia la stessa velocità del suo vicino più prossimo. Questo modello risultò però essere molto distante dalla realtà, in quanto dopo poche iterazioni tutte le particelle assumevano la stessa velocità: a questo punto si decise di introdurre un moltiplicatore casuale da applicare alla velocità per rendere il problema più vicino alla realtà.

Un ulteriore passo avanti venne proposto da Heppner⁴⁰, il quale introdusse il modello "cornfield" per replicare il comportamento degli uccelli in cerca di cibo. Rappresentando gli uccelli come punti nel piano cartesiano, nel modello si settano innanzitutto la posizione del campo (x_0, y_0) e la posizione e la velocità dei singoli uccelli, rispettivamente (x, y) e (v_x, v_y) . Per misurare la performance della

⁴⁰ Heppner F., Grenander U., (1990). A stochastic nonlinear model for coordinated bird flocks. In S. Krasner, Ed., *The Ubiquity of Chaos*. AAAS Publications, Washington, DC.

posizione e della velocità, l'autore propone di utilizzare la distanza tra il campo di grano e la posizione corrente degli uccelli; si suppone inoltre che gli uccelli abbiano memoria della miglior posizione che hanno mai raggiunto (personal best = pbest) e che ci sia la possibilità di comunicare tra i vari componenti dello stormo, in modo tale che i singoli componenti abbiano la possibilità di conoscere la miglior posizione mai raggiunta dallo sciame (global best = gbest).

Una volta studiati questi modelli, Eberhart e Kennedy nel 1995 giungono alla definizione di un algoritmo iterativo di ispirazione biologica per l'ottimizzazione, definito come:

$$v_x = v_x + 2 * rand * (p_{best} - x) + 2 * rand(g_{best} - x) \quad (4)$$

$$x = x + v_x$$

con “rand” che rappresenta un numero casuale uniforme generato in [0,1].

Il nome Particle Swarm Optimization algorithm deriva dal fatto che gli autori definiscono gli individui come delle particelle senza massa e volume, ma descritte solo con posizione e velocità.

L'algoritmo di ricerca è basato quindi su uno sciame di particelle, definite come potenziali soluzioni al problema di ottimizzazione nello spazio di ricerca D-dimensionale, le quali possono memorizzare la loro miglior posizione, quella dello sciame e le rispettive velocità. Ad ogni generazione tutte le informazioni raccolte vengono condensate per definire la nuova velocità, utilizzata per calcolare la nuova posizione di ogni particella. Nello spazio di ricerca multidimensionale le particelle cambiano sempre la loro posizione fino a che non raggiungono un equilibrio, o stato ottimale.

L'algoritmo dal punto di vista matematico può essere descritto mediante la seguente notazione:

- N è la dimensione dello sciame;
- $f: S \rightarrow R$, con $S \subseteq R^D$ rappresenta la funzione di fitness che viene associata ad ogni particella per certificare la qualità della posizione raggiunta, in termini di potenziale soluzione ottima al problema. Essendo inoltre dotate di memoria, le particelle sono in grado di memorizzare il valore della fitness per ogni posizione raggiunta, evitando di fare ritorno in aree non ottimali;
- x_i^t è la posizione della particella i-esima nello spazio D-dimensionale all'iterazione t;
- v_i^t = è la velocità della particella i-esima all'iterazione t, utilizzata per definire la direzione dello spostamento successivo della particella;
- $f(p_i^t)$ = è la personal best position, ossia la miglior posizione passata raggiunta dalla particella i-esima fino all'iterazione t;
- $f(p_g^t)$ = rappresenta la global best position, ossia la miglior posizione mai raggiunta dallo sciame fino all'iterazione t;

Considerando il problema di ottimizzazione trattato dagli autori, nella versione originale dell’algoritmo la formula per l’aggiornamento della posizione ottima individuale è:

$$p_i^{t+1} = \begin{cases} x_i^{t+1}, & \text{se } f(X_i^{t+1}) < f(P_i^t) \\ p_i^t & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.1)$$

Mentre la posizione ottima dello sciame è la migliore tra tutte le posizioni ottime individuali.

Dalla formulazione precedente si può derivare la formula originaria per l’aggiornamento della posizione e delle velocità, andando a sostituire al valore generico “2” i parametri c_1 e c_2 dei quali si darà descrizione sotto:

$$\begin{aligned} v_i^{t+1} &= v_i^t + c_1 * rand_1 \otimes (p_i^t - x_i^t) + c_2 * rand_2 \otimes (p_g^t - x_i^t) \\ x_i^{t+1} &= x_i^t + v_i^t \end{aligned} \quad (4.2)$$

dove:

- c_1 è un parametro chiamato *cognitive acceleration coefficient*, il quale va a moltiplicare l’effetto che produce la miglior direzione individuale, ossia la direzione verso la migliore posizione individuale sulla successiva direzione;
- c_2 è un parametro chiamato *social acceleration coefficient*, il quale va a moltiplicare l’effetto che produce la miglior direzione collettiva sulla successiva direzione;
- $rand_1$ e $rand_2$ sono due vettori di coefficienti generali casualmente in maniera uniforme nell’intervallo $[0,1]$; ad ogni iterazione si generano vettori casuali indipendenti per ogni particella;
- \otimes rappresenta il prodotto tra matrici component-wise⁴¹.

Per comprendere la logica alla base dell’algoritmo, la formula (4.2) può essere scomposta in tre parti: la prima rappresenta la velocità corrente, la seconda rappresenta la parte cognitiva indicante il “pensiero personale” di ogni particella conseguente alla propria esperienza individuale, mentre la terza rappresenta la componente sociale effetto della collaborazione tra particelle, conseguente all’esperienza collettiva del gruppo. La funzione di fitness permette di determinarne la performance relativamente ad ogni particella.

⁴¹ Date due matrici aventi stessa dimensione (m,n), il loro prodotto indicato col simbolo \otimes restituisce una matrice avente la medesima dimensione (m,n), i cui elementi derivano dal prodotto degli elementi aventi la stessa posizioni delle due matrici di partenza.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 15 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Nella formulazione originale, la velocità delle particelle veniva inoltre limitata mediante la determinazione, all'inizio della procedura, di una velocità massima V_{max} tale da limitare il range della velocità delle particelle all'intervallo $[-V_{max}, +V_{max}]$, permettendo di controllare l'abilità di ricerca globale dello sciame:

$$v_i^{t+1} = v_{max} \quad \text{se} \quad v_i^{t+1} \geq v_{max} \quad (4.3)$$

La scelta di introdurre un range di velocità permette di controllare la velocità. Nonostante ciò, il valore da attribuire a v_{max} è specifico al problema da risolvere, e inoltre non c'è alcuna regola generale per il suo settaggio⁴²; di volta in volta sarà l'operatore a dover settare questo parametro secondo le caratteristiche del problema di ottimizzazione da risolvere.

Prima di descrivere alcune delle varianti dell'algorithmo che hanno riscontrato più successo in ambito operativo, è importante per motivi di chiarezza descrivere quello che è il funzionamento della PSO. Nello specifico, le fasi che ne caratterizzano l'implementazione sono:

- 1) Definizione del problema di ottimizzazione obiettivo della risoluzione (minimizzazione e massimizzazione)
- 2) Inizializzazione della popolazione di particelle con posizione e velocità casuali⁴³ nello spazio di ricerca D-dimensionale;
- 3) Avvio delle iterazioni;
- 4) Valutazione della funzione di fitness associata ad ogni particella, per verificare la bontà della particella stessa di essere una soluzione al problema per il problema considerato;
- 5) Calcolo della miglior posizione della singola particella (pbest, ossia personal best);
- 6) Calcolo della miglior posizione mai raggiunta dallo sciame (gbest, ossia global best);
- 7) Confronto tra il valore della fitness della particella e il rispettivo personal best. Se il valore attuale è migliore rispetto al pbest, si procede con l'aggiornamento secondo questa uguaglianza $pbest_i = \text{valore corrente}$;
- 8) Individuazione della particella che nello sciame ha ottenuto, finora, la miglior posizione e assegnarle l'indice g;
- 9) Aggiornamento della velocità e della posizione secondo l'equazione vista in (4.2);

⁴² Poli, R., Kennedy, J., Blackwell, T., 2007. Particle swarm optimization. An overview, Swarm Intelligence, Vol. 1, 33-57.

⁴³ È stato dimostrato come l'inizializzazione casuale sia funzionale per una corretta e approfondita analisi dello spazio di ricerca circostante; inizializzare tutte le particelle nella medesima posizione, le farà muovere in un'area circoscritta, rendendo più difficile il raggiungimento del punto di ottimo.

- 10) Interruzione delle iterazioni se viene rispettato il prescelto criterio di stop, altrimenti ripartire dal punto 2.

Nell'ultimo punto, si parla di criterio di stop dell'algoritmo; come detto in precedenza, la PSO è un algoritmo iterativo che ripete una sequenza di semplici calcoli fino a che non individua una soluzione "buona", o fino a che l'interruzione non viene sancita dal soddisfacimento di un predeterminato requisito. Nello specifico, tra i criteri di stopping più diffusi in letteratura troviamo:

- Numero massimo di iterazioni: il processo di ottimizzazione termina dopo un predeterminato numero di iterazioni;
- Numero di iterazioni senza alcun miglioramento: il processo di ottimizzazione termina dopo un predeterminato numero di iterazioni che non hanno permesso di trovare alcuna soluzione migliore⁴⁴;
- Errore minimo della funzione obiettivo: il processo di ottimizzazione termina quando l'errore tra il valore della funzione obiettivo e il valore della miglior funzione di fitness risulta inferiore ad una predeterminata soglia.

2.3.1 Inertia Weight Particle Swarm Optimization

Per migliorare il trade-off tra ricerca globale e ricerca locale, sono state introdotte altre soluzioni per il controllo della velocità, tra le quali l'*Inertia Weight Particle Swarm Optimization*.

Sebbene i primi studi abbiano evidenziato la capacità della PSO di risolvere problemi di ottimizzazione non lineare, non differenziabili e multimodali, gli autori Shi ed Eberhart nel 1998 introducono nella formulazione un nuovo parametro per migliorare le performance dell'algoritmo, mediante una maggiore diversificazione nella fase di ricerca della soluzione ottimale riducendo l'importanza del parametro che limita la velocità, ossia v_{max} .

Innanzitutto, andando ad agire sulla formula (4.2) aggiungendo o togliendo una delle tre componenti precedentemente citate, si va a enfatizzare una ricerca locale o una ricerca globale: entrambe le metodologie (eliminazione di una o dell'altra componente) hanno dimostrato di essere adatte alla risoluzione di problemi specifici, da ciò deriva quindi la necessità di individuare il corretto trade-off tra esse in base al problema che si va ad affrontare. Risulta importante bilanciare in maniera adeguata l'abilità di svolgere una ricerca locale e l'abilità di svolgere una ricerca globale; i due autori a riguardo propongono di introdurre un peso di inerzia w col fine di bilanciare le due attività.

⁴⁴ Deng, Lin, Lo (2012). Markovitz-based portfolio selection with cardinality constraints using improved particle swarm optimization. Expert systems with application, vol. 39, 4558-4566

Viene così presentato per la prima volta il cosiddetto algoritmo PSO canonico:

$$v_i^{t+1} = w * v_i^t + c_1 * rand_1 \otimes (p_i^t - x_i^t) + c_2 * rand_2 \otimes (p_g^t - x_i^t) \quad (4.4)$$

Risulta chiaro come dal punto di vista della complessità della formulazione non ci siano grandi differenze con la versione originale; tuttavia questa piccola modifica migliora in maniera significativa le performance della metaeuristica e permette di estenderne i campi di applicazione.

w , c_1 e c_2 sono i parametri di controllo della PSO, i quali possono essere settati in maniera adeguata durante tutta la procedura. Tutti i parametri descritti finora, giocano un ruolo cruciale nella capacità di trovare una soluzione ottimale, ecco perché in letteratura numerosi studi si concentrano su questo argomento così delicato.

Il valore assegnato al peso d'inerzia risulta critico nella determinazione della convergenza dell'algoritmo; un valore elevato di w faciliterà l'esplorazione globale in nuove aree dello spazio in quanto la direzione del movimento di "volo" sarà principalmente influenzata dai precedenti valori di velocità, mentre un valore contenuto darà incentivo all'esplorazione locale delle regioni "migliori" dello

spazio delle soluzioni, in quanto le particelle tenderanno a muoversi nella direzione delle migliori soluzioni trovate fino a quell'istante. Individuare il corretto trade-off tra ricerca globale e locale permetterebbe inoltre di limitare il numero di iterazioni richieste per individuare la soluzione ottima.

In Shi ed Eberhart (1998), vengono proposti degli esperimenti empirici, che evidenziano come per valori di $w > 1.2$ la PSO sia più un algoritmo di ricerca globale che punta a sfruttare sempre più aree di ricerca, mentre per valori di $w < 0.8$ la PSO, quando trova la soluzione⁴⁵, lo fa in maniera molto rapida. Per valori compresi tra i due estremi invece, sembra ci sia una maggior probabilità di trovare una soluzione ottima mantenendo limitate le iterazioni necessarie.

I risultati ottenuti permettono poi, in ricerche successive, di individuare come possibile strategia il settaggio di un peso d'inerzia non più costante, bensì linearmente decrescente all'aumentare delle iterazioni: partendo da un valore w_{max} il peso viene di volta in volta diminuito fino a raggiungere valori prossimi a w_{min} , in modo tale da favorire l'*exploitation* nelle fasi iniziali in cui non si ha conoscenza dell'ambiente circostante e l'*exploration* nelle iterazioni finali in modo da muoversi lentamente implementando una ricerca locale nelle aree ritenute potenzialmente più profittevoli.

⁴⁵ Con valori di w contenuti, la PSO è maggiormente un algoritmo di ricerca locale: limitare lo spazio di ricerca in questo modo potrebbe talvolta portare all'assenza di soluzioni ammissibili, come evidenziato dai test svolti in Shi, Eberhart(1998).

Fissato un numero massimo di iterazioni t_{max} , numerosi studi propongono di determinare il valore del peso d'inerzia all'iterazione t (w^t) come segue:

$$w^t = w_{max} - \left[\frac{w_{max} - w_{min}}{t_{max}} \right] * t \quad (4.5)$$

Questa formulazione, tuttavia, limita l'applicabilità dell'*Inertia Weight Approach* a quei casi in cui come criterio di stop si ha "il numero massimo di iterazioni"; non è quindi applicabile quando vengono utilizzati altri criteri di stop che non prevedono la determinazione del valore t_{max} .

Per quanto concerne invece i coefficienti di accelerazione, essi non giocano un ruolo cruciale nella convergenza dell'algoritmo, nonostante ciò, un loro corretto settaggio può per certo facilitare una convergenza più rapida e limitare la possibilità di impantanarsi in punti di ottimo locale. A riguardo è stato dimostrato come un settaggio funzionale ai suddetti obiettivi dovrebbe rispettare il seguente vincolo:

$$\left[\frac{c_1 + c_2}{2} \right] - 1 < w \quad (4.6)$$

Nella formulazione iniziale descritta in (4), ai coefficienti di accelerazione veniva associato valore intero 2, il che rendeva l'algoritmo altamente instabile (ossia complicava la convergenza delle particelle verso il punto di ottimo). Ricerche successive hanno individuato come valori più proficui in termini di ottimalità della soluzione, i valori $c_1 = c_2 = 1.49$. Tuttavia, anche relativamente a questi parametri, il mondo accademico non ha trovato una soluzione univoca: alcune recenti ricerche propongono, ad esempio, di fissare un parametro $c_1 > c_2$, con $c_1 + c_2 \leq 4$.

2.3.2 Constriction Factor Approach

In uno scritto del 1999, Clerc propose una nuova variante di PSO, che prevedeva l'introduzione di un fattore di costrizione χ , con l'obiettivo di migliorare la convergenza dell'algoritmo iterativo verso la soluzione ottima del problema.

La nuova formulazione proposta dall'autore per l'aggiornamento della velocità e delle posizioni è:

$$v_i^{t+1} = \chi[v_i^t + c_1 * rand * (p_i^t - x_i^t) + c_2 * rand * (p_g^t - x_i^t)] \quad (4.7)$$

con il fattore di costrizione calcolato come segue:

$$\chi = \frac{2}{|2 - \varphi - \sqrt{\varphi^2 - 4\varphi}|} \text{ dove } \varphi = c_1 + c_2, \varphi > 4 \quad (4.8)$$

Il vincolo posto al parametro φ permette di garantire il funzionamento dell'algoritmo, in quanto per valori $\varphi < 4$ l'argomento della radice della formula (4.8) assumerebbe valore negativo rendendo non significativi i valori dell'equazione della velocità.

Rispetto all'IWA trattato nel sotto-paragrafo precedente, in questo caso il fattore χ non va ad agire solo sulla velocità corrente v_i^t bensì influenza anche la componente cognitiva e sociale, che vengono pesate proprio da questo parametro.

Confrontando le equazioni (4.4) e (4.5) si nota come, una volta posto $w^t = \chi$ e rispettati i vincoli in (4.8), esse si equivalgono. L'approccio CFA può essere quindi considerato un caso particolare di IWA, e la posizione viene aggiornata come nella versione originale della PSO, ossia $x_i^{t+1} = x_i^t + v_i^{t+1}$. Partendo dal valore assegnato a φ da Clerc, ossia 4.1, possiamo calcolare un $\chi = 0.729$: questo risulta essere equivalente al IWA con $w^t = 0.729$ e $c_1 = c_2 = 1.49445$ (valore già citato in precedenza). Da quanto detto finora, deriva che un ulteriore vantaggio dell'approccio CFA è che non viene richiesto di fissare un valore limite v_{max} , in quanto se viene rispettato il vincolo $\varphi > 4$, χ sarà sempre inferiore al valore unitario, anche se costante.

2.3.3 Fully Informed Particle Swarm

Un ulteriore variante interessante è stata proposta da Mendes e Kennedy (2004), i quali rivisitando il modo con cui le particelle interagiscono con i loro vicini, propongono un algoritmo (*Fully Informed Particle Swarm*) in cui la particella non è necessariamente influenzata dalla propria esperienza personale, ma utilizza le informazioni derivanti anche da tutti i suoi vicini. La nuova formula della velocità risulta quindi:

$$v_i^{t+1} = \chi[v_i^t + \frac{1}{K_i} * \sum_{K=1}^{K_i} rand \otimes (p_{nbr_k}^t - x_i^t)] \quad (4.9)$$

con:

- K_i è il numero dei vicini dell' i -esima particella;
- nbr_k è il k -esimo vicino dell' i -esima particella.

I punti di forza di questa variante derivano dal fatto che si utilizza quell'insieme informativo che nella versione canonica viene tralasciato (in quanto le uniche due fonti di influenza sono l'esperienza personale e il miglior vicino in un dato intorno): i test empirici dimostrano infatti che questo algoritmo è in grado di individuare soluzioni migliori in un numero minore di iterazioni, tuttavia è fortemente influenzato dalla topologia della popolazione.

2.3.4 Improved PSO

Di rilievo è anche la proposta di Deng et al. (2012), i quali per la risoluzione di un problema di selezione di portafoglio alla Markovitz con vincolo di cardinalità propongono una versione migliorata (*improved*) della Particle Swarm Optimization. Gli autori concentrano la loro attenzione sul superare alcuni dei limiti della versione canonica, tra i quali la stagnazione nei punti di minimo locale. Al fine di gestire i vincoli del problema di ottimizzazione, gli autori implementano nelle prime fasi di ricerca la *reflection strategy*; la strategia fa sì che se la nuova posizione lascia il dominio dello spazio di ricerca, esso venga immediatamente riflesso all'interno del dominio secondo:

$$\begin{aligned} x_{ij}^t &= x_{ij}^t + 2(x_j^l - x_{ij}^t) \text{ se } x_{ij}^t < x_j^l \\ x_{ij}^t &= x_{ij}^t - 2(x_{ij}^t - x_j^u) \text{ se } x_{ij}^t > x_j^u \end{aligned} \quad (4.10)$$

dove x_j^l e x_j^u sono il limite inferiore e superiore di ogni j-esimo componente.

Questo approccio permette di ottenere soluzioni più vicine alla soluzione ottima in quanto permette alle particelle di esplorare uno spazio di ricerca più ampio e di evitare punti di minimo locale.

La strategia termina nel momento in cui non ci sono più miglioramenti nella posizione dopo un numero definito di iterazioni. I valori del limite superiore x_j^u e inferiore x_j^l sono stati settati secondo la seguente formulazione:

$$\begin{aligned} x_{ij}^t &= x_{ij}^l, & \text{se } x_{ij}^t < x_j^l; \\ x_{ij}^t &= x_{ij}^u, & \text{se } x_{ij}^t > x_j^u \end{aligned} \quad (4.11)$$

Per quanto concerne invece il peso d'inerzia, gli autori sfruttando la proposta fatta da Shi ed Eberhart (2007), propongono di utilizzare un w che decresca linearmente col passare delle iterazioni, in modo tale da incentivare una *exploration* più intensa nelle fasi iniziali in cui non si ha conoscenza del territorio circostante, mentre si incentiva l'*exploitation* nelle fasi finali in cui si cerca di sfruttare al meglio le informazioni raccolte lungo la strada.

La formula per l'aggiornamento del peso d'inerzia è costruita come segue:

$$w(t) = (w(0) - w(n_t)) \frac{(n_t - t)}{n_t} + w(n_t) \quad (4.12)$$

con $w(0) = 0.9$ peso d'inerzia iniziale, $w(n_t) = 0.4$ peso d'inerzia finale e n_t numero massimo di iterazioni necessarie per eseguire l'algoritmo. Rispetto alla formulazione vista in (4.5) ci sono alcune differenze:

- Innanzitutto, il rapporto $\frac{w(0)-w(n_t)}{n_t}$ viene moltiplicato per la differenza tra il numero massimo di iterazioni e l'iterazione t , e non solo per l'iterazione t come in (4.5);
- Al primo addendo in questo caso si va a sommare il valore del peso di inerzia all'ultima iterazione $w(n_t)$, che in questo caso specifico coincide con il valore w_{min} della formula (4.5). Nella (4.5) invece si assiste alla sottrazione dal valore massimo del peso d'inerzia, del valore dell'addendo descritto al punto precedente ossia $\left[\frac{w_{max}-w_{min}}{t_{max}} \right] * t$.

Allo stesso modo gli autori decidono di lavorare, e far dipendere dal tempo, anche il valore dei coefficienti di accelerazione (tendenzialmente settati come costanti, con $c_1 = c_2$). Come detto in precedenza, valori di $c_1 > c_2$ fanno sì che le particelle vengano attratte maggiormente verso il proprio personal best, viceversa se $c_1 < c_2$ le particelle saranno attratte maggiormente verso la miglior posizione mai raggiunta dallo sciame.

Con gli stessi obiettivi già citati, di conseguenza, le espressioni per ricavare il valore dei coefficienti possono essere così sintetizzate:

$$\begin{aligned} c_1(t) &= (c_{1,min} - c_{1,max}) \frac{t}{n_t} + c_{1,max} \\ c_2(t) &= (c_{2,max} - c_{2,min}) \frac{t}{n_t} + c_{2,min} \end{aligned} \quad (4.13)$$

con $c_{1,min} = c_{2,min} = 0.5$ e $c_{1,max} = c_{2,max} = 2.5$.

Dalla formulazione (4.13) si evince che il coefficiente di accelerazione c_1 decresce in maniera lineare col passare delle iterazioni, mentre il coefficiente di accelerazione c_2 cresce cresce col passare delle iterazioni; questa strategia si concentra maggiormente sull'esplorazione nelle prime fasi del processo di ottimizzazione e incoraggia la convergenza verso un buon punto di ottimo alla fine del processo fidandosi maggiormente della miglior particella.

2.4 Topologia

Sin dalle prime applicazioni pratiche, è risultato chiaro che l'unicità dell'algoritmo dipendesse dalle interazioni dinamiche tra le particelle, le quali influenzano le abilità di comunicazione e le performance di gruppo. Le particelle aggiornano la propria posizione basandosi sulla propria miglior posizione mai raggiunta e sulla posizione mai raggiunta da un intorno specifico o dall'intero sciame; a riguardo, con il termine topologia si fa riferimento alle relazioni d'intorno tra le particelle che rappresentano il modo in cui le particelle comunicano tra di loro. La topologia risulta quindi un fattore importante da analizzare in quanto la comunicazione tra le particelle dipende dalla struttura della topologia utilizzata e influisce nel comportamento delle particelle stesse.

Prima di descrivere brevemente alcune delle topologie più comuni in quest'ambito, risulta importante citare alcuni aspetti che influenzano il flusso informativo attraverso le reti sociali:

- Il grado di connettività tra i nodi della rete: ogni particella individua la miglior posizione mai raggiunta dal suo k -esimo vicino. La performance risulta pertanto influenzata dal parametro k , che permette di distinguere tra due topologie che vedremo dopo, ossia la ring structure e la topologia fully-connected dove ogni particella è influenzata da tutte le altre particelle dello sciame;
- Il numero di nodi in comune (C): quando il vicino di una particella è vicino anche ad un'ulteriore particella;
- La distanza media tra un nodo e l'altro è importante nella determinazione della diffusione delle informazioni attraverso rete.

Nella prima versione della PSO proposta nel 1995, come nelle due versioni da cui ha tratto ispirazione ossia quella di Reynold e di Heppner, le traiettorie proposte traggono ispirazione dai moti degli stormi di uccelli e vengono modificate mediante l'applicazione di alcune regole per tenere in considerazione il comportamento degli uccelli nelle vicinanze; questa struttura di comunicazione basata sulla prossimità nell'area di ricerca, oltre ad essere molto impegnativa dal punto di vista computazionale, poteva origine ad una convergenza indesiderata. Ecco perché questa struttura di vicinato è stata prontamente accantonata.

Tuttora i due metodi più utilizzati per delineare la traiettoria di ricerca delle particelle sono il *gbest* (global best) e il *lbest* (local best). La topologia sulla quale si basa il *gbest* prevede che solo il miglior vicino in tutta la popolazione influenzi la particella target, ciò significa che la procedura deve tener memoria del miglior valore della funzione obiettivo che ha trovato e l'indice della particella che l'ha trovato. Inoltre, essa rientra tra le topologie statiche in quanto i vicini e il vicinato non cambiano durante una simulazione. Tra le topologie statiche rientra allo stesso modo quella sulla quale si basa

il lbest (introdotta da Eberhart e Kennedy nel 1995), la quale assume la forma di una struttura ad anello in cui ogni particella è legata a $K=2$ particelle ad essa adiacenti. Un vantaggio deriva dal fatto che questa struttura di comunicazione permette una ricerca più accurata, ed è meno vulnerabile all'attrazione verso i punti di ottimo locale, posto che la convergenza è più lenta.

Nel corso degli anni in ambito accademico sono state proposte ed analizzate diverse topologie (a ruota, a stella, ecc), giungendo alla conclusione che la topologia ha di per certo un forte impatto sulle performance dell'euristica, ed è fortemente legata alla specificità della funzione obiettivo, rendendo impossibile individuare una topologia preferibile rispetto a tutte le altre. Anche l'introduzione della stessa particella obiettivo all'interno dell'intorno, risulta essere di impatto trascurante a livello di bontà dei risultati.

Nella figura 11 si nota che le topologie d'intorno possono essere rappresentate mediante un grafo $G = \{V, E\}$ dove ogni vertice rappresenta una particella e gli archi E rappresentano le relazioni tra le particelle.

10 Fonte: <https://stackoverflow.com>

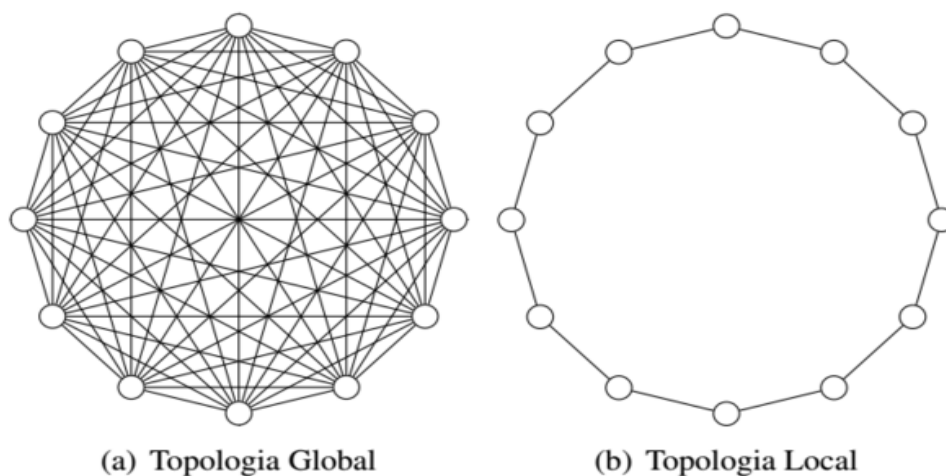


Figura 11 La figura rappresenta a sinistra la topologia fully-connected associata al metodo global best, mentre a sinistra si vede rappresentata la topologia ring structure associata al metodo local best. Vengono evidenziate in figura le differenze nella struttura di comunicazione tra le particelle che ne influenza la traiettoria.

Un'ulteriore topologia performante è la cosiddetta topologia di Von Neumann, la quale avendo dei nodi con livello $K=4$ (ossia ogni particella è legata ad altre 4) ha un grafico più denso della lbest e meno denso della gbest, riuscendo a combinare i punti di forza delle due topologie.

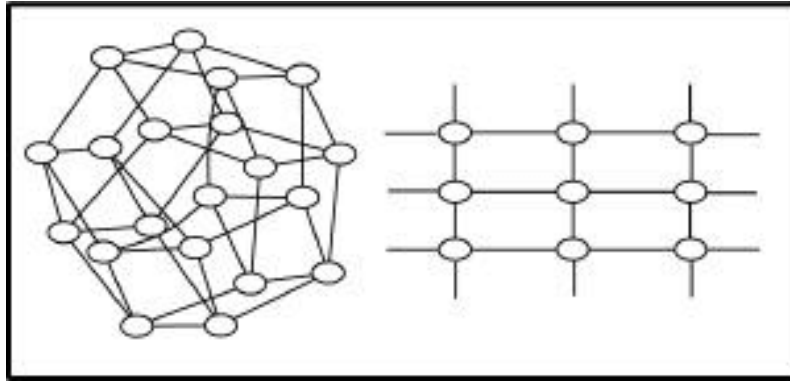


Figura 11 Topologia Von Neumann

Uno studio interessante sul comportamento delle topologie lo si riscontra in Mendes (2004), paper in cui viene proposta la già citata FIPS (Fully Informed Particle Swarm), dove le particelle utilizzano una media di tutte le migliori posizioni precedenti di tutti i vicini, piuttosto che selezionare il miglior vicino. L'autore dimostra che l'effetto della topologia della popolazione risulta diverso se applicato alla PSO classica o alla FIPS: per esempio la topologia gbest applicata alla PSO prevede che ogni particella riceva la miglior informazione conosciuta dalle particelle, mentre nella FIPS tutte le particelle ricevono le informazioni della miglior soluzione mai trovata da tutte le particelle della popolazione.

Dallo studio di Mendes (2004) si possono trarre diverse conclusioni di rilievo: il significato del network sociale e gli effetti delle topologie dipendono dal modo in cui le particelle interagiscono tra loro, inoltre va stabilito il criterio da utilizzare per valutare le performance. L'autore propone da un lato di valutare la performance sulla base della miglior funzione di fitness (misura della bontà della ricerca locale), dall'altro invece di valutare la proporzione di tentativi in cui il criterio di stop viene rispettato: il criterio delle funzioni deriva dalla letteratura ed indica che la regione ottima globale di ricerca è stata investigata anche se il punto di ottimo non è stato individuato. Il successo è quindi, in questo caso, una misura della bontà della ricerca globale. Dalle evidenze empiriche risulta che nessuna delle due misure risulta essere universalmente superiore, e non c'è evidenza di correlazione tra le due. Di nuovo, per capire l'effetto delle topologie sulla performance è necessario analizzare come le particelle interagiscono con i loro vicini, e quale misura di performance si utilizza.

Nel tentativo di coniugare le potenzialità delle due principali topologie (fully connected e ring structure), sono stati proposti in letteratura delle topologie dinamiche, le quali ad esempio nelle fasi iniziali di ricerca si configurano con una classica struttura ad anello e lentamente aumentano il numero di vicini fino a che la popolazione non diventa fully-connected nelle fasi finali. È stato anche proposto uno studio in cui inizialmente i vicini sono definiti in base alla loro prossimità nell'area di ricerca, e il numero di vicini viene dinamicamente aumentato durante l'aumentare delle iterazioni. In questo

caso per determinare l'intorno di partenza si calcola la distanza tra le particelle e si sceglie una frazione delle particelle che si trovano nei pressi della particella relativamente la quale si sta definendo un vicinato.

Altrettanto interessante in questo ambito è la ricerca di Mohan (2003) che introduce una modificazione nella dinamica delle particelle, facendole muovere non verso la particella che ha raggiunto la miglior posizione, bensì verso un insieme di particelle che hanno valori della funzione di fitness migliore di quella sotto esame. La posizione delle particelle nella PSO oscilla in maniera sinusoidale⁴⁶ fino a che non converge in un punto tra la miglior posizione mai raggiunta dalla particella, e la miglior posizione mai raggiunta dall'intero sciame. Se durante il moto sinusoidale la particella raggiunge dei punti aventi un valore della funzione di fitness superiore al proprio personal best, l'area di ricerca risulta essere profittevole e la particella continua a muoversi in quella direzione fino a che non converge nella posizione di global best osservato fino a quel momento. Tutte le particelle seguono questo comportamento, convergendo rapidamente verso un buon punto di ottimo locale; tuttavia, se l'ottimo globale del problema non si trova tra la posizione di partenza e l'ottimo locale, questo comportamento impedisce una buona convergenza. Le particelle stanno sprecando potenza computazionale muovendosi tutte nella stessa direzione, mentre sarebbe più profittevole esplorare aree più ampie dello spazio.

Come soluzione l'autore propone l'adozione della cosiddetta *Fitness-Distance-Ratio* PSO (FDR-PSO), che oltre all'apprendimento derivante dalla propria miglior posizione e la miglior posizione mai raggiunta dallo sciame, introduce l'apprendimento derivante dall'esperienza delle particelle vicine che hanno una miglior funzione di fitness. Questa modifica risulta consistente con l'attuale comportamento dei gruppi di organismi. Tuttavia, la scelta di tenere in considerazione l'effetto di molteplici particelle su ogni particella potrebbe far sì che l'attrazione verso molteplici particelle vada ad annullarsi in maniera reciproca, riducendo i benefici di questa particolare dinamica. Per ovviare al problema, perciò, si decide che per ogni aggiornamento della velocità si consideri un'unica particella vicina che ha ottenuto una fitness migliore di quella che stiamo analizzando. La strategia prevede quindi di aggiornare la velocità selezionando una particella che massimizza il rapporto tra la differenza della fitness sulla distanza. La D-esima componente della i-esima velocità della particella viene aggiornata utilizzando la particella nbest (best nearest particle) con precedente posizione P_j , scelta per massimizzare:

$$\frac{fitness(P_j) - fitness(X_i)}{|P_{jd} - X_{id}|} \quad (4.14)$$

⁴⁶ L'andamento sinusoidale è la curva rappresentata dal grafico della funzione seno, che ha una forma ad onda.

dove si assume che la funzione di fitness venga massimizzata, dando vita all'espressione sopra citata che rappresenta la Fitness Distance Ratio.

Janson e Middendorf (2005) hanno sistemato le particelle in una gerarchia dinamica basata sulle loro prestazioni (le particelle con migliori prestazioni si muovono verso l'alto nella gerarchia), nella quale ogni particella risulta influenzata dalla propria miglior posizione precedente e dalla miglior posizione della particella posta al di sopra della stessa. Le particelle migliori, così facendo, scalano la gerarchia e hanno un maggior effetto sulle particelle meno performanti.

Clerc (2006) sviluppò invece un algoritmo interessante, ossia una variante della PSO senza alcun parametro che chiamò TRIBES, dove dettagli sulla topologia e la dimensione della popolazione evolvono col passare delle iterazioni in base ai feedback sulle performance. Lo sciame in questo caso viene diviso in sub-popolazioni, ognuna con proprio ordine e struttura. Le tribù "buone" andranno a beneficiare della rimozione dei membri più deboli, posto che esse hanno già individuato delle soluzioni al problema qualitative e quindi possono permettersi di ridurre la popolazione; le tribù "cattive" d'altro canto potranno beneficiare di nuove particelle per incrementare le chance di trovare soluzioni soddisfacenti. Le nuove particelle sono generate casualmente.

2.5 Problemi di ottimizzazione vincolata

La PSO è stata sviluppata e ha riscontrato successo nell'ambito della risoluzione di problemi di ottimizzazione libera; nonostante ciò, i problemi di selezione di portafoglio ottimo, se strutturati in maniera tale da ricalcare la realtà operativa, rientrano nella categoria dei problemi di ottimizzazione vincolata non lineare (Constrained Nonlinear Optimization Problem, CNOP). Essi possono essere così definiti:

$$\begin{aligned} & \text{find } \vec{x} \text{ that maximizes } f(\vec{x}) \\ & \text{s. t. } \begin{cases} g_i(\vec{x}) \leq 0, & i = 1, \dots, m \\ h_j(\vec{x}) = 0 & j = 1, \dots, p \end{cases} \end{aligned} \quad (4.15)$$

dove:

- $\vec{x} = [x_1, \dots, x_n]$ rappresenta il vettore delle soluzioni;
- m è il numero di vincoli sotto forma di disuguaglianza;
- p è il numero dei vincoli sotto forma di uguaglianza.

In letteratura sono stati proposti diversi metodi per risolvere questi problemi, mediante per esempio l'utilizzo di una funzione di penalità o sull'individuazione di regioni e soluzioni ammissibili.

Se si decide di affrontare il problema mediante l'utilizzo delle metaeuristiche, una delle prime soluzioni proposte prevede di basarsi sul concetto di ammissibilità delle soluzioni: nello specifico si genera un insieme di soluzioni ammissibili e in seguito si va a verificare se queste rispettano i vincoli imposti. Per favorire il processo dal punto di vista del costo in termini computazionali, si prevede di inizializzare le particelle in modo tale che siano tutte ammissibili, e in seguito le si fa muovere per individuare le soluzioni ammissibili (le uniche di cui poi si terrà conto). Rispetto alla classica struttura della PSO descritta nel dettaglio precedentemente, questa variante prevede prima della valutazione della funzione di fitness per ogni particella, di verificare che tutte le particelle inizializzate si trovino all'interno della regione ammissibile; in caso contrario si deve ripetere l'inizializzazione fino a che questo vincolo non viene rispettato. In secondo luogo, il calcolo dei valori del personal best e del global best si riferisce solo ed unicamente a quelle posizioni presenti all'interno della regione ammissibile.

Sebbene da quanto appena detto, sembra che la differenza con la versione originaria sia quasi trascurabile, dal punto di vista dell'impegno computazionale questa particolare richiesta potrebbe risultare eccessivamente logorante; potrebbe verificarsi, per esempio, che dopo la generazione casuale di un milione di particelle, nessuna risulti all'interno della regione ammissibile. Tutto ciò renderebbe questa ricerca di difficile applicazione in ambito operativo.

Un ulteriore studio nell'ottica del trattamento dei vincoli di confine viene proposto da Zhang et al. (2004), e ha come obiettivo quello di introdurre una nuova modalità di gestione dei confini della regione ammissibile derivante da un CNOP (regione ammissibile definita come "S"), in grado di superare i limiti delle modalità preesistenti.

Tra le modalità implementate precedentemente la pubblicazione del paper sopra citato, le due più significative sono il boundary mode e il random mode.

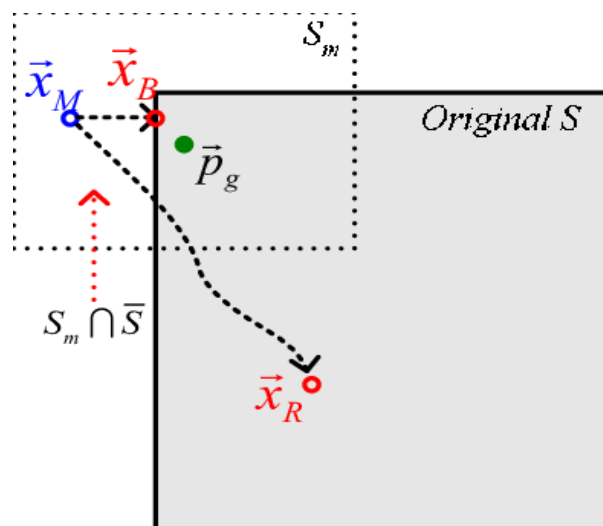


Figura 12 Gestione dei confini mediante un approccio tradizionale (fonte: Zhang et al. 2004)

Se prendiamo un classico sciame da esaminare, sappiamo che il suo dominio di volo è determinato dall'equazione (4.2) e ha come centro di attrazione un punto posto vicino al global best che agisce come centro di gravità per lo sciame stesso (le particelle vengono attratte verso il global best). Posto che durante le iterazioni lo sciame si muove a causa dei continui cambiamenti del gbest, potrebbe capitare (come si nota nella figura 13) che alcune particelle possano uscire dai confini $S_m \cap \bar{S} \neq \Phi$ (con Φ rappresentante l'insieme vuoto), soprattutto se il gbest è vicino ai confini stessi. Ciò significa che se una particella finisce nell'insieme $S_m \cap \bar{S}$ (tale che $\vec{x}_m \notin S$) essa è inaccettabile e dev'essere aggiustata in modo tale da farla rientrare nella regione ammissibile S : l'aggiustamento viene realizzato a partire dalla formula (4.2) facendo ricorso ad una mutazione che viene definita $\tilde{M}(\vec{x})$ di cui si darà spiegazione di seguito. Tuttavia, sapendo che nella PSO la condizione della i -esima particella ha influenza sulla condizione dell' i -esima particella nella successiva generazione, se il gbest è molto vicino al confine l'utilizzo dell'operatore di spostamento $\tilde{M}(\vec{x})$ potrebbe risultare troppo frequente interferendo sull'auto-organizzazione della dinamica dello sciame. L'applicazione del *boundary mode* comporta lo spostamento della particella $\vec{x}_m \notin S$ all'interno dei confini ($\vec{x}_m \rightarrow \vec{x}_B$ nella figura 13) secondo il seguente schema:

$$\tilde{M}_B(X_d): \begin{cases} x_d = l_d & \text{se } x_d < l_d \\ x_d = u_d & \text{se } x_d > u_d \end{cases} \quad (4.16)$$

dove l_d e u_d rappresentano rispettivamente il limite inferiore e superiore della d -esima dimensione. $\tilde{M}_B(X_d)$ "spinge" la particella che si trova all'esterno della regione ammissibile a fare ritorno all'interno dei confini. In alcuni casi, la posizione modificata dall'applicazione dell'operatore spostamento, vista la maggior "energia" data alle particelle (che si concretizza in un incremento del dominio di S_m) può diventare essa stessa il nuovo global best: questo può far sì che il nuovo centro di gravità attiri velocemente a sé le nuove particelle rendendo impossibile il superamento dei confini se non nella situazione in cui anche il gbest fuoriesca. Tuttavia, questa situazione comporterebbe una maggiore velocità di raggiungimento di uno stato di equilibrio da parte dell'algoritmo, favorendo una convergenza alquanto prematura.

Per quanto concerne invece il *random mode*, la d -esima dimensione di $\vec{x} \notin S$ viene mutata in maniera casuale secondo:

$$\tilde{M}_R(x_d): x_d = U_{\mathbb{R}}(l_d, u_d) \text{ se } x_d \notin [l_d, u_d] \quad (4.17)$$

con $U_{\mathbb{R}}(l_d, u_d)$ valore casuale tra l_d ed u_d ; in questo caso lo spostamento della particella avviene senza prendere in considerazione la posizione finale e lo shock che subisce la particella.

Anche in questo caso, l'applicazione frequente dell'operatore finisce per disturbare lo stormo facendolo ricadere in uno stato di caos, diminuendo la velocità di convergenza verso l'ottimo globale. Con l'obiettivo di superare le limitazioni dei metodi già in circolazione, l'autore propone l'utilizzo del cosiddetto *periodic mode*, il quale porta alla costituzione di uno spazio di ricerca infinito composto dalle copie della regione ammissibile S , aventi stesso andamento della funzione di fitness.

Nella figura 9 l'area grigia rappresenta la regione ammissibile di partenza $S^{(0)} = S$, mentre le regioni confinanti rappresentano le copie della regione ammissibile $S^{(C)}$. Nella variante *periodic mode* non è prevista l'applicazione di alcun operatore spostamento, bensì per ogni $\vec{x} \in S^E$ (dove con S^E si fa riferimento alla copia effettiva di S) esiste una relazione con un altro $\vec{z} \in S$. $\vec{z} \in S$ è il mapping point di \vec{x} , ed è definito secondo:

$$\tilde{M}_P(x_d \rightarrow z_d) \begin{cases} z_d = u_d - (l_d - x_d)\%s_d & \text{se } x_d < l_d \\ z_d = l_d + (x_d - u_d)\%s_d & \text{se } x_d > u_d \\ z_d = x_d & \text{se } x_d \in [l_d, u_d] \end{cases} \quad (4.18)$$

dove % è il modulus operator e $s_d = |u_d - l_d|$ è l'intervallo di variabilità associato alla d-esima dimensione.

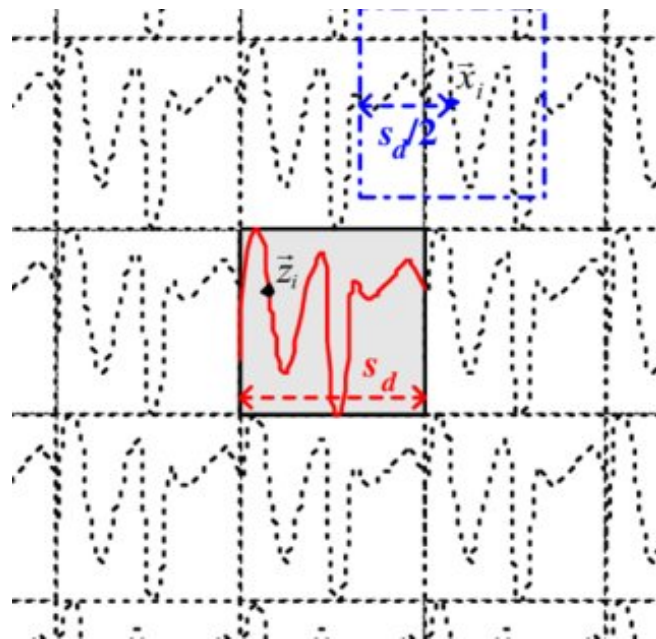


Figura 13 Periodic mode

Comparando il boundary mode e il random mode con il periodic mode, si può evidenziare come quest'ultimo dimezzi lo spazio di variazione per ciascuna particella, in quanto nella d-esima dimensione i limiti inferiore e superiore sono dati rispettivamente da:

- $x_d - \frac{s_d}{2}$;
- $x_d + \frac{s_d}{2}$;

Un altro aspetto importante fa riferimento alla diminuzione della distanza tra il global best globale e il global best all'iterazione corrente, che si ottiene mediante la riduzione della massima distanza possibile per ogni dimensione d da s_d a $\frac{s_d}{2}$.

Per concludere, sempre nello stesso studio Zhang svolge dei test empirici per comparare le performance ottenute dalla PSO utilizzando il periodic mode con le performance ottenute dalle modalità classiche: dai test emerge che utilizzando il periodic mode la PSO ottiene risultati migliori, soprattutto nel caso in cui ci trovino punti di ottimo locale posti nelle vicinanze dei confini di S , o proprio sui confini stessi.

3 Applicazione di modelli di selezione di portafoglio del tipo Enhanced Indexing su dati reali

Nel terzo ed ultimo capitolo verranno presentati e testati due differenti modelli di selezione con l'obiettivo di costruire portafogli Enhanced Indexing, trattati dal punto di vista teorico nei capitoli precedenti. Nello specifico si andrà ad implementare innanzitutto un modello bi-obiettivo "classico" basato sull'utilizzo della semi-varianza come misura di rischio, e successivamente un modello più moderno che prevede la costruzione di un risk-reward ratio basato su una misura di rischio coerente, ossia il Conditional Value at Risk. Entrambi i modelli verranno testati su 4 differenti mercati, ossia il mercato italiano rappresentato dal FTSE Mib40, il mercato tedesco con il DAX30, il mercato indiano con il Nifty50 e il mercato messicano con l'S&P IPC35, con l'obiettivo di valutare la bontà dei modelli in mercati sviluppati ed emergenti caratterizzati da livelli di volatilità molto differenti. Per lo svolgimento dei calcoli si è fatto affidamento a due differenti codici scritti ed applicati mediante il software Matlab.

3.1 Trattazione dei vincoli

Come già specificato, l'obiettivo di questo terzo capitolo è andare a verificare, mediante dei modelli applicati a dati reali, l'eventuale bontà della strategia di selezione di portafoglio "ibrida", del tipo Enhanced Index Tracking. Nello specifico si è deciso, anche riprendendo quanto visto nella review della letteratura nel capitolo 1, di adottare due diversi modelli:

- Il primo è un modello che prevede la costruzione di una funzione bi-obiettivo, dove da un lato si va a minimizzare il Tracking Error tra il portafoglio e il rispettivo benchmark calcolato in termini di semivarianza, e dall'altro si cerca di ottenere un extra-rendimento sempre rispetto al benchmark;
- Il secondo prende spunto dal paper di ricerca di Guastaroba (2020) citato nel primo capitolo, nel quale si va a costruire un indice di rischio rendimento basato sul Conditional VaR, che viene poi minimizzato.

Prima di andare a definire nel dettaglio la struttura dei due modelli, risulta importante fare una breve precisazione circa quanto detto nel secondo capitolo sull'algoritmo che verrà utilizzato per la risoluzione del problema, ossia la Particle Swarm Optimization. La PSO è stata pensata e sviluppata dagli autori come un algoritmo in grado di trattare e risolvere problemi non vincolati, problemi quindi

di ottimizzazione libera; tuttavia, questa metodologia risulta allo stesso modo applicabile anche a problemi che prevedono la considerazione di vari vincoli, come ad esempio i problemi di selezione di portafoglio. Questi ultimi infatti, come già osservato con i modelli accennati nella review della letteratura, prendono in considerazione alcuni vincoli per rendere il problema il più affine possibile alla pratica operativa dei mercati finanziari, tra i quali vale la pena citare: il vincolo di bilancio, il vincolo sul numero massimo di titoli detenibili in portafoglio, il divieto di effettuare vendite allo scoperto, un potenziale vincolo sulla ricchezza massima e minima che si può allocare al singolo titolo, vincoli di rendimento medio minimo e altri vincoli a variabili mister intere per considerare situazioni in cui la regolamentazione specifica di un mercato prevede l'obbligo di investire in lotti minimi di transazione, o l'obbligo di un numero massimo o minimo intero di titoli azionari che possono essere acquistati o venduti.

Il problema principale nel rendere la PSO applicabile a problemi di ottimizzazione vincolata, riguarda la metodologia per la gestione dei vincoli, che deve garantire il rispetto dei vincoli stessi da parte delle particelle. A riguardo in letteratura sono state proposte diverse strategie per la gestione dei vincoli, tra le quali vale la pena citare:

- *Penalty function strategy* che aggiunge una penalità alla funzione obiettivo se la particella si posiziona al di fuori dello spazio ammissibile. Qui un ruolo importante lo gioca il valore assegnato alla penalità, il quale se sufficientemente grande permette di non considerare le particelle al di fuori della regione ammissibile;
- *Random positioning* che trasforma i pesi negativi in pesi casuali ma ammissibili, e li normalizza in modo tale che la somma dia 1;
- *Bumping strategy* che nel momento in cui la particella si avvicina al confine della zona ammissibile fa sì che essa si fermi nel punto in cui la avrebbe attraversata, privandola di tutta la velocità;
- *Amnesia strategy* che permette alle particelle di finire nella zona non ammissibile, ma allo stesso tempo non tiene memoria del valore della funzione obiettivo relativo alle soluzioni situate nella regione non ammissibile, né come personal best né come global best.

Tra le varie strategie proposte si è deciso di utilizzare il metodo basato sulle penalità, in quanto risulta il più diffuso in letteratura grazie alle performance ottenute in diverse applicazioni relative ad ambiti tra i più disparati. Ad esempio, in Parsopoulos et al. (2002), viene presentata una metodologia basata sulla funzione di penalità che permette di risolvere un problema del tipo CNOP tramite una sequenza di problemi non vincolati. Nello specifico, il problema di partenza viene reso un problema non vincolato andando a penalizzare tutti i vincoli, i quali poi vengono riformulati e inseriti nella funzione

di fitness il cui valore sarà determinato considerando la funzione obiettivo di partenza e l'intero sistema dei vincoli.

Questa metodologia, tuttavia, presenta alcune criticità che prevedono un attento settaggio dei parametri da utilizzare. Ad esempio, il fissare un valore della penalità troppo elevato porterebbe l'algoritmo a rimanere intrappolato in punti di minimo locale senza riuscire ad individuare il punto di ottimo globale (ossia la soluzione più ottimale), mentre il fissare un valore troppo contenuto renderebbe difficoltoso selezionare le soluzioni ottime ammissibili. A riguardo non è ancora stato né individuato né verificato un metodo che sia in grado di individuare il valore ottimale da attribuire alla penalità, ecco perché nella pratica si utilizza il metodo "prova e sbaglia". Un'altra scelta che ricade nelle mani del ricercatore nel momento in cui utilizza questa metodologia, si riferisce all'utilizzo di una funzione di penalità stazionaria o non stazionaria. Nello specifico il metodo stazionario prevede di utilizzare delle penalità che rimangono invariate durante l'intero processo di minimizzazione, mentre il metodo non stazionario prevede di modificare in maniera dinamica il valore della penalità durante il processo. Quest'ultima scelta è in ogni caso oggetto di disquisizione, in quanto i risultati ottenuti in letteratura farebbero propendere per l'utilizzo di una penalità dinamica, anche se la dominanza di questo metodo non risulta schiacciante e in molti studi si ottengono risultati preferibili facendo ricorso al metodo stazionario.

Il lavoro di Paropoulos et al. appartiene ad un insieme di studi che prevedono la risoluzione di problemi di ottimizzazione vincolata mediante l'utilizzo di metaeuristiche, all'interno delle quali viene introdotto un ulteriore algoritmo per il controllo della variazione dei valori delle penalità, il che rende la metodologia alquanto complessa e di applicazione circoscritta. In alternativa, diversi accademici hanno proposto l'utilizzo del cosiddetto metodo delle penalità esatte, che utilizza dei valori finiti del parametro di penalità (chiamato ϵ), tali per cui ci sia coincidenza tra le soluzioni del problema di ottimizzazione vincolato di partenza e le soluzioni del problema non vincolato.

Nell'elaborato sotto esame si è deciso quindi di optare per il metodo delle penalità esatte, che permette di affrontare un problema di ottimizzazione vincolato mediante problemi non vincolati, con la caratteristica di aggiungere alla funzione di fitness un termine che comporta un costo in caso di violazione di un vincolo: nello specifico si fa ricorso al parametro ϵ per pesare la gravità della violazione e quindi la capacità del problema non vincolato di approssimare quello originario.

3.2 Modelli sotto esame: EIT with semivariance

Per mettere in evidenza al meglio il funzionamento del metodo delle penalità esatte, si può procedere con la formulazione del primo modello di selezione di portafogli del tipo Enhanced Indexing. Nello specifico questo primo modello prende ispirazione dalla classe dei modelli bi-obiettivo, i quali

puntano alla minimizzazione della componente rischiosa dell'investimento (mediante la riduzione del tracking error col benchmark di riferimento) e alla contestuale massimizzazione del rendimento in eccesso. Prima di procedere con la presentazione della struttura del modello, va ricordato che l'enhanced index tracking oggetto d'analisi è una via di mezzo tra gestione attive e passive, che quindi punta a replicare un indice di riferimento con l'obiettivo di ottenere un extra-rendimento.

Il primo modello che quindi verrà testato può essere sintetizzato come segue:

$$\min \lambda[TE] - (1 - \lambda)[r_i - \bar{r}_{bench}] \quad (5.1)$$

$$s. t. \quad \sum_{i=1}^N x_i = 1 \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^N z_i = K \quad (2)$$

$$\varepsilon_i z_i \leq x_i \leq \delta_i z_i \quad (3)$$

$$z_i \in \{0,1\} \quad (4)$$

$$x_i \geq 0 \quad (5)$$

dove:

- r_i rappresenta il rendimento percentuale del titolo i-esimo⁴⁷;
- \bar{r}_{bench} rappresenta il rendimento medio del benchmark;
- λ rappresenta il parametro di avversione al rischio dell'investitore;
- x_i rappresenta il peso associato ad ogni titolo, ossia il capitale investito in ogni singola azione;
- z_i è una variabile binaria che assume valore 0 o 1;
- ε_i rappresenta la quota minima di capitale (in termini percentuali) che è possibile allocare ad ogni titolo presente in portafoglio;
- δ_i rappresenta la quota massima di capitale (in termini percentuali) che è possibile allocare ad ogni titolo presente in portafoglio;
- K rappresenta il numero massimo di titoli da detenere in portafoglio
- TE rappresenta il Tracking Error, che nel caso specifico viene calcolato tenendo in considerazione solo il downside risk $\rightarrow TE = \sum_{t=1; r_t < \bar{r}_{bench}}^T (r_t - \bar{r}_{bench})^2 / T$.

A questo punto, per permettere alla PSO di risolvere il problema, i vincoli devono essere tutti riformulati sotto forma di uguaglianza. Di conseguenza si ottiene:

⁴⁷ La scelta di utilizzare il rendimento percentuale al posto del rendimento logaritmico deriva dal fatto che, poiché le osservazioni dei prezzi prese sono giornaliere, l'effettiva differenza tra il rendimento percentuale e il rendimento logaritmo è trascurabile.

- $\sum_{i=1}^N x_i = 1 \rightarrow \left| \sum_{i=1}^N x_i - 1 \right| = 0;$
- $\sum_{i=1}^N z_i = K \rightarrow \left| \sum_{i=1}^N z_i - K \right| = 0;$
- $\varepsilon_i z_i \leq x_i \rightarrow \sum_{i=1}^N \max\{0; \varepsilon_i z_i - x_i\} = 0;$
- $x_i \leq \delta_i z_i \rightarrow \sum_{i=1}^N \max\{0, x_i - \delta_i z_i\} = 0;$
- $z_i \in \{0,1\} \rightarrow \sum_{i=1}^N |z_i(1 - z_i)| = 0;$
- $x_i \geq 0 \rightarrow \sum_{i=1}^N \max\{0; -x_i\} = 0.$

Una volta riformulati i vincoli, il problema di ottimizzazione che dovrà essere risolto mediante l'applicazione dell'algoritmo, tenendo conto della funzione di penalità, diventa:

$$\begin{aligned} \min_{x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n} \quad & \lambda[TE] - (1 - \lambda)[r_i - \bar{r}_{bench}] + 1/\varepsilon \left[\left| \sum_{i=1}^N x_i - 1 \right| + \left| \sum_{i=1}^N z_i - K \right| \right] \\ & + \left[\sum_{i=1}^N \max\{0; \varepsilon_i z_i - x_i\} \right] + \left[\sum_{i=1}^N \max\{0, x_i - \delta_i z_i\} \right] + \left[\sum_{i=1}^N |z_i(1 - z_i)| \right] \\ & + \left[\sum_{i=1}^N \max\{0; -x_i\} \right] \end{aligned}$$

Finora, citando i modelli che andranno testati, l'attenzione si è concentrata unicamente sulla misura di rischio; tuttavia, la formulazione di un modello di selezione di portafoglio che risulti poi applicabile in ambito pratico, richiede la formulazione e l'introduzione di un sistema di vincoli che sia in grado di far giungere il modello all'individuazione di un portafoglio ottimo che sia compatibile con i vincoli pratici che caratterizzano l'operatività sui mercati finanziari. Prima di spiegare nel dettaglio i vincoli che si è deciso di utilizzare, va ricordato che è la stessa presenza dei vincoli che rende il problema da risolvere NP-Hard, rendendo necessario per la risoluzione l'utilizzo di una metaeuristica, quale nel caso specifico la PSO; infatti, l'utilizzo di un metodo risolutivo "esatto" potrebbe non portare all'individuazione di alcuna soluzione al problema.

Tornando ai vincoli, il primo che viene utilizzato (vincolo 1) risulta comune alla maggior parte dei modelli di selezione di portafoglio, e viene chiamato vincolo di bilancio. Questo vincolo che prende in considerazione il prezzo degli asset finanziari e il capitale disponibile al tempo 0, richiede all'investitore di allocare tutto il capitale disponibile nei titoli in cui è possibile investire.

I vincoli (2)-(3) invece, sono posti per un controllo indiretto dei costi di transazione: questa rappresenta una novità rispetto al classico modello à la Markovitz, il quale ha come assunzioni di base la perfezione dei mercati e l'assenza di frizioni. I suddetti vincoli risultano quindi fondamentali,

in quanto un modello che non considera i costi di transazione può portare a risultati in termini di rischio-rendimento del portafoglio ottimo, non replicabili dai gestori nella realtà operativa. Prendendo spunto dal lavoro di Corazza et al. (2013), si è deciso di introdurre un controllo indiretto dei costi di transazione mediante un vincolo sul numero massimo di titoli in cui si può investire e uno sull'ammontare minimo e massimo di capitale disponibile (in termini percentuali) che si può investire nel singolo titolo; la scelta è stata fatta sulla base della semplicità interpretativa e applicativa dei suddetti vincoli, rafforzata dai numerosi studi che adottano la medesima formulazione⁴⁸. Nello specifico la semplicità emerge dal fatto che i vincoli scelti permettono di sgravarsi dall'onere importante di conoscere in via preventiva i costi di transazione associati ad ogni singolo strumento finanziario negoziato nei 4 mercati oggetto di studio. Nel momento in cui ci si trova a dover eseguire le transazioni, investire in un numero troppo limitato o troppo elevato di titoli potrebbe risultare poco conveniente finendo per ridurre parte del rendimento che si ottiene dall'investimento; lo stesso può essere detto per quanto concerne la decisione circa la parte di capitale da allocare ad ogni singolo titolo, aspetto che rimane collegato anche al tema della diversificazione.

Andando nel dettaglio, il vincolo 2 è caratterizzato dalla presenza della variabile binaria z_i la quale assumerà valore 0 se il titolo a rendimento aleatorio viene escluso dal portafoglio ottimo, mentre assumerà valore 1 nel momento in cui il titolo specifico appartenente all'universo investibile verrà inserito nel portafoglio ottimo; da ciò risulta chiaro come la sommatoria dei vari z_i debba essere uguale a K , ossia al vincolo sul numero massimo di titoli che si è deciso di detenere in portafoglio (nell'esperimento pratico si è deciso di settare due distinti valori di K , ossia $K=10$ e $K=20$, per testare la bontà del modello con questi due valori che sono spesso utilizzati in questa tipologia di studi⁴⁹).

I vincoli 3-4 invece sono caratterizzati dalla presenza di due ulteriori simboli, ossia ε_i e δ_i che rappresentano rispettivamente la percentuale minima e massima di ricchezza che può essere allocata al singolo titolo. Nel settaggio dei due parametri, per quanto riguarda la percentuale minima essa è stata fissata pari a 0,01% mentre la percentuale massima è stata fissata uguale per tutti gli indici ad un valore del 30%; la scelta è stata guidata dalla volontà di evitare un'eccessiva concentrazione della ricchezza su un numero limitato di titoli poco correlati tra loro (aspetto negativo del modello di selezione di portafoglio à la Markovitz) garantendo un'adeguata diversificazione.

L'ultimo vincolo da trattare viene inserito, in contrasto con le assunzioni del modello di selezione à la Markovitz classico, per tenere in considerazione alcune limitazioni normative vigenti in vari mercati. Il vincolo 6 richiede infatti che tutte le percentuali x_i appartenenti al vettore di dimensione N contenente i pesi dei singoli titoli, siano maggiori o uguali a 0: tutto ciò significa quindi che

⁴⁸ Tra i quali troviamo ad esempio Filippi et al. (2016), Beasley et al. (2003), Deng et al. (2012), Kaucic et al. (2020).

⁴⁹ Come in Kaucic et al. (2020), Angelelli et al. (2008), Salehpoor et al. (2019).

vengono vietate le vendite allo scoperto, le quali prevedono di vendere titoli che non si possiedono (presi in prestito da altri investitori) col fine di ricomprarli e restituirli ai legittimi proprietari pagando un prezzo inferiore all'acquisto.

Tornando alla funzione obiettivo del modello sotto esame, si evince come la misura di rischio adottata sia la semi-varianza, ossia una misura che si concentra sul downside risk. Questo indicatore rientra nel novero delle misure di rischio classiche, le quali tuttavia, andrebbero definite in maniera più corretta "misure di variabilità statistica", in quanto non sono state sviluppate propriamente ed esclusivamente per misurare il rischio finanziario.

A questo punto una domanda che sorge spontanea potrebbe fare riferimento alla motivazione che ha portato a scegliere la suddetta misura di rischio come base per uno dei due modelli che verrà testato su dati reali.

In letteratura è stata oramai verificata e accettata l'inadeguatezza della varianza come metro per misurare la rischiosità degli investimenti finanziari, in quanto essa presenta alcune limitazioni che la rendono inefficiente. La semi-varianza proposta nel primo modello condivide alcuni limiti della varianza classica (essendo anch'essa una misura statistica di variabilità) nonostante ciò, viene considerata maggiormente in grado di cogliere gli aspetti finanziari del problema, in quanto considera solo ed esclusivamente gli scostamenti negativi del rendimento effettivo dal rendimento atteso, quindi il downside risk. Ecco quindi spiegato il perché della scelta della suddetta misura di rischio come base del primo modello: la scelta di confrontare due modelli, uno dei quali basato sulla semi-varianza, deriva dalla volontà di comparare l'efficacia di una misura classica da contrapporre ad una misura moderna come il CVaR che verrà definito nello specifico in seguito.

3.2.1 EIT with Conditional Value at Risk

Presentata la struttura del primo modello, e spiegate le motivazioni che ne hanno determinato l'adozione, l'attenzione si sposta verso la descrizione del secondo modello che si andrà a testare sui mercati internazionali. Il modello in questione prevede l'utilizzo, quale misura di rischio, del Conditional Value at Risk, ossia una misura di rischio coerente che rappresenterà altresì la base per la costruzione del risk-reward ratio che verrà minimizzato nel problema.

Il modello in questione può essere sintetizzato come segue:

$$\begin{aligned} & \min RR && (5.2) \\ s. t. & \sum_{i=1}^N x_i = 1 && (1) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^N z_i = K \quad (2)$$

$$\varepsilon_i z_i \leq x_i \leq \delta_i z_i \quad (3)$$

$$z_i \in \{0,1\} \quad (4)$$

$$x_i \geq 0 \quad (5)$$

dove:

- R_x rappresenta il rendimento del portafoglio;
- R^α rappresenta il rendimento del benchmark;
- ϱ viene utilizzato per indicare la misura di rischio, quindi il CVaR;
- Il risk-reward ratio che dev'essere minimizzato può essere calcolato come

$$RR = \left\{ \frac{\varrho(R_x - R^\alpha) + \varepsilon_2}{\mu(R_x - R^\alpha)} \right\}, \text{ simile a quanto visto in Guastaroba et al. (2020);}$$

- x_i rappresenta il peso associato ad ogni titolo, ossia il capitale investito in ogni singola azione;
- z_i è una variabile binaria che assume valore 0 o 1;
- K rappresenta il numero massimo di titoli da detenere in portafoglio;
- ε_i rappresenta la quota minima di capitale (in termini percentuali) che è possibile allocare ad ogni titolo presente in portafoglio;
- δ_i rappresenta la quota massima di capitale (in termini percentuali) che è possibile allocare ad ogni titolo presente in portafoglio.

Per quanto concerne i vincoli indicati, essendo gli stessi utilizzati nel modello precedente, si è deciso di evitare di ripresentare la formulazione degli stessi in forma di uguaglianza. Ecco, quindi, che si procede direttamente con la presentazione della funzione obiettivo estesa:

$$\begin{aligned} \min_{x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_n} \quad & RR + 1/\varepsilon \left[\left| \sum_{i=1}^N x_i - 1 \right| + \left| \sum_{i=1}^N z_i - K \right| + \left[\sum_{i=1}^N \max\{0; \varepsilon_i z_i - x_i\} + \left[\sum_{i=1}^N \max\{0, x_i - \delta_i z_i\} \right] \right] \right. \\ & \left. + \left[\sum_{i=1}^N |z_i(1 - z_i)| \right] + \left[\sum_{i=1}^N \max\{0; -x_i\} \right] \right] \end{aligned}$$

3.3 Misure di rischio coerenti

Prima di procedere con la descrizione dettagliata delle applicazioni su dati reali, con i conseguenti risultati, risulta fondamentale introdurre brevemente il concetto di misura di rischio coerente, in quanto la scelta di utilizzare un modello basato su una misura di rischio di questo tipo (quale il CVaR)

è determinata dalla volontà di estendere il modello di selezione di portafoglio à la Markovitz rendendolo più aderente alla pratica operativa dei mercati finanziari.

Indirizzando l'attenzione verso la funzione obiettivo, il modello di selezione classico à la Markovitz utilizza come misura di rischio la varianza, la quale però presenta limiti non indifferenti e di conseguenza potrebbe risultare fuorviante. Nello specifico tra le limitazioni vale la pena citare che:

- La varianza non è una misura di rischio, è una misura di variabilità statistica che permette di determinare la distanza tra una variabile casuale e il suo valore medio;
- La varianza considera allo stesso modo, quindi assegna lo stesso peso, la stessa importanza a scostamenti positivi e negativi dell'osservazione dal valore medio. Questo fa sì che la varianza assegni pari rischiosità a rendimenti realizzati inferiori o superiori al rendimento atteso;
- La varianza è molto sensibile a valori anomali;
- La varianza, infine, eleva al quadrato tutte le differenze, finendo per fornire dei risultati distorti, nel senso che va ad amplificare l'importanza delle variazioni più significative e riduce l'importanza delle variazioni di entità contenuta.

Il concetto di rischio esemplificato tramite l'utilizzo della varianza risulta quindi inadatto ad un utilizzo in ambito finanziario in quanto un investitore non percepirà come rischio, bensì come opportunità, l'ottenere un rendimento superiore al rendimento medio. La varianza considera allo stesso modo il downside risk e l'upside potential, fornendo unicamente una misura di quanto una osservazione si allontana dalla sua media.

La varianza e i suoi "derivati" (come la semi-varianza proposta nel modello precedente e il MAD) possono essere fatti rientrare all'interno delle misure classiche di rischio diffuse e utilizzate prevalentemente dagli anni 50' fino agli anni 80', le quali sono state in seguito oggetto di riesame e sono state via via sostituite dalle misure pre-moderne (come il VaR), molto diffuse tra gli anni 90' e gli inizi degli anni 2000', e infine dalle misure moderne che hanno come obiettivo l'individuazione di una misura di rischio in grado di cogliere quelli che sono gli aspetti finanziari. Prima di trattare le misure di rischio coerenti, vale la pena chiarire perché due misure come la semi-varianza e il MAD rientrino nella categoria delle misure di rischio classiche. Prescindendo dalla classificazione temporale, una misura di rischio come la semi-varianza a primo impatto potrebbe sembrare una misura coerente in quanto tiene in considerazione solo gli scostamenti negativi dei rendimenti dal loro valore medio; si potrebbe dire quindi che cerca di inglobare la dimensione finanziaria in quanto misura la possibilità che si ottengano rendimenti inferiori ad un certo benchmark. Dal punto di vista funzionale però, essa rimane una misura di variabilità, una misura statistica alla quale "si fa fare un altro lavoro". Lo stesso discorso può essere esteso al Mean Absolute Deviation, il quale considera il

valore assoluto dello scarto della realizzazione dalla sua media: anch'esso oltre ad essere fortemente influenzato dagli outliers, risulta essere una misura di variabilità statistica.

Terminata questa breve precisazione, si può dare inizio alla trattazione delle misure di rischio premoderne e moderne, le quali a differenza delle classiche sono state proposte esplicitamente per misurare il rischio finanziario.

Nell'ambito della finanza matematica, ha riscontrato un crescente interesse la ricerca di metodi per la valutazione del rischio connesso alle posizioni finanziarie. In questo contesto ha assunto una grande importanza la nozione di "misura di rischio coerente" introdotta da Artzner et al. (1999), i quali hanno definito alcuni requisiti fondamentali che ogni misura di rischio finanziario dovrebbe soddisfare.

Innanzitutto, prima di esporre i suddetti requisiti, risulta spontaneo chiedersi cos'è una misura di rischio: la risposta a questa domanda è tutt'altro che scontata, in quanto è risaputo che il concetto di rischio non è definibile in maniera univoca per ogni investitore, bensì gode di forte soggettività. Sebbene questa connotazione di forte relatività, in letteratura è stata proposta la seguente definizione di misura di rischio:

$$\rho: X \rightarrow \mathbb{R}$$

La formulazione mette in evidenza che una misura di rischio altro non è che una funzione che assegna un valore numerico non negativo ad una certa variabile casuale X , che può essere pensata come il rendimento che realizzerà il portafoglio sotto esame nel futuro. È quindi una funzione che ha come dominio l'insieme delle variabili casuali, ossia in questo caso l'insieme dei rendimenti casuali, e va nei numeri reali.

I valori che può assumere possono essere 0 (quando inserisco nella funzione di rischio ρ un rendimento certo), mentre sarà maggiore di 0 per rendimenti rischiosi (più saranno rischiosi più questi valori saranno grandi). Secondo gli autori, inoltre, queste misure di rischio possono essere utilizzate come requisiti patrimoniali per regolare il rischio assunto dagli investitori, nel senso che possono rappresentare minimo ammontare che è necessario aggiungere alla posizione X per renderla accettabile al supervisore.

Questa definizione, che a primo impatto può apparire di facile applicazione, in realtà nasconde una complicazione importante, ossia il fatto che si valuti una funzione il cui argomento è una variabile casuale. Una variabile casuale è descritta da una funzione di ripartizione o distribuzione di probabilità, quindi quando si eseguono i calcoli la funzione deve fare i conti tenendo in considerazione la distribuzione di probabilità. Questa definizione appare tuttavia troppo ampia, è una definizione di misura di rischio generale applicabile e veritiera per diversi ambiti, ma lo scopo in questo caso è

definire una misura di rischio propria per l'ambito finanziario. Per questa finalità si può tornare agli autori citati in precedenza, Artzner et al., i quali nel 1999 propongono uno studio in cui citano alcune proprietà specifiche e tipiche di una misura di rischio finanziario, le quali vengono applicate ai rendimenti (sebbene siano di più facile interpretazione se applicate a valori assoluti). Le suddette proprietà possono essere elencate come segue:

- *Positività*: questa proprietà assicura che la funzione assumerà necessariamente valori maggiori o uguali a zero. Inserendo come input un rendimento certo la funzione assumerà valore 0, altrimenti assumerà valori positivi quando l'input sarà un rendimento rischioso. Questo valore potrebbe per esempio rappresentare l'ammontare della perdita potenziale nel caso in cui si concretizzi il rischio;
- *Linearità*: questa proprietà sancisce che costruire una relazione lineare tra la misura di rischio e il rendimento futuro potrebbe aiutare a rendere più semplice dal punto di vista computazionale la risoluzione del problema di ottimizzazione. Nonostante ciò, questa proprietà non può essere sempre rispettata;
- *Invarianza transizionale*: questa proprietà assicura che investendo in due titoli, uno rischioso e uno a rendimento certo, il rischio del portafoglio si contragga proporzionalmente alla quota investita nel titolo a rendimento certo $\rho(X + C) = \rho(X) - C \quad \forall v. c. X, C \in R$. C rappresenta la componente di "cash", ossia il rendimento certo espresso in termini monetari;
- *Monotonicità*: questa proprietà assicura che, se $X \leq Y$, allora $\rho(X) \leq \rho(Y)$ per ogni variabile casuale X ed Y . Questa proprietà permette di sfruttare le possibilità di arbitraggio nel mercato, in quanto quando esse esistono questa misura permette di ottenere un profitto risk-free attribuendo maggiore rischiosità al titolo col rendimento minore.
- *Convessità*: è una proprietà squisitamente finanziaria, e può essere rappresentata come segue: $\rho(\theta R_X + (1 - \theta)R_Y) \leq \theta \rho(R_X) + (1 - \theta)\rho(R_Y)$ con R_X ed R_Y che rappresentano i rendimenti di due attività finanziarie e il parametro $\theta \in [0; 1]$. Questa formulazione esprime il concetto di convessità, ossia una proprietà che viene sempre richiesta in ambito finanziario ad una misura di rischio, e che permette di rilevare la contrazione del rischio quando essa esiste (se infatti poniamo $\rho = 1$ non abbiamo contrazione). Tutto ciò permette di mettere in evidenza l'importanza della diversificazione, in quanto dalla formula emerge che la rischiosità del portafoglio costruito dalla combinazione dei due titoli rischiosi risulta inferiore alla somma delle rischiosità relative ai titoli valutati singolarmente.

Verificare il rispetto di quest'ultima proprietà può risultare non così immediato; a riguardo può essere d'aiuto ricordare che la convessità può essere verificata anche indirettamente, andando a vedere se

essa stessa rispetta due ulteriori proprietà, ossia la sub-additività e la positiva omogeneità, con quest'ultima che afferma che il rischio risulta essere proporzionale alle fonti di rischio che si hanno.

Di seguito si indicano le formulazioni:

- *Sub-additività*: $\rho(R_X + R_Y) \leq \rho(R_X) + \rho(R_Y)$. Dall'espressione emerge come questa proprietà risulti coerente con il concetto di diversificazione, in quanto il rischio del portafoglio risulta essere inferiore, contratto, rispetto alla somma delle rischiosità individuali dei singoli titoli. La proprietà sancisce quindi che il rischio di un portafoglio non può mai essere superiore alla somma dei rischi relativi ai titoli che lo compongono. Gli stessi autori citati in precedenza sanciscono questo assioma con la celebre frase "A merger does not create extra-risk" (Artzner et al. 1999).
- *Positiva omogeneità*: $\rho(\alpha R_X) = \alpha \rho(R_X) \forall \alpha \in R^+$. Con questa espressione si evidenzia come l'aumento del capitale investito in un titolo a rendimento aleatorio, porta ad un aumento proporzionale anche della rischiosità connessa all'investimento stesso. Va ricordato, che la rischiosità connessa all'investimento, può essere influenzata anche dalla dimensione della posizione, che se molto cospicua potrebbe richiedere tempi di liquidazione alquanto rilevanti. Questa variabile va quindi considerata nella determinazione del valore futuro della posizione.

Una misura di rischio che rispetta tutte queste proprietà può essere quindi classificata come misura di rischio coerente.

3.3.1 Value at Risk

Tra le misure di rischio pre-moderne troviamo una misura introdotta verso la fine degli anni 80', ossia il Value at Risk. Già dal nome, viene evidenziato come con le misure pre-moderne e successivamente moderne, si assista ad un cambio di ottica passando da misure percentuali a misure assolute. Il VaR, proposto dalla banca d'affari americana J.P. Morgan per avere un indice sintetico di rischio (introdotto poi all'interno della normativa relativa agli accordi di Basilea per il calcolo dei requisiti patrimoniali minimi), rappresenta la massima perdita potenziale che si può verificare nell' $\alpha\%$ dei casi in un orizzonte temporale pari all'holding period: questa misura risulta influenzata dalla scelta dell'intervallo di confidenza e dalla lunghezza dell'intervallo temporale. Già con questa misura pre-moderna si assiste ad un cambio di logica, in quanto il VaR esprime il rischio in termini monetari e mantenendo la stessa unità di misura relativa al capitale investito.

Questa misura di rischio può essere caratterizzata tramite alcune proprietà:

- $VaR_\epsilon(X + C) = VaR_\epsilon(X) - C$: indicando con X un rendimento aleatorio espresso in termini monetari e con C un rendimento certo espresso in termini monetari, l'espressione evidenzia come il VaR della somma dei due rendimenti sia uguale al VaR calcolato sul rendimento

rischioso al netto della componente di cash che si possiede. Il rispetto della proprietà dell'invarianza transazionale rappresenta un bel passo in avanti rispetto alla varianza;

- $VaR_\epsilon(\lambda X) = \lambda VaR_\epsilon(X)$: indicando con λ una costante positiva, l'espressione evidenzia il fatto che il VaR sia omogeneo positivo.

L'esclusione del VaR dalle misure di rischio moderne deriva dal fatto che soffre di alcune lacune che lo portano a crollare in determinati punti. Innanzitutto, è stato dimostrato come il VaR non risponda in maniera idonea in tutti i casi in cui si trattano aggregazioni di più fonti di rischio: in determinate situazioni si possono costruire dei portafogli relativamente ai quali, il VaR del portafoglio risulta superiore alla somma del VaR delle singole fonti di rischio che compongono il portafoglio stesso. Il VaR non è sempre in grado di cogliere i benefici della diversificazione, anzi in determinate situazioni viene meno la proprietà di sub-additività citata in precedenza (e di conseguenza la proprietà di convessità), il che fa sì che la misura non sia una misura di rischio coerente. Un'ulteriore lacuna del VaR si riscontra nel fatto che essendo una misura soglia, non fornisce alcuna informazione sull'ammontare e sulla distribuzione delle perdite che eccedono tale soglia. Se ad esempio calcolando il VaR al 5% mensile di due banche emerge un valore di 100.000€, si sta affermando che le banche in 5 dei prossimi 100 mesi subiranno una perdita di almeno 100.000€: da ciò deriva che le perdite effettive future potranno essere l'una molto diversa dall'altra, una banca in quei mesi potrebbe perdere effettivamente quell'importo mentre l'altra potrebbe perdere in ognuno dei mesi cifre di gran lunga superiori.

Infine, un'ulteriore limitazione relativa al VaR è insita nella sua stessa definizione fornita dall'istituzione che l'ha proposta: alla base dell'approccio RiskMetrics per il calcolo del VaR si ha l'assunzione di normalità dei rendimenti delle attività finanziarie, la quale viene fortemente smentita dalle evidenze empiriche. Il considerare i rendimenti delle attività finanziarie come aventi una distribuzione normale, porta ad una forte sottostima del rischio del portafoglio, in quanto le evidenze empiriche fanno emergere una marcata asimmetria negativa per diverse asset-class.

3.3.2 Tail Conditional Expectation e Worst Conditional Expectation

Tra le prime misure di rischio coerenti proposte in letteratura troviamo la Tail Conditional Expectation e la Worst Conditional Expectation, le quali si concentrano non su un valore soglia bensì su tutta la coda sinistra della distribuzione dei rendimenti oltre un valore soglia.

$$TCE_\alpha(X) = -E[X|X \leq -VaR_\alpha(X)]$$

Il TCE come scritto nell'espressione considera tutte le perdite dopo il VaR, considera tutte le perdite più gravose e ne calcola il valore medio, ossia la perdita attesa nel peggiore dei casi.

$$WCE_{\alpha}(X) = -\inf\{E[X|A] \mid P[A] > \alpha\}$$

Il WCE invece risulta essere una misura più raffinata rispetto al TCE, raffinatezza che però viene pagata dal punto di vista applicativo: questa misura è infatti diffusa dal punto di vista teorico ma risulta di applicazione alquanto improbabile dal punto di vista operativo.

Come evidenziato dall'espressione questa misura richiede di prendere il valor medio più piccolo del rendimento dato uno scenario "a". "a" quindi rappresenta un evento di varia natura (dal discorso del governatore di una banca centrale fino alle elezioni di un presidente), evento che avrà un impatto positivo o negativo, per esempio, sul capitale di una banca. La difficoltà di applicazione risiede nel fatto che questa misura di rischio richiede di considerare tutti gli scenari peggiori (che ricadono nella coda sinistra della distribuzione, ipotizzando un livello di confidenza del 5%), e per ognuno di questi ipotetici scenari richiede di calcolarne il valor medio, e infine di prendere il minimo. L'inapplicabilità deriva dal fatto che risulta impossibile considerare tutti gli scenari possibili che possono venirsi a verificare, o in altri termini non è possibile conoscere tutto lo spazio di probabilità sottostante.

3.3.3 Expected shortfall, o Conditional Value at risk

L'Expected Shortfall o Conditional VaR alla base del secondo modello, è stato sviluppato con l'obiettivo di coniugare in un'unica misura di rischio gli aspetti positivi del TCE e del WCE.

$$ES_{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha} (E[X1_{\{X \leq x^{\alpha}\}}] - x^{\alpha}(P[X \leq x^{\alpha}] - \alpha))$$

Anche il CVaR come il TCE richiede di calcolare la media delle perdite oltre il valore soglia rappresentato dal VaR, però introduce un fattore di aggiustamento con l'obiettivo di considerare il fatto che la distribuzione dei rendimenti delle attività finanziarie risulta spesso asimmetrica, e non di certo normale. Per chiarezza si può evidenziare che il primo addendo della formulazione risulta molto simile all'espressione del TCE, mentre il secondo addendo rappresenta la correzione appena citata. Se per esempio la distribuzione dei rendimenti dell'asset sotto analisi fosse normale, il secondo addendo avrebbe valore 0 e il CVaR si ridurrebbe al calcolo del TCE; se invece ci si trova di fronte ad una distribuzione asimmetrica, il valore del secondo addendo risulta essere non negativo e va a correggere il valore per tenere in considerazione la distribuzione. Per quanto riguarda la tecnica di

stima, questa misura può essere calcolata in due modi: da un lato conoscendo lo stimatore dell'ES, se si conoscesse anche la funzione di ripartizione analitica dell'ES sarebbe sufficiente calcolare l'integrale della funzione da 0 ad α e dividerlo poi per α . Altrimenti come visto precedentemente con il VaR, è sufficiente ordinare i rendimenti dal maggiore al minore, prenderne ad esempio il 5% e calcolarne la media.

Per concludere il capitolo, prima di concentrarsi nell'analisi dell'applicazione dei modelli e dei relativi risultati, è importante specificare la formulazione utilizzata per il calcolo del CVaR, da cui dipende il valore del risk-reward ratio. Nell'elaborato si è deciso, per motivi di semplicità computazionale, di formulare il CVaR in termini di expected shortfall, come proposto da Acerbi e Tasche nel 2002.⁵⁰ I due autori hanno dimostrato l'uguaglianza tra le due misure in caso di distribuzione continua dei rendimenti, utilizzando come formula per l'ES la seguente scrittura:

$$ES_n^{(\alpha)}(X) = -\frac{\sum_{i=1}^w X_{i:n}}{w}$$

dove:

- $X_{i:n}$ rappresenta l'insieme degli $(1 - \alpha)\%$ dei rendimenti peggiori, indicati con la lettera w , tra tutte le N realizzazioni della variabile casuale X .

Da ciò si può derivare la formulazione del CVaR in termini di ES utilizzata nell'applicazione pratica per la risoluzione del problema di ottimizzazione, che diventa:

$$ES_n^{(\alpha)}(x) = -\sum_{i=1}^n x_i r_{w,i}$$

Dove il termine $r_{w,i}$ rappresenta la media dei peggiori rendimenti individuati nell' $(1 - \alpha)\%$ dei casi, che viene calcolato come:

$$r_{w,i} = \frac{1}{w} \sum_{i=1}^w r_i$$

Nel codice che verrà presentato nell'appendice B, quindi, vengono messi in evidenza tutti i passaggi utili al calcolo della misura di rischio, dall'individuazione del numero intero di rendimenti da

⁵⁰ Acerbi, C., Tasche, D., (2002). On the coherence of Expected Shortfall, Journal of Banking & Finance, 26, 1487-1503

considerare per cogliere l' $(1 - \alpha)\%$ dei casi, fino al calcolo della media dei suddetti rendimenti peggiori.

3.4 Applicazione dei modelli di selezione di portafogli Enhanced Indexing

In quest'ultima sezione del terzo capitolo, una volta analizzato brevemente il periodo temporale oggetto di studio, si dà una breve descrizione dei parametri dei modelli e infine si commentano i risultati ottenuti dall'applicazione dei modelli mediante la PSO. Il periodo analizzato contiene la recente crisi economica innescata dallo scoppio della pandemia da Coronavirus, quindi sarà interessante andare a vedere come si comporta l'algoritmo in situazioni particolari caratterizzate da ampia volatilità e un diffuso timore circa il proprio risparmio e gli investimenti azionari, tipici dei momenti di crisi. L'obiettivo è altresì verificare la bontà dei modelli di selezioni individuati, per capire se ipotizzando un investitore che investe al tempo $t=0$, sarebbero stati in grado di individuare un portafoglio in grado di generare ricchezza anche in un periodo simile.

L'analisi empirica svolta prende come riferimento 4 indici azionari internazionali, relativamente ai quali sono state scaricate le serie storiche di tutti i titoli componenti l'indice, per un periodo che va dal 01/01/2017 al 31/12/2020. Considerando che, nel periodo sotto esame alcuni titoli sono usciti dal paniere di riferimento, o si è assistito alla quotazione di nuove società, gli indici saranno caratterizzati dalla mancanza di alcuni elementi. Gli indici di mercato e i relativi titoli oggetto di studio sono i seguenti:

- Mercato italiano, indice di riferimento FTSE MIB 40, composto dai seguenti titoli: A2A, Amplifon, Atlantia, Azimut holding, Banca Generali, Banca Mediolanum, Banco BPM, BPER Banca, Buzzi Unicem, Campari, Cnh Industrial, Diasorin, Enel, Eni, Exor, Ferrari, Fineco Bank, Generali, Hera, Interpump Group, Intesa San Paolo, Inwit, Italgas, Leonardo, Mediobanca, Leonardo, Moncler, Pirelli, Poste Italiane, Prysmian, Recordati, Saipem, Snam, Stellantis, Stmicroelectronics, Telecom, Tenaris, Terna, Unicredit, UnipolSai. I titoli presi in considerazione sono solo 39 e non 40, in quanto il titolo Nexi non era presente all'inizio del periodo di riferimento;
- Mercato tedesco, indice di riferimento DAX 30, composto dai seguenti titoli: Adidas, Allianz, Basf, BMW, Bayer, Continental, Covestro, Daimler, Delivery Hero, Deutsche Bank, Deutsche Boerse, Deutsche Post, Deutsche Wohnen, Deutsche Telekom, E.On, Fresen.Med.Care, Fresenius, Heidelbercement, Henkel, Infineon Tech.AG, Linde Plc EO, Merck, MTU Aero Engines, Muench Rueckvers, RWE, SAP, Siemens, Volkswagen, Vonovia. Anche in questo caso sono stati esclusi 3 titoli, ossia Siemens Energy, Delivery hero e Linde Plc per la stessa motivazione precedente;

- Mercato indiano, indice di riferimento Nifty 50, composto dai seguenti titoli: Adani Ports and Special Economic Zone Ltd., Asian Paints Ltd., Axis Bank Ltd., Bajaj Auto Ltd., Bajaj Finance Ltd., Bajaj Finserv Ltd., Bharat Petroleum Corporation Ltd., Bharti Airtel Ltd., Britannia Industries Ltd., Cipla Ltd., Coal India Ltd., Divi's Laboratories Ltd., Dr. Reddy's Laboratories Ltd., Eicher Motors Ltd., Grasim Industries Ltd., HCL Technologies Ltd., HDFC Bank Ltd., Hero MotoCorp Ltd., Hindalco Industries Ltd., Hindustan Unilever Ltd., Housing Development Finance Corporation Ltd., ICICI Bank Ltd., ITC Ltd., Indian Oil Corporation Ltd., IndusInd Bank Ltd., Infosys Ltd., JSW Steel Ltd., Kotak Mahindra Bank Ltd., Larsen & Toubro Ltd., Mahindra & Mahindra Ltd., Maruti Suzuki India Ltd., NTPC Ltd., Nestle India Ltd., Oil & Natural Gas Corporation Ltd., Power Grid Corporation of India Ltd., Reliance Industries Ltd., Shree Cement Ltd., State Bank of India, Sun Pharmaceutical Industries Ltd., Tata Consultancy Services Ltd., Tata Consumer Products Ltd., Tata Motors Ltd., Tata Steel Ltd., Tech Mahindra Ltd., Titan Company Ltd., UPL Ltd., UltraTech Cement Ltd., Wipro Ltd.. Anche in questo caso sono stati esclusi due titoli, ossia HDFC Life Insurance Company Ltd. e SBI Life Insurance Company Ltd.;
- Mercato messicano, indice di riferimento IPC35, composto dai seguenti titoli: Alfa SA A, Alsea SA, America Movil SAB de CV L, Arca Continental, SAB de CV, S.A., Bolsa Mexicana de Valores SA de CV, Cemex SA CPO, Coca-Cola Femsa SAB de CV UBL, Corporacion Inmobiliaria Vesta, S.A.B. DE C.V., El Puerto de Liverpool SAB de CV, Fomento Economico Mexicano S.A.B. de C.V., Genomma Lab Internacional SA de CV, Gruma SAB B, Grupo Aeroportuario del Centro Norte, S.A.B. de C.V., Grupo Aeroportuario del Pacifico, S.A.B. de C.V., Grupo Aeroportuario del Sureste SAB de CV B, Grupo Bimbo S.A.B., Grupo Carso SAB de CV, Grupo Cementos de Chihuahua SAB de CV, Grupo Elektra S.A.B. de C.V., Grupo Financiero Banorte O, Grupo Financiero Inbursa O, Grupo Mexico SAB de CV B, Grupo Televisa SAB CPO, Industrias Penoles, Infraestructura Energetica Nova S.A.B. de C.V., Kimberly Clark de Mexico S.A.B. de C.V. A, Megacable Holdings SAB de CV, ORBIA ADVANCE CORPORATION SAB de CV, Promotora y Operadora de Infraestructura SAB de CV, Qualitas Controladora S.A.B de C.V., Regional, S.A. de C.V., Telesites S.A.B. de C.V., Walmart de Mexico SAB de CV. Anche in questo caso sono stati esclusi due titoli, ossia Banco del Bajio SA e Becle, S.A. De C.V.

I modelli oggetto di studio sono stati applicati ad un periodo temporale di 4 anni, andando a costruire 4 scenari temporali; nello specifico si è deciso di adottare un periodo in-sample con lunghezza di 8 mesi, e destinare gli ulteriori 4 mesi che compongono l'anno a periodo out-of-sample; ciò significa che si ipotizza di individuare una adeguata selezione di portafoglio per un investitore che alla fine di

Agosto decide di investire il proprio capitale fino alla fine dell'anno (o modificare la composizione del proprio portafoglio dopo 8 mesi di analisi). La suddivisione dei diversi orizzonti temporali in periodo in-sample e futuro virtuale permette di utilizzare il primo periodo come campo per la stima di tutti i parametri richiesti dal problema e per selezionare il portafoglio ottimo, il quale poi verrà testato nel futuro virtuale per verificarne la bontà in termini di extra-rendimento rispetto al benchmark e rischiosità.

I 4 scenari che si andranno a valutare di conseguenza sono:

- *Scenario 1, dal 01/01/2017 al 31/12/2017*: il 2017 è stato un anno alquanto positivo per quanto riguarda la borsa valori, e in generale per l'economia, in Italia e in Germania. In Italia la fiducia dei consumatori e degli investitori, accompagnata da una generale accelerata dell'economia globale e dalla diffusione dei fondi passivi che "raffreddano i mercati", ha permesso al listino milanese di chiudere l'anno con un rialzo del 13.6%. Anche l'economia tedesca ha beneficiato di una generale ripresa dell'economia e della domanda, e aiutata anch'essa dalle politiche accomodanti della BCE ha chiuso il 2017 con il maggior tasso di crescita del PIL negli ultimi 6 anni (2.2%), e una crescita del listino azionario principale del 14%. Analizzando invece la situazione messicana, si nota che l'indice preso come riferimento nell'elaborato ha affrontato un periodo di difficoltà a partire da Giugno, ma è in ogni caso riuscito a recuperare alla fine dell'anno. Dopo un 2016 alquanto complicato l'IPC e l'economia messicana hanno ripreso vigore, nonostante ciò i terremoti, accompagnati da altri eventi atmosferici, hanno duramente colpito il settore petrolifero comportando una frenata della crescita che si assesta del 2.1% in termini di PIL e del 6.8% circa il listino azionario. Da evidenziare un altro fattore importante: il 2017 è stato anche l'anno che ha visto "morire" la volatilità⁵¹, nel senso che l'indice VIX⁵² ha fatto registrare valori medi e picchi a ribasso quasi mai registrati negli ultimi 35 anni. In India nel 2017, sebbene la crescita non abbia rispettato le attese di un +7.4% annuo a causa dell'introduzione di una tassa unica sui beni e sulla cancellazione di circa l'86% del denaro in circolazione, l'indice azionario ha iniziato un percorso di crescita che ha fatto registrare un +30% nell'anno, grazie soprattutto al piano da 32 miliardi per salvare le banche pubbliche e un insieme di politiche per facilitare l'attività d'impresa
- *Scenario 2, dal 01/01/2018 al 31/12/2018*: a fare da contro altare al 2017 si è assistito nel 2018 ad un vero e proprio "hannus orribilis" per quanto concerne le borse europee. Dopo un anno ricco di successi e soddisfazioni è tornata a farsi sentire la volatilità, accompagnata da

⁵¹ Borse: 2017, l'anno in cui "mori" la volatilità, 2017. Il Sole 24 Ore, 31/10/2017.

⁵² Il VIX è un indice sulla volatilità creato dal Chicago Board Options Exchange. È il primo indice in grado di quantificare le aspettative in tempo reale sulla volatilità dei mercati.

una generale sfiducia nei mercati determinata da vari eventi, tra i quali le continue tensioni commerciali tra Cina e USA, l'accendersi dei dialoghi sulla Brexit e l'incertezza politica che ha attanagliato da un lato la Germania con i problemi del partito di maggioranza (la CDU di Angela Merkel) e da un lato l'Italia con i soliti problemi legati all'incertezza politica (stuzzicata dalla nascita del governo giallo-verde) e agli scontri con l'UE per quanto concerne la manovra di bilancio. Nello specifico il DAX ha perso il 18.2% e il FTSE MIB il 16.1%. La generale situazione di tensione ha colpito anche il mercato messicano, con l'indice principale che ha chiuso con il peggior risultato in 17 anni, un -15%. Anche il Messico è stato influenzato dall'incertezza su economia e commercio derivante dalla situazione di USA e Regno Unito e dall'incertezza generata dalle elezioni che hanno portato alla vittoria della sinistra guidata da Lopez Obrador, relativamente al quale non c'è certezza circa la futura gestione delle difficoltà dell'economia del paese. Il mercato azionario indiano nel 2018 è stato, invece, caratterizzato da elevata volatilità: ad esempio, il 5 e l'8 Febbraio si è verificata una grossa perdita dell'indice NIFTY50 di quasi 400 punti, dovuta alle voci circa la possibile introduzione di una tassa sul capital gain relativo ad azioni vendute dopo 12 mesi dall'acquisto, pari al 10%. In generale il 2018 per l'indice si è chiuso con 7 mesi caratterizzati da perdite e 5 da guadagni, che hanno comunque fatto chiudere l'anno in rialzo.

- *Scenario 3, dal 01/01/2019 al 31/12/2019*: il 2019 è stato un anno caratterizzato dalla ripresa dei listini azionari. In particolar modo sia il FTSE MIB che il DAX hanno preso slancio dal venir meno sui timori circa le decisioni delle banche centrali. Nello specifico il 2019 è stato un anno caratterizzato da politiche monetarie molto accomodanti, che ha spinto fortemente al ribasso i rendimenti delle obbligazioni dando grande impulso al mercato dei bond e all'azionario. Sebbene i listini principali di Italia e Germania abbiano chiuso l'anno con crescite da record, rispettivamente del 28.2% e del 25%, l'economia reale alla fine dell'anno ha iniziato a dare segnali di contrazione, relativamente soprattutto alla produzione industriale (in Italia) e alle esportazioni in generale in Germania, colpita dalle forti tensioni commerciali che fanno stentare le commesse oltreoceano. Diversa è la situazione in Messico, dove l'indice di borsa sotto esame ha chiuso l'anno praticamente alla pari, ma su livelli alquanto inferiori rispetto al 2017 e al 2018, a causa della debolezza economica, da una contrazione degli investimenti, da tassi interessi elevati, dall'incertezza circa la policy domestica dall'insediamento del nuovo governo e dalle tensioni tra USA e Cina. Il mercato indiano, anche nel 2019 si è dimostrato molto volatile: sebbene dal punto di vista dell'economia reale l'anno è stato caratterizzato da un leggero rallentamento dovuto alle tensioni commerciali tra

USA e Cina e alle proposte di nuove tasse domestiche, l'indice di riferimento ha chiuso l'anno con una crescita di circa il 13%.

- *Scenario 4, dal 01/01/2020 al 31/12/2020*: il 2020 passerà alla storia come il tristemente noto anno che ha visto subito il diffondersi della pandemia dal Covid-19, con il conseguente blocco della quasi totalità delle attività economiche (se non quelle essenziali alla sopravvivenza) e i lockdown diffusi in maniera capillare in ogni paese del mondo, a periodi alterni in base alla diffusione del virus. Nello specifico i listini azionari hanno fatto registrare i minimi nei mesi di Marzo e Aprile, salvo poi ripartire a diverse velocità fino a tornare a livelli pre-crisi alla fine dell'anno. Nello specifico la Germania è riuscita a recuperare la maggior parte delle perdite in pochi mesi, salvo poi correggere leggermente ad Ottobre col riacutizzarsi dei contagi prima di ricominciare la risalita. Lo stesso si può dire dell'indice messicano, il quale dopo i minimi di Marzo (l'indice ha fatto segnare un -28% da Gennaio) ha vissuto mesi di recupero lento fino alla fine di Ottobre, periodo in cui in soli due mesi ha recuperato tutte le perdite del periodo per chiudere in rialzo rispetto ai valori di inizio anno. Anche in India si è verificata una situazione simile, con ingenti perdite nel mese di Marzo, le quali sono state poi recuperate durante l'anno e hanno portato l'indice a guadagnare nel complesso un +16%. Questo è un fenomeno tipico delle economie dei paesi emergenti, le quali essendo più fragili rispetto a quelle dei paesi avanzati sono soggette a maggiore volatilità: nei periodi di crisi gli indici tendono a crollare in maniera più importante, salvo poi presentare tassi di recupero e crescita fuori dal comune. Nello specifico, tuttavia, la pandemia da coronavirus ha in un certo senso normalizzato i panieri di tutte le economie mondiali, in quanto con lo scoppio della pandemia tutte hanno sofferto di crolli nell'ordine del 30%, indipendentemente dalla solidità dell'economia del paese. La pandemia ha causato il blocco totale delle attività economiche, colpendo indistintamente paesi attrezzati e meno attrezzati, ma la differenza si è notata nelle tempistiche di ripresa: mentre i paesi sviluppati si sono ripresi con una determinata velocità, nei paesi emergenti si è assistito a recuperi in tempi più stretti, mostrando tassi di crescita elevatissimi. L'analisi in ogni caso si limita ai valori di borsa, perché per quanto concerne l'impatto sociale, esso non è stato assorbito in egual modo da tutti gli stati.

Di seguito vengono proposti i grafici che dimostrano l'andamento dei listini azionari oggetto dello studio, nel periodo di riferimento, con l'obiettivo di permettere una maggiore comprensione circa l'andamento dei mercati che verranno analizzati.

Figura 14 Andamento FTSEMib 2017-2020

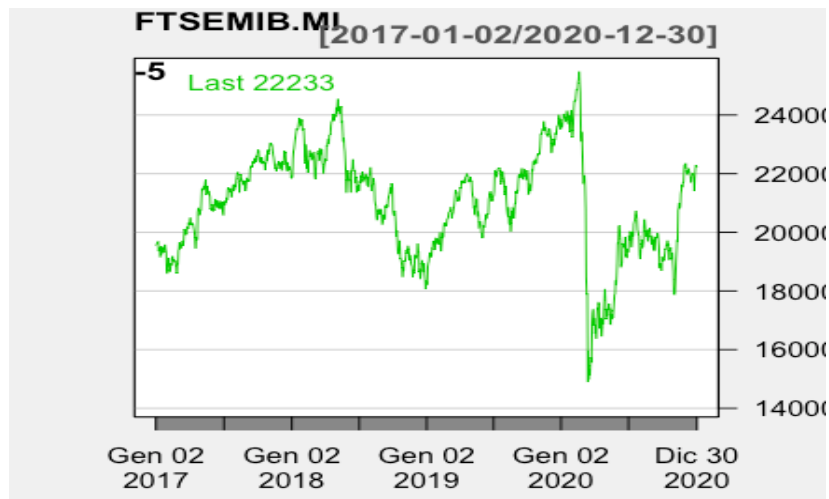


Grafico ottenuto mediante il software RStudio

Figura 15 Andamento DAX 2017-2020

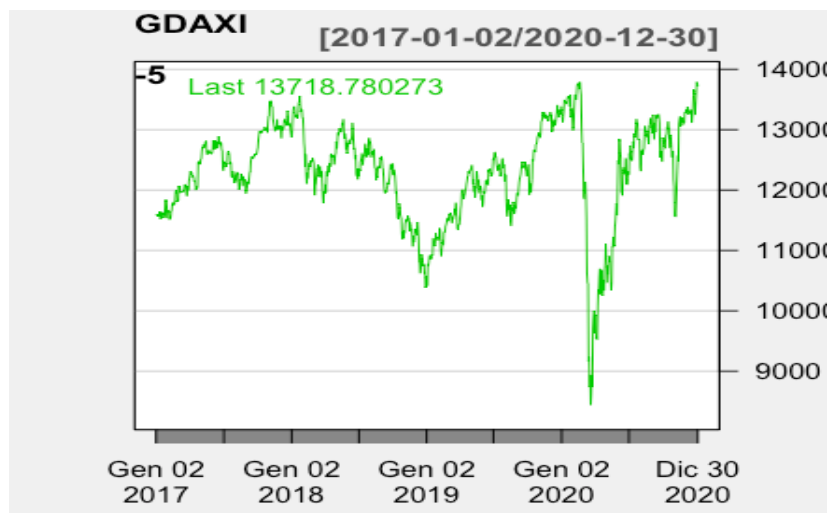


Grafico ottenuto mediante il software RStudio

Figura 16 Andamento IPC 2017-2020



Grafico ottenuto mediante il software RStudio

Figura 17 Andamento Nifty 2017-2020

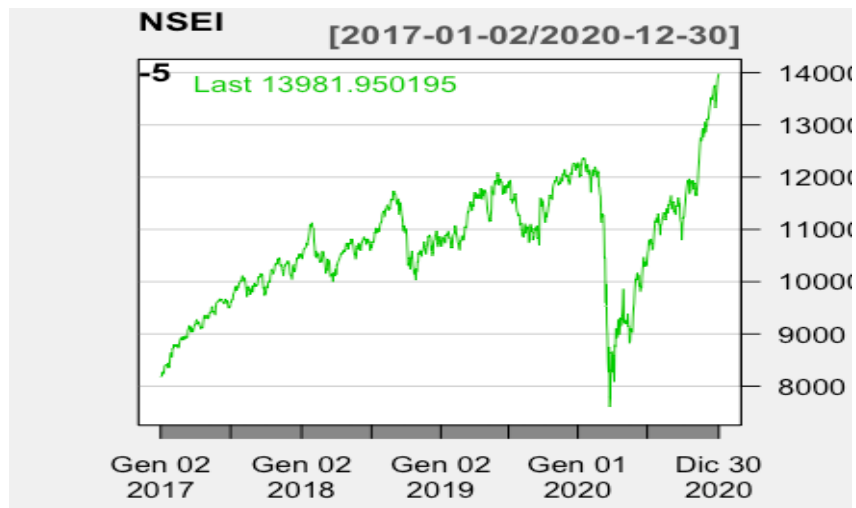


Grafico ottenuto mediante il software RStudio

A questo punto, risulterà interessante andare a vedere come i modelli riusciranno a rispondere a periodi temporali caratterizzati da forti tassi di crescita e perdita, in periodi in cui a forti stimoli monetari si alternano aspettative fortemente negative e incertezza.

3.4.1 Parametri

Per l'applicazione dell'algoritmo PSO per la risoluzione del problema di selezione di portafogli del tipo enhanced indexing, è necessario fissare dei parametri sia relativi alla metaeuristica che relativi ai vincoli che verranno presi in considerazione. Per quanto concerne i parametri relativi alla PSO, sono stati individuati i seguenti valori:

- *Numero di particelle*: è stato ottenuto moltiplicando il numero delle variabili del problema per 2 ($2 * \text{numvarpf}$). Quindi in base all'indice sotto esame si è deciso di utilizzare un numero di particelle che varia da 54 fino ad un massimo di 96;
- *Numero di iterazioni (niter)*: per la scelta del numero di iterazioni sono state effettuate delle simulazioni, nelle quali il valore sotto esame è stato fissato in 1000, 5000 e 10000. Al termine delle simulazioni i risultati ottenuti hanno fatto propendere per l'utilizzo di un numero di iterazioni corposo (ossia 10000) in quanto i valori della fitness erano di gran lunga migliori rispetto ai valori ottenuti con $\text{niter}=1000$ e leggermente migliori di quelli ottenuti con $\text{niter}=5000$. Soprattutto nel caso in cui ci si limitava ad utilizzare 1000 iterazioni si otteneva un valore della fitness alquanto elevato, derivante da significative violazioni dei vincoli posti. In un problema di ottimizzazione in cui l'obiettivo è la minimizzazione della funzione di fitness, più non vengono rispettati i vincoli, più la fitness function di quel portafoglio assume un valore elevato, venendo così scartato dall'algoritmo

- *Parametro di penalità ε* : anche in questo caso sono stati effettuati dei test, per valori del parametro che vanno da 1 a 10^{-5} , i quali hanno messo in evidenza la maggior efficienza dei risultati ottenuti settando il parametro col valore 10^{-4} . Per lo svolgimento dei test si è deciso di utilizzare entrambi i modelli settando i parametri a niter=10000 e $K=10$ e $K=20$, e di calcolare la media dei valori normalizzati della fitness ottenuta. Il valore medio più basso è il criterio che ha portato alla preferenza di un valore piuttosto che di un altro;
- *Coefficienti di accelerazione c_1, c_2* : anche in questo caso sono stati effettuati dei test per la selezione dei valori da utilizzare. Nello specifico, basandosi su quanto proposto in Deng et al. (2012) un primo potenziale settaggio prevedeva di utilizzare dei coefficienti di accelerazioni variabili, che col passare delle iterazioni modificavano il proprio valore, rimanendo però all'interno di un limite minimo e uno massimo. Questo primo settaggio, tuttavia è risultato insoddisfacente sia in termini di valore della funzione di fitness sia rispetto all'andamento del tracking error (per il primo modello). Per questo motivo si è deciso di fissare entrambi i coefficienti ad un valore pari a 1.49618 come proposto dalla letteratura.
- *Peso d'inerzia w* = anche in questo caso si è deciso di effettuare dei test per verificare la convenienza nell'utilizzare un peso d'inerzia variabile come proposto nello stesso scritto di Deng o un valore fisso. Come nella situazione precedente, alla fine si è deciso di optare per un valore fisso pari a 0.7298 come proposto dalla letteratura.

Una volta fissati i parametri dell'algorithm occorre concentrarsi sui parametri specifici del problema che si va ad affrontare, soprattutto per quanto concerne i vincoli pratici che sono stati introdotti.

Innanzitutto, tra i vincoli inseriti nei modelli e precedentemente descritti, troviamo ad esempio il vincolo di cardinalità utile per il controllo dei costi di transazione. A riguardo si è deciso di testare entrambi i modelli, in ognuno dei 4 mercati, settando il numero massimo di titoli in cui è possibile investire pari prima a $K = 10$ e poi a $K = 20$. I valori di K sono stati scelti in quanto tra i più usati in letteratura relativamente a questa tipologia di problemi di selezione di portafoglio.

Gli ultimi due parametri da settare fanno riferimento ai vincoli sulla percentuale minima e massima di ricchezza che è possibile allocare ad ogni singolo titolo compreso in portafoglio, ossia i valori di ε_i e δ_i . Con l'obiettivo di garantire in ogni caso una buona diversificazione si è deciso di utilizzare i seguenti valori:

- ε_i ossia la percentuale di investimento minima è stata fissata a 0.01, valore utilizzato spesso in letteratura come limite inferiore. La scelta di optare per un valore così contenuto, piuttosto che per un valore nell'ordine di 0.1 o 0.05 (come suggerisce la letteratura, valori ricavati dal calcolo di $\frac{1}{K}$), è stata fatta con la volontà di garantire diversificazione e di aiutare l'algorithm

a rispettare il vincolo di cardinalità. Anche in questo caso sono state effettuate delle prove con valori di ε_i pari a 0.05 e 0.1, che hanno evidenziato maggiori difficoltà nel selezionare tutti i titoli richiesti dal problema.

- δ_i ossia la percentuale di investimento massima è stata fissata ad un valore pari a 0.3. In letteratura, tendenzialmente, nel momento in cui si affrontano problemi di selezione di portafoglio à la Markovitz, si utilizza come limite superiore un valore pari a 0.5 o 1⁵³. Tuttavia, si è deciso di optare per un valore più contenuto per cercare di limitare uno dei drawback tipici dei modelli di selezione di portafoglio efficienti à la Markovitz, ossia una diversificazione limitata a causa di corposi investimenti nei titoli che offrono rendimenti superiori o che in ogni caso sono scarsamente correlati tra di loro.

Prima di presentare i risultati ottenuti, va fatta un'ultima precisazione relativa al modello basato sul Tracking Error e la semivarianza. Come evidenziato precedentemente nella formulazione, il modello sotto esame presenta nella funzione obiettivo il parametro λ , utilizzato per la prima volta nel modello di Markovitz; questo parametro permette, basandosi sull'avversione al rischio dell'investitore, di pesare la volontà di ottenere un extra-rendimento rispetto al benchmark, piuttosto che limitare la rischiosità del portafoglio selezionato. Per quanto riguarda questo elaborato, si è deciso di porre $\lambda = 0.5$, ipotizzando un investitore avverso al rischio che assegna uguale importanza alla minimizzazione del rischio e alla volontà di massimizzare il rendimento in eccesso rispetto al benchmark.

3.4.2 Applicazione dei modelli e analisi dei risultati

In questa sezione vengono presentati i risultati ottenuti mediante l'applicazione del modello basato sul tracking error (che verrà identificato come modello 1) e il modello basato sul risk-reward ratio calcolato mediante il CVaR (modello 2). I modelli come detto vengono applicati in un periodo temporale di 4 anni, caratterizzato da periodi di incertezza e rapida ripresa, con la presenza preponderante delle banche centrali come principali traini dei listini, accompagnate da tensioni commerciali e politiche, culminati poi nella crisi dovuta al diffondersi della pandemia da Covid-19 a partire dal Marzo 2020.

Per evitare di presentare una carrellata di dati, si è deciso di presentare le tabelle relative agli esiti derivanti dall'applicazione dei modelli in ognuno dei 4 mercati, relativamente solo al primo scenario. Per gli altri scenari si presenta una tabella riassuntiva dei rendimenti dei portafogli e del

⁵³ Maringer D., Oyewumi O. (2007). Index Tracking with constrained Portfolios. *Intelligent systems in accounting, finance and management*, Vol. 15, 57-71.

Canagkoz N.A., Beasley J.E. (2008). *European Journal of Operational Research*, vol. 196, 384-399.

benchmark, mentre per quanto riguarda le tabelle specifiche dei titoli selezionati con i relativi “pesi”, si rimanda all’appendice A.

3.4.2.1 Scenario 1 ~ Modello 1

Il primo scenario, come detto in precedenza, copre tutto l’anno 2017 caratterizzato da risultati nel complesso positivi per tutti i listini presi in esame, sebbene in Messico il verificarsi di eventi atmosferici alquanto anomali ha provocato una correzione nella seconda metà dell’anno. Questa precisazione risulta di interesse in quanto il periodo temporale scelto è così suddiviso: per l’analisi in-sample utile alla stima dei parametri si sono utilizzati i primi 8 mesi dell’anno (per un totale di circa 170 osservazioni dei prezzi giornalieri, a seconda del calendario di borsa dei 4 paesi studiati), mentre come futuro virtuale si sono utilizzati i restanti 4 mesi dell’anno (per un totale di circa 84 osservazioni). La stima dei parametri avviene quindi in un momento di grande crescita economica e crescita delle aspettative, mentre il futuro virtuale comprende gli ultimi 4 mesi dell’anno spesso caratterizzate da rallentamenti e leggere correzioni dovuti ad esempio da fattori fiscali, dalla volontà di monetizzare gli investimenti o semplicemente da evidenze quali ad esempio l’instabilità delle contrattazioni nel mese di Ottobre⁵⁴.

Di seguito vengono presentate le tabelle che fanno riferimento all’applicazione dei due modelli, utilizzando due diversi valori del vincolo di cardinalità. Vengono presentati i dati della migliore tra le 10 simulazioni effettuate per ogni applicazione con l’obiettivo di far cogliere al lettore la bontà dei modelli (tutte le tabelle presentate in seguito, sono state ricavate mediante l’utilizzo di Excel, a partire dai risultati ottenuti mediante Matlab). Nello specifico verranno presentati i valori del rendimento ottenuto dal portafoglio selezionato nel futuro virtuale (giornaliero), il rendimento del benchmark nello stesso periodo, il tempo di risoluzione e il valore della funzione fitness.

Nell’analisi potrebbe essere fuorviante il valore del rendimento del portafoglio ottimo, nel senso che nelle 10 simulazioni potrebbe essere selezionato come preferibile il portafoglio che non ha ottenuto il rendimento migliore. Questo a cosa può essere dovuto? Questo esito è determinato dal fatto che nei problemi di selezione di portafoglio a cui si applica la PSO, la soluzione ottima viene misurata sulla base del valore della funzione di fitness: il portafoglio ottimo infatti risulta essere quello la cui relativa funzione di fitness assume il valore minore tra tutte le simulazioni, in quanto minore è questo valore, minore sarà la somma delle violazioni dei vincoli imposti al modello stesso.

⁵⁴Borse: 2017, l’anno in cui morì la volatilità in borsa. Il Sole 24 Ore, 31/10/2017

Figura 18 FTSEMib, Modello 1, Scenario 1, K=20, K=10

	Sim.6			Sim.2
AZA	0,0000000		AZA	0,0673048
Amplifon	0,0224249		Amplifon	0,0000000
Atlantia	0,0383554		Atlantia	0,0000000
Azimet Holding	0,0000000		Azimet Holding	0,0000000
Banca Generali	0,0637576		Banca Generali	0,0000000
Banca Medionalum	0,0220745		Banca Medionalum	0,0916615
Banco BPM	0,0000000		Banco BPM	0,0000000
BPER Banca	0,0680870		BPER Banca	0,0000000
Buzzi Unicem	0,0201093		Buzzi Unicem	0,2053532
Campari	0,0000000		Campari	0,0000000
Cnh Industrial	0,0000000		Cnh Industrial	0,0142282
Diasorin	0,1847229		Diasorin	0,1186105
Enel	0,0000000		Enel	0,0000000
Eni	0,0000000		Eni	0,0000000
EXOR	0,0244891		EXOR	0,0000000
Ferrari	0,0317942		Ferrari	0,0000000
Fineco Bank	0,0000000		Fineco Bank	0,0874142
Generali	0,2115691		Generali	0,0579967
Hera	0,0000000		Hera	0,0000000
Interpump Group	0,0000000		Interpump Group	0,0000000
Intesa San paolo	0,0000000		Intesa San paolo	0,0000000
Inwit	0,0479770		Inwit	0,0000000
Italgas	0,0390363		Italgas	0,0000000
Leonardo	0,0000000		Leonardo	0,0000000
Mediobanca	0,0229844		Mediobanca	0,0998984
Moncler	0,0000000		Moncler	0,0000000
Pirelli	0,0000000		Pirelli	0,0000000
Poste Italiane	0,0220121		Poste Italiane	0,0000000
Prysmian	0,0271369		Prysmian	0,0000000
Recordati	0,0204587		Recordati	0,0000000
Saipem	0,0531623		Saipem	0,0000000
Snam	0,0000000		Snam	0,2456568
Stellantis	0,0000000		Stellantis	0,0000000
Stmicroelectronics	0,0276685		Stmicroelectronics	0,0000000
Telecom	0,0000000		Telecom	0,0000000
Tenaris	0,0274503		Tenaris	0,0000000
Terna	0,0000000		Terna	0,0118751
Unicredit	0,0247294		Unicredit	0,0000000
Unipol	0,0000000		Unipol	0,0000000
Fitness	-0,006212141		Fitness	0,0002466
Rendimento out of sample pf	0,000429		Rendimento out of sample pf	0,000719
Rendimento out of sample bench	0,0003139		Rendimento out of sample bench	0,0003139
Tempo risolutivo (secondi)	16,8457		Tempo risolutivo (secondi)	15,79972

Le due tabelle sopra riportate rappresentano la miglior soluzione, in termini di minimo valore della funzione di fitness, ottenuti mediante l'implementazione del modello 1 "classico". A fronte di un rendimento su base annua del benchmark pari a circa 1.83089373%, nel caso in cui si ponga come vincolo di cardinalità K=20 si ottiene un rendimento annuo pari a 11.41422%⁵⁵, mentre il portafoglio composto da soli 10 titoli genera un rendimento pari al 19.85625%. Per quanto concerne la diversificazione, posto che per ogni settaggio l'algoritmo è riuscito a selezionare il numero di titoli richiesto, si nota come nel caso in cui K sia più elevato escludendo due posizioni significative sui titoli Generali e Diasorin, il restante 60% del capitale è stato suddiviso nei 18 titoli in maniera quasi equi-pesata, ossia in buona parte dei titoli si notano delle percentuali nell'ordine del 2-3%, e in ogni caso nessuna superiore al 7%. Utilizzando come vincolo di cardinalità K=10, avendo il modello meno libertà di scelta, si notano delle posizioni più significative su tutti i titoli selezionati. Anche in questo caso abbiamo due posizioni preponderanti nei titoli Buzzi Unicem e Snam, mentre la parte restante del capitale è suddivisa negli altri titoli, in questo caso però si nota una diversificazione ancora più marcata in quanto la suddivisione non è equi-pesata ma si notano posizioni di entità differente.

⁵⁵ Se si definisce r_a il rendimento annuo e r_g il rendimento giornaliero, il rendimento annuo viene calcolato come segue:

$$r_a = (1 + r_g)^{252} - 1$$

Figura 19 DAX, modello 1, scenario 1, K=20, K=10

	Sim.3		Sim.1
Adidas	0,0000000	Adidas	0,0000000
Allianz	0,1050680	Allianz	0,0000000
Basf	0,0000000	Basf	0,0000000
BMW	0,0304167	BMW	0,0000000
Bayer	0,0546318	Bayer	0,0000000
Continental	0,0244672	Continental	0,0000000
Covestro	0,0695746	Covestro	0,0356792
Daimler	0,0523019	Daimler	0,1651091
Deutsche Bank	0,0464100	Deutsche Bank	0,0000000
Deutsche Boerse	0,0000000	Deutsche Boerse	0,2755093
Deutsche post	0,0241335	Deutsche post	0,1296254
Deutsche Wohnen	0,0310902	Deutsche Wohnen	0,0000000
Dt.Telekom	0,0178242	Dt.Telekom	0,0411550
E.On	0,0131707	E.On	0,0507196
Fresen.Med.Care	0,0327649	Fresen.Med.Care	0,0000000
Fresenius	0,0000000	Fresenius	0,0000000
Heidelbergcement	0,1355973	Heidelbergcement	0,0000000
Henkel	0,0887798	Henkel	0,0000000
Infineon Tech.AG	0,0428824	Infineon Tech.AG	0,0104311
Merck	0,0000000	Merck	0,0000000
Mtu Aero Engines	0,0000000	Mtu Aero Engines	0,0000000
Muench.Rueckvers	0,0000000	Muench.Rueckvers	0,0000000
RWE	0,0378269	RWE	0,0000000
SAP	0,0527104	SAP	0,0762066
Siemens	0,0954817	Siemens	0,0389473
Volkswagen	0,0100026	Volkswagen	0,1766174
Vonovia	0,0348651	Vonovia	0,0000000
Fitness	0,0059248	Fitness	0,005925523
Rendimento out of sample pf	0,001064	Rendimento out of sample pf	0,001606
Rendimento out of sample bench	0,000086	Rendimento out of sample bench	0,000086
Tempo risolutivo (secondi)	14,1843094	Tempo risolutivo (secondi)	13,410923

Prendendo in considerazione l'indice azionario tedesco, invece, si nota che lasciando maggiore libertà all'algorithm in termini di cardinalità, si riesce ad ottenere un portafoglio fortemente diversificato, in cui si evidenzia l'assenza di un'eccessiva concentrazione in un unico titolo: l'investimento massimo in questo caso si ferma ad un 13.55%. Limitando il numero massimo di titoli a 10, si nota una diversificazione meno marcata in quanto circa il 62% del capitale è investito in 3 titoli: Daimler, Deutsche Boerse e Volkswagen. Come per quanto visto per il FTSEMIB, anche in questo caso entrambi i portafogli generano un extra-rendimento rispetto al benchmark; su base annua a fronte di un rendimento del benchmark pari a 24.18806%, il portafoglio con K=20 genera un rendimento del 30.732813%, mentre con K=10 si ottiene un rendimento del 49.83843%. Questi valori possono sembrare inverosimili, in realtà ricordando quanto detto sulla crescita dell'indice negli ultimi mesi dell'anno, è un valore coerente.

Anche per quanto concerne l'indice messicano (figura 11), la PSO è riuscita a selezionare portafogli che rispettano i vincoli richiesti, nello specifico il vincolo di cardinalità. In generale si nota una buona diversificazione: il portafoglio più ricco in termini di titoli è caratterizzato da due sole posizioni significative (Orbia Advance Corporation=27.76% e Walmart=14.48%), mentre con

K=10 anche in questo caso circa il 60% del capitale è investito in 3 titoli. Risulta chiaro come limitando la libertà di scelta dell'algoritmo, si ottengono posizioni su singoli titoli più corpose: nonostante ciò, limitare δ_i al 30% permette di ottenere portafogli con buon grado di diversificazione. Nuovamente il modello ha permesso di selezionare due portafogli che generano un rendimento superiore al benchmark: a fronte di un benchmark con rendimento negativo, si ottiene un portafoglio che genera un rendimento positivo del 6.47502% e uno del 5.43394%.

Figura 20 S&P/BMV IPC, modello 1, scenario 1, K=20, K=10

	Sim.6		Sim.7
Alfa SA A	0,0000000	Alfa SA A	0,0000000
Alesea SA	0,0125654	Alesea SA	0,0000000
America Movil SAB de CV L	0,0114607	America Movil SAB de CV L	0,0000000
Arca Continental, SAB de CV	0,0412047	Arca Continental, SAB de CV	0,0000000
Bolsa Mexicana de Valores SA de CV	0,0441243	Bolsa Mexicana de Valores SA de CV	0,0821437
Cemex SA CPO	0,0000000	Cemex SA CPO	0,0197702
Coca-Cola Femsa SAB de CV UBL	0,0000000	Coca-Cola Femsa SAB de CV UBL	0,2884448
Corporacion Inmobiliaria Vesta, S.A.B. DE C.V.	0,0127245	Corporacion Inmobiliaria Vesta, S.A.B. DE C.V.	0,0148476
El Puerto de Liverpool SAB de CV	0,0000000	El Puerto de Liverpool SAB de CV	0,0000000
Fomento Economico Mexicano S.A.B. de C.V.	0,0625088	Fomento Economico Mexicano S.A.B. de C.V.	0,0000000
Genomma Lab Internacional SA de CV	0,0757924	Genomma Lab Internacional SA de CV	0,0000000
Gruma SAB B	0,0530292	Gruma SAB B	0,0000000
Grupo Aeroportuario del Centro Norte, S.A.B. de C.V.	0,0000000	Grupo Aeroportuario del Centro Norte, S.A.B. de C.V.	0,0000000
Grupo Aeroportuario del Pacifico, S.A.B. de C.V.	0,0000000	Grupo Aeroportuario del Pacifico, S.A.B. de C.V.	0,0000000
Grupo Aeroportuario del Sureste SAB de CV B	0,0104723	Grupo Aeroportuario del Sureste SAB de CV B	0,1920432
Grupo Bimbo S.A.B.	0,0150439	Grupo Bimbo S.A.B.	0,0000000
Grupo Carso SAB de CV	0,0000000	Grupo Carso SAB de CV	0,0431419
Grupo Cementos de Chihuahua SAB de CV	0,0000000	Grupo Cementos de Chihuahua SAB de CV	0,0000000
Grupo Elektra S.A.B. de C.V.	0,0000000	Grupo Elektra S.A.B. de C.V.	0,0000000
Grupo Financiero Banorte O	0,0173333	Grupo Financiero Banorte O	0,0000000
Grupo Financiero Inbursa O	0,0000000	Grupo Financiero Inbursa O	0,0000000
Grupo Mexico SAB de CV B	0,0108420	Grupo Mexico SAB de CV B	0,0000000
Grupo Televisa SAB CPO	0,0194073	Grupo Televisa SAB CPO	0,0000000
Industrias Penoles	0,0323927	Industrias Penoles	0,0000000
Infraestructura Energetica Nova S.A.B. de C.V.	0,0000000	Infraestructura Energetica Nova S.A.B. de C.V.	0,0000000
Kimberly Clark de Mexico S.A.B. de C.V. A	0,0228250	Kimberly Clark de Mexico S.A.B. de C.V. A	0,0000000
Megacable Holdings SAB de CV	0,0390933	Megacable Holdings SAB de CV	0,0576505
ORBIA ADVANCE CORPORATION SAB de CV	0,2776896	ORBIA ADVANCE CORPORATION SAB de CV	0,0835286
Promotora y Operadora de Infraestructura SAB de CV	0,0153231	Promotora y Operadora de Infraestructura SAB de CV	0,0000000
Qualitas Controladora S.A.B de C.V.	0,0000000	Qualitas Controladora S.A.B de C.V.	0,1451084
Regional, S.A. de C.V.	0,0000000	Regional, S.A. de C.V.	0,0000000
Telesites S.A.B. de C.V.	0,0813226	Telesites S.A.B. de C.V.	0,0000000
Walmart de Mexico SAB de CV	0,1448451	Walmart de Mexico SAB de CV	0,0733211
Fitness	0,000738423	Fitness	0,000737495
Rendimento out of sample pf	0,000249	Rendimento out of sample pf	0,00021
Rendimento out of sample bench	-0,000431	Rendimento out of sample bench	-0,000431
Tempo risolutivo (secondi)	13,99475	Tempo risolutivo (secondi)	13,16448

L'indice indiano (figura 12) presenta gli stessi esiti ottenuti per tutti gli altri indici finora analizzati: nel caso del portafoglio con maggior possibilità di scelta si ottiene una buona diversificazione con due uniche posizioni di rilievo (Britannia Industries=18.91% e Tata Consumer Products=20.29%), mentre nel caso del portafoglio più contenuto si apprezza una diversificazione leggermente maggiore rispetto ai casi precedenti in quanto i 3 titoli principali (Bajaj Auto, Eicher Motors e Housin Development Finance Corporation) coprono circa il 50% del capitale. In termini di rendimento, mentre il portafoglio con K=10 ottiene un extrarendimento limitato rispetto al benchmark (20,9477215% contro 20,49172423%), la performance del portafoglio con 20 titoli è di gran lunga superiore, ossia vale 73.067345%.

Figura 21 NIFTY50, Modello 1, scenario 1, K=20, K=10

	Sim.6		Sim.6
Adani Ports and Special Economic Zone Ltd.	0,0000000		0,0000000
Asian Paints Ltd.	0,0000000		0,0000000
Axis Bank Ltd.	0,0298829		0,0000000
Bajaj Auto Ltd.	0,0234304		0,1203065
Bajaj Finance Ltd.	0,0186960		0,0000000
Bajaj Finserv Ltd.	0,0179482		0,0000000
Bharat Petroleum Corporation Ltd.	0,0000000		0,0000000
Bharti Airtel Ltd.	0,0108978		0,0000000
Britannia Industries Ltd.	0,1891525		0,0976444
Cipla Ltd.	0,0000000		0,0000000
Coal India Ltd.	0,0000000		0,0000000
Divi's Laboratories Ltd.	0,0623059		0,0000000
Dr. Reddy's Laboratories Ltd.	0,0000000		0,0000000
Eicher Motors Ltd.	0,0000000		0,1420481
Grasim Industries Ltd.	0,0132520		0,0000000
HCL Technologies Ltd.	0,0109689		0,0000000
HDFC Bank Ltd.	0,0000000		0,0000000
Hero MotoCorp Ltd.	0,0000000		0,0000000
Hindalco Industries Ltd.	0,0000000		0,0000000
Hindustan Unilever Ltd.	0,0000000		0,0000000
Housing Development Finance Corporation Ltd.	0,0000000		0,2396819
ICICI Bank Ltd.	0,0000000		0,0000000
ITC Ltd.	0,0000000		0,0000000
Indian Oil Corporation Ltd.	0,0592301		0,0000000
Indusind Bank Ltd.	0,0000000		0,0000000
Infosys Ltd.	0,0000000		0,0000000
JSW Steel Ltd.	0,0189275		0,0146312
Kotak Mahindra Bank Ltd.	0,0000000		0,0000000
Larsen & Toubro Ltd.	0,0000000		0,0000000
Mahindra & Mahindra Ltd.	0,1031877		0,0000000
Maruti Suzuki India Ltd.	0,0223148		0,0000000
NTPC Ltd.	0,0372884		0,0000000
Nestle India Ltd.	0,0000000		0,0000000
Oil & Natural Gas Corporation Ltd.	0,0000000		0,0000000
Power Grid Corporation of India Ltd.	0,0607021		0,0000000
Reliance Industries Ltd.	0,0000000		0,0705306
Shree Cement Ltd.	0,0269554		0,1052124
State Bank of India	0,0000000		0,0494831
Sun Pharmaceutical Industries Ltd.	0,0000000		0,0000000
Tata Consultancy Services Ltd.	0,0000000		0,0000000
Tata Consumer Products Ltd.	0,2049797		0,0000000
Tata Motors Ltd.	0,0134621		0,0000000
Tata Steel Ltd.	0,0000000		0,0000000
Tech Mahindra Ltd.	0,0522156		0,0734819
Titan Company Ltd.	0,0000000		0,0000000
UPL Ltd.	0,0242021		0,0000000
UltraTech Cement Ltd.	0,0000000		0,0869798
Wipro Ltd.	0,0000000		0,0000000
Fitness	-0,006140005		-0,006143937
Rendimento out of sample pf	0,002179		0,000755
Rendimento out of sample bench	0,00074		0,00074
Tempo risolutivo (secondi)	20,5859		22,1395

A riprova dell'efficienza del modello, si propone il grafico dell'andamento del tracking error e della funzione di fitness del portafoglio migliore ottenuta nel mercato messicano e indiano (per evitare di inserire un numero troppo corposo di figure e grafici, si fa riferimento ad un unico indice). Questi mettono in evidenza un Tracking Error che viene minimizzato e una funzione di fitness anch'essa minimizzata (dopo le prime 2000 iterazioni) e prossima a 0 per tutti i portafogli riferiti ai diversi indici.

Figura 22 Tracking Error portafoglio migliore IPC

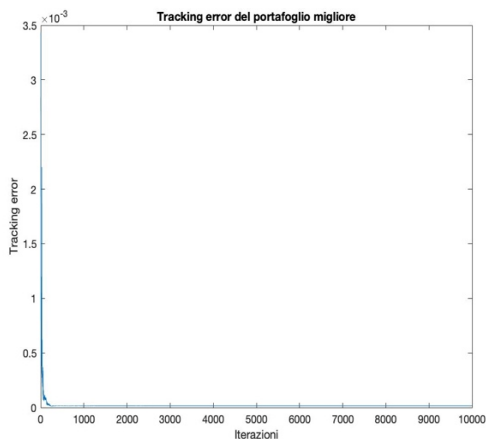


Grafico ottenuto mediante il software Matlab.

Figura 23 Funzione di fitness portafoglio migliore IPC

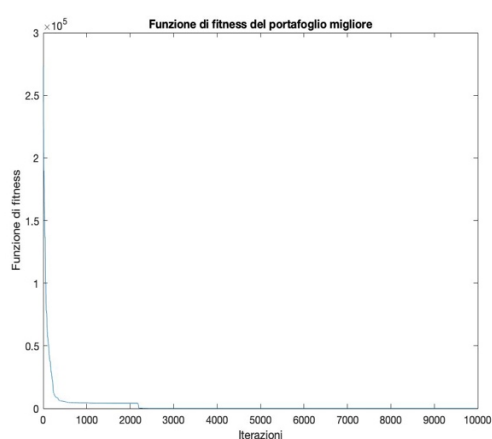


Grafico ottenuto mediante il software Matlab

3.4.2.2. Scenario 1 ~ Modello 2

Figura 24 FTSEMib, modello 2, scenario 1, K=20, K=10

	Sim.8		Sim.10
A2A	0,1573982	A2A	0,0000000
Amplifon	0,0187927	Amplifon	0,0447829
Atlantia	0,0628574	Atlantia	0,0000000
Azimut Holding	0,0973870	Azimut Holding	0,0000000
Banca Generali	0,0000000	Banca Generali	0,0000000
Banca Medionalum	0,0495257	Banca Medionalum	0,0965682
Banco BPM	0,0000000	Banco BPM	0,0201797
BPER Banca	0,0000000	BPER Banca	0,0000000
Buzzi Unicem	0,0000000	Buzzi Unicem	0,0000000
Campari	0,0000000	Campari	0,0000000
Cnh Industrial	0,0206478	Cnh Industrial	0,0000000
Diasorin	0,0436932	Diasorin	0,1789357
Enel	0,0000000	Enel	0,0000000
Eni	0,0000000	Eni	0,0211113
EXOR	0,0000000	EXOR	0,0000000
Ferrari	0,0000000	Ferrari	0,0000000
Fineco Bank	0,0114686	Fineco Bank	0,0000000
Generali	0,0000000	Generali	0,0000000
Hera	0,0000000	Hera	0,0000000
Interpump Group	0,0446782	Interpump Group	0,2295667
Intesa San paolo	0,0000000	Intesa San paolo	0,0000000
Inwit	0,0319308	Inwit	0,0000000
Italgas	0,0346164	Italgas	0,0000000
Leonardo	0,0000000	Leonardo	0,0000000
Mediobanca	0,0000000	Mediobanca	0,0000000
Moncler	0,0720589	Moncler	0,0000000
Pirelli	0,0000000	Pirelli	0,0000000
Poste Italiane	0,0000000	Poste Italiane	0,0136876
Prysmian	0,0127791	Prysmian	0,2991948
Recordati	0,0249582	Recordati	0,0000000
Saipem	0,0759651	Saipem	0,0213056
Snam	0,0000000	Snam	0,0000000
Stellantis	0,0807466	Stellantis	0,0000000
Stmicroelectronics	0,0126438	Stmicroelectronics	0,0000000
Telecom	0,1117948	Telecom	0,0000000
Tenaris	0,0000000	Tenaris	0,0000000
Terna	0,0229893	Terna	0,0749571
Unicredit	0,0130669	Unicredit	0,0000000
Unipol	0,0000000	Unipol	0,0000000
Fitness	0,285102727	Fitness	1,194860
Rendimento out of sample pf	0,000625	Rendimento out of sample pf	0,000466
Rendimento out of sample bench	0,000313932	Rendimento out of sample bench	0,000313932
Tempo risolutivo (secondi)	15,875738	Tempo risolutivo (secondi)	15,833543

Figura 25 DAX30, modello 2, scenario 1, K=20, K=10

	Sim.3		Sim.8
Adidas	0,0000000	Adidas	0,2804707
Allianz	0,0000000	Allianz	0,0000000
Basf	0,0000000	Basf	0,0000000
BMW	0,0102475	BMW	0,0000000
Bayer	0,0634261	Bayer	0,0000000
Continental	0,0559851	Continental	0,0102181
Covestro	0,0103739	Covestro	0,1212537
Daimler	0,0285893	Daimler	0,1572725
Deutsche Bank	0,0156397	Deutsche Bank	0,0000000
Deutsche Boerse	0,0000000	Deutsche Boerse	0,0000000
Deutsche post	0,0527795	Deutsche post	0,0000000
Deutsche Wohnen	0,0104005	Deutsche Wohnen	0,0366793
Dt.Telekom	0,0000000	Dt.Telekom	0,0000000
E.On	0,0000000	E.On	0,0780847
Fresen.Med.Care	0,0180290	Fresen.Med.Care	0,0357920
Fresenius	0,0349013	Fresenius	0,0000000
Heidelbergcement	0,0504690	Heidelbergcement	0,0000000
Henkel	0,0000000	Henkel	0,0000000
Infineon Tech.AG	0,2989154	Infineon Tech.AG	0,0000000
Merck	0,0511882	Merck	0,0000000
Mtu Aero Engines	0,0195299	Mtu Aero Engines	0,0109975
Muench.Rueckvers	0,0592100	Muench.Rueckvers	0,0139140
RWE	0,0427837	RWE	0,0000000
SAP	0,0189183	SAP	0,0000000
Siemens	0,0698403	Siemens	0,0000000
Volkswagen	0,0743729	Volkswagen	0,2541075
Vonovia	0,0143608	Vonovia	0,0000000
Fitness	2,03278495	Fitness	1,4195000
Rendimento out of sample pf	0,001357	Rendimento out of sample pf	0,001294
Rendimento out of sample bench	0,00086	Rendimento out of sample bench	0,00086
Tempo risolutivo (secondi)	11,27839	Tempo risolutivo (secondi)	11,29932

Figura 26 S&P/BMV IPC, modelo 2, scenario 1, K=20, K=10

	Sim.8		Sim.6
Alfa SA A	0,0000000	Alfa SA A	0,0000000
Alesea SA	0,0223143	Alesea SA	0,0000000
America Movil SAB de CV L	0,0586795	America Movil SAB de CV L	0,0419450
Arca Continental, SAB de CV	0,0000000	Arca Continental, SAB de CV	0,0000000
Bolsa Mexicana de Valores SA de CV	0,0716154	Bolsa Mexicana de Valores SA de CV	0,0755015
Cemex SA CPO	0,0000000	Cemex SA CPO	0,0000000
Coca-Cola Femsa SAB de CV UBL	0,0200571	Coca-Cola Femsa SAB de CV UBL	0,0000000
Corporacion Inmobiliaria Vesta, S.A.B. DE C.V.	0,0138160	Corporacion Inmobiliaria Vesta, S.A.B. DE C.V.	0,0000000
El Puerto de Liverpool SAB de CV	0,0000000	El Puerto de Liverpool SAB de CV	0,0000000
Fomento Economico Mexicano S.A.B. de C.V.	0,1181828	Fomento Economico Mexicano S.A.B. de C.V.	0,0000000
Genomma Lab Internacional SA de CV	0,0000000	Genomma Lab Internacional SA de CV	0,0000000
Gruma SAB B	0,0118357	Gruma SAB B	0,0000000
Grupo Aeroportuario del Centro Norte, S.A.B. de C.V.	0,0170663	Grupo Aeroportuario del Centro Norte, S.A.B. de C.V.	0,0000000
Grupo Aeroportuario del Pacifico, S.A.B. de C.V.	0,0000000	Grupo Aeroportuario del Pacifico, S.A.B. de C.V.	0,0000000
Grupo Aeroportuario del Sureste SAB de CV B	0,0107937	Grupo Aeroportuario del Sureste SAB de CV B	0,0000000
Grupo Bimbo S.A.B.	0,0156934	Grupo Bimbo S.A.B.	0,0000000
Grupo Carso SAB de CV	0,0000000	Grupo Carso SAB de CV	0,2951233
Grupo Cementos de Chihuahua SAB de CV	0,0147412	Grupo Cementos de Chihuahua SAB de CV	0,0000000
Grupo Elektra S.A.B. de C.V.	0,1011804	Grupo Elektra S.A.B. de C.V.	0,0109931
Grupo Financiero Banorte O	0,0460962	Grupo Financiero Banorte O	0,0000000
Grupo Financiero Inbursa O	0,0185991	Grupo Financiero Inbursa O	0,0000000
Grupo Mexico SAB de CV B	0,1144227	Grupo Mexico SAB de CV B	0,0000000
Grupo Televisa SAB CPO	0,0325977	Grupo Televisa SAB CPO	0,0000000
Industrias Penoles	0,0872816	Industrias Penoles	0,1317550
Infraestructura Energetica Nova S.A.B. de C.V.	0,0249302	Infraestructura Energetica Nova S.A.B. de C.V.	0,0793832
Kimberly Clark de Mexico S.A.B. de C.V. A	0,0000000	Kimberly Clark de Mexico S.A.B. de C.V. A	0,0000000
Megacable Holdings SAB de CV	0,0000000	Megacable Holdings SAB de CV	0,0000000
ORBITA ADVANCE CORPORATION SAB de CV	0,0000000	ORBITA ADVANCE CORPORATION SAB de CV	0,0102507
Promotora y Operadora de Infraestructura SAB de CV	0,0000000	Promotora y Operadora de Infraestructura SAB de CV	0,0000000
Qualitas Controladora S.A.B. de C.V.	0,0000000	Qualitas Controladora S.A.B. de C.V.	0,2736108
Regional, S.A. de C.V.	0,0102749	Regional, S.A. de C.V.	0,0377730
Telesites S.A.B. de C.V.	0,1898202	Telesites S.A.B. de C.V.	0,0436530
Walmart de Mexico SAB de CV	0,0000000	Walmart de Mexico SAB de CV	0,0000000
Fitness	0,125460994	Fitness	1,7696785
Rendimiento out of sample pf	0,000032	Rendimiento out of sample pf	0,000108
Rendimiento out of sample bench	-0,000431	Rendimiento out of sample bench	-0,000431
Tempo resolutivo (secondi)	13,99475	Tempo resolutivo (secondi)	13,16448

Figura 27 NIFTY50, modelo 2, scenario 1, K=20, K=10

	Sim.9		Sim.1
Adani Ports and Special Economic Zone Ltd.	0,0000000	Adani Ports and Special Economic Zone Ltd.	0,0000000
Asian Paints Ltd.	0,0000000	Asian Paints Ltd.	0,0000000
Axis Bank Ltd.	0,2294320	Axis Bank Ltd.	0,0000000
Bajaj Auto Ltd.	0,0000000	Bajaj Auto Ltd.	0,0000000
Bajaj Finance Ltd.	0,0335954	Bajaj Finance Ltd.	0,0145219
Bajaj Finserv Ltd.	0,0605305	Bajaj Finserv Ltd.	0,0000000
Bharat Petroleum Corporation Ltd.	0,0000000	Bharat Petroleum Corporation Ltd.	0,0893564
Bharti Airtel Ltd.	0,0141854	Bharti Airtel Ltd.	0,0000000
Britannia Industries Ltd.	0,0000000	Britannia Industries Ltd.	0,0000000
Cipla Ltd.	0,0312457	Cipla Ltd.	0,0000000
Coal India Ltd.	0,1975815	Coal India Ltd.	0,2957075
Divi's Laboratories Ltd.	0,0000000	Divi's Laboratories Ltd.	0,0000000
Dr. Reddy's Laboratories Ltd.	0,0268349	Dr. Reddy's Laboratories Ltd.	0,0429028
Eicher Motors Ltd.	0,0545070	Eicher Motors Ltd.	0,0000000
Grasim Industries Ltd.	0,0000000	Grasim Industries Ltd.	0,0000000
HCL Technologies Ltd.	0,0759608	HCL Technologies Ltd.	0,0000000
HDFC Bank Ltd.	0,0273385	HDFC Bank Ltd.	0,0000000
Hero MotoCorp Ltd.	0,0191978	Hero MotoCorp Ltd.	0,0000000
Hindalco Industries Ltd.	0,0000000	Hindalco Industries Ltd.	0,0000000
Hindustan Unilever Ltd.	0,0000000	Hindustan Unilever Ltd.	0,0000000
Housing Development Finance Corporation Ltd.	0,0000000	Housing Development Finance Corporation Ltd.	0,0734226
ICICI Bank Ltd.	0,0178833	ICICI Bank Ltd.	0,0000000
ITC Ltd.	0,0119375	ITC Ltd.	0,0000000
Indian Oil Corporation Ltd.	0,0000000	Indian Oil Corporation Ltd.	0,0000000
IndusInd Bank Ltd.	0,0000000	IndusInd Bank Ltd.	0,0000000
Infosys Ltd.	0,0000000	Infosys Ltd.	0,1203959
JSW Steel Ltd.	0,0414114	JSW Steel Ltd.	0,0000000
Kotak Mahindra Bank Ltd.	0,0000000	Kotak Mahindra Bank Ltd.	0,0000000
Larsen & Toubro Ltd.	0,0000000	Larsen & Toubro Ltd.	0,0812893
Mahindra & Mahindra Ltd.	0,0000000	Mahindra & Mahindra Ltd.	0,0000000
Maruti Suzuki India Ltd.	0,0000000	Maruti Suzuki India Ltd.	0,0000000
NTPC Ltd.	0,0000000	NTPC Ltd.	0,0000000
Nestle India Ltd.	0,0219415	Nestle India Ltd.	0,0000000
Oil & Natural Gas Corporation Ltd.	0,0000000	Oil & Natural Gas Corporation Ltd.	0,0000000
Power Grid Corporation of India Ltd.	0,0275184	Power Grid Corporation of India Ltd.	0,0000000
Reliance Industries Ltd.	0,0151959	Reliance Industries Ltd.	0,0000000
Shree Cement Ltd.	0,0000000	Shree Cement Ltd.	0,0000000
State Bank of India	0,0000000	State Bank of India	0,0192344
Sun Pharmaceutical Industries Ltd.	0,0000000	Sun Pharmaceutical Industries Ltd.	0,0000000
Tata Consultancy Services Ltd.	0,0000000	Tata Consultancy Services Ltd.	0,0000000
Tata Consumer Products Ltd.	0,0000000	Tata Consumer Products Ltd.	0,0000000
Tata Motors Ltd.	0,0363624	Tata Motors Ltd.	0,0000000
Tata Steel Ltd.	0,0330855	Tata Steel Ltd.	0,0000000
Tech Mahindra Ltd.	0,0000000	Tech Mahindra Ltd.	0,0000000
Titan Company Ltd.	0,0000000	Titan Company Ltd.	0,2516621
UPL Ltd.	0,0000000	UPL Ltd.	0,0000000
UltraTech Cement Ltd.	0,0000000	UltraTech Cement Ltd.	0,0000000
Wipro Ltd.	0,0242511	Wipro Ltd.	0,0114853
Fitness	0,2032847	Fitness	0,763069
Rendimiento out of sample pf	0,000965	Rendimiento out of sample pf	0,001878
Rendimiento out of sample bench	0,00074	Rendimiento out of sample bench	0,00074
Tempo resolutivo (secondi)	22,12775	Tempo resolutivo (secondi)	22,89654

Le tabelle sopra riportate mettono in evidenza come anche questo secondo modello sia efficiente, sia in termini di fitness (tutte minimizzate e limitate a valori contenuti) che in termini di rendimento dei portafogli selezionati. In generale rispetto al modello classico, nel caso di selezione di portafogli con cardinalità limitata a 10 si nota che in tutte le simulazioni uno dei titoli selezionati si posiziona vicino al vincolo superiore, ossia vicino al 30% in termini di capitale allocato, e che i 3 titoli principali arrivano a coprire dal 66 a quasi l'80% del capitale, evidenziando una diversificazione più contenuta.

Per quanto concerne i rendimenti ottenuti dai portafogli ottimi, possiamo riassumere così:

Indice	Rend. Annuo benchmark	Rend. Annuo K=20	Rend. Annuo K=10
FTSEMib	1.8308937%	12.4574393%	17.052316%
DAX	24.188062%	40.738333%	38.524525%
S&P/BMV IPC	-10.294258%	6.475016%,	0,809647%
NIFTY	20.491742%	27.514862%	60.449997%

Anche in questo caso si presenta il grafico dell'andamento della funzione fitness associata al portafoglio migliore, in questo caso del NIFTY. Si nota dal grafico che la funzione assume valori prossimi a 0 più o meno dopo le prime 500 iterazioni.

Figura 28 Funzione di fitness portafoglio migliore, Nifty

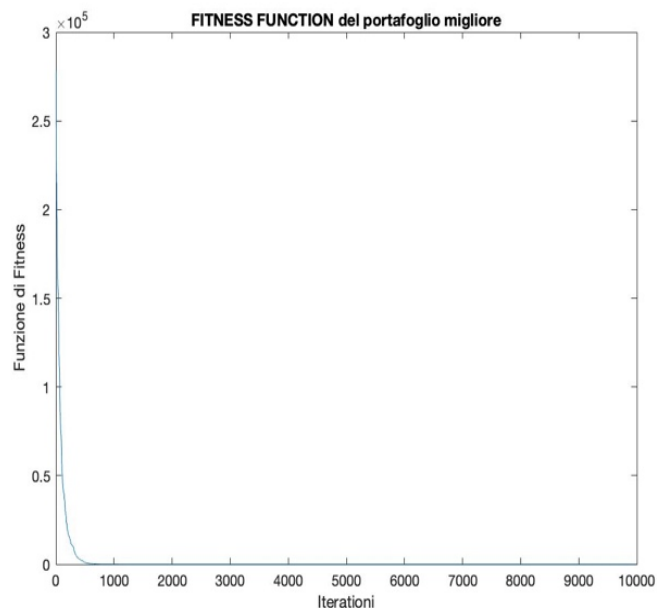


Grafico ottenuto mediante il software Matlab

3.4.2.3 Scenario 2 ~ Modello 1

In questo secondo periodo, caratterizzato da difficoltà economiche, il modello ha presentato maggiori difficoltà nell'individuare portafogli che generassero un rendimento migliore rispetto all'indice di riferimento. Tutto ciò viene evidenziato dal fatto che nel caso del mercato italiano e indiano, il portafoglio con fitness migliore ottiene un rendimento inferiore rispetto al benchmark: nell'Appendice A dove vengono presentate alcune simulazioni di rilievo, si può notare come, rispetto all'anno precedente, il modello abbia avuto maggiori difficoltà nell'individuare portafogli con rendimenti superiori; nonostante ciò, in termini di fitness l'algoritmo si è sempre comportato bene. Per quanto riguarda la diversificazione, in questo caso si evidenzia una minor presenza di valori estremi nei portafogli costruiti con cardinalità pari a 20, e meno marcato in quelli con $K=10$. Risulta importante fare una riflessione sui rendimenti dei portafogli selezionati: dalle tabelle proposte in appendice si evidenziano performance peggiori in termine di rendimento nei casi in cui la numerosità è maggiore, questo perché obbligare l'algoritmo a selezionare 20 titoli, in un periodo in cui buona parte del mercato è in perdita, limita le possibilità di esclusione della maggior parte dei titoli meno performanti.

Per quanto concerne i rendimenti ottenuti dai portafogli ottimi, possiamo riassumere così:

Indice	Rend. Annuo benchmark	Rend. Annuo K=20	Rend. Annuo K=10
FTSEMib	-31,824098%	-42,025171%	-20,581061%
DAX	-37,981692%	-30,940918%	-35,114825%
S&P/BMV IPC	-39,878177	-33,271131%	-21,358489%
NIFTY	-19,57315%	-23,046136	-5,226629%

Relativamente alla funzione di fitness e al tracking error, si propongono i risultati relativi al portafoglio migliore ottenuto relativamente al FTSEMib. Anche in questo caso il TE viene subito minimizzato, e la funzione di fitness tende a 0 dopo le prime 1000 iterazioni.

Figura 29 Tracking Error portafoglio migliore FTSEMib

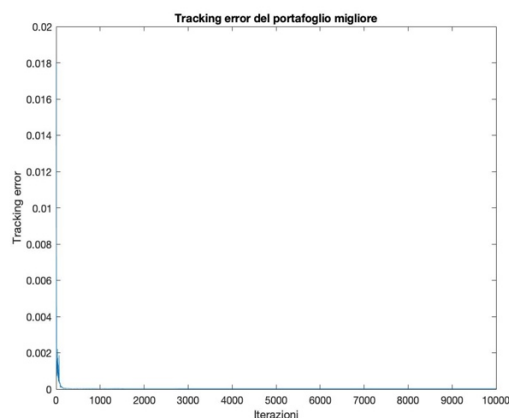


Grafico ottenuto mediante software Matlab

Figura 30 Funzione di fitness portafoglio migliore, FTSEMib

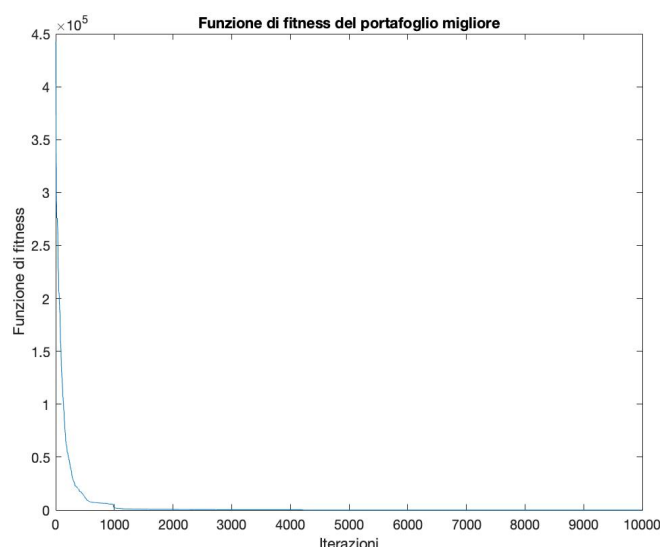


Grafico ottenuto mediante software Matlab

3.4.2.4 Scenario 2 ~ Modello 2

L'applicazione del modello basato sull'indice di rischio-rendimento ha presentato alcune difficoltà nel rispettare i vincoli imposti, soprattutto quello di cardinalità: nelle tabelle con le simulazioni proposte in appendice, si notano infatti esperimenti in cui la fitness assume valori alquanto elevati, indicando una pesante violazione dei vincoli; nello specifico si è scoperto che vengono inseriti in portafoglio più titoli del consentito. In termini di diversificazione si può ripetere quanto detto finora. Da evidenziare che in questo caso il modello permette di selezionare portafogli che sovra-performano il benchmark in termini di rendimento; tutti i portafogli ottimi chiudono l'anno con una performance negativa, nonostante ciò, riescono a contenere le perdite rispetto all'indice di riferimento, il che viene comunque considerato come un aspetto di non poco conto. Minimizzato il rischio, un portafoglio efficiente dovrebbe guadagnare più del mercato quando esso sale, e perdere meno quando esso scende o corregge.

Per quanto concerne i rendimenti ottenuti dai portafogli ottimi, possono essere così riassunti:

Indice	Rend. Annuo benchmark	Rend. Annuo K=20	Rend. Annuo K=10
FTSEMIB	-31,824098%	-31,703545%	-21,378324%
DAX	-37,981692%	-34,307282%	-35,880115%
S&P/BMV IPC	-39,878177%	-35,490458%	-32,081709%
NIFTY	-19,573150%	-9,795338%	-8,995900%

Figura 31 Funzione di fitness portafoglio migliore DAX

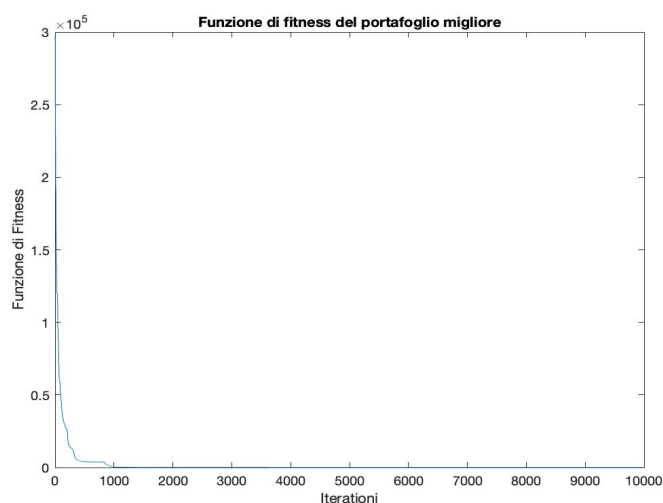


Grafico ottenuto mediante software Matlab

3.4.2.5 Scenario 3 ~ Modello 1

Come detto in precedenza, il terzo scenario copre l'intero 2019, un anno caratterizzato da un forte rimbalzo dei listini azionari principali in Italia e Germania (entrambe con performance superiore al 20%) mentre per il Messico e l'India dopo mesi di alti e bassi l'anno si è chiuso in positivo.

L'analisi dei risultati relativi alla miglior simulazione (presente in Appendice A), evidenziano la capacità del modello di individuare una soluzione in termini di portafoglio ottimo efficiente, che permetta di generare un extrarendimento rispetto al benchmark rispettando al contempo tutti i vincoli imposti: i valori delle funzioni di fitness molto contenuti evidenziano questo fattore. Inoltre, dalle simulazioni emerge una generale capacità del modello basato sul Tracking Error di rispettare tutti i vincoli selezionando il numero corretto dei titoli, nel rispetto delle percentuali precedentemente settate, sebbene non sempre si riesca ad ottenere un rendimento superiore a quello di riferimento. Per ogni indice può capitare di individuare 1 o 2 situazioni in cui la risposta dell'algoritmo non è idonea alle aspettative (ciò viene evidenziato da valori della funzione di fitness molto elevati).

Di conseguenza vengono indicati i dati relativi ai rendimenti dei portafogli selezionati:

Indice	Rend. Annuo benchmark	Rend. Annuo K=20	Rend. Annuo K=10
FTSEMIB	37,794325%	45,784879%	55,483472%
DAX	38,664048%	44,143423%	51,087642%
S&P/BMV IPC	7,553421%	18,416193%	20,158446%
NIFTY	38,106797%	48,524739%	51,506348%

Figura 32 Tracking Error portafoglio migliore Dax,

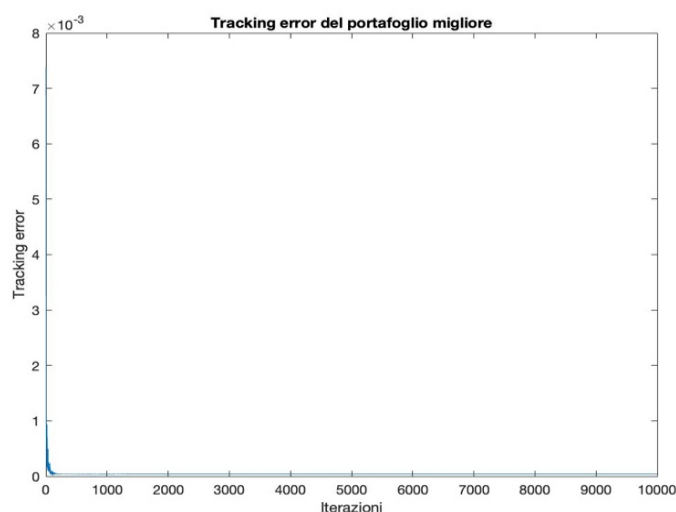


Grafico ottenuto mediante software Matlab

Figura 33 Funzione di fitness portafoglio migliore DAX

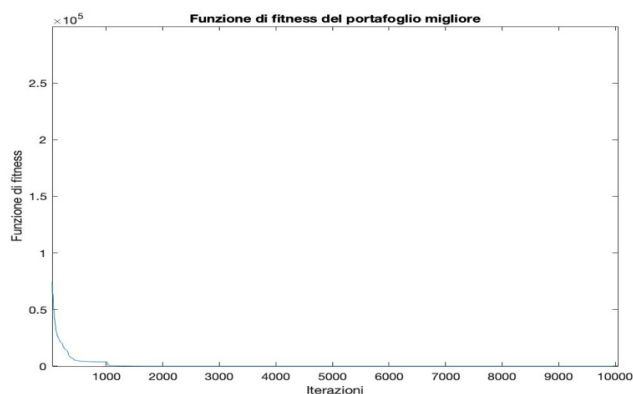


Grafico ottenuto mediante software Matlab

Come per quanto visto nei periodi precedenti, il Tracking Error viene minimizzato già a partire dalle prime iterazioni, e anche la funzione di fitness raggiunge un valore prossimo a 0 dopo le prime 1000 iterazioni.

3.4.2.6 Scenario 3 ~ Modello 2

Quanto detto sopra può essere riportato anche per quanto concerne l'applicazione del modello che prevede l'utilizzo della misura di rischio coerente, il quale permette di individuare nella maggior parte dei casi dei portafogli ottimi in grado di performare meglio rispetto al benchmark. Tuttavia, il modello moderno risulta meno "stabile" rispetto al modello classico, in quanto in differenti simulazioni emerge una violazione del vincolo di cardinalità importante, che porta la funzione di fitness ad assumere valori elevati. Nell'appendice A queste violazioni sono messe in evidenza utilizzando il

colore blu per evidenziare i titoli “extra” che non dovevano essere compresi. Per quanto riguarda la diversificazione, come nei casi precedenti c’è una buona divisione della ricchezza tra i vari titoli che è possibile selezionare: può capitare che nel caso di K=20 l’ammontare di capitale investito in alcuni titoli sia comunque contenuto, ma è una situazione comprensibile vista l’elevata numerosità.

Di seguito si presentano i dati relativi ai rendimenti dei portafogli selezionati:

Indice	Rend. Annuo benchmark	Rend. Annuo K=20	Rend. Annuo K=10
FTSEMIB	37,794325%	42,484516%	47,742021%
DAX	38,664048%	49,574766%	40,596732%
S&P/BMV IPC	7,553421%	27,450673%	18,088616%
NIFTY	38,106797%	54,081762%	42,376989%

Figura 34 Funzione di fitness portafoglio migliore IPC

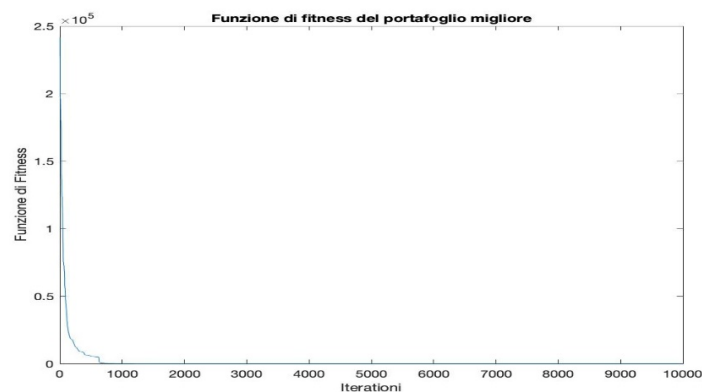


Grafico ottenuto mediante software Matlab

Si nota dalla figura 21 come la funzione di fitness viene minimizzata già prima delle 1000 iterazioni, raggiungendo valori prossimi a 0.

3.4.2.7 Scenario 4 ~ Modello 1

Il quarto scenario si sviluppa all’interno del 2020, anno tristemente noto a causa della diffusione della pandemia di Covid-19, che ha portato devastazione dal punto di vista economico, sociale e lavorativo, con effetti maggiormente marcati nella prima metà dell’anno. Nel mese di Marzo le borse mondiali si sono accomunate nella perdita di valore nell’ordine del 20, 30 e 40%, tuttavia, gli effetti del blocco totale dell’economia sono stati ben presto annullati dalle borse le quali sono riuscite a chiudere l’anno in prossimità dei valori pre-crisi (il Messico è riuscito anche a chiudere l’anno in guadagno). I risultati che emergono dalle tabelle sotto riportate non permettono di far

emergere il diffondersi della crisi, in quanto i mesi peggiori sono inglobati nel periodo in sample utilizzato per la stima dei parametri, mentre il periodo out-of sample è caratterizzato da una generale ripresa dei listini tipica di un qualsiasi anno non anomalo che chiude in sessione positiva. Per ciò che concerne diversificazione e rispetto dei vincoli, il modello continua a rispondere positivamente indipendentemente dalla cardinalità scelta; la costruzione di portafogli Enhanced Indexing risulta quindi soddisfacente in termini di rischiosità (il Tracking Error viene minimizzato) e in termini di extra-rendimento rispetto al benchmark.

Di seguito vengono proposti i rendimenti annui dei portafogli selezionati:

Indice	Rend. Annuo benchmark	Rend. Annuo K=20	Rend. Annuo K=10
FTSEMIB	42,520377%	54,314473%	58,245552%
DAX	21,772829%	53,269861%	22,665282%
S&P/BMV IPC	74,333966%	123,189662%	96,790570%
NIFTY	87,424952%	89,700043%	139,510867%

Figura 35 Tracking Error portafoglio migliore Nifty.

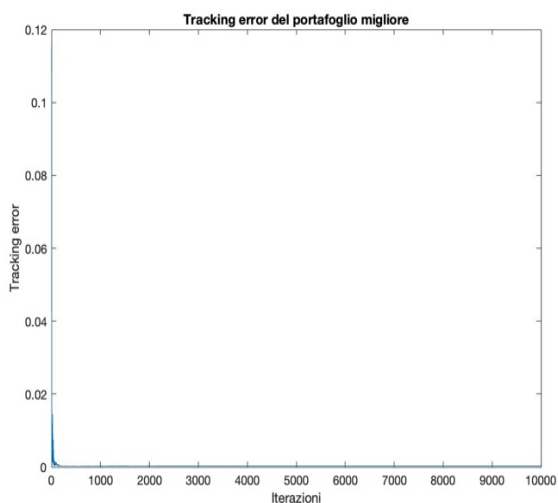


Grafico ottenuto mediante software Matlab

Figura 36 Fitness portafoglio migliore Nifty

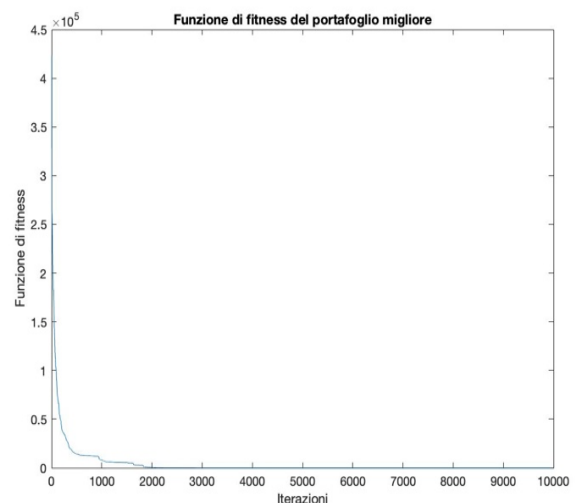


Grafico ottenuto mediante software Matlab

Anche in questo caso la bontà del modello viene evidenziata dal valore del Tracking Error che viene minimizzato e dalla funzione di fitness anch'essa minimizzata (prossima al valore 0) a partire dalle 2000 iterazioni.

3.4.2.8. Scenario 4 ~ Modello 2

In generale il modello moderno, sebbene permetta di ottenere risultati interessanti, risulta più facilmente incline a violare i vincoli, come visto negli scenari precedenti. Nel caso dell'ultimo

scenario, ad esempio, per quanto concerne l'indice messicano si individua come portafoglio ottimale in termini di funzione di fitness, un portafoglio che genera un rendimento annuo pari a 39,750101%, inferiore rispetto al 74,333966% fatto registrare dal benchmark. Va messo in evidenza che il rendimento del 74,33% che può sembrare anomalo in realtà è verosimile, in quanto il rendimento medio giornaliero del benchmark è stato calcolato negli ultimi 4 mesi dell'anno, periodo in cui l'indice IPC ha recuperato tutte le perdite dell'anno dovute al blocco dell'economia. Di seguito si presenta la tabella con i rendimenti annui dei portafogli selezionati:

Indice	Rend. Annuo benchmark	Rend. Annuo K=20	Rend. Annuo K=10
FTSEMIB	42,520377%	65,034056%	67,416872%
DAX	21,772829%	41,769120%	63,053702%
S&P/BMV IPC	74,333966%	98,878772%	39,750101%
NIFTY	87,424952%	92,582625%	147,707275%

Figura 37 Funzione di fitness portafoglio migliore DAX

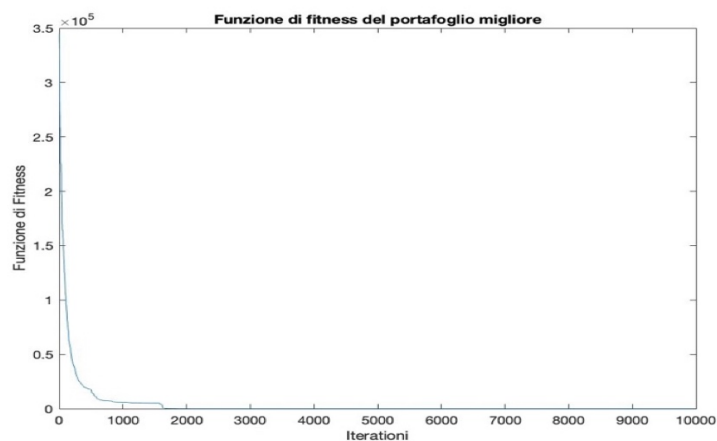


Grafico ottenuto mediante software matlab

Dal grafico raffigurante la funzione di fitness del portafoglio migliore emerge la capacità del modello di rispettare tutti i vincoli: la funzione di fitness basata sulla minimizzazione del risk-reward ratio, infatti, circa dopo 1500 iterazioni raggiunge valori prossimi a 0.

Conclusioni

Nel presente elaborato è stato affrontato il tema dell'enhanced index tracking, ossia una strategia di gestione di portafoglio relativamente moderna che prevede di coniugare alcuni aspetti delle gestioni passive (come la replicabilità di un indice di riferimento) con alcuni aspetti delle gestioni attive come la volontà di ottenere un extra-rendimento sempre rispetto ad un benchmark predeterminato.

Il problema è stato affrontato mediante l'utilizzo di due differenti modelli di selezione, uno più classico basato sulla minimizzazione del Tracking Error calcolato utilizzando la semivarianza e uno più moderno proposto da Guastaroba et al. (2020) basato sulla costruzione di una misura di rischio-rendimento da minimizzare basata sul Conditional Value at Risk. Per testare l'efficienza dei modelli si è deciso di utilizzare la Particle Swarm Optimization, una metaeuristica bio-ispirata in grado di risolvere problemi NP-Hard in maniera approssimata, ma in tempi brevi. La scelta di utilizzare questo particolare algoritmo è nata dal fatto che in letteratura il problema dell'Enhanced Indexation, essendo relativamente "giovane", è stato affrontato mediante l'applicazione di diverse metaeuristiche (come gli algoritmi genetici), tra le quali raramente compare la PSO.

Una volta scelto l'algoritmo da utilizzare, e codificato mediante il software MATLAB, si è proceduto con l'applicazione dei modelli a dati reali, relativi a 4 differenti mercati: sono state utilizzate per lo studio le serie storiche di 39 titoli appartenenti al FTSEMib italiano, 27 relative al DAX tedesco, 33 relative all'S&P/BMV IPC messicano e 48 relative al NIFTY indiano. Per l'analisi empirica si è deciso di concentrare l'attenzione nel periodo che va dal 01/01/2017 fino al 31/12/2020, individuando 4 differenti scenari (uno per ogni anno) opportunamente suddivisi in periodo in sample e periodo out of sample: in ogni scenario sono stati dedicati 8 mesi (circa 170 osservazioni giornaliere) all'analisi in sample utile alla stima dei parametri e 4 mesi (circa 80 osservazioni giornaliere) al futuro virtuale per testare il portafoglio ottimo selezionato.

Dall'analisi empirica emerge una buona capacità di entrambi i modelli di selezionare portafogli efficienti del tipo Enhanced Indexing; nello specifico i dati esemplificati nell'ultimo capitolo evidenziano la capacità di entrambi i modelli di selezionare portafogli che rispettano tutti i vincoli imposti e che nella maggior parte dei casi permettano di generare un rendimento in eccesso rispetto al benchmark, minimizzando il rischio.

Andando nel dettaglio, il modello classico che si basa su una misura di rischio abbastanza contestata in ambito accademico, ha permesso in tutte le simulazioni di minimizzare la rischiosità (in termini di Tracking Error) riuscendo nella maggior parte dei casi a selezionare un portafoglio con rendimento superiore al benchmark, sebbene in alcuni casi negativo. Un altro aspetto di rilievo fa riferimento al rispetto dei vincoli: in tutti i test che sono stati effettuati, il modello ha saputo

rispettare i vincoli imposti garantendo un controllo indiretto dei costi di transazione e una buona diversificazione.

Per quanto concerne il modello moderno, anche in questo caso c'è soddisfazione circa i risultati ottenuti: dalle simulazioni emerge la capacità di minimizzare sistematicamente il rischio, e una buona capacità di selezione di portafogli migliori in termini di rendimento. Tuttavia, a differenza del modello classico, si nota una maggiore incertezza per quanto concerne il rispetto dei vincoli, in quanto in diverse simulazioni si ottengono valori molto elevati della funzione di fitness dovuti al mancato rispetto del vincolo di cardinalità (il modello in diverse situazioni ha compreso nel portafoglio un numero di titoli maggiore rispetto al vincolo K).

Un aspetto fondamentale che va rimarcato prima di concludere l'elaborato fa riferimento al tempo di risoluzione del problema sotto esame: in ambito operativo i gestori di portafoglio devono spesso compiere delle decisioni di investimento cercando di sfruttare delle situazioni di mercato che possono espriarsi in breve tempo, perciò necessitano di informazioni quasi in tempo reale. Se l'algoritmo PSO fornisse una risposta considerata precisa ma in lungo tempo, la soluzione potrebbe rivelarsi inutilizzabile, e di conseguenza anche la metaeuristica perderebbe di efficienza; nel caso del presente elaborato, invece, i tempi risolutivi sono contenuti (tra i 12 e i 23 secondi) e quindi completamente in linea con le esigenze dei gestori professionali.

Per concludere, possibili studi e sviluppi futuri si potrebbero concentrare sull'analisi dello stesso periodo temporale, suddividendolo però in sotto-periodi più contenuti, per cercare di studiare il comportamento dei modelli in condizioni di maggiore volatilità. Inoltre, un ulteriore aspetto interessante da investigare potrebbe essere l'effetto dell'imposizione fiscale, o il confronto con modelli più complessi che considerino per esempio i vincoli sui lotti minimi di transazione oppure sul minimo numero intero positivo di lotti minimi di transazione di un dato titolo azionario che deve essere acquistato.

Appendice A

Come anticipato nell'ultimo capitolo, si è deciso di riportare in appendice A le tabelle raffiguranti i portafogli ottimi selezionati da entrambi i modelli, per ognuno degli scenari sotto esame (in appendice non si trovano le tabelle relative al primo scenario, in quanto già presentate all'interno del capitolo 3).

3.4.2.3 Scenario 2 ~ Modello 1

Figura 38 FTSEMib40, modello 1, scenario 2, K=20, K=10

	Sim.10		Sim.10
A2A	0,0129968	A2A	0,0246541
Amplifon	0,1259808	Amplifon	0,0253564
Atlantia	0,0000000	Atlantia	0,0000000
Azimut Holding	0,0629347	Azimut Holding	0,0000000
Banca Generali	0,0357698	Banca Generali	0,0000000
Banca Medionalum	0,0000000	Banca Medionalum	0,0000000
Banco BPM	0,0000000	Banco BPM	0,0000000
BPER Banca	0,0000000	BPER Banca	0,1324018
Buzzi Unicem	0,0000000	Buzzi Unicem	0,0000000
Campari	0,0000000	Campari	0,0000000
Cnh Industrial	0,0000000	Cnh Industrial	0,0000000
Diasorin	0,0284166	Diasorin	0,0000000
Enel	0,0000000	Enel	0,1448047
Eni	0,0000000	Eni	0,0000000
EXOR	0,0000000	EXOR	0,0000000
Ferrari	0,0000000	Ferrari	0,0000000
Fineco Bank	0,0426247	Fineco Bank	0,0000000
Generali	0,0545327	Generali	0,0000000
Hera	0,0000000	Hera	0,1700643
Interpump Group	0,0460935	Interpump Group	0,1907736
Intesa San paolo	0,0287224	Intesa San paolo	0,0000000
Inwit	0,0582619	Inwit	0,0000000
Italgas	0,0317779	Italgas	0,0000000
Leonardo	0,0000000	Leonardo	0,1417895
Mediobanca	0,0213098	Mediobanca	0,0000000
Moncler	0,1080814	Moncler	0,0000000
Pirelli	0,1775315	Pirelli	0,0488822
Poste Italiane	0,0216099	Poste Italiane	0,0000000
Prysmian	0,0000000	Prysmian	0,0000000
Recordati	0,0000000	Recordati	0,0000000
Saipem	0,0000000	Saipem	0,0000000
Snam	0,0105539	Snam	0,0000000
Stellantis	0,0000000	Stellantis	0,0000000
Stmicroelectronics	0,0157956	Stmicroelectronics	0,0000000
Telecom	0,0000000	Telecom	0,0000000
Tenaris	0,0767050	Tenaris	0,0000000
Terna	0,0000000	Terna	0,0527144
Unicredit	0,0106869	Unicredit	0,0000000
Unipol	0,0296140	Unipol	0,0685591
Fitness	-0,00061432	Fitness	-0,00032503
Rendimento out of sample pf	-0,002161	Rendimento out of sample pf	-0,000914
Rendimento out of sample bench	-0,001519	Rendimento out of sample bench	-0,001519
Tempo risolutivo (secondi)	17,227783	Tempo risolutivo (secondi)	16,192063

Figura 39 DAX30, modelo 1, escenario 2, K=20, K=10

	Sim.8		Sim.7
Adidas	0,0000000	Adidas	0,0000000
Allianz	0,0167749	Allianz	0,0000000
Basf	0,0491536	Basf	0,0000000
BMW	0,0209971	BMW	0,0000000
Bayer	0,0230145	Bayer	0,1316317
Continental	0,0181209	Continental	0,0000000
Covestro	0,0536518	Covestro	0,0000000
Daimler	0,1175117	Daimler	0,0000000
Deutsche Bank	0,0119637	Deutsche Bank	0,0000000
Deutsche Boerse	0,0000000	Deutsche Boerse	0,0000000
Deutsche post	0,0462462	Deutsche post	0,0000000
Deutsche Wohnen	0,0121008	Deutsche Wohnen	0,0735830
Dt.Telekom	0,0469078	Dt.Telekom	0,0000000
E.On	0,0858495	E.On	0,1682419
Fresen.Med.Care	0,0000000	Fresen.Med.Care	0,0381745
Fresenius	0,0000000	Fresenius	0,0000000
Heidelbergcement	0,0000000	Heidelbergcement	0,0000000
Henkel	0,0396354	Henkel	0,0000000
Infineon Tech.AG	0,0248432	Infineon Tech.AG	0,0818376
Merck	0,0424039	Merck	0,0000000
Mtu Aero Engines	0,0356370	Mtu Aero Engines	0,0000000
Muench.Rueckvers	0,0315809	Muench.Rueckvers	0,0413469
RWE	0,0176522	RWE	0,0000000
SAP	0,0000000	SAP	0,1004838
Siemens	0,0000000	Siemens	0,1003754
Volkswagen	0,2338792	Volkswagen	0,0859611
Vonovia	0,0720757	Vonovia	0,1783642
Fitness	0,0154594	Fitness	0,015455731
Rendimiento out of sample pf	-0,001468	Rendimiento out of sample pf	-0,001715
Rendimiento out of sample bench	-0,001894	Rendimiento out of sample bench	-0,001894
Tempo resolutivo (secondi)	13,583367	Tempo resolutivo (secondi)	12,98411

Figura 40 S&P/BMV IPC modelo 1, escenario 2, K=20, K=10

	Sim.8		Sim.2
Alfa SA A	0,0537482	Alfa SA A	0,0000000
Alesea SA	0,0100233	Alesea SA	0,0660511
America Movil SAB de CV L	0,0000000	America Movil SAB de CV L	0,1782758
Arca Continental, SAB de CV	0,1342662	Arca Continental, SAB de CV	0,0000000
Bolsa Mexicana de Valores SA de CV	0,0000000	Bolsa Mexicana de Valores SA de CV	0,0000000
Cemex SA CPO	0,0000000	Cemex SA CPO	0,0000000
Coca-Cola Femsa SAB de CV UBL	0,0122475	Coca-Cola Femsa SAB de CV UBL	0,0000000
Corporacion Inmobiliaria Vesta, S.A.B. DE C.V.	0,0847537	Corporacion Inmobiliaria Vesta, S.A.B. DE C.V.	0,1100516
El Puerto de Liverpool SAB de CV	0,0245043	El Puerto de Liverpool SAB de CV	0,0000000
Fomento Economico Mexicano S.A.B. de C.V.	0,0000000	Fomento Economico Mexicano S.A.B. de C.V.	0,0352463
Genomma Lab Internacional SA de CV	0,0000000	Genomma Lab Internacional SA de CV	0,0554717
Gruma SAB B	0,0142484	Gruma SAB B	0,2553109
Grupo Aeroportuario del Centro Norte, S.A.B. de C.V.	0,0000000	Grupo Aeroportuario del Centro Norte, S.A.B. de C.V.	0,0000000
Grupo Aeroportuario del Pacifico, S.A.B. de C.V.	0,0258891	Grupo Aeroportuario del Pacifico, S.A.B. de C.V.	0,0000000
Grupo Aeroportuario del Sureste SAB de CV B	0,0989684	Grupo Aeroportuario del Sureste SAB de CV B	0,0000000
Grupo Bimbo S.A.B.	0,0000000	Grupo Bimbo S.A.B.	0,0880214
Grupo Carso SAB de CV	0,0000000	Grupo Carso SAB de CV	0,0175804
Grupo Cementos de Chihuahua SAB de CV	0,1457005	Grupo Cementos de Chihuahua SAB de CV	0,0000000
Grupo Elektra S.A.B. de C.V.	0,0122324	Grupo Elektra S.A.B. de C.V.	0,0538427
Grupo Financiero Banorte O	0,0000000	Grupo Financiero Banorte O	0,0000000
Grupo Financiero Inbursa O	0,0942288	Grupo Financiero Inbursa O	0,0000000
Grupo Mexico SAB de CV B	0,0336438	Grupo Mexico SAB de CV B	0,0000000
Grupo Televisa SAB CPO	0,0693738	Grupo Televisa SAB CPO	0,0000000
Industrias Penoles	0,0199427	Industrias Penoles	0,0000000
Infraestructura Energetica Nova S.A.B. de C.V.	0,0000000	Infraestructura Energetica Nova S.A.B. de C.V.	0,0000000
Kimberly Clark de Mexico S.A.B. de C.V. A	0,0000000	Kimberly Clark de Mexico S.A.B. de C.V. A	0,1401483
Megacable Holdings SAB de CV	0,0551956	Megacable Holdings SAB de CV	0,0000000
ORBIA ADVANCE CORPORATION SAB de CV	0,0457614	ORBIA ADVANCE CORPORATION SAB de CV	0,0000000
Promotora y Operadora de Infraestructura SAB de CV	0,0000000	Promotora y Operadora de Infraestructura SAB de CV	0,0000000
Qualitas Controladora S.A.B de C.V.	0,0000000	Qualitas Controladora S.A.B de C.V.	0,0000000
Regional, S.A. de C.V.	0,0104143	Regional, S.A. de C.V.	0,0000000
Telesites S.A.B. de C.V.	0,0377539	Telesites S.A.B. de C.V.	0,0000000
Walmart de Mexico SAB de CV	0,0171038	Walmart de Mexico SAB de CV	0,0000000
Fitness	-0,004164417	Fitness	-0,004161874
Rendimiento out of sample pf	-0,001604	Rendimiento out of sample pf	-0,000953
Rendimiento out of sample bench	-0,002017	Rendimiento out of sample bench	-0,002017
Tempo resolutivo (secondi)	13,996354	Tempo resolutivo (secondi)	13,675298

Figura 41 NIFTY50, modello 1, scenario 2, K=20, K=10

	Sim.7		Sim.7
Adani Ports and Special Economic Zone Ltd.	0,0000000	Adani Ports and Special Economic Zone Ltd.	0,0000000
Asian Paints Ltd.	0,1243226	Asian Paints Ltd.	0,0000000
Axis Bank Ltd.	0,0337128	Axis Bank Ltd.	0,0000000
Bajaj Auto Ltd.	0,0452415	Bajaj Auto Ltd.	0,1411738
Bajaj Finance Ltd.	0,0109122	Bajaj Finance Ltd.	0,0000000
Bajaj Finserv Ltd.	0,0000000	Bajaj Finserv Ltd.	0,0000000
Bharat Petroleum Corporation Ltd.	0,0000000	Bharat Petroleum Corporation Ltd.	0,0200398
Bharti Airtel Ltd.	0,0244464	Bharti Airtel Ltd.	0,0000000
Britannia Industries Ltd.	0,0000000	Britannia Industries Ltd.	0,0000000
Cipla Ltd.	0,0000000	Cipla Ltd.	0,0000000
Coal India Ltd.	0,0596327	Coal India Ltd.	0,0000000
Divi's Laboratories Ltd.	0,0000000	Divi's Laboratories Ltd.	0,0000000
Dr. Reddy's Laboratories Ltd.	0,0161549	Dr. Reddy's Laboratories Ltd.	0,0000000
Eicher Motors Ltd.	0,1056765	Eicher Motors Ltd.	0,2305300
Grasim Industries Ltd.	0,0686818	Grasim Industries Ltd.	0,0000000
HCL Technologies Ltd.	0,0000000	HCL Technologies Ltd.	0,0000000
HDFC Bank Ltd.	0,0583222	HDFC Bank Ltd.	0,0000000
Hero MotoCorp Ltd.	0,0000000	Hero MotoCorp Ltd.	0,0000000
Hindalco Industries Ltd.	0,0000000	Hindalco Industries Ltd.	0,0000000
Hindustan Unilever Ltd.	0,0000000	Hindustan Unilever Ltd.	0,0000000
Housing Development Finance Corporation Ltd.	0,0000000	Housing Development Finance Corporation Ltd.	0,0000000
ICICI Bank Ltd.	0,0165834	ICICI Bank Ltd.	0,0000000
ITC Ltd.	0,0000000	ITC Ltd.	0,1056794
Indian Oil Corporation Ltd.	0,0000000	Indian Oil Corporation Ltd.	0,0000000
IndusInd Bank Ltd.	0,0000000	IndusInd Bank Ltd.	0,0000000
Infosys Ltd.	0,0278007	Infosys Ltd.	0,2565124
JSW Steel Ltd.	0,0000000	JSW Steel Ltd.	0,0498285
Kotak Mahindra Bank Ltd.	0,0900484	Kotak Mahindra Bank Ltd.	0,0000000
Larsen & Toubro Ltd.	0,0000000	Larsen & Toubro Ltd.	0,0000000
Mahindra & Mahindra Ltd.	0,0510954	Mahindra & Mahindra Ltd.	0,0000000
Maruti Suzuki India Ltd.	0,0666317	Maruti Suzuki India Ltd.	0,0000000
NTPC Ltd.	0,0102199	NTPC Ltd.	0,0000000
Nestle India Ltd.	0,0000000	Nestle India Ltd.	0,0548433
Oil & Natural Gas Corporation Ltd.	0,0110170	Oil & Natural Gas Corporation Ltd.	0,0000000
Power Grid Corporation of India Ltd.	0,0000000	Power Grid Corporation of India Ltd.	0,0000000
Reliance Industries Ltd.	0,0000000	Reliance Industries Ltd.	0,0000000
Shree Cement Ltd.	0,0000000	Shree Cement Ltd.	0,0348283
State Bank of India	0,0000000	State Bank of India	0,0000000
Sun Pharmaceutical Industries Ltd.	0,0000000	Sun Pharmaceutical Industries Ltd.	0,0000000
Tata Consultancy Services Ltd.	0,0263464	Tata Consultancy Services Ltd.	0,0000000
Tata Consumer Products Ltd.	0,0000000	Tata Consumer Products Ltd.	0,0000000
Tata Motors Ltd.	0,0424413	Tata Motors Ltd.	0,0000000
Tata Steel Ltd.	0,0000000	Tata Steel Ltd.	0,0754770
Tech Mahindra Ltd.	0,0000000	Tech Mahindra Ltd.	0,0000000
Titan Company Ltd.	0,1107122	Titan Company Ltd.	0,0000000
UPL Ltd.	0,0000000	UPL Ltd.	0,0000000
UltraTech Cement Ltd.	0,0000000	UltraTech Cement Ltd.	0,0310875
Wipro Ltd.	0,0000000	Wipro Ltd.	0,0000000
Fitness	-0,007260039	Fitness	0,002248997
Rendimento out of sample pf	-0,001039	Rendimento out of sample pf	-0,000213
Rendimento out of sample bench	-0,000864	Rendimento out of sample bench	-0,000864
Tempo risolutivo (secondi)	21,839457	Tempo risolutivo (secondi)	22,001847

Scenario 2 ~ Modello 2

Figura 42 FTSEMib40, modello 2, scenario 2, K=20, K=10

	Sim.10		Sim.4
A2A	0,0126358	A2A	0,0000000
Amplifon	0,0344217	Amplifon	0,0000000
Atlantia	0,0736683	Atlantia	0,0000000
Azimut Holding	0,0000000	Azimut Holding	0,0000000
Banca Generali	0,0000000	Banca Generali	0,0000000
Banca Medionalum	0,0000000	Banca Medionalum	0,0000000
Banco BPM	0,0325539	Banco BPM	0,1268896
BPER Banca	0,0000000	BPER Banca	0,0000000
Buzzi Unicem	0,0109548	Buzzi Unicem	0,0447984
Campari	0,0111711	Campari	0,0000000
Cnh Industrial	0,0000000	Cnh Industrial	0,0255566
Diasorin	0,0377810	Diasorin	0,0000000
Enel	0,1229849	Enel	0,1184914
Eni	0,0000000	Eni	0,0000000
EXOR	0,0000000	EXOR	0,0000000
Ferrari	0,2113421	Ferrari	0,0000000
Fineco Bank	0,0000000	Fineco Bank	0,1845723
Generali	0,0000000	Generali	0,0000000
Hera	0,0000000	Hera	0,0000000
Interpump Group	0,1179587	Interpump Group	0,0000000
Intesa San paolo	0,0000000	Intesa San paolo	0,0000000
Inwit	0,0232992	Inwit	0,0591539
Italgas	0,0111045	Italgas	0,0000000
Leonardo	0,0417724	Leonardo	0,0000000
Mediobanca	0,0000000	Mediobanca	0,0000000
Moncler	0,0000000	Moncler	0,0000000
Pirelli	0,0313735	Pirelli	0,2749235
Poste Italiane	0,0000000	Poste Italiane	0,0387855
Prismian	0,0402846	Prismian	0,0000000
Recordati	0,0000000	Recordati	0,0878663
Saipem	0,0100020	Saipem	0,0000000
Snam	0,0000000	Snam	0,0000000
Stellantis	0,0000000	Stellantis	0,0389300
Stmicroelectronics	0,0448526	Stmicroelectronics	0,0000000
Telecom	0,0404365	Telecom	0,0000000
Tenaris	0,0632674	Tenaris	0,0000000
Terna	0,0000000	Terna	0,0000000
Unicredit	0,0000000	Unicredit	0,0000000
Unipol	0,0281340	Unipol	0,0000000
Fitness	0,14372652	Fitness	0,4027560
Rendimento out of sample pf	-0,001512	Rendimento out of sample pf	-0,000954
Rendimento out of sample bench	-0,001519	Rendimento out of sample bench	-0,001519
Tempo risolutivo (secondi)	16,99864	Tempo risolutivo (secondi)	16,008384

Figura 43 DAX30, modello 2, scenario 2, K=20, K=10

	Sim.6		Sim.7
Adidas	0,0649077	Adidas	0,0000000
Allianz	0,1778457	Allianz	0,2949019
Basf	0,0122795	Basf	0,1262947
BMW	0,0100187	BMW	0,1142807
Bayer	0,0879876	Bayer	0,0000000
Continental	0,0139417	Continental	0,0000000
Covestro	0,0000000	Covestro	0,0000000
Daimler	0,0000000	Daimler	0,1769116
Deutsche Bank	0,0722134	Deutsche Bank	0,0410018
Deutsche Boerse	0,0000000	Deutsche Boerse	0,0000000
Deutsche post	0,0625279	Deutsche post	0,0000000
Deutsche Wohnen	0,0000000	Deutsche Wohnen	0,0000000
Dt.Telekom	0,0780026	Dt.Telekom	0,0000000
E.On	0,0127391	E.On	0,0000000
Fresen.Med.Care	0,0100539	Fresen.Med.Care	0,0000000
Fresenius	0,0149758	Fresenius	0,0000000
Heidelbergcement	0,0106416	Heidelbergcement	0,0176369
Henkel	0,0000000	Henkel	0,0231870
Infineon Tech.AG	0,0570363	Infineon Tech.AG	0,0000000
Merck	0,0458717	Merck	0,0000000
Mtu Aero Engines	0,0103353	Mtu Aero Engines	0,1712050
Muench.Rueckvers	0,0000000	Muench.Rueckvers	0,0199872
RWE	0,0252659	RWE	0,0000000
SAP	0,0110477	SAP	0,0000000
Siemens	0,0893700	Siemens	0,0000000
Volkswagen	0,1329382	Volkswagen	0,0145779
Vonovia	0,0000000	Vonovia	0,0000000
Fitness	0,465039145	Fitness	0,562198976
Rendimento out of sample pf	-0,001666	Rendimento out of sample pf	-0,001762
Rendimento out of sample bench	-0,001894	Rendimento out of sample bench	-0,001894
Tempo risolutivo (secondi)	14,994563	Tempo risolutivo (secondi)	14,348714

Figura 44 S&P/BMV IPC, modello 2, scenario 2, K=20, K=10

	Sim.6		Sim.7
Alfa SA A	0,0114103	Alfa SA A	0,2295625
Alesea SA	0,0210089	Alesea SA	0,0445135
America Movil SAB de CV L	0,0000000	America Movil SAB de CV L	0,0000000
Arca Continental, SAB de CV	0,0143933	Arca Continental, SAB de CV	0,0902826
Bolsa Mexicana de Valores SA de CV	0,0587141	Bolsa Mexicana de Valores SA de CV	0,1328768
Cemex SA CPO	0,0150451	Cemex SA CPO	0,0000000
Coca-Cola Femsa SAB de CV UBL	0,0000000	Coca-Cola Femsa SAB de CV UBL	0,0000000
Corporacion Inmobiliaria Vesta, S.A.B. DE C.V.	0,0162505	Corporacion Inmobiliaria Vesta, S.A.B. DE C.V.	0,0000000
El Puerto de Liverpool SAB de CV	0,0000000	El Puerto de Liverpool SAB de CV	0,0000000
Fomento Economico Mexicano S.A.B. de C.V.	0,0000000	Fomento Economico Mexicano S.A.B. de C.V.	0,0000000
Genomma Lab Internacional SA de CV	0,0131039	Genomma Lab Internacional SA de CV	0,0000000
Gruma SAB B	0,0000000	Gruma SAB B	0,0000000
Grupo Aeroportuario del Centro Norte, S.A.B. de C.V.	0,0105069	Grupo Aeroportuario del Centro Norte, S.A.B. de C.V.	0,0000000
Grupo Aeroportuario del Pacifico, S.A.B. de C.V.	0,0144756	Grupo Aeroportuario del Pacifico, S.A.B. de C.V.	0,0805313
Grupo Aeroportuario del Sureste SAB de CV B	0,1785952	Grupo Aeroportuario del Sureste SAB de CV B	0,0000000
Grupo Bimbo S.A.B.	0,0538738	Grupo Bimbo S.A.B.	0,0000000
Grupo Carso SAB de CV	0,1698447	Grupo Carso SAB de CV	0,0000000
Grupo Cementos de Chihuahua SAB de CV	0,0000000	Grupo Cementos de Chihuahua SAB de CV	0,0000000
Grupo Elektra S.A.B. de C.V.	0,0102799	Grupo Elektra S.A.B. de C.V.	0,0388875
Grupo Financiero Banorte O	0,0000000	Grupo Financiero Banorte O	0,0272173
Grupo Financiero Inbursa O	0,0864626	Grupo Financiero Inbursa O	0,0660870
Grupo Mexico SAB de CV B	0,0000000	Grupo Mexico SAB de CV B	0,0000000
Grupo Televisa SAB CPO	0,1913987	Grupo Televisa SAB CPO	0,0000000
Industrias Penoles	0,0244426	Industrias Penoles	0,0000000
Infraestructura Energetica Nova S.A.B. de C.V.	0,0000000	Infraestructura Energetica Nova S.A.B. de C.V.	0,2082841
Kimberly Clark de Mexico S.A.B. de C.V. A	0,0000000	Kimberly Clark de Mexico S.A.B. de C.V. A	0,0000000
Megacable Holdings SAB de CV	0,0000000	Megacable Holdings SAB de CV	0,0000000
ORBIA ADVANCE CORPORATION SAB de CV	0,0000000	ORBIA ADVANCE CORPORATION SAB de CV	0,0817145
Promotora y Operadora de Infraestructura SAB de CV	0,0100504	CV	0,0000000
Qualitas Controladora S.A.B de C.V.	0,0793511	Qualitas Controladora S.A.B de C.V.	0,0000000
Regional, S.A. de C.V.	0,0100649	Regional, S.A. de C.V.	0,0000000
Telesites S.A.B. de C.V.	0,0107155	Telesites S.A.B. de C.V.	0,0000000
Walmart de Mexico SAB de CV	0,0000000	Walmart de Mexico SAB de CV	0,0000000
Fitness	0,396702144	Fitness	1,122194
Rendimento out of sample pf	-0,001738	Rendimento out of sample pf	-0,001534
Rendimento out of sample bench	-0,002017	Rendimento out of sample bench	-0,002017
Tempo risolutivo (secondi)	15,918475	Tempo risolutivo (secondi)	13,385937

Figura 45 NIFTY, modello 2, scenario 2, K=20, K=10

	Sim.3		Sim.6
Adani Ports and Special Economic Zone Ltd.	0,0000000	Adani Ports and Special Economic Zone Ltd.	0,2982660
Asian Paints Ltd.	0,0499032	Asian Paints Ltd.	0,0000000
Axis Bank Ltd.	0,0000000	Axis Bank Ltd.	0,0000000
Bajaj Auto Ltd.	0,0120456	Bajaj Auto Ltd.	0,0000000
Bajaj Finance Ltd.	0,0000000	Bajaj Finance Ltd.	0,0000000
Bajaj Finserv Ltd.	0,0000000	Bajaj Finserv Ltd.	0,0189227
Bharat Petroleum Corporation Ltd.	0,0000000	Bharat Petroleum Corporation Ltd.	0,0000000
Bharti Airtel Ltd.	0,0146310	Bharti Airtel Ltd.	0,0000000
Britannia Industries Ltd.	0,0131599	Britannia Industries Ltd.	0,0000000
Cipla Ltd.	0,0000000	Cipla Ltd.	0,0391654
Coal India Ltd.	0,0000000	Coal India Ltd.	0,0000000
Divi's Laboratories Ltd.	0,1352804	Divi's Laboratories Ltd.	0,0000000
Dr. Reddy's Laboratories Ltd.	0,0000000	Dr. Reddy's Laboratories Ltd.	0,0000000
Eicher Motors Ltd.	0,0000000	Eicher Motors Ltd.	0,0000000
Grasim Industries Ltd.	0,0569420	Grasim Industries Ltd.	0,0000000
HCL Technologies Ltd.	0,0115733	HCL Technologies Ltd.	0,0000000
HDFC Bank Ltd.	0,0000000	HDFC Bank Ltd.	0,0000000
Hero MotoCorp Ltd.	0,0000000	Hero MotoCorp Ltd.	0,0201045
Hindalco Industries Ltd.	0,1038605	Hindalco Industries Ltd.	0,1465988
Hindustan Unilever Ltd.	0,0000000	Hindustan Unilever Ltd.	0,0000000
Housing Development Finance Corporation Ltd.	0,0255985	Housing Development Finance Corporation Ltd.	0,0000000
ICICI Bank Ltd.	0,0403769	ICICI Bank Ltd.	0,0000000
ITC Ltd.	0,0555049	ITC Ltd.	0,1765611
Indian Oil Corporation Ltd.	0,0000000	Indian Oil Corporation Ltd.	0,0000000
IndusInd Bank Ltd.	0,0235249	IndusInd Bank Ltd.	0,0000000
Infosys Ltd.	0,0000000	Infosys Ltd.	0,0000000
JSW Steel Ltd.	0,0000000	JSW Steel Ltd.	0,0406005
Kotak Mahindra Bank Ltd.	0,0362452	Kotak Mahindra Bank Ltd.	0,0000000
Larsen & Toubro Ltd.	0,1033156	Larsen & Toubro Ltd.	0,1745362
Mahindra & Mahindra Ltd.	0,0000000	Mahindra & Mahindra Ltd.	0,0000000
Maruti Suzuki India Ltd.	0,0548259	Maruti Suzuki India Ltd.	0,0000000
NTPC Ltd.	0,0000000	NTPC Ltd.	0,0000000
Nestle India Ltd.	0,0000000	Nestle India Ltd.	0,0000000
Oil & Natural Gas Corporation Ltd.	0,0000000	Oil & Natural Gas Corporation Ltd.	0,0000000
Power Grid Corporation of India Ltd.	0,0218686	Power Grid Corporation of India Ltd.	0,0000000
Reliance Industries Ltd.	0,0222650	Reliance Industries Ltd.	0,0000000
Shree Cement Ltd.	0,0000000	Shree Cement Ltd.	0,0613889
State Bank of India	0,0000000	State Bank of India	0,0000000
Sun Pharmaceutical Industries Ltd.	0,0000000	Sun Pharmaceutical Industries Ltd.	0,0000000
Tata Consultancy Services Ltd.	0,0000000	Tata Consultancy Services Ltd.	0,0000000
Tata Consumer Products Ltd.	0,0000000	Tata Consumer Products Ltd.	0,0000000
Tata Motors Ltd.	0,0204649	Tata Motors Ltd.	0,0000000
Tata Steel Ltd.	0,0488104	Tata Steel Ltd.	0,0000000
Tech Mahindra Ltd.	0,1437478	Tech Mahindra Ltd.	0,0238732
Titan Company Ltd.	0,0000000	Titan Company Ltd.	0,0000000
UPL Ltd.	0,0000000	UPL Ltd.	0,0000000
UltraTech Cement Ltd.	0,0000000	UltraTech Cement Ltd.	0,0000000
Wipro Ltd.	0,0000000	Wipro Ltd.	0,0000000
Fitness	1,649695	Fitness	2,349800
Rendimento out of sample pf	-0,000409	Rendimento out of sample pf	-0,000374
Rendimento out of sample bench	-0,000864	Rendimento out of sample bench	-0,000864
Tempo risolutivo (secondi)	21,93948	Tempo risolutivo (secondi)	22,389459

Scenario 3 ~ Modello 1

Figura 46 FTSEMib, modello 1, scenario 3, K=20, K=10

	Sim.8		Sim.7
AZA	0,0000000	AZA	0,0000000
Amplifon	0,1892406	Amplifon	0,1748469
Atlantia	0,0115189	Atlantia	0,0000000
Azimut Holding	0,1163326	Azimut Holding	0,2656610
Banca Generali	0,0000000	Banca Generali	0,0000000
Banca Medionalum	0,0155644	Banca Medionalum	0,0000000
Banco BPM	0,0304062	Banco BPM	0,0000000
BPER Banca	0,0000000	BPER Banca	0,0000000
Buzzi Unicem	0,0000000	Buzzi Unicem	0,0666662
Campari	0,0391478	Campari	0,0000000
Cnh Industrial	0,0000000	Cnh Industrial	0,1235545
Diasorin	0,0000000	Diasorin	0,0000000
Enel	0,0000000	Enel	0,0000000
Eni	0,0000000	Eni	0,0000000
EXOR	0,0000000	EXOR	0,0000000
Ferrari	0,0206746	Ferrari	0,0000000
Fineco Bank	0,0132403	Fineco Bank	0,0000000
Generali	0,0510512	Generali	0,0000000
Hera	0,0000000	Hera	0,0406472
Interpump Group	0,0000000	Interpump Group	0,0000000
Intesa San paolo	0,0776953	Intesa San paolo	0,0000000
Inwit	0,0000000	Inwit	0,0718012
Italgas	0,0000000	Italgas	0,0000000
Leonardo	0,0000000	Leonardo	0,0000000
Mediobanca	0,0467743	Mediobanca	0,0000000
Moncler	0,0209474	Moncler	0,0000000
Pirelli	0,0000000	Pirelli	0,0613806
Poste Italiane	0,0320004	Poste Italiane	0,0000000
Prismian	0,0652441	Prismian	0,0000000
Recordati	0,0000000	Recordati	0,0000000
Saipem	0,0401344	Saipem	0,0000000
Snam	0,0293876	Snam	0,0000000
Stellantis	0,0000000	Stellantis	0,0000000
Stmicroelectronics	0,0280622	Stmicroelectronics	0,0000000
Telecom	0,0306821	Telecom	0,1472279
Tenaris	0,1203777	Tenaris	0,0368970
Terna	0,0000000	Terna	0,0113175
Unicredit	0,0215178	Unicredit	0,0000000
Unipol	0,0000000	Unipol	0,0000000
Fitness	-0,00338222	Fitness	-0,00317736
Rendimento out of sample pf	0,001497	Rendimento out of sample pf	0,001753
Rendimento out of sample bench	0,001273	Rendimento out of sample bench	0,001273
Tempo risolutivo (secondi)	17,002657	Tempo risolutivo (secondi)	16,588023

Figura 47 DAX, escenario 1, modelo 3, K=20, K=10

	Sim.7		Sim.4
Adidas	0,0139638	Adidas	0,0000000
Allianz	0,0176024	Allianz	0,0000000
Basf	0,0698473	Basf	0,0000000
BMW	0,0000000	BMW	0,0492760
Bayer	0,1330366	Bayer	0,0000000
Continental	0,0000000	Continental	0,0000000
Covestro	0,0250832	Covestro	0,0000000
Daimler	0,0200703	Daimler	0,0000000
Deutsche Bank	0,0143955	Deutsche Bank	0,0000000
Deutsche Boerse	0,0000000	Deutsche Boerse	0,0000000
Deutsche post	0,0000000	Deutsche post	0,0000000
Deutsche Wohnen	0,0290991	Deutsche Wohnen	0,0000000
Dt.Telekom	0,0000000	Dt.Telekom	0,0847275
E.On	0,0164734	E.On	0,0000000
Fresen.Med.Care	0,0218109	Fresen.Med.Care	0,0335730
Fresenius	0,0105945	Fresenius	0,0000000
Heidelbergcement	0,0000000	Heidelbergcement	0,1253601
Henkel	0,0624641	Henkel	0,0000000
Infineon Tech.AG	0,0276832	Infineon Tech.AG	0,0305102
Merck	0,0223615	Merck	0,0000000
Mtu Aero Engines	0,0144932	Mtu Aero Engines	0,0108827
Muench.Rueckvers	0,1587764	Muench.Rueckvers	0,1260740
RWE	0,0827112	RWE	0,1804195
SAP	0,1741060	SAP	0,0000000
Siemens	0,0113543	Siemens	0,1075479
Volkswagen	0,0740730	Volkswagen	0,2516290
Vonovia	0,0000000	Vonovia	0,0000000
Fitness	0,003622005	Fitness	0,003619705
Rendimiento out of sample pf	0,001452	Rendimiento out of sample pf	0,001639
Rendimiento out of sample bench	0,001298	Rendimiento out of sample bench	0,001298
Tempo risolutivo (secondi)	13,963849	Tempo risolutivo (secondi)	13,011384

Figura 48 S&P/BMV IPC, modelo 1, escenario 3, K=20, K=10

	Sim.5		Sim.2
Alfa SA A	0,0000000	Alfa SA A	0,0000000
Aisea SA	0,0000000	Aisea SA	0,0000000
America Movil SAB de CV L	0,1207897	America Movil SAB de CV L	0,0000000
Arca Continental, SAB de CV	0,0435053	Arca Continental, SAB de CV	0,0000000
Bolsa Mexicana de Valores SA de CV	0,0394080	Bolsa Mexicana de Valores SA de CV	0,1101613
Cemex SA CPO	0,0196635	Cemex SA CPO	0,0000000
Coca-Cola Femsa SAB de CV UBL	0,0000000	Coca-Cola Femsa SAB de CV UBL	0,0000000
Corporacion Inmobiliaria Vesta, S.A.B. DE C.V.	0,0198026	Corporacion Inmobiliaria Vesta, S.A.B. DE C.V.	0,1547060
El Puerto de Liverpool SAB de CV	0,0000000	El Puerto de Liverpool SAB de CV	0,0000000
Fomento Economico Mexicano S.A.B. de C.V.	0,2606876	Fomento Economico Mexicano S.A.B. de C.V.	0,0000000
Genomma Lab Internacional SA de CV	0,0357133	Genomma Lab Internacional SA de CV	0,0000000
Gruma SAB B	0,0000000	Gruma SAB B	0,0000000
Grupo Aeroportuario del Centro Norte, S.A.B. de CV	0,0196821	Grupo Aeroportuario del Centro Norte, S.A.B. de CV	0,0000000
Grupo Aeroportuario del Pacifico, S.A.B. de C.V.	0,0000000	Grupo Aeroportuario del Pacifico, S.A.B. de C.V.	0,1495112
Grupo Aeroportuario del Sureste SAB de CV B	0,0175775	Grupo Aeroportuario del Sureste SAB de CV B	0,0000000
Grupo Bimbo S.A.B.	0,0000000	Grupo Bimbo S.A.B.	0,0958470
Grupo Carso SAB de CV	0,0360811	Grupo Carso SAB de CV	0,0630819
Grupo Cementos de Chihuahua SAB de CV	0,0392559	Grupo Cementos de Chihuahua SAB de CV	0,0374416
Grupo Elektra S.A.B. de C.V.	0,0375405	Grupo Elektra S.A.B. de C.V.	0,1814798
Grupo Financiero Banorte O	0,0277308	Grupo Financiero Banorte O	0,0347087
Grupo Financiero Inbursa O	0,0000000	Grupo Financiero Inbursa O	0,0000000
Grupo Mexico SAB de CV B	0,0000000	Grupo Mexico SAB de CV B	0,0000000
Grupo Televisa SAB CPO	0,0175141	Grupo Televisa SAB CPO	0,0000000
Industrias Penoles	0,0319053	Industrias Penoles	0,0000000
Infraestructura Energetica Nova S.A.B. de C.V.	0,0108331	Infraestructura Energetica Nova S.A.B. de C.V.	0,0422821
Kimberly Clark de Mexico S.A.B. de C.V. A	0,0000000	Kimberly Clark de Mexico S.A.B. de C.V. A	0,1307803
Megacable Holdings SAB de CV	0,0000000	Megacable Holdings SAB de CV	0,0000000
ORBIA ADVANCE CORPORATION SAB de CV	0,0131205	ORBIA ADVANCE CORPORATION SAB de CV	0,0000000
Qualitas Controladora S.A.B de C.V.	0,0590467	Qualitas Controladora S.A.B de C.V.	0,0000000
Regional, S.A. de C.V.	0,1298222	Regional, S.A. de C.V.	0,0000000
Telesites S.A.B. de C.V.	0,0000000	Telesites S.A.B. de C.V.	0,0000000
Walmart de Mexico SAB de CV	0,0203201	Walmart de Mexico SAB de CV	0,0000000
Fitness	0,014496362	Fitness	0,014497993
Rendimiento out of sample pf	0,000671	Rendimiento out of sample pf	0,000729
Rendimiento out of sample bench	0,000289	Rendimiento out of sample bench	0,000289
Tempo risolutivo (secondi)	14,174004	Tempo risolutivo (secondi)	13,395683

Figura 49 NIFTY, modello 1, scenario 3, K=20, K=10

	Sim.4		Sim.5
Adani Ports and Special Economic Zone Ltd.	0,0452712	Adani Ports and Special Economic Zone Ltd.	0,1131183
Asian Paints Ltd.	0,0122326	Asian Paints Ltd.	0,0000000
Axis Bank Ltd.	0,0124228	Axis Bank Ltd.	0,1558254
Bajaj Auto Ltd.	0,0000000	Bajaj Auto Ltd.	0,0000000
Bajaj Finance Ltd.	0,0261254	Bajaj Finance Ltd.	0,0000000
Bajaj Finserv Ltd.	0,0000000	Bajaj Finserv Ltd.	0,1223060
Bharat Petroleum Corporation Ltd.	0,0000000	Bharat Petroleum Corporation Ltd.	0,0000000
Bharti Airtel Ltd.	0,0825204	Bharti Airtel Ltd.	0,0000000
Britannia Industries Ltd.	0,0159521	Britannia Industries Ltd.	0,0139619
Cipla Ltd.	0,0000000	Cipla Ltd.	0,0000000
Coal India Ltd.	0,0235433	Coal India Ltd.	0,0000000
Divi's Laboratories Ltd.	0,0370867	Divi's Laboratories Ltd.	0,0000000
Dr. Reddy's Laboratories Ltd.	0,0000000	Dr. Reddy's Laboratories Ltd.	0,1199228
Eicher Motors Ltd.	0,0000000	Eicher Motors Ltd.	0,0000000
Grasim Industries Ltd.	0,0000000	Grasim Industries Ltd.	0,0000000
HCL Technologies Ltd.	0,0000000	HCL Technologies Ltd.	0,0000000
HDFC Bank Ltd.	0,1588940	HDFC Bank Ltd.	0,1729900
Hero MotoCorp Ltd.	0,0000000	Hero MotoCorp Ltd.	0,0000000
Hindalco Industries Ltd.	0,0000000	Hindalco Industries Ltd.	0,0000000
Hindustan Unilever Ltd.	0,0000000	Hindustan Unilever Ltd.	0,0000000
Housing Development Finance Corporation Ltd.	0,0389036	Housing Development Finance Corporation Ltd.	0,0000000
ICICI Bank Ltd.	0,0906468	ICICI Bank Ltd.	0,0000000
ITC Ltd.	0,0000000	ITC Ltd.	0,0000000
Indian Oil Corporation Ltd.	0,0102054	Indian Oil Corporation Ltd.	0,0000000
IndusInd Bank Ltd.	0,0000000	IndusInd Bank Ltd.	0,0000000
Infosys Ltd.	0,0000000	Infosys Ltd.	0,0000000
JSW Steel Ltd.	0,0000000	JSW Steel Ltd.	0,0000000
Kotak Mahindra Bank Ltd.	0,0000000	Kotak Mahindra Bank Ltd.	0,0000000
Larsen & Toubro Ltd.	0,0112475	Larsen & Toubro Ltd.	0,0000000
Mahindra & Mahindra Ltd.	0,0000000	Mahindra & Mahindra Ltd.	0,0333447
Maruti Suzuki India Ltd.	0,0106772	Maruti Suzuki India Ltd.	0,0000000
NTPC Ltd.	0,0000000	NTPC Ltd.	0,0000000
Nestle India Ltd.	0,0000000	Nestle India Ltd.	0,0000000
Oil & Natural Gas Corporation Ltd.	0,0280251	Oil & Natural Gas Corporation Ltd.	0,0000000
Power Grid Corporation of India Ltd.	0,2986760	Power Grid Corporation of India Ltd.	0,0000000
Reliance Industries Ltd.	0,0000000	Reliance Industries Ltd.	0,0242728
Shree Cement Ltd.	0,0000000	Shree Cement Ltd.	0,0000000
State Bank of India	0,0000000	State Bank of India	0,0681740
Sun Pharmaceutical Industries Ltd.	0,0511745	Sun Pharmaceutical Industries Ltd.	0,0000000
Tata Consultancy Services Ltd.	0,0000000	Tata Consultancy Services Ltd.	0,1768841
Tata Consumer Products Ltd.	0,0000000	Tata Consumer Products Ltd.	0,0000000
Tata Motors Ltd.	0,0000000	Tata Motors Ltd.	0,0000000
Tata Steel Ltd.	0,0195861	Tata Steel Ltd.	0,0000000
Tech Mahindra Ltd.	0,0000000	Tech Mahindra Ltd.	0,0000000
Titan Company Ltd.	0,0100285	Titan Company Ltd.	0,0000000
UPL Ltd.	0,0000000	UPL Ltd.	0,0000000
UltraTech Cement Ltd.	0,0000000	UltraTech Cement Ltd.	0,0000000
Wipro Ltd.	0,0167808	Wipro Ltd.	0,0000000
Fitness	-0,031412945	Fitness	-0,031415914
Rendimento out of sample pf	0,001571	Rendimento out of sample pf	0,00165
Rendimento out of sample bench	0,001282	Rendimento out of sample bench	0,001282
Tempo risolutivo (secondi)	22,992749	Tempo risolutivo (secondi)	22,992749

Scenario 3 ~ Modello 2

Figura 50 FTSEMib, modello 2, scenario 3, K=20, K=10

	Sim.4		Sim.3
A2A	0,0000000	A2A	0,0000000
Amplifon	0,0890140	Amplifon	0,0000000
Atlantia	0,0000000	Atlantia	0,0802954
Azimut Holding	0,0000000	Azimut Holding	0,2193705
Banca Generali	0,0000000	Banca Generali	0,0000000
Banca Medionalum	0,0766771	Banca Medionalum	0,0000000
Banco BPM	0,0106240	Banco BPM	0,0000000
BPER Banca	0,0000000	BPER Banca	0,0000000
Buzzi Unicem	0,0000000	Buzzi Unicem	0,1411028
Campari	0,0196229	Campari	0,0190680
Cnh Industrial	0,2560306	Cnh Industrial	0,0838871
Diasorin	0,0325071	Diasorin	0,0000000
Enel	0,0000000	Enel	0,0000000
Eni	0,0000000	Eni	0,0000000
EXOR	0,0000000	EXOR	0,0862125
Ferrari	0,0000000	Ferrari	0,0000000
Fineco Bank	0,0353894	Fineco Bank	0,0000000
Generali	0,0109088	Generali	0,0000000
Hera	0,0242556	Hera	0,0000000
Interpump Group	0,0000000	Interpump Group	0,0000000
Intesa San paolo	0,2790614	Intesa San paolo	0,0000000
Inwit	0,0000000	Inwit	0,0000000
Italgas	0,0120874	Italgas	0,1211422
Leonardo	0,0000000	Leonardo	0,0000000
Mediobanca	0,0148294	Mediobanca	0,0000000
Moncler	0,0100059	Moncler	0,0641223
Pirelli	0,0102887	Pirelli	0,0000000
Poste Italiane	0,0000000	Poste Italiane	0,0000000
Prysmian	0,0000000	Prysmian	0,0000000
Recordati	0,0108105	Recordati	0,0000000
Saipem	0,0350339	Saipem	0,0000000
Snam	0,0209758	Snam	0,0000000
Stellantis	0,0102173	Stellantis	0,1608023
Stmicroelectronics	0,0000000	Stmicroelectronics	0,0000000
Telecom	0,0000000	Telecom	0,0000000
Tenaris	0,0235871	Tenaris	0,0000000
Terna	0,0000000	Terna	0,0000000
Unicredit	0,0180703	Unicredit	0,0239979
Unipol	0,0000000	Unipol	0,0000000
Fitness	0,596500	Fitness	1,8042647
Rendimento out of sample pf	0,001406	Rendimento out of sample pf	0,00155
Rendimento out of sample bench	0,001273	Rendimento out of sample bench	0,001273
Tempo risolutivo (secondi)	16,000174	Tempo risolutivo (secondi)	15,365991

Figura 51 DAX, modello 2, scenario2, K=20, K=10

	Sim.8		Sim.10
Adidas	0,0352090	Adidas	0,0000000
Allianz	0,0120114	Allianz	0,0000000
Basf	0,0175798	Basf	0,0000000
BMW	0,0166681	BMW	0,1395478
Bayer	0,0000000	Bayer	0,0249155
Continental	0,0000000	Continental	0,0328483
Covestro	0,0107594	Covestro	0,0000000
Daimler	0,2899517	Daimler	0,0000000
Deutsche Bank	0,0114808	Deutsche Bank	0,0912155
Deutsche Boerse	0,0000000	Deutsche Boerse	0,0000000
Deutsche post	0,0276963	Deutsche post	0,0000000
Deutsche Wohnen	0,0000000	Deutsche Wohnen	0,0000000
Dt.Telekom	0,0285539	Dt.Telekom	0,0000000
E.On	0,0182524	E.On	0,0000000
Fresen.Med.Care	0,0153998	Fresen.Med.Care	0,2829373
Fresenius	0,0139786	Fresenius	0,1251674
Heidelbergcement	0,0205592	Heidelbergcement	0,1676923
Henkel	0,0964848	Henkel	0,0000000
Infineon Tech.AG	0,1690177	Infineon Tech.AG	0,0699027
Merck	0,0000000	Merck	0,0000000
Mtu Aero Engines	0,1217039	Mtu Aero Engines	0,0000000
Muench.Rueckvers	0,0541624	Muench.Rueckvers	0,0000000
RWE	0,0111921	RWE	0,0438452
SAP	0,0000000	SAP	0,0000000
Siemens	0,0167220	Siemens	0,0219141
Volkswagen	0,0000000	Volkswagen	0,0000000
Vonovia	0,0126156	Vonovia	0,0000000
Fitness	0,104621603	Fitness	0,295448422
Rendimento out of sample pf	0,001599	Rendimento out of sample pf	0,001353
Rendimento out of sample bench	0,001298	Rendimento out of sample bench	0,001298
Tempo risolutivo (secondi)	15,036583	Tempo risolutivo (secondi)	14,336301

Figura 52 S&P/BMV IPC, modello 2, scenario 3, K=20, K=10

	Sim.3		Sim.10
Alfa SA A	0,0119205	Alfa SA A	0,0000000
Alea SA	0,0000000	Alea SA	0,0000000
America Movil SAB de CV L	0,0000000	America Movil SAB de CV L	0,2340296
Arca Continental, SAB de CV	0,0000000	Arca Continental, SAB de CV	0,0000000
Bolsa Mexicana de Valores SA de CV	0,0726531	Bolsa Mexicana de Valores SA de CV	0,0000000
Cemex SA CPO	0,0141592	Cemex SA CPO	0,0000000
Coca-Cola Fems SA de CV UBL	0,0197503	Coca-Cola Fems SA de CV UBL	0,0000000
Corporacion Inmobiliaria Vesta, S.A.B. DE C.V.	0,0225550	Corporacion Inmobiliaria Vesta, S.A.B. DE C.V.	0,0603427
El Puerto de Liverpool SAB de CV	0,0126038	El Puerto de Liverpool SAB de CV	0,0562867
Fomento Economico Mexicano S.A.B. de C.V.	0,0000000	Fomento Economico Mexicano S.A.B. de C.V.	0,0000000
Genomma Lab Internacional SA de CV	0,0134993	Genomma Lab Internacional SA de CV	0,0000000
Gruma SAB B	0,2871711	Gruma SAB B	0,0000000
Grupo Aeroportuario del Centro Norte, S.A.B. de C.V.	0,1130645	Grupo Aeroportuario del Centro Norte, S.A.B. de C.V.	0,0000000
Grupo Aeroportuario del Pacifico, S.A.B. de C.V.	0,0172402	Grupo Aeroportuario del Pacifico, S.A.B. de C.V.	0,0116810
Grupo Aeroportuario del Sureste SAB de CV B	0,0000000	Grupo Aeroportuario del Sureste SAB de CV B	0,0000000
Grupo Bimbo S.A.B.	0,0000000	Grupo Bimbo S.A.B.	0,0645503
Grupo Carso SAB de CV	0,0000000	Grupo Carso SAB de CV	0,1291121
Grupo Cementos de Chihuahua SAB de CV	0,0401971	Grupo Cementos de Chihuahua SAB de CV	0,2579568
Grupo Elektra S.A.B. de C.V.	0,0000000	Grupo Elektra S.A.B. de C.V.	0,0640726
Grupo Financiero Banorte O	0,0000000	Grupo Financiero Banorte O	0,0000000
Grupo Financiero Inbursa O	0,0496191	Grupo Financiero Inbursa O	0,0000000
Grupo Mexico SAB de CV B	0,0000000	Grupo Mexico SAB de CV B	0,0000000
Grupo Televisa SAB CPO	0,0371115	Grupo Televisa SAB CPO	0,0497759
Industrias Penoles	0,0404029	Industrias Penoles	0,0000000
Infraestructura Energetica Nova S.A.B. de C.V.	0,0000000	Infraestructura Energetica Nova S.A.B. de C.V.	0,0000000
Kimberly Clark de Mexico S.A.B. de C.V. A	0,0100997	Kimberly Clark de Mexico S.A.B. de C.V. A	0,0000000
Megacable Holdings SAB de CV	0,0126285	Megacable Holdings SAB de CV	0,0000000
ORBIA ADVANCE CORPORATION SAB de CV	0,0000000	ORBIA ADVANCE CORPORATION SAB de CV	0,0000000
Promotora y Operadora de Infraestructura SAB de CV	0,1120829	Promotora y Operadora de Infraestructura SAB de CV	0,0000000
Qualitas Controladora S.A.B de C.V.	0,0186702	Qualitas Controladora S.A.B de C.V.	0,0000000
Regional, S.A. de C.V.	0,0603754	Regional, S.A. de C.V.	0,0721909
Telesites S.A.B. de C.V.	0,0000000	Telesites S.A.B. de C.V.	0,0000000
Walmart de Mexico SAB de CV	0,0341941	Walmart de Mexico SAB de CV	0,0000000
Fitness	0,355846008	Fitness	0,401520
Rendimento out of sample pf	0,000963	Rendimento out of sample pf	0,00066
Rendimento out of sample bench	0,000289	Rendimento out of sample bench	0,000289
Tempo risolutivo (secondi)	13,006482	Tempo risolutivo (secondi)	12,432539

Figura 53 NIFTY, modello 2, scenario 3, K=20, K=10

	Sim.6		Sim.10
Adani Ports and Special Economic Zone Ltd.	0,0167816	Adani Ports and Special Economic Zone Ltd.	0,0000000
Asian Paints Ltd.	0,0000000	Asian Paints Ltd.	0,0000000
Axis Bank Ltd.	0,0292108	Axis Bank Ltd.	0,0148567
Bajaj Auto Ltd.	0,0173501	Bajaj Auto Ltd.	0,2534621
Bajaj Finance Ltd.	0,0541046	Bajaj Finance Ltd.	0,0000000
Bajaj Finserv Ltd.	0,0319550	Bajaj Finserv Ltd.	0,0000000
Bharat Petroleum Corporation Ltd.	0,0000000	Bharat Petroleum Corporation Ltd.	0,0000000
Bharti Airtel Ltd.	0,0000000	Bharti Airtel Ltd.	0,0000000
Britannia Industries Ltd.	0,0000000	Britannia Industries Ltd.	0,0167931
Cipla Ltd.	0,0000000	Cipla Ltd.	0,0000000
Coal India Ltd.	0,0150208	Coal India Ltd.	0,0000000
Divi's Laboratories Ltd.	0,2287648	Divi's Laboratories Ltd.	0,0000000
Dr. Reddy's Laboratories Ltd.	0,0000000	Dr. Reddy's Laboratories Ltd.	0,0103944
Eicher Motors Ltd.	0,0662962	Eicher Motors Ltd.	0,0000000
Grasim Industries Ltd.	0,0000000	Grasim Industries Ltd.	0,0000000
HCL Technologies Ltd.	0,0430985	HCL Technologies Ltd.	0,0000000
HDFC Bank Ltd.	0,0000000	HDFC Bank Ltd.	0,0000000
Hero MotoCorp Ltd.	0,0000000	Hero MotoCorp Ltd.	0,0000000
Hindalco Industries Ltd.	0,0000000	Hindalco Industries Ltd.	0,0000000
Hindustan Unilever Ltd.	0,0000000	Hindustan Unilever Ltd.	0,0000000
Housing Development Finance Corporation Ltd.	0,0000000	Housing Development Finance Corporation Ltd.	0,0170258
ICICI Bank Ltd.	0,0000000	ICICI Bank Ltd.	0,0000000
ITC Ltd.	0,0403970	ITC Ltd.	0,0000000
Indian Oil Corporation Ltd.	0,0000000	Indian Oil Corporation Ltd.	0,0000000
IndusInd Bank Ltd.	0,1156855	IndusInd Bank Ltd.	0,0000000
Infosys Ltd.	0,0000000	Infosys Ltd.	0,0000000
JSW Steel Ltd.	0,0459906	JSW Steel Ltd.	0,0000000
Kotak Mahindra Bank Ltd.	0,0111785	Kotak Mahindra Bank Ltd.	0,0000000
Larsen & Toubro Ltd.	0,0000000	Larsen & Toubro Ltd.	0,0000000
Mahindra & Mahindra Ltd.	0,0000000	Mahindra & Mahindra Ltd.	0,0000000
Maruti Suzuki India Ltd.	0,0000000	Maruti Suzuki India Ltd.	0,0000000
NTPC Ltd.	0,1144881	NTPC Ltd.	0,0625150
Nestle India Ltd.	0,0000000	Nestle India Ltd.	0,0000000
Oil & Natural Gas Corporation Ltd.	0,0000000	Oil & Natural Gas Corporation Ltd.	0,0000000
Power Grid Corporation of India Ltd.	0,0161781	Power Grid Corporation of India Ltd.	0,2981705
Reliance Industries Ltd.	0,0412622	Reliance Industries Ltd.	0,0000000
Shree Cement Ltd.	0,0000000	Shree Cement Ltd.	0,0000000
State Bank of India	0,0000000	State Bank of India	0,0000000
Sun Pharmaceutical Industries Ltd.	0,0000000	Sun Pharmaceutical Industries Ltd.	0,0000000
Tata Consultancy Services Ltd.	0,0184515	Tata Consultancy Services Ltd.	0,0000000
Tata Consumer Products Ltd.	0,0000000	Tata Consumer Products Ltd.	0,0159660
Tata Motors Ltd.	0,0000000	Tata Motors Ltd.	0,0000000
Tata Steel Ltd.	0,0501354	Tata Steel Ltd.	0,1948983
Tech Mahindra Ltd.	0,0000000	Tech Mahindra Ltd.	0,0000000
Titan Company Ltd.	0,0000000	Titan Company Ltd.	0,0000000
UPL Ltd.	0,0241755	UPL Ltd.	0,0000000
UltraTech Cement Ltd.	0,0193950	UltraTech Cement Ltd.	0,1157694
Wipro Ltd.	0,0000000	Wipro Ltd.	0,0000000
Fitness	3,904500	Fitness	3,1379000
Rendimento out of sample pf	0,001717	Rendimento out of sample pf	0,001403
Rendimento out of sample bench	0,001282	Rendimento out of sample bench	0,001282
Tempo risolutivo (secondi)	22,992749	Tempo risolutivo (secondi)	22,016384

Scenario 4 ~ Modello 1

Figura 54 FTSEMib, modello 1, scenario 4, K=20, K=10

	Sim.1		Sim.3
AZA	0,2052568	AZA	0,0000000
Amplifon	0,0000000	Amplifon	0,0000000
Atlantia	0,0000000	Atlantia	0,0000000
Azimut Holding	0,0000000	Azimut Holding	0,0000000
Banca Generali	0,0000000	Banca Generali	0,0000000
Banca Medionalum	0,0354390	Banca Medionalum	0,0000000
Banco BPM	0,0000000	Banco BPM	0,0181043
BPER Banca	0,0113789	BPER Banca	0,0000000
Buzzi Unicem	0,0564382	Buzzi Unicem	0,0000000
Campari	0,1509744	Campari	0,2989941
Cnh Industrial	0,0100739	Cnh Industrial	0,1713323
Diasorin	0,0364360	Diasorin	0,0424924
Enel	0,0000000	Enel	0,0000000
Eni	0,0000000	Eni	0,0000000
EXOR	0,0557902	EXOR	0,0412366
Ferrari	0,0000000	Ferrari	0,0000000
Fineco Bank	0,0298239	Fineco Bank	0,0000000
Generali	0,0176037	Generali	0,0000000
Hera	0,0000000	Hera	0,0000000
Interpump Group	0,0108136	Interpump Group	0,0000000
Intesa San paolo	0,0203906	Intesa San paolo	0,0000000
Inwit	0,0102038	Inwit	0,0000000
Italgas	0,0000000	Italgas	0,0000000
Leonardo	0,0000000	Leonardo	0,0112855
Mediobanca	0,0409851	Mediobanca	0,0000000
Moncler	0,0133166	Moncler	0,0000000
Pirelli	0,0000000	Pirelli	0,0000000
Poste Italiane	0,0107900	Poste Italiane	0,0000000
Prysmian	0,0000000	Prysmian	0,0000000
Recordati	0,0000000	Recordati	0,0000000
Saipem	0,0839271	Saipem	0,0000000
Snam	0,0000000	Snam	0,0355377
Stellantis	0,0000000	Stellantis	0,0307353
Stmicroelectronics	0,0000000	Stmicroelectronics	0,0000000
Telecom	0,0000000	Telecom	0,0000000
Tenaris	0,1276699	Tenaris	0,0504042
Terna	0,0572755	Terna	0,0000000
Unicredit	0,0154125	Unicredit	0,2998777
Unipol	0,0000000	Unipol	0,0000000
Fitness	0,011726194	Fitness	0,012433743
Rendimento out of sample pf	0,001723	Rendimento out of sample pf	0,001823
Rendimento out of sample bench	0,001407	Rendimento out of sample bench	0,001407
Tempo risolutivo (secondi)	16,769022	Tempo risolutivo (secondi)	17,597935

Figura 55 DAX, modello 1, scenario 4, K=20, K=10

	Sim.8		Sim.7
Adidas	0,1398219	Adidas	0,0000000
Allianz	0,0000000	Allianz	0,0000000
Basf	0,0137889	Basf	0,2065784
BMW	0,1411327	BMW	0,0917218
Bayer	0,0000000	Bayer	0,0000000
Continental	0,0200739	Continental	0,0000000
Covestro	0,0220898	Covestro	0,0000000
Daimler	0,0000000	Daimler	0,0000000
Deutsche Bank	0,0107924	Deutsche Bank	0,0000000
Deutsche Boerse	0,0244837	Deutsche Boerse	0,0000000
Deutsche post	0,0367220	Deutsche post	0,0000000
Deutsche Wohnen	0,0000000	Deutsche Wohnen	0,0180342
Dt.Telekom	0,0000000	Dt.Telekom	0,0000000
E.On	0,0000000	E.On	0,1775548
Fresen.Med.Care	0,1009281	Fresen.Med.Care	0,0925034
Fresenius	0,0371998	Fresenius	0,0816580
Heidelbergcement	0,0676307	Heidelbergcement	0,0000000
Henkel	0,0473542	Henkel	0,1050180
Infineon Tech.AG	0,0244067	Infineon Tech.AG	0,0000000
Merck	0,1656743	Merck	0,0000000
Mtu Aero Engines	0,0424770	Mtu Aero Engines	0,0000000
Muench.Rueckvers	0,0150435	Muench.Rueckvers	0,0784047
RWE	0,0362636	RWE	0,0786909
SAP	0,0136643	SAP	0,0000000
Siemens	0,0188490	Siemens	0,0000000
Volkswagen	0,0216035	Volkswagen	0,0000000
Vonovia	0,0000000	Vonovia	0,0698358
Fitness	-0,010156168	Fitness	0,000951268
Rendimento out of sample pf	0,001696	Rendimento out of sample pf	0,000811
Rendimento out of sample bench	0,000782	Rendimento out of sample bench	0,000782
Tempo risolutivo (secondi)	14,148561	Tempo risolutivo (secondi)	13,119475

Figura 56 S&P/BMV IPC modello 1, scenario 4, K=20, K=10

	Sim.8		Sim.8
Alfa SA A	0,0235051	Alfa SA A	0,0000000
Aisea SA	0,0291952	Aisea SA	0,0000000
America Movil SAB de CV L	0,1359817	America Movil SAB de CV L	0,0000000
Arca Continental, SAB de CV	0,0000000	Arca Continental, SAB de CV	0,1329629
Bolsa Mexicana de Valores SA de CV	0,0230135	Bolsa Mexicana de Valores SA de CV	0,0000000
Cemex SA CPO	0,0688149	Cemex SA CPO	0,0000000
Coca-Cola Femsa SAB de CV UBL	0,0202574	Coca-Cola Femsa SAB de CV UBL	0,0000000
Corporacion Inmobiliaria Vesta, S.A.B. DE C.V.	0,0203221	Corporacion Inmobiliaria Vesta, S.A.B. DE C.V.	0,0703485
El Puerto de Liverpool SAB de CV	0,0455888	El Puerto de Liverpool SAB de CV	0,0000000
Fomento Economico Mexicano S.A.B. de C.V.	0,0000000	Fomento Economico Mexicano S.A.B. de C.V.	0,0484766
Genomma Lab Internacional SA de CV	0,0328329	Genomma Lab Internacional SA de CV	0,0000000
Gruma SAB B	0,0407486	Gruma SAB B	0,0501285
Grupo Aeroportuario del Centro Norte, S.A.B. de C.V.	0,0000000	Grupo Aeroportuario del Centro Norte, S.A.B. de C.V.	0,0505221
Grupo Aeroportuario del Pacifico, S.A.B. de C.V.	0,0000000	Grupo Aeroportuario del Pacifico, S.A.B. de C.V.	0,0000000
Grupo Aeroportuario del Sureste SAB de CV B	0,0445405	Grupo Aeroportuario del Sureste SAB de CV B	0,0000000
Grupo Bimbo S.A.B.	0,0000000	Grupo Bimbo S.A.B.	0,1144692
Grupo Carso SAB de CV	0,2789982	Grupo Carso SAB de CV	0,0000000
Grupo Cementos de Chihuahua SAB de CV	0,0000000	Grupo Cementos de Chihuahua SAB de CV	0,0000000
Grupo Elektra S.A.B. de C.V.	0,0104936	Grupo Elektra S.A.B. de C.V.	0,0000000
Grupo Financiero Banorte O	0,0000000	Grupo Financiero Banorte O	0,1807765
Grupo Financiero Inbursa O	0,0116889	Grupo Financiero Inbursa O	0,0000000
Grupo Mexico SAB de CV B	0,0160207	Grupo Mexico SAB de CV B	0,0533911
Grupo Televisa SAB CPO	0,0000000	Grupo Televisa SAB CPO	0,1880312
Industrias Penoles	0,0000000	Industrias Penoles	0,0000000
Infraestructura Energetica Nova S.A.B. de C.V.	0,0188236	Infraestructura Energetica Nova S.A.B. de C.V.	0,0000000
Kimberly Clark de Mexico S.A.B. de C.V. A	0,0000000	Kimberly Clark de Mexico S.A.B. de C.V. A	0,0000000
Megacable Holdings SAB de CV	0,0255988	Megacable Holdings SAB de CV	0,0000000
ORBIA ADVANCE CORPORATION SAB de CV	0,0000000	ORBIA ADVANCE CORPORATION SAB de CV	0,0000000
Promotora y Operadora de Infraestructura SAB de CV	0,0000000	Promotora y Operadora de Infraestructura SAB de CV	0,0000000
Qualitas Controladora S.A.B de C.V.	0,0666139	Qualitas Controladora S.A.B de C.V.	0,1108933
Regional, S.A. de C.V.	0,0538593	Regional, S.A. de C.V.	0,0000000
Telesites S.A.B. de C.V.	0,0331022	Telesites S.A.B. de C.V.	0,0000000
Walmart de Mexico SAB de CV	0,0000000	Walmart de Mexico SAB de CV	0,0000000
Fitness	-0,024017059	Fitness	-0,024006571
Rendimento out of sample pf	0,003191	Rendimento out of sample pf	0,002359
Rendimento out of sample bench	0,002208	Rendimento out of sample bench	0,002208
Tempo risolutivo (secondi)	14,785329	Tempo risolutivo (secondi)	14,000367

Figura 57 NIFTY, modello 1, scenario 4, K=20, K=10

	Sim.4		Sim.9
Adani Ports and Special Economic Zone Ltd.	0,000000	Adani Ports and Special Economic Zone Ltd.	0,00000
Asian Paints Ltd.	0,000000	Asian Paints Ltd.	0,20694
Axis Bank Ltd.	0,000000	Axis Bank Ltd.	0,00000
Bajaj Auto Ltd.	0,0778900	Bajaj Auto Ltd.	0,00000
Bajaj Finance Ltd.	0,000000	Bajaj Finance Ltd.	0,00000
Bajaj Finserv Ltd.	0,000000	Bajaj Finserv Ltd.	0,00000
Bharat Petroleum Corporation Ltd.	0,000000	Bharat Petroleum Corporation Ltd.	0,00000
Bharti Airtel Ltd.	0,0930028	Bharti Airtel Ltd.	0,00000
Britannia Industries Ltd.	0,000000	Britannia Industries Ltd.	0,00000
Cipla Ltd.	0,0747388	Cipla Ltd.	0,00000
Coal India Ltd.	0,000000	Coal India Ltd.	0,00000
Divi's Laboratories Ltd.	0,0616578	Divi's Laboratories Ltd.	0,00000
Dr. Reddy's Laboratories Ltd.	0,0126809	Dr. Reddy's Laboratories Ltd.	0,00000
Eicher Motors Ltd.	0,000000	Eicher Motors Ltd.	0,06696
Grasim Industries Ltd.	0,000000	Grasim Industries Ltd.	0,00000
HCL Technologies Ltd.	0,0111711	HCL Technologies Ltd.	0,00000
HDFC Bank Ltd.	0,000000	HDFC Bank Ltd.	0,00000
Hero MotoCorp Ltd.	0,000000	Hero MotoCorp Ltd.	0,00000
Hindalco Industries Ltd.	0,000000	Hindalco Industries Ltd.	0,04076
Hindustan Unilever Ltd.	0,000000	Hindustan Unilever Ltd.	0,18227
Housing Development Finance Corporation Ltd.	0,000000	Housing Development Finance Corporation Ltd.	0,00000
ICICI Bank Ltd.	0,0105500	ICICI Bank Ltd.	0,00000
ITC Ltd.	0,000000	ITC Ltd.	0,00000
Indian Oil Corporation Ltd.	0,1086136	Indian Oil Corporation Ltd.	0,00000
IndusInd Bank Ltd.	0,000000	IndusInd Bank Ltd.	0,00000
Infosys Ltd.	0,0666328	Infosys Ltd.	0,00000
JSW Steel Ltd.	0,000000	JSW Steel Ltd.	0,22310
Kotak Mahindra Bank Ltd.	0,000000	Kotak Mahindra Bank Ltd.	0,05238
Larsen & Toubro Ltd.	0,0997742	Larsen & Toubro Ltd.	0,00000
Mahindra & Mahindra Ltd.	0,000000	Mahindra & Mahindra Ltd.	0,11701
Maruti Suzuki India Ltd.	0,000000	Maruti Suzuki India Ltd.	0,00000
NTPC Ltd.	0,000000	NTPC Ltd.	0,00000
Nestle India Ltd.	0,0621304	Nestle India Ltd.	0,00000
Oil & Natural Gas Corporation Ltd.	0,000000	Oil & Natural Gas Corporation Ltd.	0,00000
Power Grid Corporation of India Ltd.	0,0115968	Power Grid Corporation of India Ltd.	0,00000
Reliance Industries Ltd.	0,0395640	Reliance Industries Ltd.	0,00000
Shree Cement Ltd.	0,000000	Shree Cement Ltd.	0,01773
State Bank of India	0,0289106	State Bank of India	0,00000
Sun Pharmaceutical Industries Ltd.	0,0143556	Sun Pharmaceutical Industries Ltd.	0,00000
Tata Consultancy Services Ltd.	0,0115843	Tata Consultancy Services Ltd.	0,00000
Tata Consumer Products Ltd.	0,000000	Tata Consumer Products Ltd.	0,00000
Tata Motors Ltd.	0,000000	Tata Motors Ltd.	0,00000
Tata Steel Ltd.	0,0811077	Tata Steel Ltd.	0,00000
Tech Mahindra Ltd.	0,0528864	Tech Mahindra Ltd.	0,00000
Titan Company Ltd.	0,000000	Titan Company Ltd.	0,00000
UPL Ltd.	0,000000	UPL Ltd.	0,00000
UltraTech Cement Ltd.	0,0344874	UltraTech Cement Ltd.	0,05135
Wipro Ltd.	0,0466646	Wipro Ltd.	0,04149
Fitness	0,0067144	Fitness	0,00674699
Rendimento out of sample pf	0,0025440	Rendimento out of sample pf	0,003472
Rendimento out of sample bench	0,0024960	Rendimento out of sample bench	0,002496
Tempo risolutivo (secondi)	22,3309270	Tempo risolutivo (secondi)	22,427501

Scenario 4 ~ Modello 2

Figura 58 FTSEMib, modello 2, scenario 4, K=20, K=10

	Sim.6		Sim.6
AZA	0,0000000	AZA	0,0000000
Amplifon	0,0125809	Amplifon	0,0000000
Atlantia	0,1065378	Atlantia	0,0000000
Azimut Holding	0,0166290	Azimut Holding	0,0165976
Banca Generali	0,0000000	Banca Generali	0,0000000
Banca Medionalum	0,0000000	Banca Medionalum	0,0000000
Banco BPM	0,0000000	Banco BPM	0,1015975
BPER Banca	0,0132788	BPER Banca	0,0652200
Buzzi Unicem	0,0000000	Buzzi Unicem	0,0000000
Campari	0,0116762	Campari	0,0896037
Cnh Industrial	0,0000000	Cnh Industrial	0,0000000
Diasorin	0,0000000	Diasorin	0,0000000
Enel	0,0000000	Enel	0,0000000
Eni	0,0000000	Eni	0,0000000
EXOR	0,0000000	EXOR	0,0718715
Ferrari	0,1591049	Ferrari	0,0000000
Fineco Bank	0,0338993	Fineco Bank	0,0000000
Generali	0,0862040	Generali	0,0000000
Hera	0,0556347	Hera	0,0000000
Interpump Group	0,0361168	Interpump Group	0,0000000
Intesa San paolo	0,0169162	Intesa San paolo	0,1608143
Inwit	0,0000000	Inwit	0,1669675
Italgas	0,0255355	Italgas	0,0192777
Leonardo	0,0000000	Leonardo	0,0000000
Mediobanca	0,0000000	Mediobanca	0,0000000
Moncler	0,0000000	Moncler	0,1604900
Pirelli	0,0290133	Pirelli	0,0000000
Poste Italiane	0,0109249	Poste Italiane	0,0000000
Prysmian	0,0427461	Prysmian	0,0000000
Recordati	0,0000000	Recordati	0,0000000
Saipem	0,1754037	Saipem	0,0000000
Snam	0,0000000	Snam	0,0000000
Stellantis	0,0000000	Stellantis	0,0000000
Stmicroelectronics	0,0365220	Stmicroelectronics	0,0000000
Telecom	0,0000000	Telecom	0,0000000
Tenaris	0,1012632	Tenaris	0,0000000
Terna	0,0000000	Terna	0,0000000
Unicredit	0,0102380	Unicredit	0,1475453
Unipol	0,0197744	Unipol	0,0000000
Fitness	0,134216924	Fitness	0,216605079
Rendimento out of sample pf	0,00199	Rendimento out of sample pf	0,002047
Rendimento out of sample bench	0,001407	Rendimento out of sample bench	0,001407
Tempo risolutivo (secondi)	16,234902	Tempo risolutivo (secondi)	15,485029

Figura 59 DAX modello2, scenario 4, K=20, K=10

	Sim.1		Sim.5
Adidas	0,1455033	Adidas	0,0587946
Allianz	0,0000000	Allianz	0,0000000
Basf	0,0339024	Basf	0,0000000
BMW	0,0000000	BMW	0,2015804
Bayer	0,0177626	Bayer	0,0161529
Continental	0,1317300	Continental	0,0000000
Covestro	0,0229123	Covestro	0,0000000
Daimler	0,0000000	Daimler	0,2046765
Deutsche Bank	0,0000000	Deutsche Bank	0,0000000
Deutsche Boerse	0,0439903	Deutsche Boerse	0,0000000
Deutsche post	0,0137315	Deutsche post	0,0000000
Deutsche Wohnen	0,0000000	Deutsche Wohnen	0,0000000
Dt.Telekom	0,0186029	Dt.Telekom	0,0374614
E.On	0,1714510	E.On	0,0000000
Fresen.Med.Care	0,0346456	Fresen.Med.Care	0,1677363
Fresenius	0,0201084	Fresenius	0,0600166
Heidelbergcement	0,0120883	Heidelbergcement	0,0000000
Henkel	0,0101593	Henkel	0,0000000
Infineon Tech.AG	0,0000000	Infineon Tech.AG	0,1397277
Merck	0,0281108	Merck	0,0000000
Mtu Aero Engines	0,1064412	Mtu Aero Engines	0,0014990
Muench.Rueckvers	0,0882229	Muench.Rueckvers	0,0000000
RWE	0,0359313	RWE	0,0647460
SAP	0,0000000	SAP	0,0000000
Siemens	0,0284760	Siemens	0,0475904
Volkswagen	0,0241044	Volkswagen	0,0000000
Vonovia	0,0121060	Vonovia	0,0000000
Fitness	3,657276458	Fitness	1,495968
Rendimento out of sample pf	0,001386	Rendimento out of sample pf	0,001942
Rendimento out of sample bench	0,000782	Rendimento out of sample bench	0,000782
Tempo risolutivo (secondi)	14,993829	Tempo risolutivo (secondi)	13,634012

Figura 60 S&P/BMV IPC modello 2, scenario 4, K=20, K=10

	Sim.7		Sim.8
Alfa SA A	0,0000000	Alfa SA A	0,0352273
Aisea SA	0,0407080	Aisea SA	0,0000000
America Movil SAB de CV L	0,0332130	America Movil SAB de CV L	0,2627933
Arca Continental, SAB de CV	0,0141350	Arca Continental, SAB de CV	0,0000000
Bolsa Mexicana de Valores SA de CV	0,0000000	Bolsa Mexicana de Valores SA de CV	0,1109451
Cemex SA CPO	0,1475070	Cemex SA CPO	0,0000000
Coca-Cola Femsa SAB de CV UBL	0,0598878	Coca-Cola Femsa SAB de CV UBL	0,0000000
Corporacion Inmobiliaria Vesta, S.A.B. DE C.V.	0,0000000	Corporacion Inmobiliaria Vesta, S.A.B. DE C.V.	0,0000000
El Puerto de Liverpool SAB de CV	0,0107250	El Puerto de Liverpool SAB de CV	0,0000000
Fomento Economico Mexicano S.A.B. de C.V.	0,0328266	Fomento Economico Mexicano S.A.B. de C.V.	0,0000000
Genomma Lab Internacional SA de CV	0,0000000	Genomma Lab Internacional SA de CV	0,0000000
Gruma SAB B	0,0000000	Gruma SAB B	0,1270891
Grupo Aeroportuario del Centro Norte, S.A.B. de C.V.	0,0000000	Grupo Aeroportuario del Centro Norte, S.A.B. de C.V.	0,0000000
Grupo Aeroportuario del Pacifico, S.A.B. de C.V.	0,0000000	Grupo Aeroportuario del Pacifico, S.A.B. de C.V.	0,0000000
Grupo Aeroportuario del Sureste SAB de CV B	0,0000000	Grupo Aeroportuario del Sureste SAB de CV B	0,0000000
Grupo Bimbo S.A.B.	0,0125974	Grupo Bimbo S.A.B.	0,0000000
Grupo Carso SAB de CV	0,0000000	Grupo Carso SAB de CV	0,0121911
Grupo Cementos de Chihuahua SAB de CV	0,0135024	Grupo Cementos de Chihuahua SAB de CV	0,1088895
Grupo Elektra S.A.B. de C.V.	0,0155188	Grupo Elektra S.A.B. de C.V.	0,0101748
Grupo Financiero Banorte O	0,0222415	Grupo Financiero Banorte O	0,0441572
Grupo Financiero Inbursa O	0,0112578	Grupo Financiero Inbursa O	0,0000000
Grupo Mexico SAB de CV B	0,0000000	Grupo Mexico SAB de CV B	0,1034695
Grupo Televisa SAB CPO	0,0179599	Grupo Televisa SAB CPO	0,0000000
Industrias Penoles	0,0000000	Industrias Penoles	0,0000000
Infraestructura Energetica Nova S.A.B. de C.V.	0,1366544	Infraestructura Energetica Nova S.A.B. de C.V.	0,0000000
Kimberly Clark de Mexico S.A.B. de C.V. A	0,0000000	Kimberly Clark de Mexico S.A.B. de C.V. A	0,0000000
Megacable Holdings SAB de CV	0,0273342	Megacable Holdings SAB de CV	0,0000000
ORBIA ADVANCE CORPORATION SAB de CV	0,0812046	ORBIA ADVANCE CORPORATION SAB de CV	0,0000000
Promotora y Operadora de Infraestructura SAB de CV	0,1813072	Promotora y Operadora de Infraestructura SAB de CV	0,0000000
Qualitas Controladora S.A.B de C.V.	0,0204103	Qualitas Controladora S.A.B de C.V.	0,0000000
Regional, S.A. de C.V.	0,0771616	Regional, S.A. de C.V.	0,0000000
Telesites S.A.B. de C.V.	0,0438471	Telesites S.A.B. de C.V.	0,0000000
Walmart de Mexico SAB de CV	0,0000000	Walmart de Mexico SAB de CV	0,1850469
Fitness	0,259567213	Fitness	0,784024
Rendimento out of sample pf	0,002732	Rendimento out of sample pf	0,001329
Rendimento out of sample bench	0,002208	Rendimento out of sample bench	0,002208
Tempo risolutivo (secondi)	14,000294	Tempo risolutivo (secondi)	13,572093

Figura 61 NIFTY, modello 2, scenario 4, K=20, K=10

	Sim.3		Sim.10
Adani Ports and Special Economic Zone Ltd.	0,0000000	Adani Ports and Special Economic Zone Ltd.	0,1564909
Asian Paints Ltd.	0,0466191	Asian Paints Ltd.	0,0000000
Axis Bank Ltd.	0,0131214	Axis Bank Ltd.	0,0000000
Bajaj Auto Ltd.	0,0310057	Bajaj Auto Ltd.	0,0000000
Bajaj Finance Ltd.	0,0142728	Bajaj Finance Ltd.	0,0000000
Bajaj Finserv Ltd.	0,2180674	Bajaj Finserv Ltd.	0,2157019
Bharat Petroleum Corporation Ltd.	0,0121014	Bharat Petroleum Corporation Ltd.	0,0000000
Bharti Airtel Ltd.	0,0410480	Bharti Airtel Ltd.	0,0000000
Britannia Industries Ltd.	0,0151946	Britannia Industries Ltd.	0,0000000
Cipla Ltd.	0,0751413	Cipla Ltd.	0,0000000
Coal India Ltd.	0,0000000	Coal India Ltd.	0,0000000
Divi's Laboratories Ltd.	0,0000000	Divi's Laboratories Ltd.	0,0000000
Dr. Reddy's Laboratories Ltd.	0,0000000	Dr. Reddy's Laboratories Ltd.	0,0000000
Eicher Motors Ltd.	0,0000000	Eicher Motors Ltd.	0,0000000
Grasim Industries Ltd.	0,0000000	Grasim Industries Ltd.	0,0000000
HCL Technologies Ltd.	0,0000000	HCL Technologies Ltd.	0,0000000
HDFC Bank Ltd.	0,0107893	HDFC Bank Ltd.	0,0000000
Hero MotoCorp Ltd.	0,0000000	Hero MotoCorp Ltd.	0,0000000
Hindalco Industries Ltd.	0,0131045	Hindalco Industries Ltd.	0,0246056
Hindustan Unilever Ltd.	0,0158248	Hindustan Unilever Ltd.	0,0000000
Housing Development Finance Corporation Ltd.	0,0000000	Housing Development Finance Corporation Ltd.	0,1042296
ICICI Bank Ltd.	0,0000000	ICICI Bank Ltd.	0,0000000
ITC Ltd.	0,1493087	ITC Ltd.	0,0000000
Indian Oil Corporation Ltd.	0,0000000	Indian Oil Corporation Ltd.	0,0000000
Indusind Bank Ltd.	0,0000000	Indusind Bank Ltd.	0,0000000
Infosys Ltd.	0,0000000	Infosys Ltd.	0,0000000
JSW Steel Ltd.	0,0549345	JSW Steel Ltd.	0,0000000
Kotak Mahindra Bank Ltd.	0,0000000	Kotak Mahindra Bank Ltd.	0,2178330
Larsen & Toubro Ltd.	0,0000000	Larsen & Toubro Ltd.	0,0720529
Mahindra & Mahindra Ltd.	0,0000000	Mahindra & Mahindra Ltd.	0,0000000
Maruti Suzuki India Ltd.	0,0000000	Maruti Suzuki India Ltd.	0,0000000
NTPC Ltd.	0,0182096	NTPC Ltd.	0,0000000
Nestle India Ltd.	0,0000000	Nestle India Ltd.	0,0000000
Oil & Natural Gas Corporation Ltd.	0,1102879	Oil & Natural Gas Corporation Ltd.	0,1168617
Power Grid Corporation of India Ltd.	0,0000000	Power Grid Corporation of India Ltd.	0,0000000
Reliance Industries Ltd.	0,0522212	Reliance Industries Ltd.	0,0491924
Shree Cement Ltd.	0,0000000	Shree Cement Ltd.	0,0000000
State Bank of India	0,0000000	State Bank of India	0,0000000
Sun Pharmaceutical Industries Ltd.	0,0000000	Sun Pharmaceutical Industries Ltd.	0,0000000
Tata Consultancy Services Ltd.	0,0000000	Tata Consultancy Services Ltd.	0,0000000
Tata Consumer Products Ltd.	0,0290866	Tata Consumer Products Ltd.	0,0000000
Tata Motors Ltd.	0,0000000	Tata Motors Ltd.	0,0000000
Tata Steel Ltd.	0,0000000	Tata Steel Ltd.	0,0000000
Tech Mahindra Ltd.	0,0395186	Tech Mahindra Ltd.	0,0000000
Titan Company Ltd.	0,0401343	Titan Company Ltd.	0,0000000
UPL Ltd.	0,0000000	UPL Ltd.	0,0268431
UltraTech Cement Ltd.	0,0000000	UltraTech Cement Ltd.	0,0161351
Wipro Ltd.	0,0000000	Wipro Ltd.	0,0000000
Fitness	0,45421258	Fitness	0,9276136
Rendimento out of sample pf	0,002604	Rendimento out of sample pf	0,003606
Rendimento out of sample bench	0,002496	Rendimento out of sample bench	0,002496
Tempo risolutivo (secondi)	22,902731	Tempo risolutivo (secondi)	21,772018

Le tabelle (62)-(67) vengono proposte per motivare la scelta del parametro niter della PSO. Le tabelle si riferiscono agli esiti delle simulazioni svolte col modello 1, relativamente al DAX, utilizzando diversi valori di niter, ossia niter=1000, niter=5000, niter=10000. Il valore evidenziato in blu rappresenta la media dei valori della funzione di fitness nelle 10 simulazioni, e rappresenta il criterio scelto per l'individuazione del settaggio migliore: la scelta è ricaduta su niter=10000, in quanto ha presentato valori delle funzioni di fitness inferiori (prossimi a 0), dimostrando il rispetto dei vincoli imposti al modello. Per questione di brevità si presentano solo le tabelle relative al test effettuato con il modello, anche se quanto emerge è valido anche per il modello 2.

Quando sono stati formulati i modelli nel capitolo 3, tra i parametri descritti si trova una variabile importante che è stata definita z_i . Questa è una variabile binaria che dovrebbe assumere solo valore 0 o valore 1; tuttavia, non sempre l'algoritmo è riuscito ad assegnare valore 0 o 1 alla variabile, facendo sì che talvolta assumesse valori compresi all'interno dei due estremi. Questo fenomeno ha fatto sì che in certe simulazioni venisse selezionato un numero di titoli superiore al vincolo K: le situazioni in cui è stato verificato un valore della variabile binaria diverso dal consentito, sono state evidenziate con colore blu.

Appendice B(1)

Viene di seguito proposto il codice utilizzato in Matlab per quanto concerne il primo modello di selezione di portafoglio testato, ossia il modello basato sul tracking error e sull'utilizzo della semivarianza.

```
clc
clear all
close all

format long

after = 79; % numero di giorni per l'analisi out-of-sample

% Caricamento dati storici
prezzi = xlsread('NIFTY50_Title.xlsx','B250:AW495');
Prezzi = prezzi;
rendpf = (Prezzi(2:end,:) - Prezzi(1:end-1,:))./Prezzi(1:end-1,:);
rendpf1 = rendpf(1:end-after,:);
rendpf2 = rendpf(end-after+1:end,:);
benchmark = xlsread('Nifty50_Index.xlsx','B250:B495');
Benchmark = benchmark;
rendbench = (Benchmark(2:end,:) - Benchmark(1:end-1,:))./Benchmark(1:end-1,:);
rendbench1 = rendbench(1:end-after,:);
rendbench2 = rendbench(end-after+1:end,:);
[n,numvarpf] = size(rendpf);
mediapf = mean(rendpf);
mediabench = mean(rendbench);

%Parametri pso

P = 96; % particelle, 2*numvarpf
niter = 10000;
c1 = 1.49618;
c2 = 1.49618;
w = 0.7298;
vmaxx = zeros(1,numvarpf);
vmaxz = zeros(1,numvarpf);
epsilon = 1.0e-004; % penalizzazione dei vincoli
RR(niter,1) = 00;
perc_min=ones(1,numvarpf)*0.01; % quota minima
perc_max=ones(1,numvarpf)*0.3; % quota massima
K = 20; %vincolo di cardinalità
lambda = 0.5;

%inizializzazione y e vy

Tracking_error = zeros(P,1);
R = zeros(P,1);% rendimento di portafoglio
vinc_1 = zeros(P,1); % somma pesi = 1
vinc_2 = zeros(P,1); % z = 0 o 1
app_1 = zeros(P,numvarpf); %matrice di appoggio per z = 0 o 1
vinc_3 = zeros(P,1); % x >= 0
app_2 = zeros(P,numvarpf);
vinc_4=zeros(P,1); %vincolo di cardinalità
```

```

app_3=zeros(P,numvarpf); % matrice di appoggio per x >= perc_min
vinc_5=zeros(P,1); % x >= perc_min
app_4=zeros(P,numvarpf); % matrice di appoggio per x <= per_max
vinc_6=zeros(P,1); % x <= per_max

x = rand(P,numvarpf);
vx = rand(P,numvarpf);
z = rand(P,numvarpf);
vz = rand(P,numvarpf);
f = ones(P,1)*1.0e+015;
x1 = zeros(P,numvarpf);

% pb = pbest (nell'ultima colonna c'è funzione obiettivo associata alla migliore posizione assunta)
pbx = [x f];
pbz = z;

Tracking_error_b = 0; % funzione di fitness migliore (miglior particella)
Tracking_error_b_OLD = 0; % funzione di fitness migliore (miglior particella) precedente

% g=gbest, vettore che rappresenta la migliore posizione globale e il valore della funzione obiettivo
associata
gx=zeros(1,numvarpf+1); % gbest relativo al valore della funzione obiettivo
gz=zeros(1,numvarpf);

tic;
for k=1:niter
    % 1) Calcolo range della velocita' massima
    for i=1:numvarpf
        vmaxx(i)=abs(max(x(:,i))-min(x(:,i)));
        vmaxz(i)=abs(max(z(:,i))-min(z(:,i)));
    end

    % 2) Calcolo funzione obiettivo

    for p=1:P
        for i=1:numvarpf
            x1(p,i)=x(p,i)*z(p,i);
            app_1(p,i) = abs(z(p,i)*(1-z(p,i)));
            app_2(p,i) = max(0,-x(p,i));
            app_3(p,i) = max(0,perc_min(i)*z(p,i)-x(p,i));
            app_4(p,i) = max(0,x(p,i)-perc_max(i)*z(p,i));
        end

        Tracking_error(p) = var(min(0,rendpf*x(p,:)-mediabench)); % funzione obiettivo
        vinc_1(p) = abs(sum(x(p,:))-1); %somma delle quote = 1
        vinc_2(p) = sum(app_1(p,:));%z è 0 o 1
        vinc_3(p) = sum(app_2(p,:)); % x >= 0
        vinc_4(p) = abs(sum(z(p,:))-K);%max numero di titoli (K)
        vinc_5(p) = sum(app_3(p,:)); %quota min
        vinc_6(p) = sum(app_4(p,:)); %quota max

    end;

    % Calcolo la funzione di fitness
    f = lambda*Tracking_error-(1-lambda)*(rendpf(p,:)-
    rendbench(p,:))+(1/epsilon)*(vinc_1+vinc_2+vinc_3+vinc_4+vinc_5+vinc_6);

```

```

% 3) Confronto valore della funzione obiettivo con il pbest
for p=1:P
    if f(p)<pbx(p,numvarpf+1)
        pbx(p,numvarpf+1)=f(p);
        Tracking_error_b_OLD = Tracking_error_b;
        Tracking_error_b = Tracking_error(p);

        for i=1:numvarpf
            pbx(p,i)=x(p,i);
            pbz(p,i)=z(p,i);
        end
    end
end
% 3b) Memorizza il valore della funzione di rischio
    RR(k) = Tracking_error_b;

% 4) Identificare la particella con la migliore posizione
[minimo,posizione] = min(pbx(:,numvarpf+1));
gx(numvarpf+1)=minimo;

    for i=1:numvarpf
        gx(i) = pbx(posizione,i);
        gz(i) = pbz(posizione,i);
        bestglobalx(k,i) = pbx(posizione,i);
    end

for p=1:P
    for i=1:numvarpf
        vx(p,i) = w*vx(p,i)+c1*rand*(pbx(p,i)- x(p,i))+c2*rand*(gx(i)-x(p,i));
        vz(p,i) = w*vz(p,i)+c1*rand*(pbz(p,i)- z(p,i))+c2*rand*(gz(i)-z(p,i));

        if vx(p,i)>vmaxx(i)
            vx(p,i)=vmaxx(i);
        end
        if vz(p,i)>vmaxz(i)
            vz(p,i)=vmaxz(i);
        end
    end
    x(p,i)=x(p,i)+vx(p,i);
    z(p,i)=z(p,i)+vz(p,i);

    end
end

converg(k,:) = gx(:,end);

% Ritorno al passo 2

end

toc

figure
    plot(converg);title('Funzione di fitness del portafoglio migliore'),xlabel('Iterazioni'),ylabel('Funzione di fitness');
figure
    plot(RR(:,1));title('Tracking error del portafoglio migliore'),xlabel('Iterazioni'),ylabel('Tracking error');
fitness = gx(end);

```

%futuro virtuale

```
R_out = rendpf2*gx(1:end-1); %rendimento portafoglio ottimo out-of-sample  
rbench_out = mean(rendbench2); %rendimento benchmark periodo out-of-sample  
vettore_pesi_ottimi = gx(1,1:numvarpf);  
fitness_migliore = gx(1,numvarpf+1);
```

```
frt = '%12.6fr';  
fid1 = fopen('out.txt','w');  
fprintf(fid1, '%s\r', 'Population:');  
fprintf(fid1, frt, P);  
fprintf(fid1, '%s\r', 'Number of iterations:');  
fprintf(fid1, frt, niter);  
fprintf(fid1, '%s\r', '***** OUTPUT *****');  
fprintf(fid1, '%s\r', 'Portfolio:');  
frt = '%12.6f %12.6fr';  
for l = 1:numvarpf  
fprintf(fid1, frt, [l gx(l)]);  
end  
frt = '%12.6fr';  
fprintf(fid1, '%s\r', 'Fitness function:');  
fprintf(fid1, frt, fitness);  
fprintf(fid1, '%s\r', 'Tracking error (portfolio:');  
fprintf(fid1, frt, Tracking_error);  
fprintf(fid1, '%s\r', 'Sum(x) = 1:');  
fprintf(fid1, frt, sum(gx(1:end-1)));  
fprintf(fid1, '%s\r', 'Performance (Obtained:');  
fprintf(fid1, frt, [gx(1:end-1)*mediapf]);  
fprintf(fid1, '%s\r', 'Non negativity constraints:');  
fprintf(fid1, frt, sum(max(0,-gx(1:end-1))));  
fprintf(fid1, '%s\r', '***** VIRTUAL FUTURE *****');  
fprintf(fid1, '%s\r', 'Performance (Obtained in sample/Virtual future/mean bench:');  
fprintf(fid1, frt, [gx(1:end-1)*mediapf mean(R_out) rbench_out]);  
fclose(fid1);  
type('out.txt');
```


Appendice B(2)

Nella seconda sezione della appendice B viene invece presentato il codice utilizzato in Matlab per implementare la Particle Swarm Optimization per la risoluzione del problema di selezione di portafogli del tipo Enhanced Indexing, relativo al secondo modello basato sulla misura di rischio rendimento.

```
clc
clear all
close all

format long

%caricamento dei dati
prezzi = xlsread('IPC_Title.xlsx','B2:AH252');
benchmark = xlsread('IPC_Index.xlsx', 'B2:B252');
Prezzi = prezzi;
Benchmark = benchmark;
rendpf = (Prezzi(2:end,:)- Prezzi(1:end-1,:))./Prezzi(1:end-1,:); %rendimento titoli
rendbench = (Benchmark(2:end,:)- Benchmark(1:end-1,:))./Benchmark(1:end-1,:);% rendimento benchmark
[n,numvarpf] = size(Prezzi);
[m,numvarbench] = size(Benchmark);
media = mean(rendpf);

before = 167; %numero di giorni per l'analisi in-sample
after = 79; %numero di giorni per l'analisi out-of-sample
after = after+1;
rendpf_in = rendpf(1:n-after,:); %rendimenti portafoglio in sample
rendpf_out = rendpf(n-after+1:(n-1),:); %rendimenti portafoglio out-of-sample
rendbench_in = rendbench(1:n-after,:); %rendimenti benchmark in-sample
rendbench_out = rendbench(n-after+1:(n-1),:); %rendimenti benchmark out-of-sample

%identificazione e ordine dei rendimenti peggiori

alfa = 0.95; % livello di confidenza del CVaR
ord_rendpf_in = sort(rendpf_in); % rendimenti in sample ordinati dal peggiore al migliore
ord_rendpf_out = sort(rendpf_out); % rendimenti out of sample ordinati dal peggiore al migliore
ord_rendbench_in = sort(rendbench_in);
ord_rendbench_out = sort(rendbench_out);
a_pf = floor((n-after)*(1-alfa)); % 5% dei rendimenti di portafoglio in sample ordinati (valore intero)
a_pf_out = floor((n-before)*(1-alfa)); % 5% dei rendimenti di portafoglio out of sample ordinati (valore intero)
b_bench = floor((m-after)*(1-alfa)); %5% dei rendimenti del benchmark in-sample ordinati (valore interno)
b_bench_out = floor((m-before)*(1-alfa)); %5% dei rendimenti del benchmark out-of-sample ordinati (valore interno)
worst_rendpf_in = ord_rendpf_in(1:a_pf,:); % peggiori rendimenti portafoglio in sample
worst_rendpf_out = ord_rendpf_out(1:a_pf_out,:); % peggiori rendimenti portafoglio out of sample
worst_rendbench_in = ord_rendbench_in(1:b_bench,:); %peggiori rendimenti benchmark in-sample
worst_rendbench_out = ord_rendbench_out(1:b_bench_out,:); %peggiori rendimenti benchmark out-of-sample
```

```

mean_worst_in = mean(worst_rendpf_in); % media dei rendimenti peggiori in sample
mean_worst_out = mean(worst_rendpf_out); % media dei rendimenti peggiori out of sample
mean_worst_in_bench = mean(worst_rendbench_in);
mean_worst_out_bench = mean(worst_rendbench_out);

%inizializzazione parametri PSO
P = 96; %particelle, 2*numvarpf
niter = 10000; %numero di iterazioni
c1 = 1.49618;
c2 = 1.49618;
w = 0.7298;
K = 20; %numero max di titoli (K)
vmaxx = zeros(1,numvarpf);
vmaxz = zeros(1,numvarpf);
%inizializzazione altri parametri
epsilon1 = 1.0e-004; %parametro di penalizzazione
epsilon2 = 0.000001;
perc_min = ones(1,numvarpf)*0.01; % quota minima
perc_max = ones(1,numvarpf)*0.3; % quota massima

% Vettori di appoggio per la funzione obiettivo

rr_ratio = zeros(P,1);
med_port = zeros(P,1);
vinc_1 = zeros(P,1); % somma pesi = 1
vinc_2 = zeros(P,1); % z = 0 o 1
app_1 = zeros(P,numvarpf); %matrice di appoggio per z = 0 o 1
vinc_3 = zeros(P,1); % x >= 0
app_2 = zeros(P,numvarpf);
vinc_4 = zeros(P,1); %vincolo di cardinalit√†
app_3 = zeros(P,numvarpf); % matrice di appoggio per x >= perc_min
vinc_5 = zeros(P,1); % x >= perc_min
app_4 = zeros(P,numvarpf); % matrice di appoggio per x <= per_max
vinc_6 = zeros(P,1); % x <= per_max

% 1) Inizializzazione posizioni, velocit√†, funzione obiettivo
x = rand(P,numvarpf);
vx = rand(P,numvarpf);
z = rand(P,numvarpf);
vz = rand(P,numvarpf);
f = ones(P,1)*1.0e+015; % funzione fitness
x1 = zeros(P,numvarpf);

% pb = pbest (nell'ultima colonna c'√© funzione obiettivo associata alla migliore posizione assunta)
pbx = [x f];
pbz = z;

% g=gbest, vettore che rappresenta la migliore posizione globale e il valore della funzione obiettivo
associata
gx = zeros(1,numvarpf+1);
gz = zeros(1,numvarpf);

%pf statistics
meanpf = mean(rendpf_in); %rendimento medio portafoglio in-sample
meanbench = mean(rendbench_in); %rendimento medio benchmark in-sample
meanpf_2 = mean(rendpf_out); %rendimento medio portafoglio out-of-sample
meanbench_2 = mean(rendbench_out);%rendimento medio benchmark out-of-sample

```

```

tic;
for k = 1:niter
% individua range dinamico velocit√†
for i = 1:numvarpf
vmaxx(i) = abs(max(x(:,i))-min(x(:,i)));
vmaxz(i) = abs(max(z(:,i))-min(z(:,i)));

end
% 2) Calcola funzione obiettivo
for p = 1:P
for i = 1:numvarpf
x1(p,i) = x(p,i)*z(p,i);
app_1(p,i) = abs(z(p,i)*(1-z(p,i)));
app_2(p,i) = max(0,-x(p,i));
app_3(p,i) = max(0,perc_min(i)*z(p,i)-x(p,i));
app_4(p,i) = max(0,x(p,i)-perc_max(i)*z(p,i));

end

rr_ratio(p) = -sum(x(p,:).*(mean_worst_in-mean_worst_in_bench'))+epsilon2./mean(rendpf_in(p,:)-
rendbench_in(p,:)); % Risk-reward ratio
med_port(p) = x1(p,:)*meanpf; %media
vinc_1(p) = abs(sum(x(p,:))-1); %somma delle quote = 1
vinc_2(p) = sum(app_1(p,:)); %z √@ 0 o 1
vinc_3(p) = sum(app_2(p,:)); % x >= 0
vinc_4(p) = abs(sum(z(p,:))-K); %max numero di titoli (K)
vinc_5(p) = sum(app_3(p,:)); %quota min
vinc_6(p) = sum(app_4(p,:)); %quota max

end

%funzione obiettivo
f = rr_ratio+((1/epsilon1))*(vinc_1+vinc_2+vinc_3+vinc_4+vinc_5+vinc_6);

% 3) Confronta il valore della funzione obiettivo con il pbest

for p = 1:P
if f(p) < pbx(p,numvarpf+1)
pbx(p,numvarpf+1) = f(p);
for i = 1:numvarpf
pbx(p,i) = x(p,i);
pbz(p,i) = z(p,i);
end
end
end

% 4)identifica la particella con migliore posizione

[minimo,posizione] = min(pbx(:,numvarpf+1));
gx(numvarpf+1) = minimo;

for i = 1:numvarpf
gx(i) = pbx(posizione,i);
gz(i) = pbz(posizione,i);
end

% 5) Aggiorna velocit√† e posizione

```

```

for p = 1:P
for i = 1:numvarpf

vx(p,i) = w*vx(p,i)+c1*rand*(pbx(p,i)- x(p,i))+c2*rand*(gx(i)-x(p,i));
vz(p,i) = w*vz(p,i)+c1*rand*(pbz(p,i)- z(p,i))+c2*rand*(gz(i)-z(p,i));

if vx(p,i) > vmaxx(i)
vx(p,i) = vmaxx(i);
end

if vz(p,i) > vmaxz(i)
vz(p,i) = vmaxz(i);
end
z(p,i) = z(p,i)+vz(p,i);
x(p,i) = x(p,i)+vx(p,i);
end
end

converg(k,:) = gx(:,end);

% 6) Riparti dal 2) fino al criterio di stop
end

toc;

figure;
plot(converg),title('Funzione di fitness del portafoglio migliore'),xlabel('Iterations'),ylabel('Funzione di Fitness');
fitness_migliore = gx(1,numvarpf+1);
vettore_pesi_ottimi = gx(1,1:numvarpf); % x ottimi

cvar_in = -sum((x(p,:)*mean_worst_in')); % CVaR in sample portafoglio iniziale
cvar_out = -sum((x(p,:)*mean_worst_out')); % CVaR out of sample portafoglio iniziale
rend_out = sum(gx(1,1:numvarpf)*rendpf_out'); % rendimento portafoglio ottimo out of sample
mean_rend_out = mean(gx(1,1:numvarpf)*rendpf_out');

firt = '%12.6f\r';
fid1 = fopen('out.txt','w');
fprintf(fid1, '%s\r', 'Population:');
fprintf(fid1, firt, P);
fprintf(fid1, '%s\r', 'Number of iterations:');
fprintf(fid1, firt, niter);
fprintf(fid1, '%s\r', '***** OUTPUT *****');
fprintf(fid1, '%s\r', 'Portfolio:');
firt = '%12.6f %12.6f\r';

for l = 1:numvarpf
fprintf(fid1, firt, [l gx(l)]);
end
firt = '%12.6f\r';
fprintf(fid1, '%s\r', 'Fitness function:');
fprintf(fid1, firt, f);
fprintf(fid1, '%s\r', 'Sum(x) = 1:');
fprintf(fid1, firt, sum(gx(1:end-1)));
fprintf(fid1, '%s\r', 'Performance (Obtained):');
fprintf(fid1, firt, [gx(1:end-1)*meanpf]);
fprintf(fid1, '%s\r', 'Non negativity constraints:');
fprintf(fid1, firt, sum(max(0,-gx(1:end-1))));

```

```
fprintf(fid1, '%s\r', '***** VIRTUAL FUTURE *****');  
fprintf(fid1, '%s\r', 'Performance (Obtained in sample/Virtual future/mean bench):');  
fprintf(fid1, frt, [gx(1:end-1)*meanpf mean_rend_out meanbench_2]);  
fclose(fid1);  
type('out.txt');
```

Bibliografia

- Abraham, A., Guo, H., Liu, H., 2006. *Swarm Intelligence: Foundations, Perspectives and Applications*, *Swarm Intelligent Systems*, 3-25, Springer-Verlag Berlin Heidelberg
- Angelelli, E., Mansini, R., Speranza, M., G., (2008). A comparison of MAD and CVaR models with real features, *Journal of Banking and Finance*, Vol. 32, 1188-1197
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., Heath, D., 1999. Coherent measures of risk, *Mathematical Finance* 9, 203–228.
- Beasley, J., E., Meade, N., Chang, T., J., 2003. An evolutionary heuristic for the index tracking problem, *European Journal of Operational Research*, Vol.148, 621-643
- Blum, C., Roli, A., 2003. *Metaheuristics in Combinatorial Optimization: Overview and Conceptual Comparison*, *ACM Computing Surveys*
- Bruni, R., Cesarone, F., Scozzari, A., Tardella, F., 2014. A Linear Risk-Return Model for Enhanced Indexation in Portfolio Optimization, *OR Spectrum*, Vol. 37, 735-759
- Bruni, R., Cesarone, F., Scozzari, A., Tardella, F., 2012. A New Stochastic Dominance Approach to Enhanced Index Tracking Problems, *Economics Bulletin*, vol. 32, issue 4, 3460-3470
- Canakgoz, N., A., Beasley, J., E., 2008. Mixed-integer programming approaches for index tracking and enhanced indexation, *European Journal of Operational Research*, 196, 384-399
- Clerc, M. 1999. The swarm and the queen: towards a deterministic and adaptive particle swarm optimization, *Proceedings of the 1999 Congress on Evolutionary Computation*, Vol. 3, 1951- 1957
- Clerc, M., Kennedy, J., 2002. The Particle Swarm—Explosion, Stability, and Convergence in a Multidimensional Complex Space, *IEEE transactions on evolutionary computation*, Vol. 6, No. 1
- Clerc, M. (2006). *Particle swarm optimization*. London: ISTE
- Chiam, S., C., Tan, K., C., Al Mamun, A., 2013. Dynamic index tracking via multi-objective evolutionary algorithm, *Applied Soft Computing*, Vol. 13, 3392-3408
- Corazza M., *Appunti lezioni del corso “Metodi per la Gestione dei Portafogli Personali”*, Anno Accademico 2020-2021, Dipartimento di Economia, Università Ca’ Foscari Venezia
- Corazza, M., Fasano, G., Gusso, R., 2013. Particle Swarm optimization with non-smooth penalty reformulation for a complex portfolio selection problem, *Applied mathematics and computation*, Vol. 224, 611-624
- Dallagnol, V., A., F., Van den Berg, J., Mous, L., 2009. Portfolio Management Using Value at Risk: A Comparison between Genetic Algorithms and Particle Swarm Optimization, *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 24, 766–792

Deng, G-F., Lin, W-T., Lo, C-C., 2012. Markowitz-based portfolio selection with cardinality constraints using improved particle swarm optimization, *Expert systems with applications*, Vol. 39, 4558-4566

Filppi. C., Guastaroba, G., Speranza, M., G., 2016. A heuristic framework for the bi-objective enhanced index tracking problem, *Omega*, Vol. 65, 122-137

Frino, A., Gallagehr, D., R., Oetomo, T., N., 2002. The index tracking strategies of passive and enhanced index equity funds, *Australian Journal of Management*, Vol. 3, No.1

Fuentes Cabrera, J.C., Coello Coello, C.A., 2007. Handling constraints in particle swarm optimization using a small population size, *Proceedings of the Artificial Intelligence 6th Mexican International Conference on Advances in Artificial Intelligence*, 41-51

Gaivoronski, A., A., Krylov, S., Van der Wijst, N., 2004. Optimal portfolio selection and dynamic benchmark tracking, *European journal of operational research*, Vol. 163, 115-131

Gavrilas, M., 2016. Heuristic and metaheuristic optimization techniques with application to power systems, *Mathematical methods and computational techniques in electrical engineering*

Glover, F., Sörensen, K., Sevaux, M., 2017. A History of Metaheuristics, *Handbook of Heuristics*, 791-808

Glover, F., 1986. Future paths for integer programming and links to artificial intelligence, *Computers & Operations Research*, Vol. 13, no. 5, 533–549

Goel, A., Sharma, A., Mehra, A., 2017. Index tracking and enhanced indexing using mixed conditional value-at-risk, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 335, 361-380

Gnägi, M., Strub, O., 2020. Tracking and outperforming large stock-market indices. *Omega*, Vol. 90

Guastaroba, G., Speranza, M.,G., (2012). Kernel Search: An application to the index tracking problem, *European Journal of Operational Research*, vol.217, 54-68.

Guastaroba, G., Mansini, R., Ogryczak, W., Speranza, M., G., 2020. Enhanced Index tracking with CVaR-based ratio measures, *Annals of operations research*, Vol. 292, 883-931

Heppner, F., Grenander, U., (1990). A stochastic nonlinear model for coordinated bird flocks. In *S. Krasner,Ed., The Ubiquity of Chaos*. AAAS Publications, Washington, DC.

Jansen, R., Van Dijk, R., 2002. Optimal benchmark tracking with small portfolios, *The Journal of Portfolio Management*, Vol. 28, No. 2, 33-39

Janson, S., Middendorf, M. 2005. A hierarchical Particle Swarm Optimizer and its adaptive variant, *IEEE Transactions on Cybernetics*, Vol. 35, Issue 6, 1272-1282

Jorion, P., 2002. Enhanced Index Funds and Tracking Error Optimization, Working paper, University of California

Kaucic, M., Barbini, F., Verdù, F., J., C., 2020. Polynomial goal programming and particle swarm optimization for enhanced indexation, *Soft Computing*, Vol. 24, 8535-8551

Kennedy, J., Eberhart, R., 1995. Particle Swarm Optimization, *Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks – Conference Proceedings 4*, 1942– 1948

Kennedy, J., Eberhart, R., 1995. A New Optimizer using Particle Swarm Theory, *Conference Paper, Proceedings of the Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science*

Kennedy, J., Mendes, R., 2002. Population structure and particle swarm performance, *Proceeding of IEEE conference on Evolutionary Computation*, 1671- 1676

Konno, H., Hatagi, T., 2005. Index-plus-alpha tracking under concave transaction cost, *Journal of industrial and management optimization*, Vol. 1, No. 1, 87-98

Koshizuka, T., Konno, H., & Yamamoto, R. 2009. Index-plus-alpha tracking subject to correlation constraint, *International Journal of Optimization: Theory, Methods and Applications*, Vol.1, No. 2, 215–224

Lejeune, M., Samatli-Pac, G., 2012. Construction of Risk-Averse Enhanced Index Funds, *Journal on Computing*, Vol. 25, No. 4

Li, Q., Sun, L., Bao, L. 2011. Enhanced index tracking based on multi-objective immune algorithm, *Expert Systems with Applications*, Vol. 38, 6101-6106

Maringer, D., Oyewumi, O., 2007. Index tracking with constrained portfolio, *Intelligent systems in accounting, finance and management*, Vol. 15, 57-71

Markovitz (1952). Portfolio selection, *The journal of finance*, Vol.7, 77-91

Mendes, J., Kennedy, J., Neves, J. 2004. The fully informed Particle Swarm: simpler, maybe better, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, Vol. 8, Issue 3, 204-210

Mezali, H., Beasley, J., E., 2014. Index tracking with fixed and variable transaction costs, *Optimization Letters*, Vol. 8, 61-80

Mohan, C., K., Peram, T., Veeramachaneni, K., 2003. Fitness-distance-ratio based particle swarm optimization, *Proceedings of the 2003 IEEE Swarm Intelligence Symposium*

Mutunge, P., Haugland, D., 2017. Minimizing the tracking error of cardinality constrained portfolio, *Computer and operation research*, Vol. 90, 33-41

Ogryczak, W. and Ruszczyński, A. (1999). From Stochastic Dominance to Mean-Risk Model, *European Journal of Operational Research*, vol. 116, 33-50.

Passive funds' share of European Investment market jumps to 20%. *Financial Times*, 08/12/2020

Parsopoulos, K., Vrahatis, M., N., 2002. Particle Swarm Optimization Method for Constrained Optimization problem, *Frontier in Artificial Intelligence and Applications*, Vol. 76, 214-220

- Poli, R., Kennedy, J., Blackwell, T., 2007. Particle swarm optimization. An overview, *Swarm Intelligence*, Vol. 1, 33-57
- Rockafellar, R. T., Uryasev, S., & Zabarankin, M. (2006b). Optimality conditions in portfolio analysis with general deviation measures. *Mathematical Programming*, 108(2), 515–540.
- Roman, D., Mitra, G., Zverovich, V., 2013. Enhanced indexation based on second-order stochastic dominance, *European Journal of Operational Research*, Vol. 228, 273-281
- Salehpour Bavarsad, I., Molla-Alizadeh-Zavardehi, S., (2019). A constrained portfolio selection model at considering risk-adjusted measure by using hybrid meta-heuristic algorithms, *Applied Soft Computing Journal*, 75, 233-253
- Sant'Anna, L., Filomena, T., P., Guedes, P., C., Borenstein, D., 2017. Index tracking with controlled number of assets using a hybrid heuristic combining genetic algorithm and non-linear programming, *Annals of Operations Research*, Vol. 258, 849-867
- Sant'Anna, L., Filomena, T., P., Calderra, J., F., 2016. Index tracking and enhanced indexing using cointegration and correlation with endogenous portfolio selection, *The Quarterly Review of Economics and Finance*, Vol. 65, 146-157
- Sharma, A., Agrawal, S., Mehra, A., 2017. Enhanced indexing for risk averse investors using relaxed second order stochastic dominance, *Optimization and Engineering*, Vol. 18, 407-442
- Sharpe, W., F., 1991. The arithmetic of active management, *Financial Analyst Journal*, Vol. 47, No.1, 7-9
- Shi, Y., Eberhart, R., C., 2000. Comparing Inertia Weights and Constriction Factors in Particle Swarm Optimization, *Proceedings of the 2000 Congress on Evolutionary Computation*
- Shi, Y., Eberhart, R., C., 1998. A Modified Particle Swarm Optimizer, 1998 IEEE International Conference on Evolutionary Computation Proceeding, *IEEE World Congress on Computational Intelligence*
- Shi, Y., Eberhart, R., C., 1999. Empirical Study of Particle Swarm Optimization, *Proceedings of the 1999 Congress on Evolutionary Computation*
- Wang, D., Tan, D., Liu, L., 2017. Particle swarm optimization algorithm: an overview, *Soft Computing*, Vol. 22, 387-408
- Zang, W., J., Xie, X., F., Bi, D., C., 2004. Handling Boundary Constraints for Numerical Optimization by Particle Swarm Flying in Periodic Search Space, *Proceedings of the 2004 Congress on Evolutionary Computation*