



Università
Ca' Foscari
Venezia

Corso di Laurea
magistrale
in Economia e Finanza

Tesi di Laurea

Volatility clustering nelle serie storiche economiche e finanziarie

Relatore

Prof. Claudio Pizzi

Laureanda

Elena Gasparini
Matricola 856374

Anno Accademico

2019 / 2020

Sommario

INDICE DELLE TABELLE.....	IV
INDICE DELLE FIGURE	V
PREMESSA.....	1
LE SERIE STORICHE.....	3
LA STAZIONARIETÀ	4
IL PROCESSO GENERATORE DEI DATI	5
LA DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ	6
STYLIZED FACT	10
ASSENZA DI AUTOCORRELAZIONE LINEARE	10
HEAVY TAILS	12
ASIMMETRIA.....	13
LEVERAGE EFFECTS.....	14
EFFETTI DI STAGIONALITÀ	15
INTRADAY EFFECTS.....	15
HOLIDAY EFFECT	16
INTRAMOUNTH EFFECT.....	16
WEEKEND EFFECT	16
EFFETTO GENNAIO	17
LA VOLATILITÀ	19
LE CARATTERISTICHE DELLA VOLATILITÀ.....	24
LA VOLATILITÀ È MEAN REVERTING	24
LA MEMORIA LUNGA NELLA VOLATILITÀ.....	25
CORRELAZIONE TRA VOLATILITÀ E VOLUME.....	27
LA VOLATILITY CLUSTERING	30
GENESI DEI CLUSTER.....	30
STRUTTURA DELLA PERSISTENZA DELLA VOLATILITÀ.....	38
IL FLUSSO DI INFORMAZIONI.....	46
METODI DI CALCOLO	49
IL MODELLO DI VOLATILITÀ.....	53
IL MODELLO ARCH	56
IL MODELLO GARCH.....	58
STIMA DEL MODELLO PER LA MEDIA DELL'INDICE DAX30.....	60
MODELLO AR(5).....	61

STIMA DEL MODELLO PER LA VOLATILITÀ.....	62
MODELLO GARCH(1,1).....	63
L'ASIMMETRIA NEL MODELLO PER VOLATILITÀ.....	64
MODELLI CON ASIMMETRIA.....	67
MODELLO EGARCH(p,q).....	67
MODELLO TGARCH	68
MODELLO GJR GARCH	69
MODELLO APARCH	70
CRITERIO DELLA MASSIMA VEROSOMIGLIANZA	71
ALTRI MODELLI DI TIPO ARCH	72
MODELLO AGARCH.....	72
CURVA DELL'IMPATTO DELLE NOTIZIE	73
MODELLO HARCH	75
LA PERSISTENZA DELLA VOLATILITÀ.....	77
METODO UTILIZZATO	78
SERIE UTILIZZATE	78
INDICE DAX-30.....	80
INDICE S&P 500	82
INDICE NIKKEI-225	85
AZIONE KO.....	88
AZIONE ENEL.MI	91
AZIONE TM	93
CONCLUSIONI	95
BIBLIOGRAFIA	96
SITOGRAFIA	100

INDICE DELLE TABELLE

Tabella 1: Statistiche di base della serie dei rendimenti dell'azione KO.....	7
Tabella 2: Valori di curtosi	12
Tabella 3: Indice di asimmetria.....	14
Tabella 4: Autocorrelazione di $ r_t ^d$ (Ding et Al. 1993).....	27
Tabella 5: Confronto della stima della volatilità per le azioni (Wanget Al 2018l).....	45
Tabella 6: Confronto della stima della volatilità per SPY (Wang et al. 2018).....	45
Tabella 7: Results from regressing returns onto contemporaneous order flow. (Berger et al. 2009).....	47
Tabella 8: Summary of daily results from regressing returns onto contemporaneous order flow separately for each day. (Berger et al. 2009).....	48
Tabella 9: Results from OLS estimation of the volatility equation. (Berger et al. 2009).....	48
Tabella 10: The probability of the occurrence of large and small fluctuations following the occurrence of large or small ones on the previous day (the first column). The result here is for NASDAQ time series. (Tseng et Al 2011)	50
Tabella 11: Statistiche di base della serie dei rendimenti giornalieri dell'indice DAX30.	54
Tabella 12: Confronto dei modelli secondo il criterio AIC e BIC.....	61
Tabella 13: Modello AR(5)	61
Tabella 14: stima del modello GARCH(1,1)	63
Tabella 15: RISULTATI DEI TEST STATISTICI SUL MODELLO GARCH(1,1)	64
Tabella 16: BIAS TEST MODELLO GARCH(1,1) SERIE DEI RENDIMENTI QUADRATI DELL'INDICE DAX30.....	66
Tabella 17: Stima del modello EGARCH (1,1)	68
Tabella 18: Stima del modello TGARCH(1,1)	69
Tabella 19: Stima del modello GJR GARCH(1,1)	70
Tabella 20: FATTORE DI ASIMMETRIA PROPOSTO DA DING ET AL. PER I MODELLI GARCH E APARCH SULLA SERIE S&P500.....	71
Tabella 21: Stima del modello APARCH(1,1)	71
Tabella 22: Confronto del criterio della massima verosimiglianza per i modelli autoregressivi eteroschedastici	71
Tabella 23: Sign Bias Test.....	82
Tabella 24: Confronto criteri informativi dei modelli autoregressivi condizionali per l'indice S&P500.	83
Tabella 25: Confronto criteri informati dei modelli autoregressivi condizionali dell'indice Nikkei225.	85
Tabella 26: Stima del modello GARCH(1,1) dell'azione KO.	88
Tabella 27: Sign Bias Test sul modello GARCH(1,1) dell'azione KO.....	89
Tabella 28: Confronto dei criteri informativi dei modelli autoregressivi condizionali dell'azione ENEL.MI. ...	91

INDICE DELLE FIGURE

Figura 1: Prezzi aggiustati di chiusura del titolo The Coca Cola Company.....	3
Figura 2: Rendimento giornaliero della serie KO.....	5
Figura 3: Funzione di densità dei rendimenti giornalieri dell'azione KO.....	7
Figura 4: Q-Qnorm serie dei rendimenti giornalieri KO.....	7
Figura 5: Autocorrelazione parziale e globale della serie dei rendimenti di KO.....	11
Figura 6: Autocorrelazione globale rendimenti elaborati KO.....	12
Figura 7: Rappresentazione dell'effetto lunedì. Fonte: Sewell (2011).....	17
Figura 8: Effetto gennaio. Fonte: Sewell (2011).....	17
Figura 9: Varianza serie dei rendimenti di KO.....	20
Figura 10: Rendimenti al quadrato e assoluti di KO.....	21
Figura 11: Rappresentazione dell'indice VIX.....	23
Figura 12: ACF della serie rendimenti dell'azione KO.....	24
Figura 13: Volatility mean reverting Fonte: Forque et al. (1999).....	25
Figura 14: Confronto ACF rendimenti semplici e elaborati.....	26
Figura 15: Correlazione tra volume e volatilità.....	28
Figura 16: Rendimenti giornalieri dell'indice S&P500.....	30
Figura 17: ACF r^2 e $ r $ dell'azione KO.....	34
Figura 18: ACF volume dell'azione KO.....	34
Figura 19: Long memory of high volatility clusters. Fonte: Ning et al. (2015).....	39
Figura 20: Long memory of low volatility clusters. Fonte: Ning et al. (2015).....	40
Figura 21: Asimmetria della persistenza della volatilità. Fonte: Wang et al. (2018).....	43
Figura 22: Prezzo giornaliero dell'indice DAX30, da 01-01-2000 al 28-08-2020.....	53
Figura 23: Rendimenti logaritmici giornalieri dell'indice DAX30 dal 01-01-2000 al 25-08-2020.....	54
Figura 24: Grafico quantile-quantile della serie dei rendimenti giornalieri dell'indice DAX30.....	55
Figura 25: Rendimenti al quadrato e rendimenti assoluti dei rendimenti giornalieri della serie DAX30.....	55
Figura 26: Funzione di autocorrelazione della serie dei rendimenti giornalieri e della serie dei rendimenti elaborati dell'indice DAX30.....	56
Figura 27: Istogramma della serie dei rendimenti dell'indice DAX30.....	60
Figura 28: Grafico dell'ACF e della PACF sulla serie dei rendimenti giornalieri dell'indice DAX30.....	61
Figura 29: Test Ljung-Box dei residui del modello AR(5).....	62
Figura 30: Test BDS sulla serie dei residui del modello AR(5).....	62
Figura 31: ACF E PACF dei residui al quadrato del modello AR(5).....	63
Figura 32: Grafico nuova curva d'impatto modello GARCH(1,1) ED EGARCH(1,1). Fonte: Engle (1982).....	73
Figura 33: Grafico nuova curva d'impatto modello GJR GARCH(1,1)E AGARCH(1,1). Fonte: Engle (1982)....	74
Figura 34: Rendimenti giornalieri dell'indice DAX30.....	80
Figura 35: Rolling window della deviazione standard semestrale dell'indice DAX30.....	80
Figura 36: Rolling window semestrale del fattore di persistenza dell'indice DAX30.....	80
Figura 37: Rendimenti giornalieri dell'indice S&P500.....	82
Figura 38: Rolling window della deviazione standard semestrale dell'indice S&P500.....	83
Figura 39: Rolling window del fattore di persistenza dell'indice S&P500.....	83
Figura 40: Rendimenti giornalieri dell'indice Nikkei225.....	85
Figura 41: Rolling window della deviazione standard semestrale dell'indice Nikkei225.....	86
Figura 42: Rolling window del fattore di persistenza dell'indice Nikkei225.....	86
Figura 43: Rendimenti giornalieri dell'azione KO.....	88

Figura 44: Rolling window della deviazione standard semestrale dell'azione KO.	89
Figura 45: Rolling window del fattore di persistenza dell'azione KO.	89
Figura 46: Volatilità dell'azione KO.....	90
Figura 47: Rendimenti giornalieri dell'azione ENEL.MI.	91
Figura 48: Rolling window della deviazione standard semestrale dell'azione ENEL.MI.	92
Figura 49: Rolling window del fattore di persistenza dell'azione ENEL.MI.	92
Figura 50: Volatilità dell'azione ENEL.MI.....	92
Figura 51: Rendimenti giornalieri dell'azione TM.	93
Figura 52: Rolling window della deviazione standard semestrale dell'azione TM.....	94
Figura 53: Rolling window del fattore di persistenza dell'azione TM.....	94
Figura 54: Volatilità dell'azione TM.	94

PREMESSA

Lo scopo del seguente lavoro è l'analisi del fenomeno della persistenza della volatilità, che si manifesta con la presenza di cluster nella volatilità delle serie economiche/finanziarie cioè dalla presenza di periodi con fluttuazioni di ampiezza maggiore e periodi con fluttuazioni di ampiezza minore.

Il lavoro analizza alcuni fatti empirici delle serie economiche e finanziarie per poi soffermarsi sulla volatility clustering. Inizialmente la distribuzione dei rendimenti era stata assunta essere gaussiana poiché essa risultava di più facile trattazione, la sua descrizione dipende solamente dei primi due momenti. Tale assunto però non trova riscontro nelle serie storiche finanziarie reali: tra i fatti empirici che sono stati riscontrati nella quasi totalità delle serie finanziarie e che differenziano la loro distribuzione da quella normale vi sono: distribuzione leptocurtica, ovvero vi è la presenza di eventi estremi che generano code più spesse, infatti il valore di curtosi nelle serie finanziarie è solitamente più alto rispetto a quello della distribuzione normale, vi è la presenza di cluster della volatilità che implica la presenza di autocorrelazione seriale nella serie dei rendimenti al quadrato ed infine spesso le distribuzioni delle serie risultano asimmetriche.

La presenza dei cluster di volatilità sono attribuiti da alcuni autori, tra i quali citiamo Gaunersdorfer e Hommes (2007), Xue e Gençay (2012), Brock e LeBaron(1996), alla presenza di eterogeneità nel mercato e all'utilizzo di strategie d'investimento diverse: la contrapposizione di stili, tempistiche e strategie generano dei comportamenti nel mercato che producono momenti di volatilità alta o bassa che tendono a persistere. Questa caratteristica incide nel modello di stima della volatilità, cruciale per diversi aspetti degli investimenti tra cui il pricing delle opzioni, la conoscenza del rischio di portafoglio e la sua ottimizzazione. Engle nel 1982 ha introdotto il modello ARCH(p) che permette di descrivere la varianza condizionale con una dipendenza lineare dei quadrati delle innovazioni, catturando così la volatility clustering. In seguito è stato proposto in letteratura un modello più parsimonioso: il GARCH(p,q) che definisca la varianza condizionale come combinazione di un numero (p) di innovazioni quadratiche e di un numero (q) di valori delle varianze ritardate nel tempo. La presenza del cosiddetto effetto leva, (Black (1976)) che evidenzia la presenza di un aumento della volatilità maggiore a seguito di shock negativi rispetto alla volatilità generata da shock positivi con una medesima entità, ha condotto alla proposta di una classe di modelli che riescono a trattare in maniera asimmetrica i rendimenti passati.

L'elaborato, dopo aver presentato la procedura per la scelta del modello per le media e per la volatilità, si conclude con un'analisi sul fattore di persistenza delle serie finanziarie. Lo scopo è quello di cercare possibili patterns ricorrenti tra i cambiamenti che avvengono nei rendimenti finanziari e nei cambiamenti dell'indice di persistenza. Tale metodo viene applicato a serie di indici finanziari e a serie di prezzi azionari per descrivere come il fattore di persistenza dei modelli possa descrivere la presenza di cluster descritti nella serie dei rendimenti.

La tesi è suddivisa come segue: nel primo capitolo sono descritti gli stylized facts riscontrati nella maggioranza delle serie finanziarie, nei capitoli due e tre si descrive la volatility clustering descrivendo le teorie sulla genesi della loro formazione e descrivendo i modelli autoregressivi condizionali. Nella quarta sezione si descrive il fattore di persistenza applicato a diverse serie empiriche.

LE SERIE STORICHE

La serie storica è definita come la successione dei valori registrati ad intervalli di tempo di una variabile rappresentativa di un determinato fenomeno, ad esempio le serie finanziarie descrivono la successione dei prezzi di uno strumento finanziario.

L'intervallo di tempo tra due osservazioni consecutive τ può rimanere invariato all'interno della stessa serie e può essere considerato ad esempio giornaliero, mensile, annuale, ecc; oppure può essere variabile come avviene nelle serie storiche finanziarie ad alta frequenza. Questo intervallo genera un ordine cronologico dei valori registrati e indicizza le realizzazioni della variabile attribuendo significato ad ogni valore in relazione ai valori precedenti e successivi.

Formalmente la serie storica è definita come una successione di valori $\{x_1, \dots, x_T\}$ dove l'indice indica il tempo a cui fa riferimento; ogni osservazione viene ipotizzata essere la realizzazione della variabile aleatoria X al tempo T . La serie storica perciò può essere intesa come la realizzazione di un processo stocastico.

Un esempio di serie storica finanziaria è riportato nella fig. 1, che rappresenta i prezzi di uno strumento finanziario, nell'esempio sottostante viene mostrato la serie dei prezzi dell'impresa The Coca Cola Company (sigla della serie KO) per il periodo temporale compreso tra il giorno 01/01/2000 ed il giorno 30/06/2020.

Figura 1: Prezzi aggiustati di chiusura del titolo The Coca Cola Company.



Lo scopo dello studio delle serie storiche finanziarie è quello di individuare il processo generatore di dati, per individuare i caratteri di prevedibilità dei cambiamenti di prezzo attraverso lo studio delle informazioni passate contenute nella serie storica. In altre parole i dati raccolti vengono utilizzati per costruire un modello che sia in grado di replicare i patterns che sono individuati nella serie storica.

LA STAZIONARIETÀ

La figura 1 mette in evidenza come non sia presente la caratteristica di stazionarietà nella serie dei prezzi, tale caratteristica è molto importante nello studio della serie per l'individuazione di modelli che descrivano le fluttuazioni dei prezzi. Formalmente la condizione di stazionarietà "richiede che la distribuzione di un processo aleatorio sia invariante rispetto a traslazioni avanti e indietro nel tempo"¹, questa condizione è essenziale al fine di individuare un modello di previsione che descriva il meccanismo di funzionamento del mercato, ovvero le dinamiche di fluttuazione dei prezzi, poiché tale proprietà indica che le caratteristiche del processo generatore restano invariate nel tempo. L'ipotesi di stazionarietà afferma quindi che vi deve essere una certa costanza di alcune proprietà statistiche nelle serie dei rendimenti o dei prezzi.

La stazionarietà non è l'unica condizione da cui dipende la possibilità di fare inferenza sul processo stocastico a partire dalla serie storica. Altre proprietà importanti sono l'invertibilità e l'ergodicità del processo stocastico. Rispettivamente la prima indica la proprietà tale per cui il processo stocastico può essere espresso in funzione dei suoi valori passati e di un processo White Noise, mentre la seconda è "la proprietà di poter utilizzare singole sequenze di un processo stocastico stazionario per poter stimare in maniera affidabile i momenti della distribuzione sottostante"².

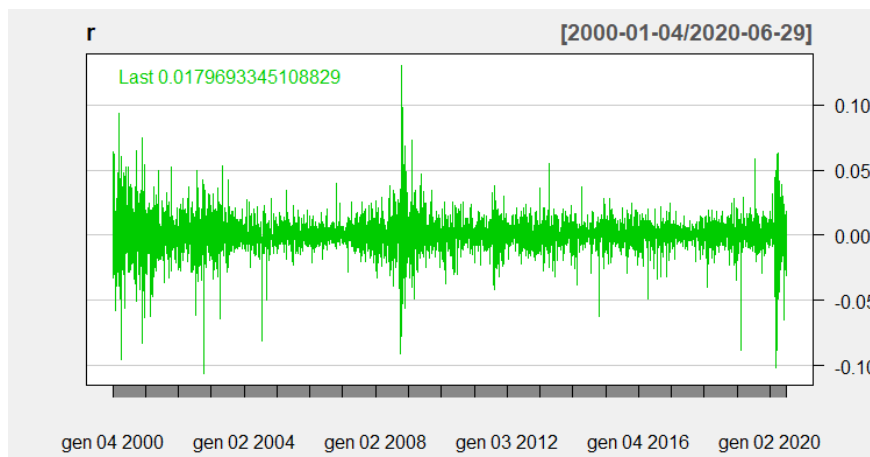
Nell'analisi delle serie storiche finanziarie dei prezzi la proprietà di stazionarietà non è presente, per questo si passa alla serie storica dei rendimenti calcolata come la differenza tra il prezzo all'istante (t) e quello all'istante ($t-\tau$), divisi per quest'ultimo. Questa serie storica presenta il carattere di stazionarietà in media come si vede dalla figura 2.

$$R_t = \frac{P(t) - P(t - \tau)}{P(t - \tau)} \quad 1.1$$

¹ http://www.treccani.it/enciclopedia/stazionarieta-statistica_%28Dizionario-di-Economia-e-Finanza%29/

² Gallo G., Pacini B. (2002), Metodi quantitativi per i mercati finanziari, Carocci Editore.

Figura 2: Rendimento giornaliero della serie KO



Statisticamente la stazionarietà in senso debole è presente se valgono le seguenti condizioni:

- $E(x_t) = \mu$ non dipende dal tempo t
- $Var(x_t) = \sigma^2$ non dipende dal tempo t
- $Cov(x_t, x_{t-s}) = \gamma(s)$ dipende dalla distanza tra x_t e x_{t-s} , ma non dal tempo t .

Per verificare se la serie dei rendimenti è stazionaria si esegue il test Augmented Dickey-Fuller che permette di testare l'ipotesi nulla di presenza di radici unitarie ovvero di non stazionarietà in media contro l'ipotesi alternativa di stazionarietà.

IL PROCESSO GENERATORE DEI DATI

La serie storica dei rendimenti delle azioni soddisfa solitamente la proprietà di stazionarietà utile e necessaria allo studio del processo generatore dei dati perché permette di individuare il collegamento che vi è fra le variabili del processo.

Il prezzo al tempo t può essere rappresentato in funzione del prezzo al tempo precedente e del tasso di rendimento dell'attività ovvero:

$$P_t = P_{t-1}(1 + r) \quad 1.2$$

che equivale alla formulazione in logaritmo:

$$\ln(P_t) = \ln(P_{t-1}) + \ln(1 + r) \quad 1.3$$

La teoria dell'efficienza dei mercati afferma che il prezzo al tempo T dipende dal prezzo al tempo $T-1$ e di un'innovazione, questa innovazione è ε_t .

La proprietà di I.I.D. indicano quindi che il prezzo al tempo t segue la dinamica:

$$P_t = P_{t-1} + \varepsilon_t \quad 1.4$$

Dove:

$$E(P_t | I_{t-1}) = P_{t-1}, \text{ poiché il valore di } \varepsilon_t \text{ è pari a } 0.$$

$$\text{Var}(P_t | I_{t-1}) = \sigma^2.$$

Il prezzo al tempo τ può essere espresso in funzione del prezzo al tempo $\tau-2$ ricordando che:

$$P_{t-1} = P_{t-2} + \varepsilon_{t-1}, \quad 1.5$$

sostituendo l'espressione 1.5 all'espressione 1.4 si ottiene:

$$P_t = P_{t-2} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} \quad 1.6$$

Procedendo in maniera simile si ottiene la formulazione alternativa di un processo random walk (passeggiata aleatoria):

$$P_t = P_0 + \sum_{\tau=0}^{t-1} \varepsilon_{t-\tau} \quad 1.7$$

Dove:

$$E(P_t | I_{t-1}) = P_0$$

$$\text{Var}(P_t | I_{t-1}) = t * \sigma^2$$

Questo indica che il processo non è stazionario perché il secondo momento dipende dal valore del tempo, questo è visibile nel grafico 1 che mostra la serie dei prezzi come non stazionaria.

Questa formulazione è uguale alla formula (1.3).

LA DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ

La distribuzione normale è associata alla distribuzione dei rendimenti per la sua facile applicazione, studi empirici hanno dimostrato che le serie reali hanno caratteristiche diverse dalle assunzione della normale, un metodo che permette una facile comparazione tra distribuzioni è la rappresentazione grafica attraverso l'istogramma oppure mediante il grafico quantile-quantile.

La forma tipica della funzione di densità empirica dei rendimenti evidenzia una maggiore frequenza di valori negativi, tale comportamento si ritrova nel grafico quantile-quantile nell'esempio riportato in fig. 4 dove i punti campionari del grafico si allontanano dalla bisettrice del primo/terzo quadrante. Questa allontanamento dalla distribuzione normale è studiata attraverso le statistiche di base della serie, queste informazioni sono utili al fine di individuare il corretto processo generatore dei dati.

Figura 3: Funzione di densità dei rendimenti giornalieri dell'azione KO.

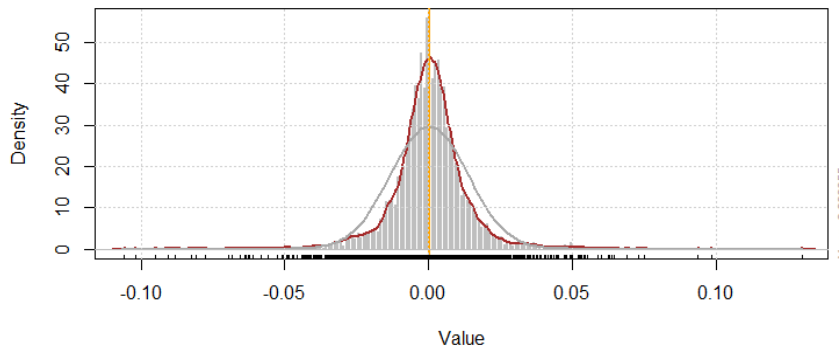


Figura 4: Q-Qnorm serie dei rendimenti giornalieri KO

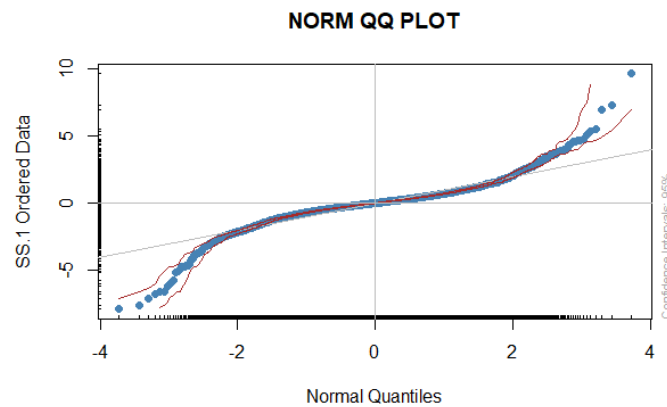


Tabella 1: Statistiche di base della serie dei rendimenti dell'azione KO.

R	
Nobs	5153.0000
NAs	0.000000
Minimum	-0.106038
Maximum	0.129971
1. Quartile	-0.005535
3. Quartile	0.006346
Mean	0.000255

Median	0.000430
Variance	0.000181
Stdev	0.013442
Skewness	-0.176350
Kurtosis	9.299415

Alcuni indicatori utili al fine di riconoscere la forma della distribuzione di probabilità sono la simmetria e la curtosi. La simmetria è misurata come rapporto tra momento terzo e radice terza della deviazione standard e nella distribuzione normale è pari a zero, infatti la distribuzione gaussiana è simmetrica rispetto all'origine. La curtosi invece è misurata come rapporto tra momento quarto e radice quarta della deviazione standard che è pari a tre nella distribuzione normale, un valore maggiore, come nel caso dei rendimenti utilizzati, indica delle code più spesse e una distribuzione leptocurtica.

$$skew = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{(R_i - \bar{R})}{\sigma} \right]^3 \quad 1.8$$

$$kurt = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{(R_i - \bar{R})}{\sigma} \right]^4 \quad 1.9$$

In letteratura esistono diversi test che verificano se la distribuzione è normale, nel nostro caso è stato utilizzato il test di Jarque Bera che ha come ipotesi nulla la distribuzione normale. Il test, nel caso in cui si rifiuti l'ipotesi nulla, afferma che non siamo in presenza di una distribuzione normale, l'ipotesi alternativa però non specifica quale sia la distribuzione più verosimile dei rendimenti.

JARQUE BERA TEST

data: r

X-squared = 18614, df = 2, p-value < 2.2e-16

Il test di Jarque Bera eseguito sui dati giornalieri dell'impresa The Coca Cola company rifiuta l'ipotesi nulla di normalità. Uno studio condotto nel 1984 da Stanley J. Kon dimostra che le differenze di curtosi e simmetria presenti nei valori empirici rispetto alla distribuzione gaussiana sono creati da degli spostamenti dal valore medio e dal valore di volatilità, nello studio empirico si è visto che analizzando i rendimenti giornalieri di tre indici, lo Standard & Poor's Composito, the CRSP value-weighted, e il CRSP equal-weighted,

si rifiuta l'ipotesi di normalità. È stato dimostrato che la scala temporale incide sulla stima della distribuzione: "con l'aumento della scala temporale Δt nella serie calcolata dei rendimenti, la loro distribuzione sembra sempre più simile alla distribuzione normale"³ questo fatto empirico viene definito aggregazione gaussiana.

³ Cont R., (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 1, 223–236

STYLIZED FACT

Le variazioni dei prezzi e dei rendimenti vengono analizzate statisticamente per cercare di specificare dei modelli che riescano ad individuare con anticipo le fluttuazioni e i trend di mercato. La teoria dell'efficienza dei mercati afferma che quest'ultimo è considerato efficiente se il prezzo di uno strumento incorpora immediatamente le nuove informazioni che si rendono disponibili. L'innovazione, ovvero la nuova informazione recepita dal mercato, genera una fluttuazione del prezzo perché influisce nella scelta di acquisto o vendita degli investitori.

La teoria considera tre diverse forme di efficienza a seconda del grado di informazione che contiene il prezzo dello strumento:

- Efficienza debole: vengono incluse solo le informazioni passate
- Efficienza semi-forte: vengono incluse informazioni passate e ogni altra informazione disponibile pubblicamente
- Efficienza forte: racchiude anche informazioni riservate

Gli studi statistici su grandi set di dati provenienti dai mercati hanno permesso di individuare alcuni patterns ricorrenti che sono utili al fine di implementare il modello di previsione delle serie storiche.

Con il termine *stylized facts* si indica " A set of properties contained across many instrument, markets and time periods, has been observed by independent studies and classified as stylized facts."⁴ Queste connotazioni empiriche sono di origine qualitativa, infatti esse non vengono studiate quantitativamente nel processo generatore dei dati, ma vengono osservate in diverse categorie di strumenti come osservazioni empiriche con un metodo non parametrico.

ASSENZA DI AUTOCORRELAZIONE LINEARE

Le serie economiche e/o finanziarie vengono utilizzate per cercare dei patterns ricorrenti che possono essere utilizzati per prevedere le fluttuazioni dei prezzi. La serie dei rendimenti mostra il carattere di indipendenza visibile nella figura dell'autocorrelazione globale e parziale. L'indipendenza lineare indica che il cambiamento del prezzo al tempo T è indipendente dalle sequenze dei cambiamenti precedenti. Questa definizione implica che non è possibile usare la conoscenza del passato per prevedere il comportamento della serie.

⁴ Cont R., (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. Quantitative Finance, 1, 223–236-

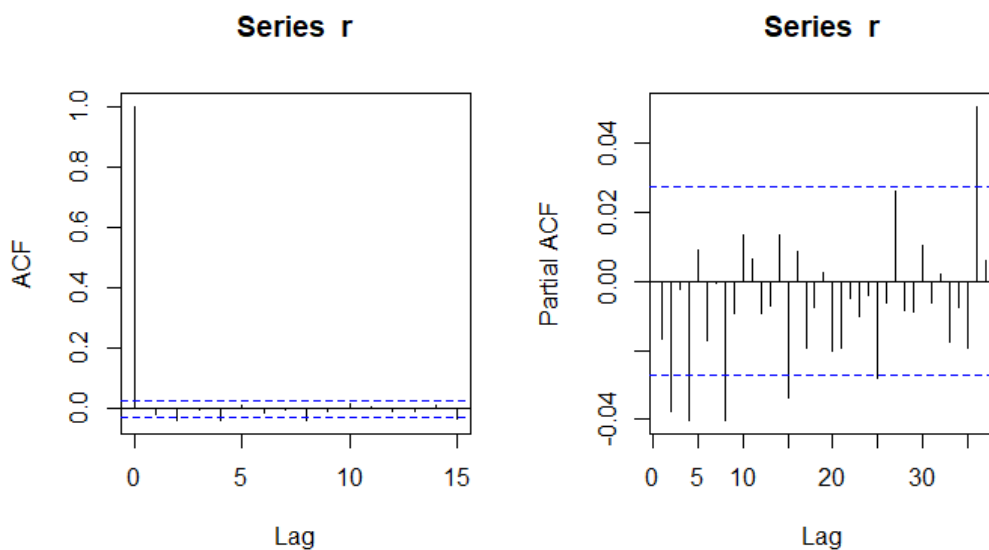
La serie dei prezzi è influenzata dalle informazioni e notizie derivanti dall'economia e dalla politica, queste generano un *rumore* che porta ad un cambiamento del valore intrinseco dello strumento finanziario. L'aggiustamento del prezzo successivo alle nuove informazioni non è immediato e spesso consiste in un sovrapprezzo seguito da un aggiustamento al ribasso.

La funzione di autocorrelazione dei rendimenti è la seguente:

$$C(\tau) = \text{corr}(r(t, \Delta t), r(t + \tau, \Delta t)) \quad 1.10$$

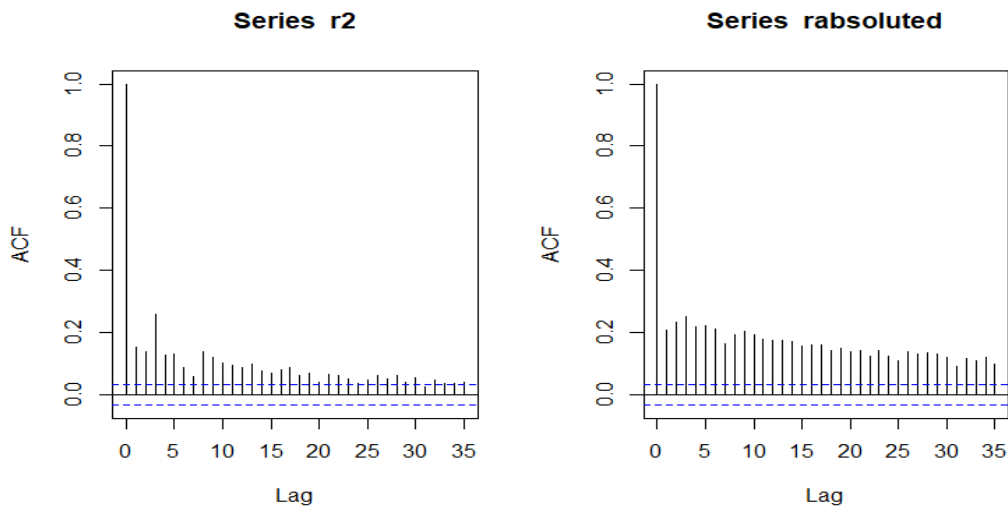
I dati empirici mostrano che la funzione di autocorrelazione decade a 0 molto velocemente e questo supporta l'ipotesi dell'efficienza dei mercati poiché il tempo di reazione del mercato alle nuove informazioni è rapido e quindi non si possono attuare strategie che traggono informazioni dalla correlazione. In fig.5 le funzioni di autocorrelazione e autocorrelazione parziale evidenziano come il decadimento sia molto veloce e le funzioni raggiungono valori prossimi allo zero dopo pochi lags a prova dell'assenza di correlazione lineare.

Figura 5: Autocorrelazione parziale e globale della serie dei rendimenti di KO



L'assenza di autocorrelazione ai rendimenti semplici non è mantenuta nell'utilizzo dei rendimenti al quadrato e assoluti, usati come proxy di volatilità, questo meccanismo di collegamento temporale tra volatilità in diversi istanti è mostrato dai grafici seguenti sull'ACF per la serie dei rendimenti giornalieri al quadrato e assoluti della serie KO.

Figura 6: Autocorrelazione globale rendimenti elaborati KO



La presenza di questa legge di decadimento lento nella serie dei rendimenti al quadrato e assoluti implica che vi sia una dipendenza di lungo periodo nella volatilità. La definizione formale indica che un processo stazionario Y_t (con una varianza finita) è detto con una dipendenza di lungo range se la sua funzione di autocorrelazione $C(\tau) = corr(Y_t, Y_{t+\tau}) \sim \frac{L(\tau)}{\tau^{1-2d}}$, con $0 < d > 1/2$ e dove L è una variabile che tende lentamente ad infinito, i.e. verificata $\forall a > 0, \frac{L(at)}{L(t)} \rightarrow 1$ come $t \rightarrow \infty$.

I rendimenti non sono indipendenti come dimostra la presenza di volatility clustering, ma la loro dipendenza non è lineare come mostra il grafico dell'autocorrelazione.

HEAVY TAILS

Negli studi degli anni '70 Mandelbrot evidenziò che la distribuzione normale non era adeguata per descrivere la distribuzione dei rendimenti poiché lo spessore delle code della distribuzione di tali serie era maggiore rispetto a quello della gaussiana. Questo si può rilevare calcolando l'indice di curtosi, presente nella tabella delle statistiche di base. Tale elaborazione è stata eseguita ed esplicitata nella tabella 2 dove sono mostrati i valori di curtosi di diversi strumenti finanziari. In tutti i casi il valore è positivo e quindi siamo in presenza di code più spesse e di una distribuzione leptocurtica.

Tabella 2: Valori di curtosi

Rendimenti S&P500	Kurtosis	13.052180
Rendimenti EURO/DOLLARO	Kurtosis	97.345481
Rendimenti Apple Inc	Kurtosis	7.369324

Una corretta individuazione della funzione di densità è necessaria per svolgere le operazioni di valutazione del rischio e dei suoi derivati, gli eventi che si trovano alle estremità della distribuzione infatti sono le realizzazioni di eventi estremi rispetto alla media degli eventi che descrivono il picco della funzione. La letteratura ha dimostrato che le code non sono solo più spesse rispetto al valore della normale ma presentano un'asimmetria negativa. L'asimmetria sinistra nelle code della distribuzione indica la presenza di un maggior numero di eventi estremi con rendimenti negativi. Come mostrato da Peirò nel 2003 per alcuni dei maggiori indici "il numero dei rendimenti negativi è più alto del numero dei rendimenti positivi". Le evidenze empiriche indicano che la distribuzione normale non è una buona approssimazione della funzione di densità (ignota) dei rendimenti poiché non sono sufficienti i primi due momenti per descrivere correttamente la funzione. Per creare un'approssimazione è necessario non solo conoscere il valore atteso e il valore di dispersione, ma anche definire un parametro per misurare l'asimmetria e lo spessore delle code della distribuzione, ad esempio l'indice di Tail ci indica lo spessore delle code, come affermato da Cont nel 2001 "The higher the tail index k , the thinner the tail"⁵ per questo motivo in una distribuzione gaussiana il valore di $k = +\infty$, mentre nelle altre distribuzioni $k = \alpha$, dove α indica l'esponente della legge della potenza di distribuzione.

La presenza di una distribuzione con le cosiddette *fat tails* presuppone un alto grado di variabilità, nelle serie storiche dei prezzi si possono osservare degli eventi estremi, la loro grandezza può essere utilizzata per conoscere il rendimento dei prodotti perché questi eventi creano una frazione importante degli scostamenti.

ASIMMETRIA

Nel corso del secolo scorso molti studi hanno approfondito e testato la distribuzione di densità dei rendimenti, molti di essi dimostrano la presenza di un'asimmetria nella distribuzione. Nel 1999 Harvey e Siddique affermano che " Skewness, asymmetry in distribution, is found in many important economic variables such as stock index returns and exchange rate changes"⁶. Anche in questo fattore viene svolta un'analisi di alcuni strumenti finanziari per mostrare empiricamente la presenza di asimmetria.

⁵ Cont R., (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. Quantitative Finance, 1, 223–236.

⁶ Campbell R. Harvey and Akhtar Siddique, (1999), Autoregressive Conditional Skewness, The Journal of Financial and Quantitative Analysis Vol. 34, No. 4 (Dec., 1999), pp. 465-487

Tabella 3: Indice di asimmetria

Rendimenti S&P500	Skewness	-0.541716
Rendimenti EURO/DOLLARO	Skewness	0.649668
Rendimenti APPLE Inc.	Skewness	-0.459485

La presenza di valori di simmetria diversi da 0 porta al rifiuto dell'ipotesi di normalità della distribuzione, infatti la definizione di simmetria è la seguente "If the distribution of returns is symmetric, then the median must necessarily be the axis of symmetry and coincide with the mean, if it exists."⁷ Un metodo per vedere se la distribuzione è simmetrica come scrive Peiró può essere il confronto tra la distribuzione dei rendimenti negativi assunti in valore assoluto e i rendimenti positivi anch'essi in valore assoluto:

$$R_t^- : \{R_t - \bar{R} | R_t < \bar{R}\} \text{ e } R_t^+ : \{R_t - \bar{R} | R_t > \bar{R}\} \quad 1.11$$

Il rifiuto dell'ipotesi di normalità perché il valore della simmetria non è zero empiricamente mostra che la coda del primo lato sia maggiore rispetto alla coda del secondo lato, nella tabella 3 si mostra che in 2 casi su 3 si ha un valore di simmetria negativo e ciò comporta un numero assoluto di valori di rendimento negativo maggiore del numero assoluto dei valori di rendimento positivo.

In letteratura i test che vengono usati per descrivere la distribuzione di densità di una funzione, come ad esempio lo Jarque-Bera Test o lo Shapiro-Wilks Test, hanno come ipotesi alternativa l'assenza di una distribuzione normale, ciò comporta che non viene data alcuna informazione sulla funzione di densità che meglio descrive la serie storica.

LEVERAGE EFFECTS

L'effetto leva viene anche detto asimmetria della volatilità, questo perché è stato dimostrato che "most measures of volatility of an asset are negatively correlated with the returns of that asset."⁸, questo significa che le fluttuazione dei prezzi che portano a rendimenti negativi generano delle fluttuazioni maggiori nella misura di volatilità, rispetto ai cambiamenti del fattore di dispersione generato da rendimenti positivi di egual entità, questo fenomeno evidenzia una correlazione tra prezzi e volatilità.

⁷ Peiró Amado, Asymmetries and tails in stock index returns: are their distributions really asymmetric? Quantitative Finance, 01 February 2004, Vol.4(1), pp.37-44

⁸ Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues, Rama Cont, 2000, Quantitative finance volume I (2001) pg 223-236

Un'interpretazione dell'effetto leva proposta da Black, il primo a studiare questo fatto empirico, è legata all'aumento di rischio di una società conseguente ad una discesa dei prezzi dei propri strumenti, di conseguenza si genera una maggiore volatilità del titolo. Un'altra interpretazione del fenomeno afferma che l'aumento di volatilità del titolo genera incertezza e quindi può comportare una caduta dei prezzi.

L'effetto leva è stato studiato nel 2000 da Bouchaud, Matacz and Potters, i risultati empirici del loro studio hanno evidenziato una correlazione tra la volatilità futura e i prezzi passati e hanno notato che la correlazione era più forte nel caso degli indici rispetto al caso dei singoli titoli. Lo studio empirico ha dato come conclusione che nel caso di azioni singole si ha la presenza di un effetto ritardo dove il prezzo di riferimento usato, per descrivere l'aggiornamento dei prezzi, è una media mobile degli ultimi mesi, mentre nel caso di indici si assiste ad un fenomeno di panico nel mercato di riferimento che produce il cosiddetto effetto leva.

EFFETTI DI STAGIONALITÀ

Gli effetti stagionali “are cyclical anomalies in returns, where the cycle is based on the calendar”⁹ questi effetti devono essere individuati e studiati per poter creare un modello che riesca a replicare i movimenti dei prezzi. I test statistici che vengono effettuati nelle serie storiche per definire i modelli e le caratteristiche delle serie possono dare risultati distorti nel caso siano presenti effetti di stagionalità non riscontrati ed eliminati correttamente.

INTRADAY EFFECTS

Questo effetto è stato messo in luce da Harris nel 1986; nella sua ricerca dimostra che “The mean Monday close-to-close return of the equal-weighted NYSE portfolio is negative, in contrast to the other mean weekday returns, which are positive”¹⁰, un'ulteriore analisi mostra che i primi 45 minuti della giornata sono differenti in base al giorno della settimana, il lunedì i prezzi tendono a scendere mentre dal martedì al venerdì i prezzi crescono.

⁹ Sewell Martin, (2011), Characterization of Financial Time Series, Research Note RN/11/01 UCL
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

¹⁰Harris L., (1986), A TRANSACTION DATA STUDY OF WEEKLY AND INTRADAILY PATTERNS IN STOCK RETURNS, Journal of Financial Economics 16 (1986) 99-117. North-Holland

All'interno della giornata vi sono altri pattern ricorrenti, ad esempio al termine della giornata i prezzi tendono a crescere con un modello chiamato fenomeno di fine giornata, ed inoltre "These patterns appear to include a rise in prices between 12:30 and 1:30 and a fall between 2:30 and 3:15."¹¹

HOLIDAY EFFECT

Questo fenomeno consiste nell'aver in media dei ricavi più alti nei giorni immediatamente precedenti alle vacanze. Diversi studi hanno analizzato l'effetto nei più grandi mercati, come quello americano, giapponese ed inglese; in ognuno di essi si è visto confermare la presenza di questo effetto vacanze. Gli studi successivi al 1987 hanno messo in luce come l'effetto vacanze era più forte negli anni precedenti al 1987 mentre si è attenuato per il periodo successivo (Keff and Roush 2005).

INTRAMONTH EFFECT

Questo fenomeno visto nelle serie storiche mostra che si hanno ricavi positivi nelle prime due settimane del mese e nei giorni che segnano il cambio del mese, come dimostrato nello studio di Ariel del 1987 dove si conferma che i ricavi della seconda metà del mese sono inferiori.

WEEKEND EFFECT

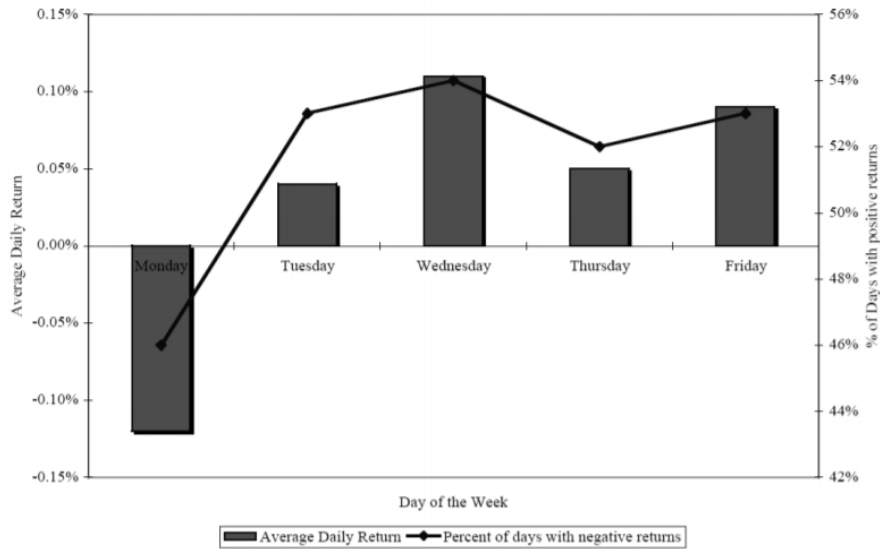
Questo effetto "refers to the tendency of stocks to exhibit relatively large returns on Fridays compared to those on Mondays."¹². È stato documentato da diversi autori che il lunedì è il giorno in cui vi è un minore rendimento rispetto ai restanti giorni della settimana in diversi stati, inoltre nel 1990 Lakonishok and Maberly indicano il lunedì come il giorno con il più basso volume di transazioni. Una teoria che spiega la genesi di questo effetto sono le notizie negative che vengono comunicate al mercato dopo la chiusura della borsa il venerdì sera provocando un ribasso il lunedì successivo, questo fenomeno infatti è anche chiamato Monday Effect.

¹¹ Harris L., (1986), A TRANSACTION DATA STUDY OF WEEKLY AND INTRADAILY PATTERNS IN STOCK RETURNS, Journal of Financial Economics 16 (1986) 99-117. North-Holland

¹² Sewell Martin, (2011), Characterization of Financial Time Series, Research Note RN/11/01 UCL DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

L'effetto weekend può essere sintetizzato dal grafico utilizzato da Sewell nell'articolo Characterization of financial time series.

Figura 7: Rappresentazione dell'effetto lunedì. Fonte: Sewell (2011)



EFFETTO GENNAIO

Questo anomalia è una delle più importanti perché indica che solitamente il rendimento delle azioni è più alto nel mese di gennaio rispetto agli altri mesi, come si vede dalla figura 8.

Figura 8: Effetto gennaio. Fonte: Sewell (2011)



L'effetto gennaio è molto più marcato nei titoli con bassa capitalizzazione, come scrive Sewell nel suo paper che confronta i diversi studi sul fenomeno. L'effetto gennaio può avere una duplice spiegazione; gli investitori professionisti al termine dell'anno cercano di vendere i titoli che hanno avuto maggiori perdite per modificare il proprio portafogli per i successivi report annuali, inoltre l'effetto gennaio può essere causato dall'azione di tutti gli investitori per ottenere vantaggi fiscali dati dalla vendita dei titoli in perdita, questo fenomeno dopo il Tax Reform Act del 1986 non dovrebbe aver più luogo, ma come dimostrato l'effetto gennaio continua ad esserci e può essere imputato al window dressing o a comportamenti anomali di piccoli investitori.

L'effetto gennaio viene testato da Haug e Hirschey (2006) utilizzando i fattori proposti da Fama and French(1993): SMB (small minus big) che confronta i rendimenti ottenuti dalle aziende a bassa capitalizzazione con quelli ottenuti dalle aziende ad alta capitalizzazione, HML (high minus low) ovvero un confronto tra aziende con un indice basso del quoziente book to market e quelle con un indice più alto ed il fattore momentum. Essi hanno trovato " the strong January returns to be consistently positively related to the SMB and HML factors and negatively related to momentum (UDM)".¹³ Si può affermare quindi che l'effetto gennaio oltre ad essere presente nelle aziende a minor capitalizzazione è maggiore in quelle che hanno avuto prestazioni peggiori nel corso dell'anno.

¹³ Haug, Mark, Hirschey, Mark, (2006), The January Effect, Financial Analysts Journal; Sep/Oct 2006; 62, 5; Accounting, Tax & Banking Collection pg. 78

LA VOLATILITÀ

Nel capitolo precedente sono stati enunciati una serie di stylized facts che riguardavano la distribuzione dei rendimenti, esistono delle ulteriori evidenze empiriche sull'indice di dispersione.

La volatilità è lo strumento statistico più usato per descrivere il rischio di uno strumento finanziario. Essa è una misura di dispersione, il suo valore indica la grandezza dello scostamento del prezzo dal valore medio del periodo. La media dei rendimenti di un determinato periodo di tempo è considerata il valore centrale della distribuzione da cui viene calcolato il valore di volatilità, quest'ultimo descrive le oscillazioni, positive o negative, che ci sono nell'intorno del valore centrale.

La conoscenza di questo valore è utile in diversi aspetti legati all'investimento, ad esempio: per il pricing dei derivati, nell'applicazione delle tecniche di risk management o per scegliere una strategia d'investimento vincente. La volatilità viene usata come misura di rischio; perché indica la grandezza delle possibili oscillazioni che subisce il prezzo, e di conseguenza il rendimento, di uno strumento finanziario. Le oscillazioni rappresentano degli scostamenti dal rendimento medio che possono comportare delle perdite o dei guadagni elevati, infatti uno strumento è considerato rischioso in base al suo valore di volatilità poiché un valore di volatilità alto indica che le oscillazioni del prezzo o del rendimento dello strumento finanziario sono considerevoli rispetto alla media del periodo e possono portare a divergenze, positive o negative, rilevanti.

Esistono due diverse tipologie di calcolo della volatilità:

- **volatilità storica:** essa riguarda il calcolo della volatilità grazie alle realizzazioni passate della serie storica.
- **volatilità implicita:** un valore più difficile da calcolare che evidenzia la visione che gli investitori hanno del mercato. Solitamente questo valore viene utilizzato per il pricing delle opzioni.

Lo strumento per calcolare la volatilità storica è la deviazione standard

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad 2.1$$

Lo scarto quadratico è un indice di dispersione rispetto ad un valore medio, nella formula (2.1) viene dato a ciascun valore lo stesso peso, ma nel contesto finanziario solitamente si preferisce assegnare pesi diversi mediante il metodo del lisciamiento esponenziale, in altre parole viene tenuto in considerazione maggiore i dati più recenti.

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i - \bar{x})^2 \quad 2.2$$

La sommatoria dei valori di α_i è pari a uno, ma si rispetta la seguente disuguaglianza $\alpha_{10} < \alpha_9 < \alpha_8$, per dare più peso ai rendimenti più recenti. Questa media pesata viene utilizzata per rispettare la teoria

dell'efficienza del mercato poiché le informazioni più recenti hanno un peso maggiore nella formazione del prezzo perché racchiudono la visione più prossima dei cambiamenti che si aspettano in un determinato strumento.

Nel grafico 9 è mostrato il valore della volatilità storica della serie finanziaria "The Coca Cola Company" calcolata grazie alla funzione di R: volatility.

Per calcolare il valore di volatilità storica nel grafico è stato usato il metodo Close-to-Close ovvero:

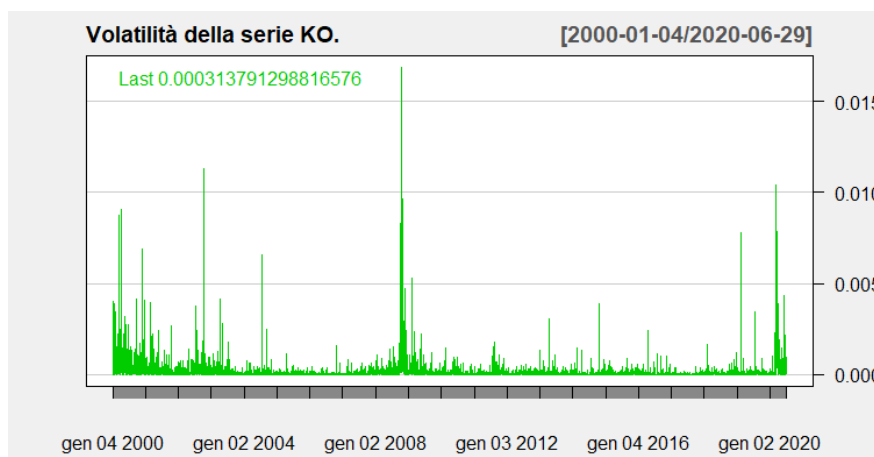
$$\sigma = \sqrt{\frac{Z}{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \bar{x})^2} \quad 2.3$$

Dove:

n: è il numero di giorni storici usati per la stima della volatilità

Z: è il numero di giorni di contrattazione in un anno.¹⁴

Figura 9: Varianza serie dei rendimenti di KO

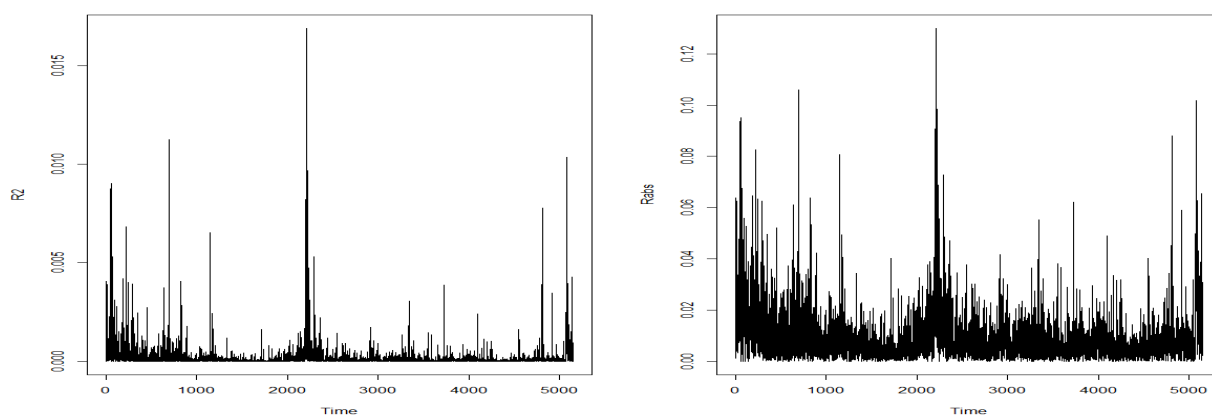


Dalla figura 9 è possibile notare uno dei più importanti fatti stilizzati: la presenza di cluster di volatilità definita come persistenza della volatilità, vi sono infatti, periodi in cui il valore dell'indice di dispersione rimane alto per un determinato numero di giorni, seguiti da periodi in cui l'indice mantiene per un determinato periodo dei valori più bassi, questa alternanza genera i cluster.

Nella realtà alcune proxy utilizzate per la rappresentazione e il calcolo della volatilità storica sono i rendimenti al quadrato o i rendimenti assoluti, nei grafici seguenti viene mostrata la loro rappresentazione. Come si può notare questi grafici mostrano il fenomeno della persistenza della volatilità come mostrato nel calcolo della volatilità stessa.

¹⁴ <https://web.archive.org/web/20100421083157/http://www.sitmo.com/eq/172>

Figura 10: Rendimenti al quadrato e assoluti di KO



Il secondo metodo di calcolo dell'indice di dispersione è la stima della volatilità implicita, essa viene calcolata attraverso gli indici di volatilità, questi indicatori hanno lo scopo di misurare la volatilità percepita nel mercato a breve termine per cercare di prevedere gli andamenti futuri del prezzo, essi si basano sui "prezzi di mercato di opzioni out of the money, emesse su un indice azionario che sintetizza l'andamento di un particolare mercato."¹⁵

Gli indici di mercato sono definiti come un "indicatore che rappresenta sinteticamente le variazioni di valore di un portafoglio di strumenti finanziari o di altre attività."¹⁶ L'indice solitamente è calcolato come la media dei valori di un determinato insieme di attività, ad esempio l'indice DAX30 e l'indice S&P500 rappresentano l'andamento del mercato tedesco e americano poiché sono composti da una media pesata dei valori dei titoli delle aziende maggiori del mercato di riferimento.

Dai valori dell'indice di mercato S&P500 si calcola il più famoso indice di volatilità, il VIX, anche chiamato indice della paura, che misura le stime sulla volatilità futura a 30 giorni del mercato americano basandosi sul prezzo delle opzioni dell'indice Standard & Poor's 500.

Ad oggi molti altri stati hanno generato, con metodi di calcoli diversi, il proprio indice di volatilità del mercato di riferimento. Alcuni esempi sono: VDAX che riguarda il mercato tedesco, il VFTSE sul mercato inglese, AVIX sul mercato australiano, FTSE MIB IMPLIED VOLATILITY sul mercato italiano ecc.

L'utilizzo di un indice di volatilità implicita calcolato sulle aziende dello stato in cui si vuole operare può essere considerato una miglior proxy del sentimento del mercato di riferimento.

Ogni indice di volatilità misura i cambiamenti, positivi o negativi, che può avere il mercato perché indica una misura di varianza, in altre parole una misura di dispersione intorno al valor medio. Un valore basso

¹⁵ INDICI DI VOLATILITÀ, M. Nardon – P. Pianca, *Dipartimento di Economia, Centro di Economia Quantitativa Università Ca' Foscari Venezia*

¹⁶ <https://www.borsaitaliana.it/borsa/glossario/indici.html>

dell'indice indica una situazione statica, mentre all'aumentare del suo valore si prevede un cambiamento della quotazione del mercato. Nella stima dell'indice non è possibile cogliere segnali puntuali sul segno delle variazioni future quindi non vi sono indicazioni sul trend del prezzo del mercato di riferimento anche se "sui mercati si osserva che l'aumento di volatilità a seguito di variazioni negative delle quotazioni è maggiore rispetto al caso di una variazione di prezzo positiva"¹⁷.

L'indice VIX viene calcolato dal CBOE; fino a settembre 2003 l'indice era calcolato grazie alla formula di Black and Scholes per estrapolare il valore della volatilità implicita, dal settembre 2003 esso viene definito come la media pesata dei prezzi delle opzioni out of money sull'indice S&P 500."

La formula dell'indice è inserita nel sito di CBOE:

$$\sigma^2 = \frac{2}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{RT} Q(K_i) - \frac{1}{T} \left[\frac{F}{K_0} - 1 \right]^2 \quad 2.4$$

Dove:

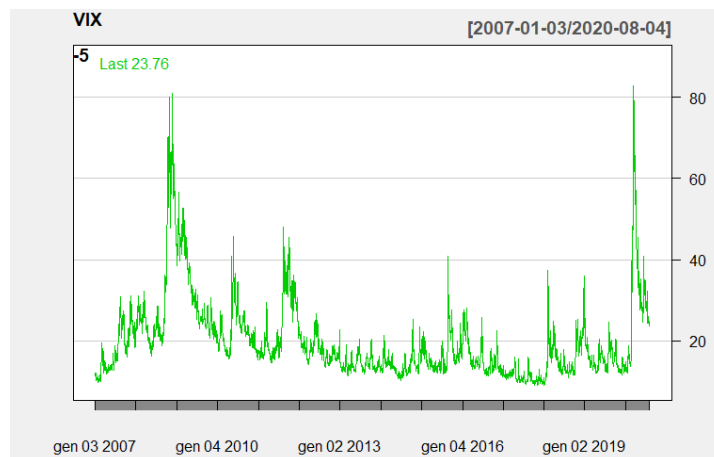
- $VIX = \sigma * 100$
- T = tempo alla scadenza
- F = il valore del forward sull'indice S&P's 500 derivato dal prezzo delle opzioni
- K_0 = il primo strike sotto l'indice forward F
- K_i = il prezzo strike dell' i-esima opzione out of money, una call se $K_i > K_0$, una put se $K_i < K_0$, entrambe se $K_i = K_0$
- ΔK_i = la differenza tra i due prezzi strike presenti ad ogni lato di k_i divisa per 2.

$$\Delta K_i = \frac{K_{i+1} - K_{i-1}}{2}$$

- R tasso risk free con scadenza in T
- $Q(K_i)$ = il punto mediano allo spread bid-ask di ogni opzione con strike K_i

¹⁷ INDICI DI VOLATILITÀ, M. Nardon – P. Pianca, *Dipartimento di Economia, Centro di Economia Quantitativa Università Ca' Foscari Venezia*

Figura 11: Rappresentazione dell'indice VIX



L'indice VIX viene considerato da molti la miglior proxy della volatilità implicita perché si basa sullo Standard & Poor's 500 che è una buona rappresentazione del mercato americano, in particolare la media pesata delle 500 aziende a maggior capitalizzazione del mercato americano che possono rappresentare una descrizione del mercato globale e per questo i segnali ricavati dal VIX sono utilizzati come stima del possibile cambiamento di volatilità dei mercati.

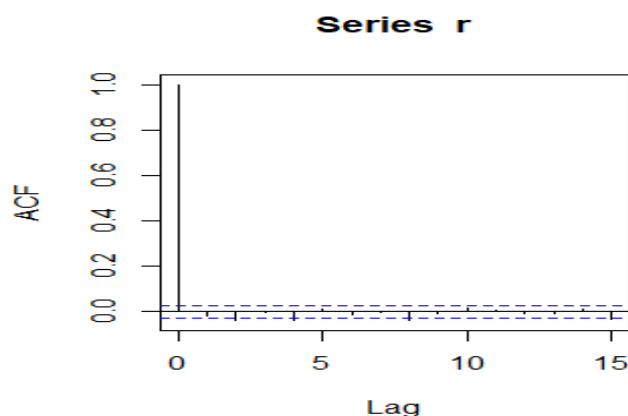
LE CARATTERISTICHE DELLA VOLATILITÀ

La misura di dispersione rispetto al rendimento medio è la base per la conoscenza del rischio di uno strumento finanziario, come nel primo capitolo sono stati mostrati alcuni fatti empirici riguardanti i rendimenti e la loro distribuzione, nel presente capitolo verranno analizzati i fatti riguardanti la volatilità. Un modello di volatilità ha come scopo quello di riuscire a cogliere i fenomeni che avvengono nella variazione dei rendimenti nella serie storica per essere in grado di identificare e stimare un modello adatto ad interpretare un processo e che riesca a prevedere gli andamenti futuri della volatilità.

LA VOLATILITÀ È MEAN REVERTING

Diversi studi hanno analizzato la funzione di volatilità riscontrando un processo di mean reverting, la volatilità sebbene abbia periodi di maggior o minore oscillazione tende a ritornare ad un proprio valore medio, questo fatto è possibile osservarlo sia nel calcolo della volatilità storica sia nel indice VIX. La proprietà implica che le nuove informazioni che guidano il sentimento del mercato creano un effetto immediato nel prezzo, ma non generano effetti nella volatilità del titolo di lungo periodo; le oscillazioni derivate da una nuova informazione generano un aggiustamento immediato e oscillatorio nel prezzo, ma successivamente non influiscono nuovamente nel fair value. A supporto dell'affermazione è possibile analizzare il grafico della correlazione parziale dei rendimenti della serie KO, in questo caso la correlazione rientra all'interno delle bande di confidenza dopo solo un lag, inoltre il grafico della ACF mostra valori con segno opposto, l'analisi del grafico indica quindi che si ha un processo di mean reverting e che le nuove informazioni incidono nei cambiamenti del prezzo solo nel breve periodo.

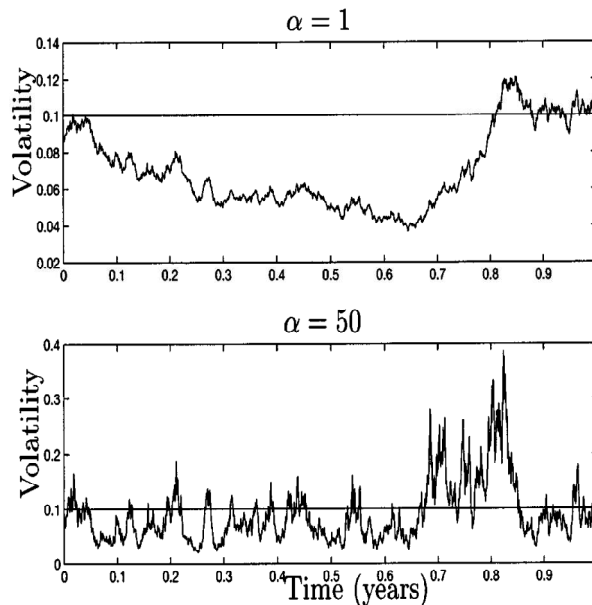
Figura 12: ACF della serie rendimenti dell'azione KO



Forque et al. (1999) hanno analizzato la struttura del modello di volatilità e hanno osservato empiricamente sull'indice S&P 500 che "the volatility process is fast mean-reverting relative to the yearly

timescale, but slow mean-reverting by the tick-tick timescale [...] $\frac{1}{\alpha} \log 2$ is the time for the expected distance to the mean to halve, $\alpha = 1$ corresponds to 0,7 of a year (roughly 8 months), and $\alpha = 50$ corresponds to about half a week.”¹⁸ L’affermazione può essere descritta dal grafico 5 dove si mostra l’indicatore stimato dagli autori, α , che per valori più grandi il tempo per ritornare al valore medio è molto più breve rispetto al tempo necessario per valori più piccoli.

Figura 13: Volatility mean reverting Fonte: Forque et al. (1999)



LA MEMORIA LUNGA NELLA VOLATILITÀ

La volatilità di una serie storica può essere approssimata al quadrato del rendimento del prezzo o al suo valore assoluto, entrambe le serie storiche mostrano una caratteristica diversa dalla serie dei rendimenti semplici, questa proprietà è definita come memoria lunga.

È possibile osservare questa proprietà nel confronto tra i grafici dell’autocorrelazione delle serie dei rendimenti; la funzione di autocorrelazione definisce una relazione di dipendenza lineare tra la realizzazione del processo al tempo t e al tempo $t+k$.

“A stationary process Y_t is called a stationary process with long-memory if its autocorrelation function, henceforth ACF, $\rho(k)$ has asymptotically the following hyperbolic rate of decay:

$$\rho(k) \sim L(k)k^{2d-1} \text{ con } k \rightarrow \infty$$

¹⁸ Financial modeling in a Fast mean –reverting stochastic volatility Environment, 1999, Asia-Pacific Financial Markets, Forque, Papanicolau e Sircar.

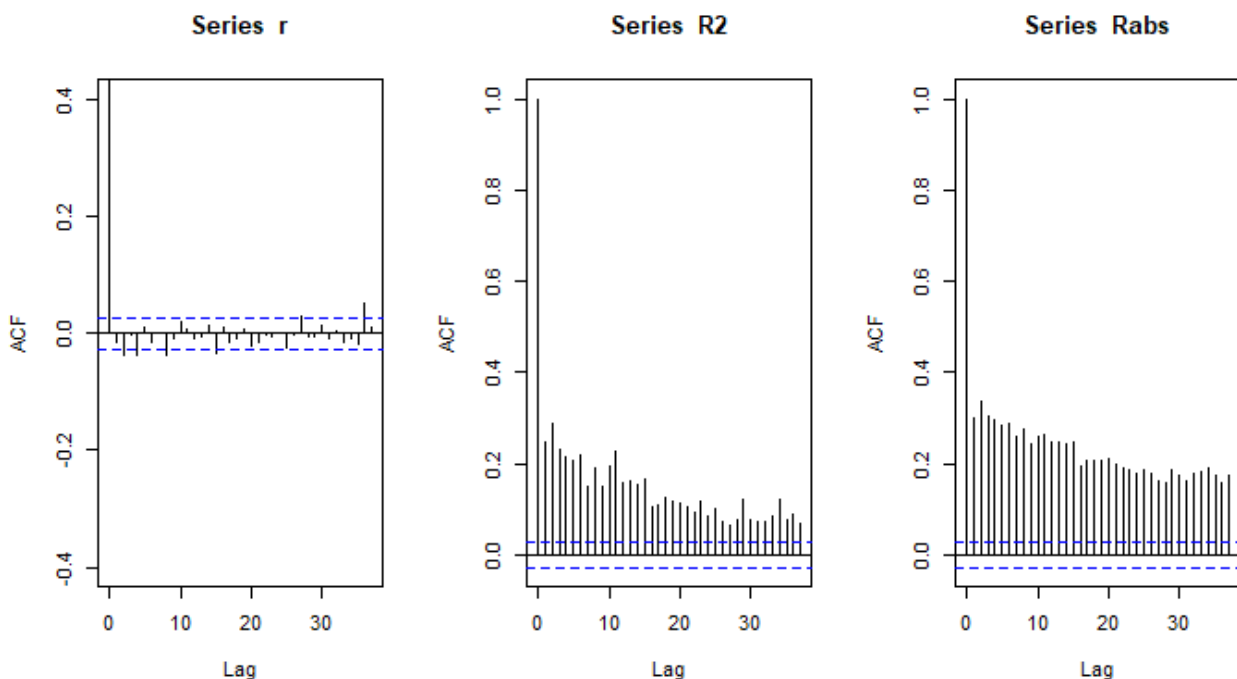
Where $L(k)$ is a slowly varying function, and $d \in (0; 1/2)$ is the parameter which governs the slow rate of decay of the ACF and then parsimoniously summarizes the degree of long-range dependence of the series.”¹⁹

La figura 14 mostra quanto appena detto, la prima funzione di autocorrelazione mostra come il valore di autocorrelazione dei rendimenti semplici rientra nelle bande di confidenza al 95% dopo il primo lag, indicando quindi un’assenza di autocorrelazione dei rendimenti semplici, mentre nel caso dei residui al quadrato (r^2) o assoluti ($rabs$) la funzione di autocorrelazione segue una legge di decadimento lento, mostrando quindi la proprietà di memoria lunga.

Questa proprietà è stata studiata da Taylor (1986), che ha confrontato la correlazione di oltre 40 serie stabilendo che il rendimento assoluto o quadrato ha una maggiore correlazione rispetto al rendimento semplice.

Prendendo in considerazione una comparazione tra il grafico dei rendimenti al quadrato e il grafico dei rendimenti assoluti è possibile notare alcune differenze: nonostante la legge di decadimento sia in entrambi i casi iperbolica rientrando nelle bande di confidenza dopo molto tempo, i valori della serie dei valori assoluti ($Rabs$) decadono molto più lentamente e mantengono valori maggiori rispetto alla serie dei rendimenti al quadrato (R^2).

Figura 14: Confronto ACF rendimenti semplici e elaborati



¹⁹ Kirman Alan and Teyssièrè Gilles, (2002), Microeconomic models for long-memory in the volatility of financial time series, Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics, 2002, vol. 5, issue 4, 1-23

Ding et al. (1992) hanno dimostrato, nella formulazione $|R_t|^d$, dove d è un numero reale e positivo, che i rendimenti assoluti sono caratterizzati da memoria lunga e “It also found, as an empirical fact, that this property is strongest for $d=1$ or near 1 compared to both smaller and larger positive value of d .”²⁰ La dimostrazione è visibile nella tabella 4 tratta da Ding et al. (1992) dove sono comparate le funzioni di autocorrelazione del rendimento dell’indice S&P 500 per il periodo compreso tra 03/01/1928 e 30/08/1991 per diversi valori del parametro d .

Tabella 4: Autocorrelazione di $|r_t|^d$ (Ding et Al. 1993)

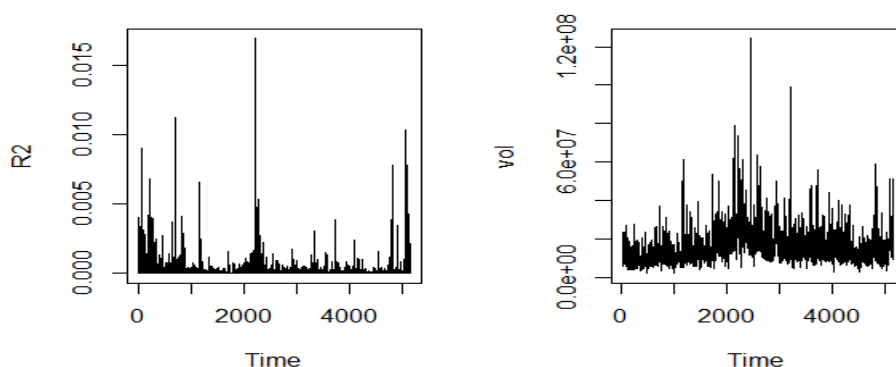
Autocorrelations of $ r_t ^d$.										
d	lag 1	2	3	4	5	10	20	40	70	100
0.125	0.110	0.108	0.102	0.098	0.121	0.100	0.100	0.095	0.065	0.089
0.25	0.186	0.181	0.182	0.176	0.193	0.164	0.164	0.148	0.120	0.131
0.5	0.257	0.255	0.263	0.251	0.259	0.222	0.221	0.192	0.166	0.165
0.75	0.297	0.299	0.305	0.286	0.291	0.246	0.241	0.207	0.180	0.173
1	0.318	0.323	0.322	0.296	0.303	0.247	0.237	0.200	0.174	0.162
1.25	0.319	0.326	0.312	0.280	0.295	0.227	0.211	0.174	0.153	0.138
1.5	0.300	0.309	0.278	0.242	0.270	0.192	0.170	0.136	0.122	0.106
1.75	0.264	0.276	0.228	0.192	0.234	0.149	0.125	0.095	0.088	0.073
2	0.218	0.234	0.173	0.140	0.193	0.107	0.083	0.059	0.058	0.045
3	0.066	0.088	0.036	0.025	0.072	0.019	0.009	0.004	0.006	0.003

CORRELAZIONE TRA VOLATILITÀ E VOLUME

Diversi studi hanno analizzato la correlazione tra volume e volatilità evidenziando che vi è una forte correlazione positiva tra le due componenti. Tale proprietà è visibile nel grafico 15 di confronto tra la serie del volume e la serie dei rendimenti al quadrato usato come proxy della volatilità; in particolare si nota come dopo 2000 osservazioni vi è un aumento della volatilità e tale grandezza è visibile anche nella serie del volume.

²⁰ Ding Zhusnxin, Granger Clive W.J., Engle Robert F., (1993) A long memory property of stock market returns and a new model, Journal of Empirical Finance 1(1993) 83-106

Figura 15: Correlazione tra volume e volatilità



Louhichi (2011) considera quali possano essere le cause alla base del fenomeno; gli aggiustamenti del prezzo nella serie storica dipendono dalle nuove informazioni che vengono recepite dal mercato, queste generano cambiamenti nel prezzo con un impatto sulla volatilità, non solo, il nuovo prezzo genera delle nuove contrattazioni che incidono sul volume. Questo fattore può essere definito un comune denominatore per la volatilità e il volume e per questo può generare cambiamenti combinati tra le due componenti, questo conferma “The seminal work of Clark(1973) has introduced the mixture of distribution hypothesis (MHD) which suppose that asset price changes are driven by information.”²¹

Un’ulteriore analisi del volume porta alla scomposizione di esso nel numero di contrattazione e nella grandezza di queste ultime. Nella letteratura vi sono due ipotesi alternative, la prima afferma che gli investitori con informazioni significative sul cambiamento del prezzo preferiscono compiere grandi cambiamenti nell’investimento generando una correlazione positiva causata dalla grandezza degli investimenti, mentre altri dicono che per mascherare le informazioni su possibili cambiamenti del prezzo si preferiscano fare molti ma piccoli investimenti generando così una correlazione con il numero di contrattazioni. Entrambe le ipotesi sono supportate dagli studi sul mercato americano, Louhichi (2011) si sofferma invece sul mercato finanziario Euronext Paris per le sue caratteristiche di trasparenza.

Il modello utilizzato per determinare la correlazione tra volatilità e volume e per indagare quale definizione di volume utilizzare per definire la correlazione si basa sul seguente modello GARCH

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t \quad 2.5$$

$$(VAR(\varepsilon_t|\varepsilon_{t-1})) = \sigma_t^2 \quad 2.6$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \quad 2.7$$

Dove: $(\alpha + \beta)$ misurano la persistenza.

La formula (2.7) viene modificata per vederne l’impatto del volume:

²¹ Louhichi W., (2011), What drives the volume–volatility relationship on Euronext Paris?, International Review of Financial Analysis, Vo. 20, Issue 4, August 2011, Pages 200-206

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \lambda V_t \quad 2.8$$

I risultati ottenuti dal modello mostrano un valore di $\alpha + \beta < 1$ ma che si avvicina ad uno, inserendo invece la variabile volume il valore della persistenza diminuisce, ad esempio l'indice Cac40 passa da 0.966 a 0.211. La presenza di un coefficiente λ positivo mostra una correlazione positiva tra volatilità e volume.

Per indagare quale effetto tra il numero di trattazione o la grandezza delle stesse il modello viene ulteriormente modificato:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \delta NT_t + \gamma ST_t \quad 2.9$$

Dove: NT_t si riferisce al numero di scambi mentre ST_t descrive la grandezza di quest'ultimi.

L'autore ha riscontrato che: "including informational variables (number of trading and trade sizes) significantly reduces the persistence of volatility. Moreover, the coefficient of the number of trades (δ) is positive and significant for each company and for the CAC40 Index. However, the coefficient of the size of trades (γ) is insignificant for all the stocks of our sample."²²

In conclusione, si può affermare che la correlazione positiva deriva dal numero di contrattazioni che vengono svolte, questo fatto può essere spiegato dalla volontà di nascondere delle informazioni sugli andamenti futuri tramite l'utilizzo di più trattazione di importo minore.

Nel modello di Louhichi veniva analizzata la variabile del volume, un ulteriore studio può essere compiuto analizzando la variabile volatilità.

La volatilità può assumere valori più o meno grandi in base alla distanza che vi è fra il prezzo al tempo t e al tempo $t+1$, nel caso in cui la variazione sia descritta da valori bassi siamo in presenza di una volatilità in forma continua, nel caso in cui ci siano invece dei salti tra i valori del prezzo essi si ripercuotono in salti nel valore della volatilità. Queste due tipologie di dispersione intorno al valor medio possono essere analizzate per vedere quale delle due favorisce la correlazione.

Diversi studi hanno scomposto la volatilità nelle due categorie riscontrando una correlazione positiva tra volume e la volatilità continua ed una correlazione negativa tra volume e i grandi cambiamenti del fattore di dispersione. Le informazioni che creano i grandi cambiamenti per generare una correlazione negativa potrebbero essere di tipo pubblico, mentre le informazioni private guidano la correlazione positiva della parte continua. Huang and Wang (2012) hanno analizzato l'indice Hu-Shen 300 riscontrando la medesima correlazione negativa osservata sul mercato americano.

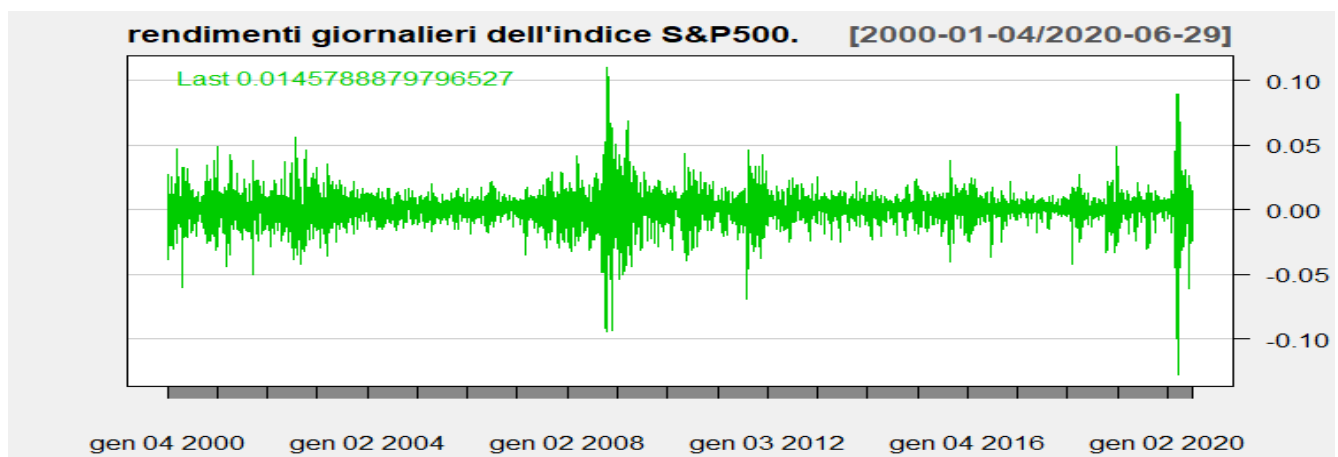
²² What drives the volume–volatility relationship on Euronext Paris?, Waël Louhichi, 2010 International review of financial analysis.

LA VOLATILITY CLUSTERING

La definizione formale di cluster di volatilità è “l’osservazione che grandi cambiamenti nei prezzi tendono ad essere seguiti da altri grandi cambiamenti e piccoli cambiamenti nei prezzi tendono ad essere seguiti da altri piccoli cambiamenti. In altre parole, le fluttuazioni dell’asset price mostrano irregolari cambiamenti tra episodi di volatilità alta e bassa”.²³

Questo fenomeno è evidente in fig.16 dove è riportato il grafico dei rendimenti dell’indice S&P 500 che presenta il fenomeno della volatility clustering.

Figura 16: Rendimenti giornalieri dell'indice S&P500



GENESI DEI CLUSTER

I cluster di volatilità nelle serie storiche finanziarie fanno parte dei cosiddetti fatti empirici della volatilità già analizzati in precedenza, i diversi studi sulla persistenza della volatilità hanno portato allo studio della generalizzazione dei modelli autoregressivi condizionali (GARCH) in grado di cogliere il fatto empirico; prima di studiare nel dettaglio questi modelli statistici sono analizzate quali possono essere le cause che generano questi cluster e alcuni metodi di calcolo.

Diversi autori hanno presentato dei modelli in cui viene descritta la possibile genesi dei raggruppamenti di volatilità, sebbene il focus principale sia la volatility clustering, non vengono tralasciati altri fatti empirici che descrivono altre sfaccettature della serie storica.

²³ Xue-Zhong He, Kai Li, Chuncheng Wang, (2016), Volatility clustering: A nonlinear theoretical approach, Journal of Economic Behavior & Organization 130 (2016) 274–297

Le fluttuazioni che creano tali cluster possono essere ricondotte all'eterogeneità dei comportamenti degli attori presenti nel mercato che può essere rappresentata dalle diverse tempistiche e strategie utilizzate. Le differenti strategie descritte dai modelli sono la sintesi dei comportamenti degli investitori che si concretizzano nelle loro decisioni che influiscono nel processo di price discovery, ovvero le loro azioni vengono interpretate dal mercato come nuove notizie e ciò può creare i raggruppamenti.

Una prima differenza sostanziale nello scenario del trading mondiale è la contrapposizione tra due tipologie differenti di trader: i fundamentalisti che analizzano le informazioni riguardanti un'attività economica per ricavare il fair value della stessa poiché lo considerano il valore a cui il prezzo tenderà nel futuro, e i chartist che analizzano invece i patterns grafici presenti nella serie storica dei rendimenti di uno strumento per creare una strategia vincente. Le contrapposizioni tra questi modelli di analisi delle strategie d'investimento creano dei cambiamenti nel prezzo dello strumento, resi più o meno evidenti in base ai sentimenti di mercato.

Dalla contrapposizione tra chartist e fundamentalist s'inserisce il modello di Gaunersdorfer e Hommes (2007) che spiega la possibile causa della creazione dei cluster. Entrambe le categorie di investitori sono consapevoli che il prezzo di uno strumento deve tenere in considerazione tutte le informazioni riguardanti l'economia e che di conseguenza esiste un valore giusto a cui scambiare il prodotto. Quando il prezzo di mercato è molto vicino al fair value il pensiero predominante è quello degli EMH-BELIVERS, definiti nel modello come coloro che credono nella teoria dell'efficienza dei mercati e rappresentano il gruppo dei fundamentalisti, quindi il prezzo di scambio resta più o meno lo stesso definendo valori, sia dei rendimenti sia di volatilità, bassi.

Al contrario, quando il prezzo dello strumento si discosta dal fair value si creano grandi fluttuazione rispetto al valore centrale e ciò si traduce in rendimenti, positivi o negativi maggiori e un alto valore di volatilità. Queste due fasi si alternano in base ai sentimenti di mercato e alla prevalenza di una categoria di investitori rispetto all'altra.

L'alternanza avviene per periodi più o meno lunghi creando così i cluster di volatilità; infatti il prezzo non può discostarsi troppo dal valore fondamentale, allo stesso tempo il fair value non rimane immobile ma varia in funzione delle news del mercato e per questo c'è un continuo aggiustamento dei prezzi con la creazione di trend duraturi che descrivono la persistenza della volatilità. Questa ciclicità è definita dagli autori *coexistence of attractors* poiché in base alle condizioni iniziali del mercato il prezzo di uno strumento o tende ad un valore definito giusto, chiamato fair value, oppure mostra un ciclo di patterns che si ripete nel tempo dove si alternano periodi in cui il prezzo è maggiore del fair value per poi avere una correzione se considerato troppo alto rispetto al fair value.

Il modello proposto non è lineare e mostra la contrapposizione tra le strategie delle due tipologie di investitori, il cambiamento della percentuale di attori che utilizza una strategia fondamentalista rispetto a quella grafica genera cambiamenti nella volatilità del prezzo.

Nel modello appena descritto, è stata definita una possibile genesi della volatility clustering, altri autori hanno creato dei modelli diversi che producono i cluster e che si basano su altri comportamenti contrapposti di diverse categorie di investitori.

Xue e Gençay (2012) dimostrano come la presenza di trader con frequenze diverse possano generare i raggruppamenti di volatilità.

Cabrales and Hoshi (1996) sottolineano come i comportamenti eterogenei individuali degli investitori possono generare la maggioranza degli stylized facts empirici visti nelle serie economiche.

De Fontnouvelle (2000) descrive un modello basato sul costo delle informazioni (information strategy) che genera cambiamenti nel prezzo di mercato e crea cluster di volatilità. Timmermann (2001) delinea un processo in cui sono presenti break strutturali e, secondo l'autore, questi generano curtosi, asimmetria, volatility clustering e correlazione seriale dei rendimenti successivi al break.

Il modello di Xue e Gençay (2012) descrive due tipologie di investitori: la tipologia A composta da traders che agiscono nel mercato in ogni periodo e la tipologia B formata da traders occasionali. Queste tipologie non differiscono solamente per la strategia che applicano, conseguenza del tempo che trascorrono nel mercato, ma anche per le diverse convinzioni sul valore fondamentale.

Gli autori descrivono due effetti che vengono indicati come cause generatrici dei cluster: l'assenza della tipologia B di trader nel mercato in alcuni momenti conduce alla necessità di avere strategie diverse poiché le informazioni rilasciate nel mercato sono diverse per le due categorie: la tipologia A, infatti, ha più informazioni della tipologia B, questa differenza genera il cosiddetto effetto di alternanza. La seconda causa invece è l'effetto dell'estrazione del segnale, anch'esso causato dalle diverse tempistiche di trading, ogni gruppo aiuta nella formazione del prezzo tramite le informazioni che fornisce al mercato condensate nel prezzo di scambio dello strumento, questo meccanismo di generazione del prezzo corrente a partire dalle informazioni passate genera i cluster di volatilità.

I due effetti descritti concorrono alla formazione del prezzo dello strumento, "the alternative effect is the switching of trading decision, relying on the time-varying arrivals of traders" mentre the signal extraction genera una diversa conoscenza delle informazioni da parte delle due categorie, la tipologia di high frequency traders dispone di informazioni ad ogni istante mentre la tipologia B solo nei momenti in cui essa opera nel mercato; questa disparità può generare i cluster.

Gli autori hanno testato i cambiamenti del coefficiente di autocorrelazione in base alle informazioni del mercato:

- nel caso del primo effetto, dove non si ha l'effetto di estrazione del segnale, si ha una riduzione dell'autocorrelazione e di conseguenza della persistenza
- nel caso del secondo effetto invece si generano maggiori cluster.

In conclusione si può dire che il modello proposto dagli autori non solo è in grado di definire la presenza dei cluster, dimostrando come i due effetti descritti concorrano a creare i raggruppamenti e come le

informazioni utilizzate per creare la strategia e il numero di attori presenti nel mercato abbiano un ruolo cruciale nella creazione dello stylized fact, ma anche il modello mostra che la funzione di autocorrelazione ha un tasso di decadimento iperbolico simile a quello osservato sullo S&P500 e NASDAQ.

Anche Cabrales and Hoshi (1996) considerano due tipologie di investitori. Il modello degli autori "We consider an asset market which includes two types of investors, who follow two different rule of thumb strategies. Depending on the relative success of each strategy, the proportion of total wealth held by each type of investor fluctuates."²⁴ Nel caso la strategia dei trader ottimisti produca maggior profitto la ricchezza è detenuta per la maggior parte di questa categoria di investitori, viceversa se la strategia vincente è quella dei trader pessimisti allora la ricchezza è detenuta per lo più da questi ultimi. I cambiamenti sulla scelta della strategia per cercare di ottenere maggior ricchezza genera le fluttuazioni della ricchezza da cui dipendono la media e la varianza condizionale. Il modello inoltre mostra come il volume di azioni scambiate abbia una relazione positiva con la volatilità dello strumento.

Questo fatto stilizzato è presente anche nel modello di Brock e LeBaron (1996), i quali affermano che "returns and volume data argue, in the context of our model, that persistent volatility is caused by traders experimenting with different belief systems based upon past profit experience and their estimates of future profit experience."²⁵ Le caratteristiche delle volatilità definite dal loro modello sono:

- La funzione di autocorrelazione di r^2 e $|r|$ è positiva e decade lentamente
- La funzione di autocorrelazione di una misura dell'attività di trading come il volume è positiva e decade lentamente
- Forti cambiamenti nei rendimenti o nei prezzi sono legati a nuove notizie.

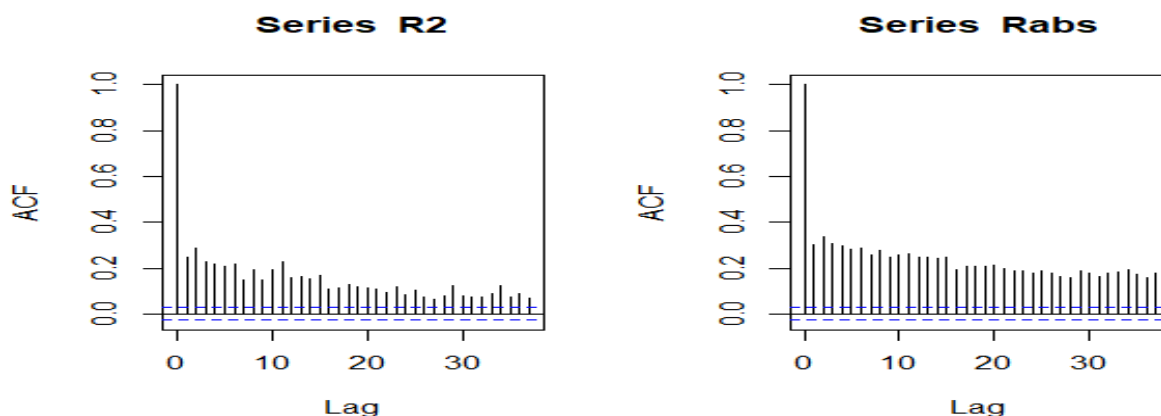
Questi patterns presenti nel modello sono mostrati attraverso i grafici 17,18, per la serie storica dei rendimenti giornalieri sul titolo KO.

Il primo fatto elencato è visibile nelle serie economiche finanziarie del grafico 17 dove si mostra l'ACF di r^2 e $|r|$, considerati delle buone proxy di volatilità dei ricavi. Nel grafico è possibile notare la presenza di autocorrelazione che significa che decresce lentamente.

²⁴ Cabrales, Antonio & Hoshi, Takeo, 1996. "Heterogeneous beliefs, wealth accumulation, and asset price dynamics," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Elsevier, vol. 20(6-7), pages 1073-1100.

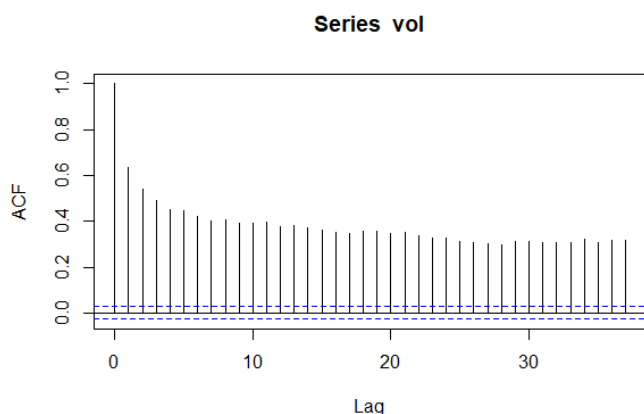
²⁵ Brock William A., LeBaron Balke D., (1996), A Dynamic Structural Model for Stock Return Volatility and Trading Volume, *Review of Economics and Statistics*, vol. LXXVIII, no. 1, February 1996, pp. 94-110.

Figura 17: ACF r^2 e $|r|$ dell'azione KO



Della serie KO è stato creato il grafico della funzione di autocorrelazione dei volumi (v), la funzione è positiva e decresce molto lentamente, come veniva elencato nel modello di Brock e LeBaron.

Figura 18: ACF volume dell'azione KO



Un altro modello che prende in considerazione i fatti empirici rappresentati graficamente e la presenza dei cluster è quello di De Fontnouvelle (2000), il modello viene chiamato delle aspettative poiché a causa del costo delle informazioni l'investitore deve scegliere quali informazioni ottenere, le informazioni acquisite dagli attori definiscono la precisione del mercato poiché con molte informazioni il prezzo è più vicino al fair value; come nel caso di Cabrales and Hoshi (1996) vi è una strategia instabile poiché si segue la corrente che genera maggiori profitti, la scelta della strategia è svolta da una moltitudine di attori che competono tra loro e che scelgono in base all'elemento vincente.

La strategia delle aspettative $H_{i,\tau}$ contiene un elemento stocastico e un elemento deterministico per descrivere un modello adeguato alla realtà economica, la funzione di utilità infatti è

$$U_{i,\tau}(H_j) = u_j(I_\tau) + \varepsilon_{i,j,\tau}/\beta \quad 2.10$$

Dove:

$u_j(I_\tau)$ sono i profitti meno i costi di strategia per ottenere le informazioni

$\varepsilon_{i,j,\tau}$ è un agente IID stocastico che serve per dare abbastanza gradi di realismo al modello per renderlo verosimile alla realtà poiché in essa non tutti gli attori seguono schemi prestabiliti ma alcuni possono scegliere determinate strategie per motivi fuori dagli schemi.

Le informazioni sono scelte sulla base del loro valore, ogni informazione, infatti, ha un proprio valore intrinseco e la scelta di quali e quante informazioni avere genera una strategia delle aspettative diversa (information strategy). Vi sono agenti che preferiscono ridurre il costo delle informazioni, ottenendo così una strategia meno precisa, mentre altri che per ottenere un profitto maggiore scelgono di avere informazioni più precise.

Le due tipologie di cluster possono essere spiegate secondo gli autori dalla dinamica del mercato, gli attori hanno come scopo finale l'utilizzo della strategia che porta a maggiori profitti, questa volontà degli attori porta ad avere fasi in cui non vengono acquisite informazioni ed il volume degli scambi è basso e il prezzo rimane stabile perché si hanno le stesse considerazioni sullo strumento, che genera volatilità persistente con valori bassi, a fasi in cui si utilizzano informazioni razionali generando cambiamenti nel prezzo e nel volume di scambio; in questa fase si hanno alti valori di volatilità.

Il meccanismo che guida il cambiamento della strategia è descritto dalla contrapposizione di una strategia che utilizza informazioni naive e da quella che usa invece informazioni più puntuali, definite razionali.

La precisione di mercato dipende dalla scelta dell'informazione degli investitori: se la maggior parte sceglie una strategia d'informazioni precisa, i segnali sul prezzo saranno puntuali e il valore delle informazioni private diminuirà e si passerà a una strategia meno precisa, mentre in caso contrario dove gli attori utilizzano strategie imprecise si tenderà ad una strategia più precisa. La dinamica descritta a partire da informazioni di tipo naive è la seguente: "Whenever current market precision is low, agents will expect future market precision also to be low. They will all choose precise information strategies, which implies that future market precision actually will be high. Likewise, a high current market precision will lead to a low future market precision. The market precision thus follows a periodic cycle, and the model displays classic cobweb behavior."²⁶ Nel caso in cui ci siano informazioni razionali la precisione del mercato è costante e le informazioni naive mostreranno la stessa accuratezza ma gli attori tenderanno ad una strategia meno costosa e preferiranno utilizzare la seconda tipologia di informazioni. Le due fasi appena descritte si alternano durante le attività di mercato generando il fenomeno dei cluster di volatilità; altri stylized facts

²⁶ De Fontnouvelle Patrick, (2000), Information dynamics in financial markets, *Macroeconomic Dynamics*, 4, 2000, 139-169

visibili dal modello descritto sono la correlazione seriale dei ricavi al quadrato e del volume di trading e la correlazione tra volume e volatilità.

Un modello semplificato, descritto da Cont (2005), parte dal presupposto che in un determinato tempo T ogni agente del mercato riceve delle informazioni, esso può decidere se tali informazioni cambiano la propria soglia di prezzo e generare un ordine nel mercato di acquisto o vendita.

La scelta non simultanea di cambiare la soglia genera i cluster di volatilità, questo sistema è semplificato perché l'unica differenza tra gli investitori è il loro modo di processare le scelte.

Cont ha evidenziato che tale modello genera i seguenti i rendimenti stylized facts:

- Eccesso di volatilità
- Fat tails, valore di curtosi >7
- Incorrelazione dei rendimenti
- Processo mean reverting per la volatilità
- Volatility clustering

Differente è il modello di Timmermann (2001) che parte dal presupposto che il processo generatore dei prezzi delle azioni del mercato americano abbia dei break strutturali, questi influenzano il processo perché influiscono sui dividendi futuri per molto tempo (effetto persistenza) e perché danno informazioni sugli stessi avendo quindi un effetto informativo.

Il modello dell'autore è creato in modo tale da avere un nuovo set informativo caratterizzante il periodo successivo al break strutturale che lo differenzia dal periodo precedente.

Attraverso le simulazioni vengono testate diverse tipologie di assunzione e di aspettative degli investitori mostrando come nel caso in cui si conosca perfettamente il futuro tasso di crescita dei dividendi non siano presenti gli stylized facts di curtosi, asimmetria e persistenza di volatilità, mentre nel caso ci sia una conoscenza Bayesiana è possibile vedere l'effetto di persistenza della volatilità a causa dell'aggiustamento che segue le rotture strutturali e l'incorporazione nel prezzo delle nuove informazioni.

L'autore propone una sequenza di modelli sui rendimenti dello S&P500 e sulle serie simulate in cui vengono mostrati come, cambiando le tipologie di informazione sui dividendi, variano i fatti catturati dal modello:

- Nel caso di un modello senza breaks strutturali e piena conoscenza delle informazioni non vengono evidenziate maggior curtosi, l'asimmetria e la persistenza della volatilità.
- Nel caso ci siano breaks, il coefficiente di avversione al rischio sia zero e ci sia una conoscenza piena si hanno maggior curtosi, asimmetria e una maggior volatilità, da 1.5 a 2.9.
- Nel caso di conoscenza Bayesiana delle informazioni si ha una volatilità del 3.3 e una curtosi e asimmetria più vicini ai valori delle serie reali e si produce l'effetto di volatility clustering.

In conclusione, è possibile affermare che un modello che riesca a cogliere le diverse sequenze che ci sono nella realtà, tra cui i breaks strutturali che solitamente vengono tralasciati, riesce a replicare meglio la presenza di persistenza della volatilità e le altre caratteristiche della loro distribuzione di probabilità.

I diversi modelli proposti rendono evidente come il fattore chiave che genera il comportamento tipico della volatilità è la presenza, come avviene nel mercato reale, di un eterogeneità dei comportamenti degli investitori.

STRUTTURA DELLA PERSISTENZA DELLA VOLATILITÀ

La volatility clustering è definita come uno degli stylized facts più significativi poiché la conoscenza del modello di volatilità delle serie economiche finanziarie permette di compiere, tra le altre cose, delle stime più precise del pricing delle opzioni e del rischio di portafoglio e perché “The implication of such volatility clustering is that volatility shocks today will influence the expectation of volatility many periods in the future.”²⁷

Studi empirici dimostrano che tale fenomeno è asimmetrico, ovvero i periodi di alta volatilità sono maggiori dei periodi a bassa volatilità, questo perché i periodi in cui nel mercato ci sono agitazioni sono maggiori dei periodi di calma. Un esempio sono le crisi economiche che possono generare periodi di persistenza.

Ning, Xu e Wirjanto (2014) hanno utilizzato delle funzioni copula per analizzare le caratteristiche della volatility clustering. Un’analisi delle statistiche di base della misura della volatilità realizzata proposta dagli autori ha messo in evidenza una volatilità maggiore nel caso di indici azionari rispetto ai valori dei tassi di cambio. Tutte le serie esaminate hanno messo in evidenza valori di skewness e curtosi positiva mostrando quindi il fenomeno delle fat tails e di un’asimmetria positiva, infine nei grafici viene mostrato per tutte le serie il fenomeno della volatility clustering.

L’utilizzo dei criteri BIC e AIC ha permesso di individuare tra le 5 diverse funzioni copula utilizzate quella che meglio replicava il modello di volatility clustering. Tutti i modelli hanno mostrato una misura di correlazione lineare della volatilità indicando quindi la presenza dei cluster, il confronto tra i modelli ha messo in evidenza che sono migliori quelli che racchiudono un’asimmetria, ciò significa che i periodi di volatilità maggiore sono più frequenti di quelli a volatilità minore.

L’analisi dei valori estremi all’interno dei cluster di volatilità presentato da Ning et Al.(2014) mostra come vi sia presente un’asimmetria nel decadimento dei cluster, i cluster della volatilità alta decadono più lentamente e sono monotoni, questo implica che le fasi di alta volatilità rimangono tali per periodi più lunghi

Il confronto tra indici azionari e tassi di cambio mostra che entrambe le categorie hanno queste caratteristiche, anche se nel settore azionario sono più marcate, questo fatto è spiegabile con la volatilità del mercato azionario maggiore rispetto a quella del mercato dei cambi.

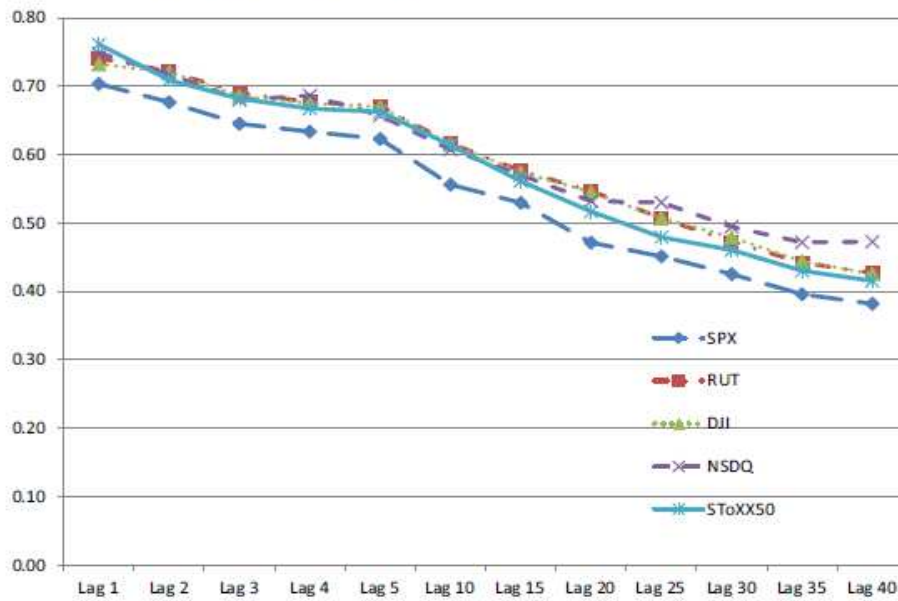
Le figure 20 e 21 mostrano rispettivamente la descrizione della dipendenza delle code presente nei cluster di alta volatilità e in quelli di bassa volatilità; il confronto evidenzia che i cluster di alta volatilità tendono a durare per un periodo maggiore rispetto a quelli di bassa volatilità, che decadono a zero più velocemente.

²⁷ Robert F. Engle and Andrew J. Patton What good is a volatility model? Quantitative finance volume 1 (2001) 237–245

Entrambe le figure confrontano al loro interno i comportamenti tenuti dagli indici azionari e dai tassi di cambio, questi ultimi mostrano un grado di decadimento più lento rispetto alle azioni in entrambe le tipologie di cluster.

Figura 19: Long memory of high volatility clusters. Fonte: Ning et al. (2015)

A. Upper tail dependence for stock indices



B. Upper tail dependence for exchange rates

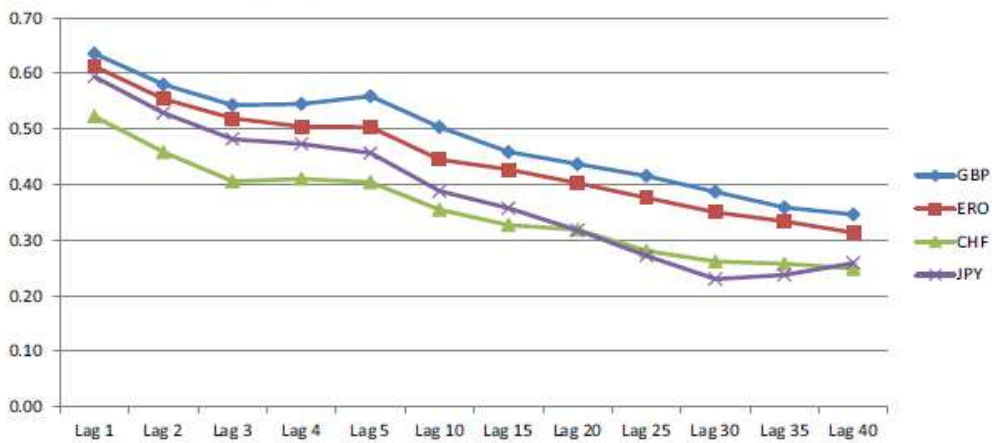
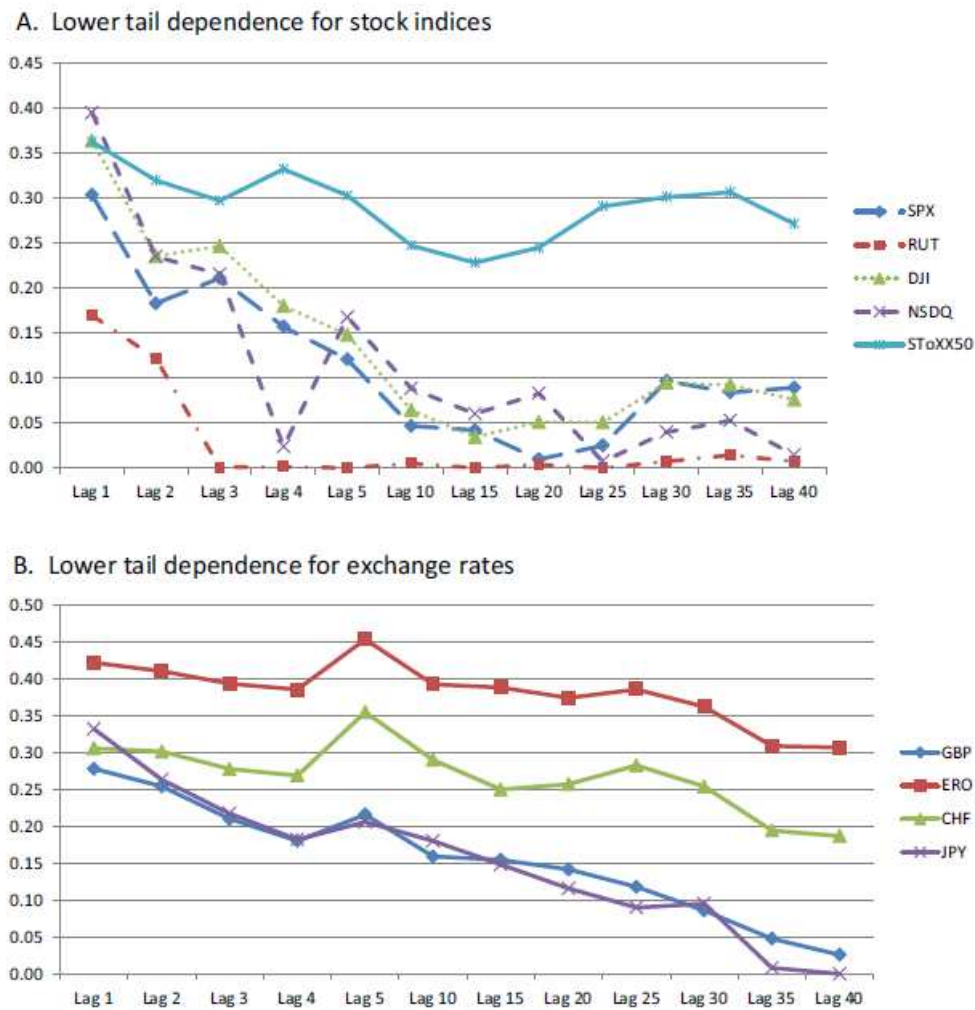


Figura 20: Long memory of low volatility clusters. Fonte: Ning et al. (2015)



Gli autori hanno poi suddiviso il periodo campionario degli indici azionari in tre fasi per isolare la situazione della crisi finanziaria del 2007-2009; è comune a tutte le fasi la presenza di asimmetria dei cluster con un favore verso quelli ad alta volatilità. La fase della crisi e quella successiva indicano un aumento della probabilità che vi siano cluster.

I tassi di cambio vengono suddivisi invece in due fasi: quella antecedente alla crisi (1999-2006) e quella della crisi stessa (2009-2009), mostrano anche in questo caso asimmetria a favore della coda di destra e la fase della crisi sottolinea un aumento delle probabilità di creazione dei cluster.

La causa della volatility clustering può essere associata al flusso informativo dei mercati, studi su mercati diversi hanno raggiunto le medesime conclusioni, i rendimenti e la volatilità usati come proxy dei cambiamenti di mercato descrivono la persistenza della volatilità. Il flusso informativo viene definito la causa della persistenza perché a seguito di un cambiamento nei rendimenti dovuto ad una nuova informazione, gli attori del mercato cercano altre informazioni per prevedere i cambiamenti di mercato, questo genera una correlazione tra informazione nei diversi istanti temporali che portano ad un

cambiamento persistente nel prezzo e di conseguenza nei rendimenti generando il fenomeno della volatility clustering.

Su and Wang (2019) hanno condotto uno studio sull'impatto del flusso informativo sulla persistenza. Le informazioni macroeconomiche e l'eterogeneità dei comportamenti degli investitori e delle loro aspettative danno origine alla persistenza della volatilità.

La spiegazione della presenza dei cluster può essere ricondotta al fatto che grandi rendimenti implicano una serie di nuove informazioni che vengono prezzate dal mercato e ciò amplia le fluttuazioni del prezzo e di conseguenza la volatilità fino a quando viene raggiunto il nuovo fair value, se dal mercato non vengono recepite nuove informazioni, la volatilità del titolo diminuisce. Nel loro studio del mercato azionario cinese hanno riscontrato che "la persistenza nella volatilità giornaliera varia con le variabili dei rendimenti e della volatilità di mercato e che un alto rendimento di solito è associato a una grande persistenza nella volatilità, mentre una maggiore volatilità conduce ad una più bassa persistenza."²⁸ In altre parole, la persistenza aumenta con i rendimenti, ma diminuisce a causa della volatilità, le altre due variabili utilizzate invece non inducono effetti nella persistenza della varianza. Le quattro variabili utilizzate nello studio come proxy dello stato di mercato:

1. r = rendimenti giornalieri
2. σ = Volatilità giornaliera
3. NT = trading volume, considerato come il numero di scambi aggregati ad intervalli di 5 minuti
4. IL = illiquidità del mercato, calcolato come $IL = 1000 * \frac{|r_T|}{NT_t}$

Considerazione analoghe sull'origine dei cluster sono state riscontrate nello studio del mercato americano da Jianxin Wang and Minxian Yang (2018); la persistenza nella volatilità è guidata dai rendimenti, quelli negativi generano un impatto maggiore rispetto a quelli positivi sulla persistenza, per questo motivo è presente un'asimmetria, l'utilizzo dell'informazione sull'asimmetria della volatilità rende la sua stima più accurata. Gli autori mostrano che "The estimated HAR_CVP model shows that daily RV persistence changes with the size and sign of daily returns and the effect is economically large."²⁹ Ad esempio sull'ETF dello S&P500 si ha un incremento della volatilità del 14%-16% a fronte di aumento del 1% dei rendimenti, mentre l'aumento della varianza è pari al 48% - 54% se vi è una perdita nei rendimenti del 1%.³⁰ Questo

²⁸ Traduzione di Conditional Volatility Persistence and Realized Volatility Asymmetry: Evidence from the Chinese Stock Markets Fei Su & Lei Wang, 27 Feb 2019, Journal Emerging Markets Finance and Trade

²⁹ Wang, Jian-Xin and Yang, Minxian, Conditional Volatility Persistence (July 1, 2018). Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=3080693> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3080693>

³⁰ Dati di Wang, Jian-Xin and Yang, Minxian, Conditional Volatility Persistence (July 1, 2018). Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=3080693> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3080693>

motivo può essere associato alla maggiore attenzioni degli investitori per le notizie negative e a seguito di perdite nei rendimenti che portano ad una maggior persistenza.

Anche in questo caso vengono descritti come stati di mercato i rendimenti e la volatilità, il modello che descrive la volatilità è:

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha + \beta \sigma_t^2 + \varepsilon_{t+1} \quad 2.11$$

dove β descrive la persistenza e gli stati del mercato sono i rendimenti e la volatilità $s_t = (r_t; \sigma_t^2)$, che descrivono il modello finale come segue:

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha + \beta(r_t; \sigma_t^2) \sigma_t^2 + \varepsilon_{t+1} \quad 2.12$$

Gli autori anche in questo caso dimostrano che $|r_t|$ aumenta la persistenza mentre σ_t^2 la diminuisce.

Il modello HAR modificato con l'incorporazione del modello CVP, con le proxy del mercato definite precedentemente, è stato usato da Su e Wang (2019) negli indici SSE e SZSE per dimostrare la tesi sull'origine dei cluster:

$$RV_{i,t} = \alpha_{i,t} + \beta_{i,t}^e RV_{i,t-1} + \beta_{i,W} RV_{i,t,W} + \beta_{i,M} RV_{i,t,M} + \theta_{i,t}^- r_{i,t-1}^- + \theta_{i,t}^+ r_{i,t-1}^+ + \theta_{i,W} r_{i,t,W} + \theta_{i,M} r_{i,t,M} + \varepsilon_{i,t} \quad 2.13$$

Dove:

$$\beta_{i,t}^e = \beta_{i,t}^0 + \beta_{i,t}^- r_{i,t-1}^- + \beta_{i,t}^+ r_{i,t-1}^+ + \beta_{i,t}^{RV} RV_{i,t-1} \quad 2.14$$

RV è la volatilità realizzata che tiene in considerazione la variabilità giornaliera, settimanale e mensile.

La variabile include "lagged negative and positive returns, and lagged RV, which are used to capture the asymmetric and non linear volatility persistence effects. Namely, large positive (negative) returns induce high (even higher) volatility persistence while extreme high volatilities are generally associated with less volatility persistence..."³¹

Il modello evidenzia un forte effetto memoria, e riduce rispetto al modello HAR l'effetto asimmetrico nella volatilità, anche se l'impatto negativo è più forte. L'impatto dei rendimenti implica che questi siano correlati positivamente alla persistenza mentre un valore basso di RV indica che la volatilità conduce ad un minore effetto di persistenza. Secondo gli autori inoltre, utilizzando il metodo Shapley-Owen, si è visto che la variabile introdotta nel modello (CVP) spiega oltre il 50% dell'impatto dei ricavi nella volatilità futura.

Confrontando il modello CVP con un modello di rischio statico per ricavare la funzione di utilità gli autori hanno provato che il modello CVP dà delle performance migliori sia in periodi statici sia nei periodi di turbolenza del mercato.

Le determinanti della persistenza della volatilità sono quindi i rendimenti e la volatilità, entrambi i fattori sono collegati al ciclo informativo che ruota attorno ai meccanismi di funzionamento dei mercati. La stima

³¹ Conditional Volatility Persistence and Realized Volatility Asymmetry: Evidence from the Chinese Stock Markets Fei Su & Lei Wang, 27 Feb 2019, Journal Emerging Markets Finance and Trade

della volatility clustering permette di migliorare le stime sulla volatilità futura creando dei modelli di investimento più attendibili.

Il meccanismo che collega la volatilità alla sua persistenza è il processo di scoperta del prezzo, quando nel mercato vi sono nuove informazioni esse vengono usate per determinare il prezzo, quando il prezzo viene trovato ciò significa che non vi sono nuove informazioni correlate alle precedenti e di conseguenza si riduce la persistenza, a questo meccanismo è possibile collegare la minor persistenza generata da un alto valore di RV_t poiché quando esso è alto si sta cercando il nuovo prezzo e di conseguenza si ha una minor persistenza della volatilità.

Il modello HAR-CVP (2.15) è stato usato anche da Wang, Jian-Xin and Yang, Minxian (2018) per studiare il mercato americano. Usando come proxy ETF S&P 500 e S&P 100 index, il modello ha condotto alle medesime caratteristiche descritte da Su e Wang.

$$RV_{t+1} = \alpha + (\beta_0 + \beta_{|r|}|r| + \beta_r r_t + \beta_{RV} RV_t) RV_t + \varphi Z_t + \varepsilon_{t+1} \quad 2.15$$

Dove:

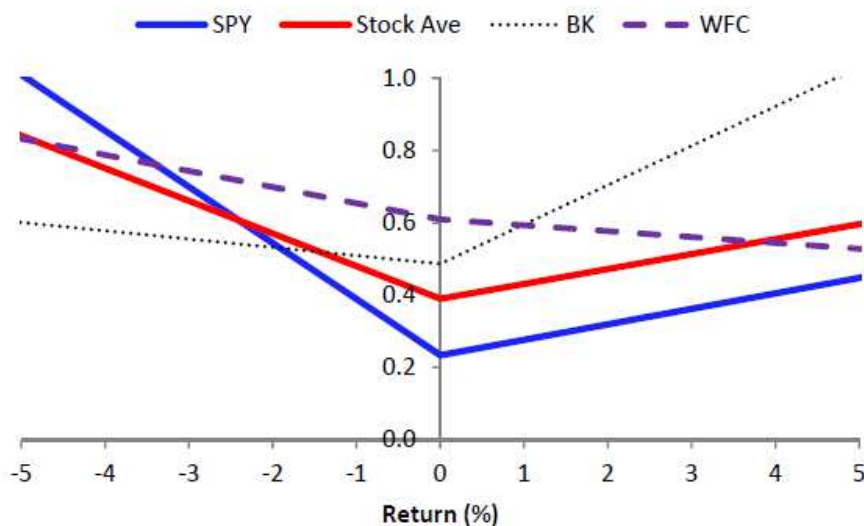
$$Z_t = (RV_{t,W}, RV_{t,W}, r_t, r_{t,W}, r_{t,M})$$

$$\varphi = (\beta_W, \beta_M, \theta_D, \theta_W, \theta_M)$$

La contrapposizione tra il modello HAR e il modello HAR-CVP mostra sia per ETF sia per le azioni che la performance migliore è data dal HAR-CVP, il primo infatti pone come condizione $\beta_{|r|} = \beta_r = \beta_{RV} = 0$, mentre il secondo rigetta tali ipotesi e pone $\beta_{|r|} > 0, \beta_r < 0, e \beta_{RV} < 0$ a prova del fatto che le determinanti esposte precedentemente siano valide, infatti l'incremento della persistenza è molto maggiore in caso di rendimenti negativi rispetto a quello dato dai rendimenti positivi, mostrando un'evidente asimmetria.

Anche in questo modello si evidenzia la presenza di un'asimmetria nella persistenza nel comportamento a seguito di un incremento dei rendimenti come si vede dal grafico proposto dagli autori e riportato in fig. 21.

Figura 21: Asimmetria della persistenza della volatilità. Fonte: Wang et al. (2018)



La dinamica di RV nel modello HAR tiene in considerazione non solo il valore giornaliero, ma anche quello settimanale e mensile, quando nel modello viene inserito il coefficiente CVP, il valore di RV_W e RV_M è ridotto notevolmente poiché il CVP ha un impatto invasivo, infatti considerando il valore di \bar{R}^2 del CVP esso esprime il 24%-28% nel ETF e 20% nelle azioni spiegando fino al 40% delle variabili, confrontando la spiegazione del modello HAR-CVP e quello HAR si nota che $|r_t|RV_t$ e r_tRV_t spiega in 15%-18% in più rispetto al valore dei rendimenti giornalieri, mensili e settimanali.

Infine nel modello (2.15) è stato aggiunto il fattore RQ che descrive la varianza dell'errore di misurazione del valore giornaliero di RV_t . L'autocorrelazione di RV_t è inversamente collegata al valore di RQ calcolato come segue:

$$RQ_t = \frac{n}{3} \sum_{i=1}^n r_{i,t}^4 \quad 2.16$$

Il nuovo modello è il seguente:

$$RV_{t+1} = \alpha + (\beta_0 + \beta_{|r|}|r| + \beta_r r_t + \beta_{RQ} RQ_t^{1/2})RV_t + \varphi Z_t + \varepsilon_{t+1} \quad 2.17$$

Solo nel caso in cui ci sia la restrizione $\beta_{|r|} = \beta_r = 0$ il coefficiente legato all'RQ è negativo e significativo descrivendo la relazione inversa, mentre se decade la restrizione il fattore RQ non mostra alcune fattore, per questo un confronto tra il modello 2.15 e 2.17 designa il primo come favorito.

Entrambi gli studi evidenziano come il modello HAR-CVP sia il migliore per la stima della volatilità futura, in particolare sono stati confrontati da Wang, Jian-Xin and Yang, Minxian quattro modelli diversi:

1. HAR
2. HARQ: modello HAR unito alla realizzata quarticità
3. HARSV: modello HAR sulla semivarianza
4. HAR-CVP

I modelli sono stati analizzati, con una rolling windows di 4 anni, considerando quattro misure di errore che mostrano la differenza che si è realizzata tra RV reale e quella stimata. Gli indicatori sono:

- A. $MSE = RV_T - \widehat{RV}_t$
- B. $QLIKE = \frac{RV_T}{\widehat{RV}_t} - \ln\left(\frac{RV_T}{\widehat{RV}_t}\right) - 1$
- C. $FER = \widehat{RV}_t - RV_T + RV_T \ln\left(\frac{RV_T}{\widehat{RV}_t}\right)$
- D. $MSE - ln \equiv [\ln(RV_t) - \ln(\widehat{RV}_t)]^2$

I risultati sono visibili nell'estrapolazione di una parte delle tabelle proposte dagli autori dove si mostra che il modello HAR-CVP è il migliore secondo ogni tipologia di loss function applicata, sia per le azioni dell'indice

S&P 100 sia per ETF su S&P500. Nella tabella 5 e 6 la performance di HAR_CVP è misurata dal cambiamento nel valore della perdita definito come:

$$\Delta(HAR_i) \equiv \frac{f(HAR_{CVP})}{f(HAR_i)} - 1.$$

Dove f è la media o la mediana e HAR_i = HAR, HARQ, HARSV.

Tabella 5: Confronto della stima della volatilità per le azioni (Wanget Al 2018)

	HAR_CVP	HAR	HARQ	HARSV	$\Delta(HAR)$	$\Delta(HARQ)$	$\Delta(HARSV)$	$\Delta(HAR)-0$	$\Delta(HARQ)-0$	$\Delta(HARSV)-0$
MSE										
Mean	33.4	63.8	29.3	70.7	-48%	14%	-53%	56%	57%	63%
Median	0.288	0.344	0.318	0.343	-16%	-10%	-16%	97%	88%	97%
StDev	645	1981	568	2138						
FER										
Mean	0.663	0.729	0.728	0.737	-9%	-9%	-10%	96%	92%	97%
Median	0.109	0.125	0.122	0.125	-13%	-10%	-13%	96%	92%	99%
StDev	4.65	4.46	5.16	4.58						
QLIKE										
Mean	0.585	0.944	1.168	0.938	-38%	-50%	-38%	83%	89%	85%
Median	0.0879	0.100	0.0987	0.0993	-12%	-11%	-12%	96%	94%	99%
StDev	6.44	13.4	20.5	14.8						
MSE-ln										
Mean	0.543	0.673	0.683	0.663	-19%	-20%	-18%	96%	97%	96%
Median	0.185	0.212	0.208	0.210	-13%	-11%	-12%	96%	96%	99%
StDev	1.24	1.60	1.68	1.58						

Tabella 6: Confronto della stima della volatilità per SPY (Wang et al. 2018)

	HAR_CVP	HAR	HARQ	HARSV	$\Delta(HAR)$	$\Delta(HARQ)$	$\Delta(HARSV)$
RV							
MSE							
Mean	2.973	3.167	3.920	2.836	-6%	-24%	5%
Median	0.0297	0.0357	0.0342	0.0323	-17%	-13%	-8%
StDev	55.4	50.8	84.7	41.0			
FER							
Mean	0.211	0.296	0.275	0.276	-29%	-24%	-24%
Median	0.037	0.0487	0.0514	0.0447	-24%	-28%	-17%
StDev	1.03	1.13	1.29	1.03			
QLIKE							
Mean	0.519	1.191	1.199	1.084	-56%	-57%	-52%
Median	0.0872	0.114	0.114	0.107	-24%	-24%	-19%
StDev	3.53	8.15	9.45	8.31			
MSE-ln							
Mean	0.527	0.892	0.896	0.814	-41%	-41%	-35%
Median	0.182	0.241	0.243	0.223	-24%	-25%	-18%
StDev	1.32	2.06	1.98	1.95			
RV^{OM}							
MSE							
Mean	7.129	5.193	6.206	4.839	37%	15%	47%
Median	0.0312	0.0372	0.0360	0.0359	-16%	-13%	-13%
StDev	197	113	157	98			
FER							
Mean	0.283	0.360	0.324	0.359	-21%	-13%	-21%
Median	0.0382	0.0495	0.0508	0.0478	-23%	-25%	-20%
StDev	2.23	1.95	2.10	2.00			
QLIKE							
Mean	0.531	1.241	1.097	0.928	-57%	-52%	-43%
Median	0.0854	0.111	0.116	0.104	-23%	-26%	-18%
StDev	2.85	7.81	6.87	3.83			
MSE-ln							
Mean	0.564	0.912	0.867	0.827	-38%	-35%	-32%
Median	0.181	0.233	0.242	0.223	-22%	-25%	-19%
StDev	1.34	2.12	1.94	1.80			

IL FLUSSO DI INFORMAZIONI

Nella sezione precedente sono state illustrate le caratteristiche della persistenza della volatilità:

1. Essa è direttamente proporzionale all'ampiezza dei rendimenti giornalieri
2. I rendimenti negativi generano maggior persistenza rispetto a quelli positivi
3. La volatilità giornaliera riduce la persistenza

Il momento primo e secondo della serie storica dipendono dal flusso informativo che genera il processo di scoperta del prezzo, la persistenza è quindi collegata al flusso di informazioni, essa può dipendere sia dai cluster di informazioni che vengono rilasciate nel mercato creando di conseguenza i cluster di volatilità sia dal comportamento dei partecipanti che possono creare dei cluster per la loro sensibilità alle informazioni sul mercato.

Questo duplice processo di generazione della persistenza è stato descritto da Liesenfeld (2001), dove sono messi in evidenza i due processi latenti associati con i cluster di volatilità. L'autore attraverso la generalizzazione del modello di mistura ha riscontrato le medesime caratteristiche del processo, ovvero:

- la sensibilità dei trader non è costante nel tempo ma varia durante lo stesso,
- sia la quantità di informazioni, sia il fattore di sensibilità degli investitori sono importanti nella descrizione dei movimenti di volatilità,
- i movimenti corti sono guidati principalmente dal flusso di informazioni, mentre i movimenti lunghi dal fattore sensibilità.

Berger et al. (2009) descrivono la relazione che vi è tra il flusso degli ordini, che crea delle variazioni nei rendimenti, e la conseguente induzione dei fenomeni nella volatilità della serie. Il mercato ha un proprio processo di scoperta del prezzo, questo valore varia in base ai nuovi ordini che riceve il sistema, ed è proprio questo flusso di ordini che trasmette delle nuove informazioni al mercato (flusso di informazioni) che generano i cambiamenti sopradescritti. Gli autori hanno dimostrato il processo per il tasso di cambio, ma lo stesso fenomeno è ben documentato anche per altri strumenti.

Sono state utilizzate, da Berger et al. (2009), tre serie storiche che descrivono: il tasso di cambio, il volume di scambio e il flusso di ordini per il periodo dal 1999 al 2004 del tasso di cambio euro-dollaro con un intervallo di 5 minuti, tranne nell'orario di punta dalle 03.00 alle 11.00 dove è stato usato un minuto di intervallo, per definire le motivazioni alla base del fenomeno della volatility clustering. Secondo gli autori i rendimenti ($r_{t,i}$) sono legati al flusso di ordini ($of_{t,i}$) dalla seguente relazione:

$$r_{t,i} = \lambda_t of_{t,i} \quad 2.18$$

Dove λ_t rappresenta la sensibilità degli investitori alle informazioni ricavate dal processo di trading. La relazione mette in evidenza come il prezzo dipende dal flusso perché questo rivela le informazioni private o

il sentimento di mercato sul prezzo, inoltre il coefficiente riflette gli aggiustamenti a seguito delle nuove informazioni.

La volatilità giornaliera, descritta dalla formula 2.16, diventa:

$$RV_t = \sum_{i=1}^K r_{t,i}^2 = \lambda_t^2 \sum_{i=1}^K of_{t,i}^2 \quad 2.19$$

La formulazione mette in evidenza come la volatilità dipende quindi dal coefficiente di sensibilità al quadrato e dal flusso di ordini al quadrato.

Gli autori hanno stimato l'omologo empirico della funzione 2.24,

$$r_{t,i} = \lambda_t of_{t,i} + \varepsilon_{t,i} \quad 2.20$$

costruendo le seguenti tabelle hanno mostrato i risultati della regressione dei rendimenti sui contemporanei ordini, nella prima il coefficiente della pendenza λ_t è stato fissato, mentre nella seconda esso varia all'interno dei giorni ma non varia tra i giorni. Nella seconda tabella si nota la distribuzione dei percentili della distribuzione empirica.

Tabella 7: Results from regressing returns onto contemporaneous order flow. (Berger et al. 2009)

N	Intercept	$\hat{\lambda}$	R^2
Panel A: Full-day, five-minute			
428,832	-0.114 (0.004)	52.457 (0.223)	0.475
Panel B: 3-11am, one-minute			
714,720	-0.038 (0.002)	48.696 (0.162)	0.417

32

³² Berger David, Chaboud Alain, Hjalmarsson Erik, (2009) What drives volatility persistence in the foreign exchange market? Journal of Financial Economics 94 (2009) 192-213

Tabella 8: Summary of daily results from regressing returns onto contemporaneous order flow separately for each day. (Berger et al. 2009)

	Mean	Std.dev.	1%	5%	10%	25%	50%	75%	90%	95%	99%
Panel A: Full-day, five-minute											
$\hat{\lambda}_t$	55.147	15.901	26.820	34.642	38.202	44.320	53.306	63.312	73.887	83.875	106.858
R^2	0.511	0.096	0.157	0.339	0.403	0.467	0.525	0.573	0.614	0.633	0.674
Panel B: 3–11am, one-minute											
$\hat{\lambda}_t$	50.573	14.219	26.949	32.325	35.250	40.534	48.291	58.060	68.226	76.724	95.441
R^2	0.463	0.076	0.186	0.340	0.379	0.430	0.471	0.509	0.542	0.562	0.588

Il valori di R^2 nella prima tabella superano il 40% per i due passi di campionamento, mettendo in evidenza la validità del modello, nella seconda tabella, dove il fattore sensibilità non è fissato, esso viene stimato con valori maggiori, a fronte di un valore di R^2 superiore al 50%.

Infine gli autori hanno stimato con il metodo OLS il seguente modello a partire dagli stessi dati suddivisi come sopra descritto:

$$\log(RV_t) = \alpha + 2\beta_i \log(\lambda_t) + \beta_{of} \log\left(\sum_{i=1}^K of_{t,i}^2\right) + u_t \quad 2.21$$

Nella prima riga non ci sono restrizioni, mentre la seconda e la terza pongono a zero rispettivamente β_i e β_{of} , nel caso uno dei due fattori venga eliminato il valore di R^2 diminuisce rendendo meno adatto il modello.

Tabella 9: Results from OLS estimation of the volatility equation. (Berger et al. 2009)

$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}_i$	$\hat{\beta}_{of}$	R^2
Panel A: Full-day, five-minute			
-19.154 (0.223)	0.822 (0.011)	0.867 (0.013)	0.831
-5.127 (0.160)	0.530 (0.020)		0.318
-7.410 (0.351)		0.481 (0.026)	0.187
Panel B: 3–11am, one-minute			
-20.206 (0.214)	0.894 (0.011)	0.905 (0.013)	0.849
-6.636 (0.172)	0.642 (0.022)		0.363
-9.003 (0.362)		0.574 (0.028)	0.218

Gli autori hanno dimostrato che “The results in the previous section give strong support to the ability of market sensitivity and integrated squared order flow to jointly explain the persistence in volatility.

Although the estimated slope coefficients for both of these variables are highly significant and close to their theoretical values”³³. Tra i due fattori non è stato possibile determinare quale sia quello che contribuisce maggiormente alla formazione dei cluster, ma sono state fatte alcune considerazioni: il flusso informativo ha una persistenza minore rispetto a quella della volatilità, mentre il fattore di sensibilità ha un fattore di persistenza molto simile, da questo si può dedurre che il coefficiente di sensibilità è una parte importante nella presenza dei cluster di volatilità.

Le motivazioni che influiscono sui cambiamenti del fattore di sensibilità sono legate al cambiamento del comportamento degli investitori, ad esempio alcuni possono variare la loro avversione al rischio, la presenza nel mercato di nuove informazioni, anche con la presenza di informazioni private o legate all’attenzione che un investitore dedica alle news.

Come la volatilità anche il volume di trading può essere collegato al flusso di informazioni che generano i movimenti di prezzo, lo studio di Liesenfeld (2001) afferma che non vi è alcun collegamento tra volume e fattore di sensibilità mentre è collegato al flusso di informazioni.

La persistenza del volume può essere descritta dal processo di aggiustamento del prezzo a seguito di una nuova informazione immessa nel mercato, che fa cambiare il valore dello strumento e genera una serie di acquisti-vendite fino ad arrivare ad un nuovo prezzo di equilibrio. Il volume però non è solamente collegato al flusso di informazioni ma ha una parte non correlata ad esso che riguarda il rumore o la liquidità del trading.

Per questo motivo non è possibile determinare come unico fattore che guida le dinamiche di volatilità e volume, i due fenomeni hanno persistenze diverse e quindi non può esserci un unico fattore che le descrive entrambe.

METODI DI CALCOLO

Il modello di volatilità e la sua stima è molto importante per diverse situazioni nell’analisi dei rendimenti, tra le caratteristiche che più influiscono nell’accuratezza del modello è la presenza della volatility clustering e delle caratteristiche ad essa collegate.

Nel corso del tempo si è passati dalla descrizione di una distribuzione normale come sintesi della serie storica a cercare nuovi modelli che possano incorporare gli stylized facts enunciati, la persistenza della volatilità trova riscontro nei modelli ARCH, e nella sua generalizzazione GARCH. Prima di analizzare i diversi

³³ David Berger, Alain Chaboud, Erik Hjalmarsson, 2009 What drives volatility persistence in the foreign exchange market? *Journal of Financial Economics* 94 (2009) 192–213

modelli possibili per la stima della persistenza vengono ora mostrati alcuni metodi di calcolo quantitativi per la volatility clustering.

Un primo metodo è stato proposto da Tseng e Li (2012), i quali hanno mostrato un indice che è in grado di confrontare il grado di volatility clustering tra diverse serie finanziarie a partire dai rendimenti usati per descrivere le fluttuazioni del prezzo.

Gli autori hanno collegato il grado di decadimento dei rendimenti assoluti al grado dei cluster delle grandi fluttuazioni, la funzione di autocorrelazione dei rendimenti assoluti mostra un decadimento lento. Questa autocorrelazione è stata testata dagli autori con il risultato che essa non è influenzata dalla presenza delle code spesse ma dalla posizione dei clustering delle grandi fluttuazioni.

Oltre a questa relazione un metodo per calcolare il grado dei cluster è la probabilità, gli autori hanno proposto la seguente tabella:

Tabella 10: The probability of the occurrence of large and small fluctuations following the occurrence of large or small ones on the previous day (the first column). The result here is for NASDAQ time series. (Tseng et Al 2011)

P%= 20%	LARGEST	SMALLEST	REST	Somma
LARGEST	0.3947	0.1156	0.4896	1
SMALLEST	0.1265	0.2401	0.6334	1
REST	0.1597	0.2148	0.6255	1

Come si vede dalla tabella, dove si mostrano le probabilità che un evento sia seguito da un altro tipo di evento, e si nota come le fluttuazioni maggiore sono seguite da altre fluttuazioni maggiori nel 39.47% dei casi e le minori sono seguite da minori nel 24%.

Una misura più diretta della volatility clustering è stata poi proposta per poter confrontare tra loro serie diverse ed indagare le differenze che si trovano. Il metodo usato è quella della rolling windows con una finestra temporale di n giorni. All'interno di ogni finestra è stato calcolato l'indice 2.22, utile per velocizzare la trattazione delle serie, che rappresenta il quoziente che indica numericamente il grado di raggruppamento poiché vengono contate le p% che indicano il numero di fluttuazioni che superano il valore percentuale p nell'arco temporale di n giorni. Attraverso il grafico della rolling windows si può analizzare le differenze nei cluster.

$$R_n = \frac{\sigma_e}{\sigma_G} \quad 2.22$$

a quoziente maggiore corrisponde un grado maggiore.

“Dove σ_e e σ_G rappresentano la deviazione standard del numero di giorni delle più grandi p% fluttuazioni in periodi di n giorni rispettivamente per la serie empirica e per quella simulata.”³⁴

La presenza di asimmetria nelle serie economiche finanziarie viene indagata attraverso l'indice creato precedentemente, in particolare l'asimmetria tra fluttuazioni maggiori e minori è definita come:

$$A_{ls} = \frac{R_l - R_s}{R_l + R_s} \quad 2.23$$

Questo serve per vedere se le fluttuazioni maggiori (largest) tendono a creare cluster maggiori rispetto alle fluttuazioni minori (smallest).

La asimmetria dei rendimenti tra quelli positivi e negativi è invece definita come:

$$A_{\pm} = \frac{R_+ - R_-}{R_+ + R_-} \quad 2.24$$

Dallo studio di più serie gli autori hanno definito che vi sono solitamente maggiori grandi perdite rispetto a grandi guadagni e che le fluttuazioni maggiori tendono a creare più cluster delle minori, come già descritto precedentemente.

La volatility clustering è stata misurata anche attraverso la probabilità condizionale da Chen et al. (2006) Questa misura è preferibile, secondo gli autori, alle stime future perché basata direttamente sui rendimenti Essa viene descritta da una scaling reaction definita da:

$$P(r|r_p) = \frac{1}{w(r_p)} f\left(\frac{r}{w(r_p)}\right) \quad 2.25$$

Dove: la funzione $f(z)$ serve per descrivere il fenomeno delle fat tails, mentre la funzione $w(r_p)$ descrive il fenomeno della volatility clustering. $P(r|r_p)$ è definito come “la probabilità dei rendimenti r in un intervallo di tempo T , condizionato al valore assoluto dei rendimenti r_p nel intervallo precedente della stessa dimensione T .”³⁵

Utilizzando la misura di valori assoluti diversi Chen et al. hanno dimostrato una positiva correlazione tra l'ampiezza di $P(r|r_p)$ e r_p . inoltre le differenti curve della probabilità condizionata tendono ad un'unica curva sia al variare dei valori assoluti sia al variare di t . Il valore di w che dipende inizialmente dal valore assoluto può essere inteso come un indicatore della forza della volatility clustering.

L'affermazione sulla variazione dei rendimenti anche a causa della variazione di T portano ad una nuova funzione che descrive i due stylized facts che diviene:

³⁴ Tseng, J. J., & Li, S. P. (2011). Asset returns and volatility clustering in financial time series. *Physica A*, 390, 1300–1314

³⁵ Chen Kan, Jayaprakash C. and Yuan Baosheng, (2006) Conditional Probability as a measure of volatility clustering in financial time series, Cornell University Library arXiv.org Physics (Other); Quantitative Finance 2006

$$P(r|r_p) = \frac{1}{w(r_{p,T})} f\left(\frac{r}{w(r_{p,T})}\right)$$

2.26

Dove w dipende sia da r_p ovvero il valore assoluto dei rendimenti sia dal tempo T .

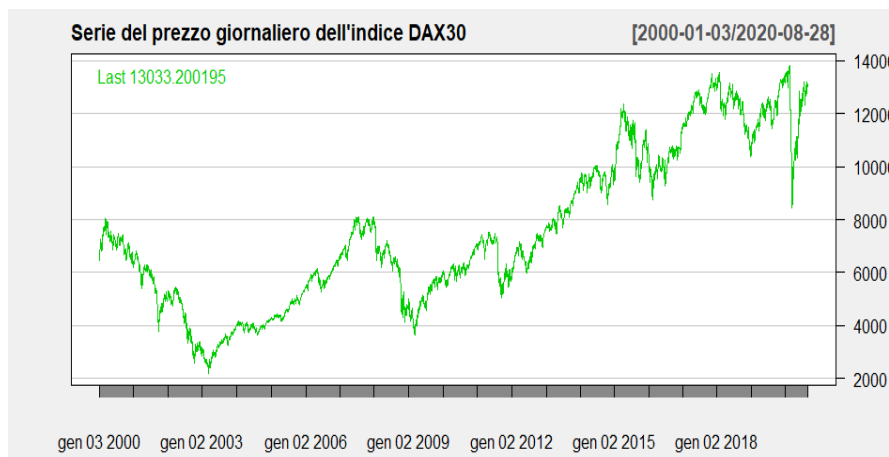
Tutti i modelli presentati fino ad ora infatti sebbene abbiano come focus principale la volatility clustering cercano di creare un metodo che sia in grado di definire anche altri stylized fact che vengono evidenziati nelle serie storiche.

IL MODELLO DI VOLATILITÀ

Nel capitolo precedente è stato presentato il problema di quale misura utilizzare come rappresentazione del rischio di uno strumento, infatti per poter operare è importante riuscire ad avere una stima attendibile della volatilità. Come si vede dal grafico del DAX30 il valore della volatilità cambia nel tempo, di conseguenza l'uso di un modello statico per la volatilità ha una minore efficacia. Nel 1982 Engle descrisse il modello ARCH (modello autoregressivo a eteroschedasticità condizionata) con la base della teoria sulla dinamica della volatilità. Il processo è in grado di spiegare alcuni delle caratteristiche empiriche più evidenti delle serie storiche finanziarie, come dice Engle (2004) "returns are almost unpredictable, they have surprisingly large numbers of extreme values and both the extremes and quiet period are clustered in time. These features are often describe as unpredictability, fat tails and volatility clustering. These are precisely the characteristics for which an ARCH model is designed"³⁶.

Le caratteristiche descritte sono esemplificate nelle seguenti pagine dove viene utilizzato come esempio l'indice Tedesco DAX 30. Questo indice rappresenta le 30 maggiori aziende per capitalizzazione e per liquidità del segmento Prime standard della borsa di Francoforte, le aziende al suo interno rappresentano 80% del valore scambiato nella borsa tedesca.

Figura 22: Prezzo giornaliero dell'indice DAX30, da 01-01-2000 al 28-08-2020



³⁶ Engle Robert (2004), Risk and volatility: Econometric models and financial practise, The American Economic Review Vol. 94, No. 3 (Jun., 2004), pp. 405-420

Figura 23: Rendimenti logaritmici giornalieri dell'indice DAX30 dal 01-01-2000 al 25-08-2020

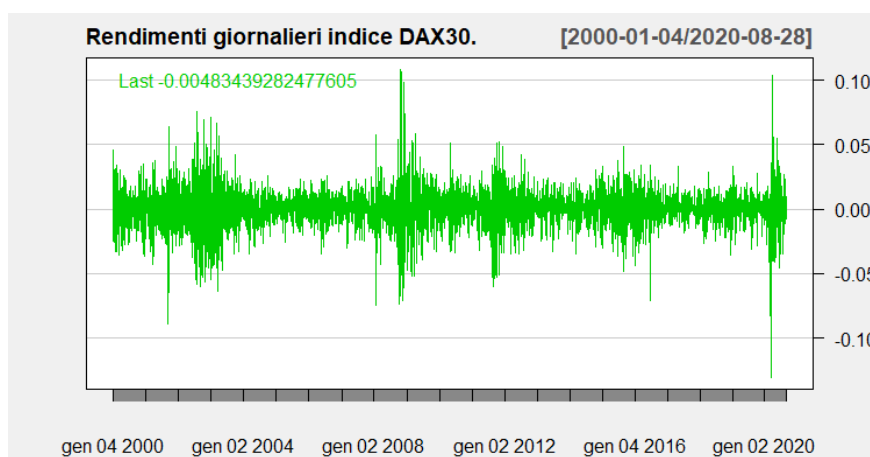
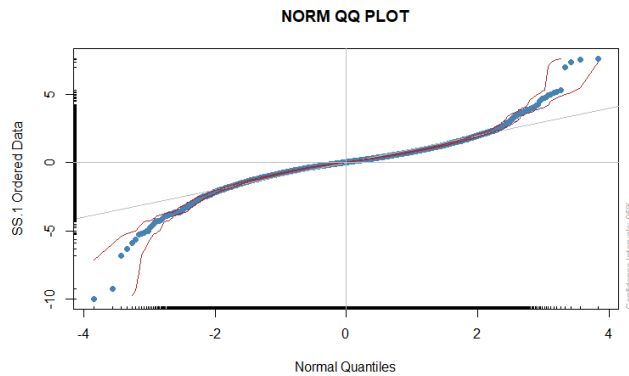


Tabella 11: Statistiche di base della serie dei rendimenti giornalieri dell'indice DAX30.

Rendimenti DAX30	
Mean	0.000312
Median	0.000805
Variance	0.000199
St. dev.	0.014113
Skewness	-0.309474
Kurtosis	6.758702

Il prezzo di scambio nel mercato non sembra seguire alcun patterns ricorrente, per determinare le caratteristiche della serie storiche si è passati al calcolo dei rendimenti giornalieri come differenza logaritmica del prezzo al tempo T e al tempo $T-1$. La distribuzione normale non sembra essere una buona approssimazione della serie dei rendimenti, infatti guardando alla tabella con le statistiche di base è possibile notare la presenza di un'asimmetria negativa, il valore che desta però maggiore attenzione è il valore di curtosi. Essa indica una probabilità più elevata (rispetto ad una distribuzione normale) di osservare valori estremi. In una distribuzione normale il valore è pari a 3, in questo caso, come in altre serie storiche tra cui quelle mostrate nei capitoli precedenti, il valore è maggiore. Questo fatto indica una distribuzione è leptocurtica con la presenza di molti valori estremi. La figura 24 mostra come le code della distribuzione si allontanino dai valori assunti della normale.

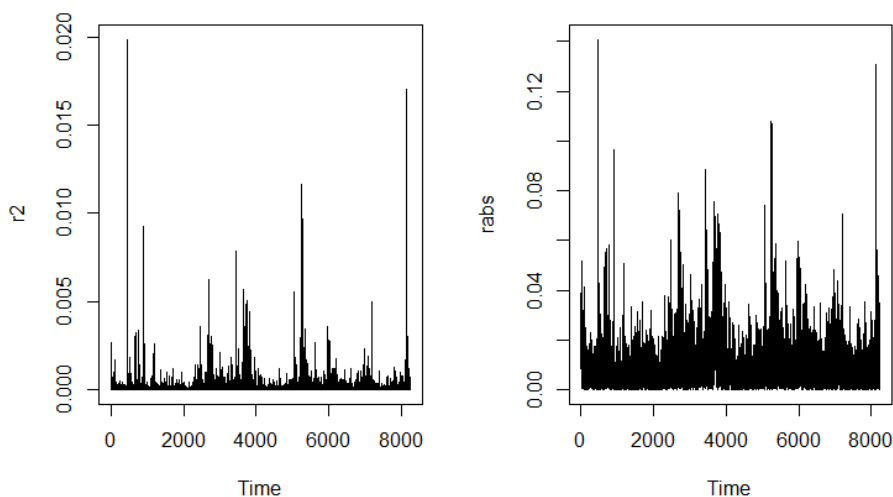
Figura 24: Grafico quantile-quantile della serie dei rendimenti giornalieri dell'indice DAX30.



La serie dei prezzi dell'indice viene definita non stazionaria, come visibile nel grafico 22, al contrario della serie dei rendimenti; in essa sono presenti raggruppamenti che persistono nel tempo, questo fenomeno è definito volatility clustering dove periodi a bassa volatilità sono seguiti da periodi di alta volatilità.

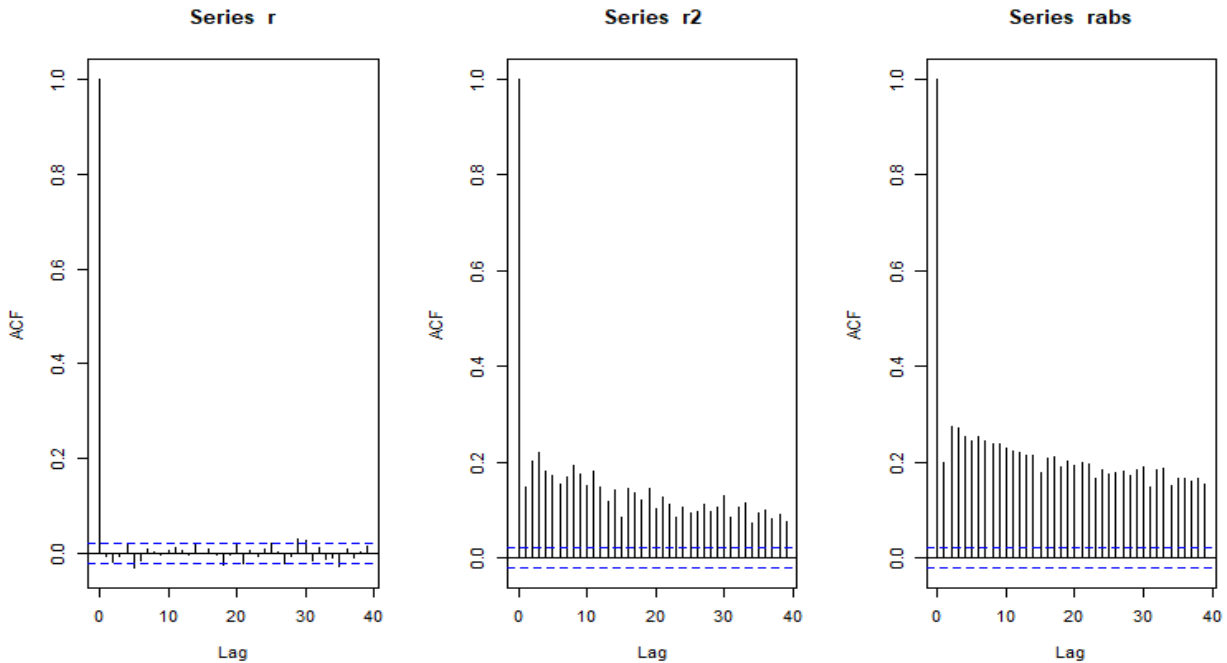
Il grafico dell'ACF mostra un valore significativo al lag 5 ma non presenta il carattere di autocorrelazione dei rendimenti, che invece è presente nelle serie dei rendimenti quadrati e assoluti. Questa peculiarità illustrata in figura 26 è stata studiata da Engle nel 1982, per mostrare come "l'andamento della varianza del processo generatore dei dati sia di tipo condizionalmente autoregressivo: sulla base dell'informazione disponibile al tempo $t-1$, la varianza al tempo t è esprimibile come funzione dei valori più recenti delle innovazioni al quadrato."³⁷

Figura 25: Rendimenti al quadrato e rendimenti assoluti dei rendimenti giornalieri della serie DAX30



³⁷ Gallo G., Pacini B. (2002), Metodi quantitativi per i mercati finanziari, Carocci Editore.

Figura 26: Funzione di autocorrelazione della serie dei rendimenti giornalieri e della serie dei rendimenti elaborati dell'indice DAX30.



IL MODELLO ARCH

Il termine ARCH indica un processo Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. L'eteroschedasticità di un processo indica la non costanza della varianza tra le diverse variabili che lo compongono. Il termine autoregressivo specifica che il variare è determinato dalle informazioni passate; in altre parole la varianza al tempo t è esprimibile come funzione dei valori delle innovazioni al quadrato dato il set informativo conosciuto in $t-1$. I processi ARCH sono definiti a media zero, serialmente non autocorrelati con una varianza condizionale non costante basata nel passato, e una varianza non condizionale costante e sono in grado di cogliere il fenomeno della volatility clustering.

Prima di procedere all'identificazione del modello ARCH(p) è opportuno verificare la presenza di varianza condizionata eteroschedastica e autocorrelata nella serie storica. Il test proposto da Engle (1982) viene svolto sui residui ε_t di un modello per la media ARMA(p,q) identificato e stimato in precedenza:

$$\hat{\varepsilon}_t = r_t - (\hat{\mu} + \hat{\phi}_1 r_{t-1} + \dots + \hat{\phi}_p r_{t-p} + \hat{\psi}_1 \hat{\varepsilon}_{t-1} + \dots + \hat{\psi}_q \hat{\varepsilon}_{t-q}) \quad 3.1$$

I quadrati dei residui sono regrediti su una costante e su p dei loro valori passati:

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \hat{\varepsilon}_{t-p}^2 + u_t \quad 3.2$$

Quest'ultima funzione mostra gli effetti di persistenza della varianza perché ad un valore maggiore di α viene generata un'ampia varianza nel periodo successivo. Il test è negativo poiché verifica l'assenza di questa persistenza attraverso l'ipotesi nulla:

$$H_0: \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$$

La statistica test LM è calcolata a partire dai risultati della regressione 3.2:

$$LM = TR^2 \quad 3.3$$

Dove T è la numerosità campionaria e R^2 è il coefficiente di determinazione della regressione 3.2. Tale statistica sotto ipotesi nulla ha distribuzione χ^2 con p gradi di libertà.

Nel caso in cui l'ipotesi venga accettata vi è un'assenza di effetti ARCH, ovvero di persistenza della varianza, questo significa che i residui elaborati (r^2) non sono autocorrelati.

La chiave dello studio del modello sono le innovazioni, esse sono descritte dalla formulazione:

$$\varepsilon_t = \eta_t \sqrt{h_t} \quad 3.4$$

Dove:

h_t è la varianza condizionata e η_t condizionatamente al set informativo conosciuto in $t-1$ sono variabili standardizzate (0,1) e nel caso in cui siano gaussiane ne deriva $\varepsilon_t \sim N(0, h_t)$.

Il modello descritto da Engle sulla volatilità è definito come segue:

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad 3.5$$

Il collegamento tra varianza condizionata e non condizionata è specificata nella seguente dimostrazione per il modello ARCH(1,1):

$$E(\varepsilon_t^2) = E(\varepsilon_{t-1}^2) = \sigma^2 \quad 3.6$$

$$E(\varepsilon_t^2) = E(h_t) \quad 3.7$$

$$E(\varepsilon_t^2) = \omega + \alpha_1 E(\varepsilon_{t-1}^2) \quad 3.8$$

$$\sigma^2 = \omega + \alpha_1 \sigma^2 \leftrightarrow \sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha_1} \quad 3.9$$

Le condizioni per la validità del modello:

1. $\omega > 0$ questa condizione esiste affinché il valore della varianza sia positivo
2. $\alpha_i \geq 0$ nel caso in cui il valore fosse negativo potrebbe generare una varianza negativa
3. $\alpha_i < 1$ la varianza tenderebbe a infinito, se il valore fosse superiore a 1

IL MODELLO GARCH

Modellare la varianza con un modello ARCH potrebbe richiedere un ordine p elevato dovendo includere molteplici ritardi, questo comporta l'inserimento nella specificazione di informazioni lontane nel tempo che possono condurre ad un'errata descrizione del modello.

Per questo motivo Bollerslev (1986) introdusse la classe di modelli GARCH ovvero Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity che rappresentano la generalizzazione dei modelli ARCH.

La formulazione del modello comprende una seconda componente autoregressiva rappresentata da q ritardi della varianza condizionata passata, in questo modo il modello è più parsimonioso rispetto al processo ARCH(p). Il modello GARCH(p,q) è così definito:

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j} \quad 3.10$$

Dove p è l'ordine dei ritardi dell'innovazione, mentre q rappresenta il numero dei ritardi della varianza condizionata passata. In questo modello il valore della varianza condizionata passata viene inserito perché rappresenta una sintesi delle informazioni passate per una percentuale β .

Anche questo modello richiede siano soddisfatte delle condizioni sui parametri:

1. $\omega > 0, \alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0$ per avere una varianza positiva
2. $\sum_{i=1}^{p,q} (\alpha_i + \beta_i) < 1$ come condizione di stazionarietà.

Il modello è in grado di descrivere il fenomeno della volatility clustering dato che se si ha un valore alto di ε_{t-1}^2 e h_{t-1} si genera un valore alto al tempo t nelle stesse due componenti.

La varianza non condizionata del modello è dimostrabile essere pari a:

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)} \quad 3.11$$

Dove $\alpha_1 + \beta_1$ è definito fattore di persistenza della volatilità.

Anche il modello GARCH descrive una distribuzione leptocurtica come dimostra Bollerslev (1986), infatti il momento quarto esiste se:

$$3\alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2 < 1 \quad 3.12$$

e il valore atteso dell'innovazione al quadrato è pari a:

$$E(\varepsilon_t^2) = \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \beta_1} \quad 3.13$$

Il momento quarto è quindi definito come:

$$E(\varepsilon_t^4) = \frac{3\omega^2(1 + \alpha_1 + \beta_1)}{(1 - \alpha_1 - \beta_1) * (1 - 3\alpha_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - \beta_1^2)} \quad 3.14$$

Quindi l'indice di curtosi è pari a

$$\kappa = \frac{(E(\varepsilon_t^4) - 3E(\varepsilon_t^2)^2)}{E(\varepsilon_t^2)^2} = \frac{6\alpha_1^2}{(1 - 3\alpha_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - \beta_1^2)} \quad 3.15$$

con valore positivo e quindi descrive una distribuzione a code spesse.

È possibile dimostrare che un processo GARCH(p,q) è la rappresentazione di un processo ARCH(∞), si procede per iterazione:

$$\begin{aligned} h_t &= \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} & 3.16 \\ h_t &= \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 (\omega + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1 h_{t-2}) \\ h_t &= \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 (\omega + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_2 (\omega + \alpha_3 \varepsilon_{t-3}^2 + \beta_3 h_{t-3})) \end{aligned}$$

Che può essere trasformato in

$$h_t = \omega \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i + \alpha_i \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \varepsilon_{t-i-1}^2 \quad 3.17$$

STIMA DEL MODELLO PER LA MEDIA DELL'INDICE DAX30

Nei paragrafi precedenti è stato descritto il Test definito da Arch per la presenza di effetti ARCH sui residui di un modello per la media, per questo motivo per poter definire un modello per la varianza è necessario prima svolgere un'analisi sulla media della serie storica.

Prima di identificare il modello per la descrizione della media sono necessarie alcune analisi preliminari sulla serie dei rendimenti giornalieri dell'indice DAX30. I test svolti sulla serie concludono che la serie è non lineare, non stazionaria e non normale.

Il test sulla normalità effettuato è il Jarque-Bera test che ha come ipotesi nulla la distribuzione della serie come una distribuzione normale, in questo caso il valore è inferiore al livello di significatività e quindi viene rifiutata l'ipotesi nulla.

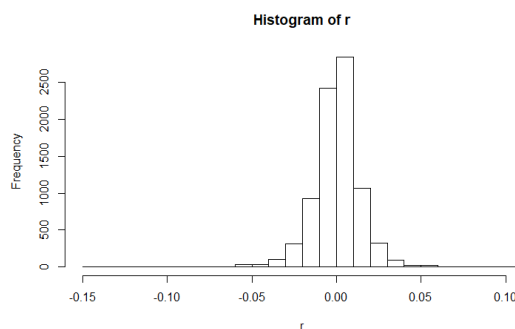
Jarque - Bera Normality Test

P VALUE:

Asymptotic p Value: < 2.2e-16

Questa ipotesi è anche mostrata dalle statistiche di base della tabella 11 che mostrano un eccesso di curtosi e un'asimmetria della serie. Anche l'istogramma della serie mostra la non normalità.

Figura 27: Istantogramma della serie dei rendimenti dell'indice DAX30.



La non linearità viene definita dal test Teraesvirta, che ha come ipotesi nulla la linearità della serie, in questo caso l'ipotesi viene rifiutata.

Teraesvirta Neural Network Test

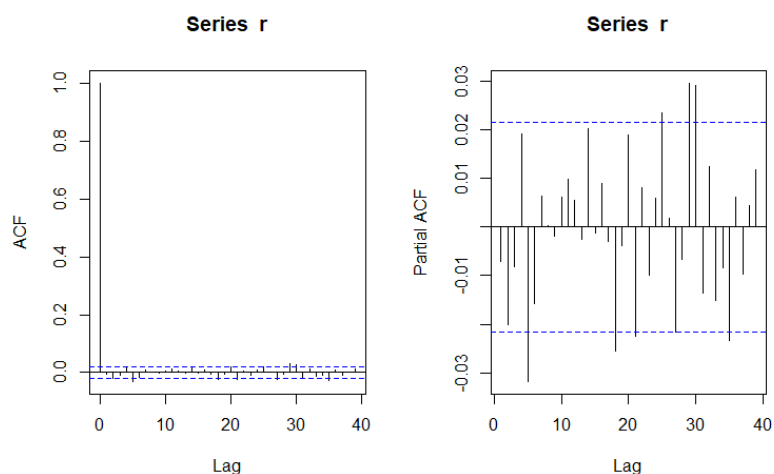
data: r

X-squared = 18.092, df = 2, p-value = 0.0001179

Il fenomeno descritto come volatility clustering è mostrato nel grafico 21 che rappresenta i rendimenti della serie, in esso si mostra il carattere di stazionarietà della serie.

Il modello per la media può essere identificato a partire dall'osservazione delle funzioni di autocorrelazione e autocorrelazione parziale calcolata sulla serie dei rendimenti:

Figura 28: Grafico dell'ACF e della PACF sulla serie dei rendimenti giornalieri dell'indice DAX30.



Il grafico 26 mostra un valore significativo al lag 5; questo è un indicatore per la stima del modello della media. Tra i modelli analizzati viene scelto il modello AR(5) con i primi quattro lags fissati a zero poiché ha il valore minore del criterio AIC, come mostrato in tabella 12.

Tabella 12: Confronto dei modelli secondo il criterio AIC e BIC.

	AIC	BIC
AR(5)	-46843,04	-46829,01
MA(5)	-46842,94	-46828,91

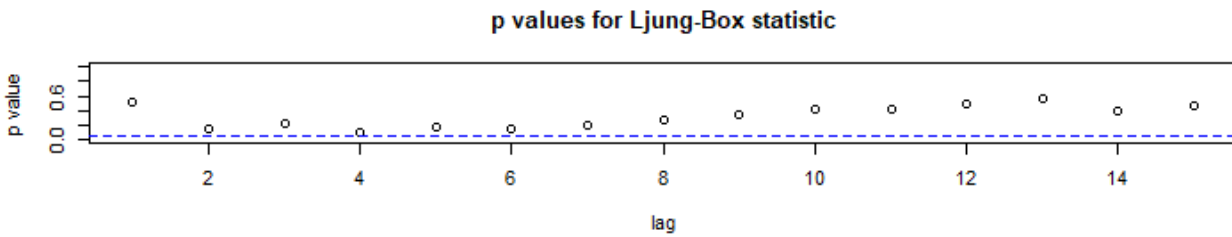
MODELLO AR(5)

Tabella 13: Modello AR(5)

	Ar1	Ar2	Ar3	Ar4	Ar5
	0	0	0	0	-0.0314
s.e.	0	0	0	0	0.0110

Nel modello sono eseguiti i test di validazione dei residui, essi risultano essere identicamente e indipendentemente distribuiti; il test Ljung Box determina l'assenza di autocorrelazione seriale, poiché i p-value sono maggiori del livello del test (5%) e si accetta quindi l'ipotesi nulla di assenza di correlazione seriale.

Figura 29: Test Ljung-Box dei residui del modello AR(5)



Per controllare se i residui sono I.I.D. viene svolto il test BDS, l'ipotesi nulla, in questo caso rifiutata in tutti i test, è che i residui siano I.I.D, quest'ipotesi non specifica se i residui siano: identicamente distribuiti, indipendenti, o entrambe le cose.

Figura 30: Test BDS sulla serie dei residui del modello AR(5)

Standard Normal =				
	0.0071	0.0141	0.0212	0.0282
[2]	15.9817	17.3840	18.5695	18.7585
[3]	24.1173	25.4646	26.5824	26.5037

p-value =				
	0.0071	0.014	0.0212	0.0282
[2]	0	0	0	0
[3]	0	0	0	0

STIMA DEL MODELLO PER LA VOLATILITÀ

I residui del modello per la media (un AR(5)) sono quindi la serie da analizzare per poter effettuare l'identificazione e la stima del modello per la varianza, il test proposto da Engle (1982) ha fornito i seguenti risultati:

ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects

data: a

Chi-squared = 1053.3, df = 10, p-value < 2.2e-16

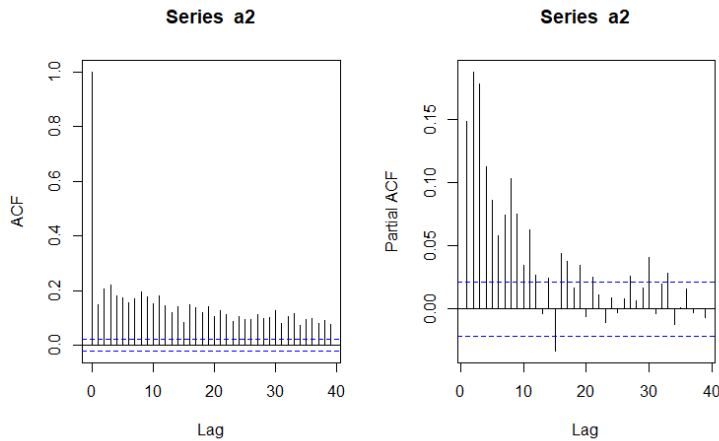
ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects

data: a

Chi-squared = 860.72, df = 5, p-value < 2.2e-16

Il test svolto sia con 5 ritardi che con 10 ritardi rifiuta l'ipotesi nulla di assenza di effetti ARCH, evidenziando così la presenza di eteroschedasticità nella serie dei residui (e quindi anche nella serie dei rendimenti) consentendo di utilizzare il modello proposto da Engle (1982) e generalizzato da Bollerslev (1986). Il grafico dell'autocorrelazione e dell'autocorrelazione parziale dei residui al quadrato mostrano la presenza di effetti ARCH:

Figura 31: ACF E PACF dei residui al quadrato del modello AR(5).



Entrambi i grafici mostrano un'estensione lunga quindi è improbabile che il modello ARCH(p) sia adeguato, infatti dovremmo usare un ordine p elevato descrivere completamente il fenomeno. Viene stimato allora il modello GARCH (1,1).

MODELLO GARCH(1,1)

Tabella 14: stima del modello GARCH(1,1)

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
mu	7.563e-04	1.164e-04	6.499	8.09e-11
omega	3.661e-06	4.231e-07	8.652	< 2e-16
alpha1	9.747e-02	7.233e-03	13.475	< 2e-16
beta1	8.844e-01	7.940e-03	111.389	< 2e-16

I vincoli sui parametri sono rispettati: $\omega > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0$ e $(\alpha_1 + \beta_1) < 1$, e tutti i coefficienti sono statisticamente significativi. I test di validazione eseguiti sui residui standardizzati e riportati nella tabella sottostante validano il modello per la varianza.

Tabella 15: RISULTATI DEI TEST STATISTICI SUL MODELLO GARCH(1,1)

Jarque-Bera Test	R	Chi ²	22989.29	0
Ljung-Box Test	R	Q(10)	2.346849	0.9929246
Ljung-Box Test	R	Q(15)	5.015399	0.9919952
Ljung-Box Test	R	Q(20)	13.50309	0.8547712
Ljung-Box Test	R ²	Q(10)	3.8819	0.9525174
Ljung-Box Test	R ²	Q(15)	5.56094	0.9862176
Ljung-Box Test	R ²	Q(20)	6.778689	0.9973502
LM Arch Test	R	TR ²	4.779658	0.9649364

Il modello GARCH però non tiene in considerazione l'asimmetria che solitamente è presente per poter considerare anche questa evidenza empirica sono stati proposti in letteratura alcuni modelli asimmetrici.

L'ASIMMETRIA NEL MODELLO PER VOLATILITÀ

La specificazione ARCH e GARCH descrivono l'impatto delle notizie come simmetrico e non descrivono alcuna asimmetria tra le conseguenze delle news positive o negative, considerando invece, per ogni nuova informazione un effetto quadratico (e quindi simmetrico rispetto allo 0) della volatilità. Come già evidenziato nel secondo capitolo la volatilità reagisce diversamente a shock positivi e negativi, si parla in questo caso di leverage effect (Black, 1976): "Statisticamente l'effetto avviene quando un inaspettato discesa dei prezzi (causato da news negative) aumenta la volatilità prevedibile di più che un inaspettato aumento dei prezzi(dovuto a news positive) di una magnitudine simile"³⁸, in altre parole si ha una maggiore volatilità a seguito di una discesa dei prezzi.

Il modello descritto non riesce a cogliere questo fenomeno, visibile in molti studi econometrici, per questo motivo Engle (1993) ha proseguito il proprio lavoro proponendo un test per valutare la presenza di effetti leva, in presenza dei quali la specificazione dei modelli ARCH e GARCH risulterebbero inappropriate. Il test a cui si fa riferimento è chiamato Sign Bias Test e si compone di tre test che possono essere svolti congiuntamente o meno.

³⁸ Traduzione di Engle Robert F. and Ng Viktor K., (1993), Measuring and testing the impact of news on volatility, the journal of finance vol. XLVIII, no. 5 december 1993

➤ **Test Bias: test per la distorsione dovuta al segno**

Il test utilizza una variabile dummy (S_{t-1}^-) che assume valore 1 con news negative e valore 0 con news positive per confrontare le medie dei residui standardizzati, l'ipotesi nulla del test è l'assenza di differenza della media, in caso essa venga rifiutato si è in presenza di effetto leverage.

$$\frac{\hat{\varepsilon}_t^2}{h_t} = \alpha + \beta S_{t-1}^- + u_t \quad 3.18$$

$$H_0: \beta = 0$$

$$H_1: \beta > 0$$

➤ **Negative bias: test per la distorsione dell'impatto negativo**

Si è visto come solitamente gli impatti conseguenti alle news negative generano una maggiore volatilità rispetto a quella generata da news positive, questa parte del test mostra gli effetti che seguono una news negativa, evidenziando se vi sono differenze tra news maggiori o minori.

$$\frac{\hat{\varepsilon}_t^2}{h_t} = \alpha + \gamma S_{t-1}^- \hat{\varepsilon}_{t-1} + u_t \quad 3.19$$

Dove, grazie alla variabile dummy si avrà:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\hat{\varepsilon}_t^2}{h_t} = \alpha + \gamma \hat{\varepsilon}_{t-1} & \text{se } \hat{\varepsilon}_{t-1} > 0 \\ \frac{\hat{\varepsilon}_t^2}{h_t} = \alpha & \text{se } \hat{\varepsilon}_{t-1} < 0 \end{array} \right. \quad 3.20$$

$$H_0: \gamma = 0$$

$$H_1: \gamma \neq 0$$

➤ **Positive bias: test per la distorsione dell'impatto positivo**

Il test riguarda invece le news positive e mostra gli effetti che esse generano nella volatilità,

$$\frac{\hat{\varepsilon}_t^2}{h_t} = \alpha + \delta S_{t-1}^+ \hat{\varepsilon}_{t-1} + u_t \quad 3.21$$

$$H_0: \delta = 0$$

$$H_1: \delta \neq 0$$

➤ **Test congiunto**

Unisce le tre condizioni espresse precedentemente. In caso di rifiuto dell'ipotesi nulla l'effetto leverage è presente:

$$\frac{\hat{\varepsilon}_t^2}{h_t} = \alpha + \beta S_{t-1}^- + \gamma S_{t-1}^- \hat{\varepsilon}_{t-1} + \delta S_{t-1}^+ \hat{\varepsilon}_{t-1} + u_t \quad 3.22$$

$$H_0: \beta = \gamma = \delta = 0$$

$$H_1: \beta = \gamma = \delta \neq 0$$

Per la serie dei rendimenti giornalieri dell'indice DAX30 era stato stimato come modello per la volatilità il GARCH(1,1), questa funzione non tiene conto delle implementazioni asimmetriche delle innovazioni, sul modello viene quindi svolto il Sign Bias Test per vedere se vi è la presenza dell'effetto leverage:

Tabella 16: BIAS TEST MODELLO GARCH(1,1) SERIE DEI RENDIMENTI QUADRATI DELL'INDICE DAX30

Test	Estimate	P-value
Sign Bias (beta):	0.308	0
Negative Size Bias (gamma):	-7.88	0.04
Positive Size Bias (delta):	-18.2	0

Se il livello di significatività viene assunto pari allo 0.05 i tre test singoli che descrivono l'asimmetria della risposta del DGP a news positive/negative portano al rifiuto dell'ipotesi nulla giungendo alla conclusione che siamo in presenza di effetti asimmetrici cioè che l'impatto delle news negative genera una maggiore volatilità rispetto alle news positive.

MODELLI CON ASIMMETRIA

Il modello ARCH si basa solamente sulle innovazioni passate, il modello GARCH utilizza anche la varianza condizionata passata per avere un modello più parsimonioso del precedente. Tuttavia la struttura del Garch ha dei limiti:

- Incapacità di descrivere il fenomeno asimmetrico descritto da Black (1976) per cui i rendimenti delle azioni sono correlati negativamente ai cambiamenti della volatilità, il modello GARCH descrive solo l'ampiezza della volatilità ma non il segno
- Imposizione di restrizione per alcuni parametri
- Problemi di interpretazione della persistenza degli shock.

I modelli che sono stati studiati a partire dalla generalizzazione del modello GARCH hanno cercato di superare tali limiti cercando di rimuovere i vincoli di non negatività e/o di descrivere l'effetto leverage.

Di seguito vengono presentati dei modelli asimmetrici: EGARCH, TGARCH, APARCH, GJR GARCH.

MODELLO EGARCH(p,q)

Il modello GARCH-esponenziale viene introdotto da Nelson (1991) con la seguente espressione analitica:

$$\ln(h_t) = \omega \sum_{j=1}^p \beta_j \ln(h_{t-j}) + \sum_{i=1}^q \alpha_i \left(\frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sqrt{h_{t-1}}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} \quad 3.23$$

Attraverso la funzione logaritmo si riesce a superare il primo limite descritto poiché la presenza in entrambi gli addendi dell'espressione del logaritmo rimuove il vincolo di non negatività dei parametri perché è assicurata ugualmente la positività alla varianza condizionata.

Il modello è stazionario se $0 < \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$, la persistenza della volatilità è descritta dalla prima sommatoria, mentre l'asimmetria del modello è colta dal secondo fattore dove:

$\frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sqrt{h_{t-1}}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ " è una variabile casuale a media zero nel caso in cui le innovazioni standardizzate siano distribuite normalmente che consente di tenere conto della possibilità di una reazione asimmetrica proporzionale alle innovazioni", mentre $\gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}}$, descrive l'effetto asimmetrico, secondo gli studi gli shock negativi creano una maggiore volatilità, per questo ci si aspetta un valore negativo di γ , supponendolo tale si produce in caso di shock negativi un valore pari a $\alpha - \gamma > \alpha$, mentre per shock positivi $\alpha + \gamma < \alpha$.

Il modello però non stima la varianza stessa ma il suo logaritmo, questo può essere un limite come ha messo in luce Engle (1982) dimostrando che il modello EGARCH non è un buona stima della varianza.

Viene ora stimato il modello EGARCH(1,1) per la serie dei rendimenti giornalieri dell'indice DAX30, i parametri del modello non hanno vincoli di non negatività, il valore della sommatoria dei beta è inferiore a 1 ciò implica un modello stazionario, il test ARCH e Ljung Box indicano la non presenza di ulteriori effetti ARCH e la non correlazione dei residui. Il test Sign Bias sembra accettare le tre singole ipotesi deducendo quindi l'assenza di ulteriori effetti di asimmetria, anche se il test congiunto ha un p value inferiore al 5%.

Tabella 17: Stima del modello EGARCH (1,1)

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
mu	0.000338	0.000093	3.6584	0.000254
omega	-0.189719	0.001227	-154.6070	0.000000
alpha1	-0.087185	0.005024	-17.3529	0.000000
beta1	0.978058	0.000005	195184.7964	0.000000
gamma1	0.121171	0.000396	306.2131	0.000000

MODELLO TGARCH

Il modello Threshold Garch esprime attraverso una soglia l'effetto asimmetrico, in questo caso si utilizza la variabile dummy S_{t-1}^- che assume valore nullo in caso di shock positivo e valore 1 in caso di shock negativo.

Il modello è il seguente:

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} + \gamma S_{t-1}^- \varepsilon_{t-1}^2 \quad 3.24$$

Nel caso di news positive cioè $\varepsilon_{t-1}^2 > 0$ il modello viene descritto da:

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \quad 3.25$$

Nel caso di news negative $\varepsilon_{t-1}^2 < 0$ il modello viene descritto:

$$h_t = \omega + (\alpha + \gamma) \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \quad 3.26$$

Il coefficiente gamma misura l'effetto degli shock negativi creando una maggiore variabilità rispetto agli shock positivi descritti solamente dal parametro alfa.

Questo modello, a differenza del EGARCH, ha dei vincoli di esistenza della varianza positiva ovvero $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ e $\omega > 0$.

Tabella 18: Stima del modello TGARCH(1,1)

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
mu	0.000314	0.000115	2.7218	0.006493
omega	0.000312	0.000044	7.0557	0.000000
alpha1	0.071802	0.007725	9.2946	0.000000
beta1	0.920200	0.008965	102.6426	0.000000
eta11	0.716404	0.061792	11.5937	0.000000

In questo caso i vincoli di non negatività sono rispettati, questo modello come il precedente riesce ad eliminare gli effetti ARCH e i residui al quadrato non sono correlati. Anche in questo caso i tre test sull'asimmetria, presi singolarmente, non ne sottolineano ulteriori.

MODELLO GJR GARCH

Il modello GJR GARCH contiene una forma parametrica che descrive la condizione di eteroschedasticità, la specificazione del modello GJR GARCH è:

$$h_t = \omega + (\alpha + \gamma I_{t-1})\varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \quad 3.27$$

$$\text{Dove : } I_{t-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } r_{t-1} > \mu \\ 1 & \text{se } r_{t-1} < \mu \end{cases}$$

In questo modello sono presenti i vincoli di non negatività di α, β, γ e ω , il modello descrive la distribuzione come leptocurtica ed è in grado di rappresentare la volatility clustering. Inoltre grazie al parametro γ si è in grado di riprodurre il leverage effect.

Nel caso in cui $\alpha + \frac{\gamma}{2} + \beta < 1$ la funzione è mean reverting nell'intorno di σ . La varianza non condizionata è pari a:

$$\sigma^2 = \text{Var}(r_t) = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta - \frac{\gamma}{2}} \quad 3.28$$

Tabella 19: Stima del modello GJR GARCH(1,1)

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
mu	0.000389	0.000107	3.6362	0.000277
omega	0.000004	0.000000	8.0648	0.000000
alpha1	0.016898	0.002473	6.8335	0.000000
beta1	0.902022	0.004556	197.9761	0.000000
gamma1	0.118734	0.006852	17.3275	0.000000

Anche questo modello come i precedenti rispetta i vincoli di non negatività imposti e sia il test sugli effetti Arch sia il Ljung Box test affermano che non ci sono ulteriori effetti ARCH e che i residui al quadrato non sono auto correlati. Il test per l'asimmetria evidenzia ancora una parte di asimmetria presente nella serie che il modello non è riuscito a stimare.

MODELLO APARCH

Ding et al (1993) hanno stimato il modello APARCH (Asymmetric Power ARCH), che tiene in considerazione il fenomeno dell'asimmetria della risposta della volatilità agli shock del mercato; la struttura del modello APARCH è descritta dalla funzione:

$$h_t^\delta = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i (|\varepsilon_{t-1}| - \gamma_i \varepsilon_{t-1})^\delta + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-1}^\delta \quad 3.29$$

I vincoli del modello sono i seguenti:

$$\omega > 0, \delta \geq 0, \alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0$$

$$-1 < \gamma < +1$$

$$0 \leq \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j \leq 1$$

Poiché la varianza condizionale è pari a:

$$h_t^\delta = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i (1 - \gamma_i)^\delta - \sum_{j=1}^p \beta_j} \quad 3.30$$

Il modello descrive il fenomeno dell'eccesso di curtosi, come il modello GARCH, e descrive l'effetto asimmetrico attraverso γ_i e δ . Un valore positivo di γ_i indica che le news negative hanno un impatto maggiore di quelle positive.

Ding et Al. (1993) hanno contrapposto il risultato del test di verosimiglianza del modello GARCH(1,1) con il modello APARCH sulla serie dello S&P500 per il periodo dal 3/01/1928 al 30/08/1991.

Tabella 20: FATTORE DI ASIMMETRIA PROPOSTO DA DING ET AL. PER I MODELLI GARCH E APARCH SULLA SERIE S&P500.

LOG LIKELIHOOD	
GARCH	56822
APARCH	56974

La tabella evidenzia con il modello APARCH sia il migliore per descrivere la serie storica.

Il modello include come casi particolari alcuni modelli già presentati in particolare:

1. GARCH se $\delta = 2, \gamma_i = 0$ con $i = (1, 2, \dots, q)$
2. ARCH se $\delta = 2, \beta_i = 0$ con $i = (1, 2, \dots, q)$ e $\gamma_i = 0$ con $i = (1, 2, \dots, q)$
3. GJRARCH se $\delta = 2$

Tabella 21: Stima del modello APARCH(1,1)

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
mu	0.000332	0.000114	2.9128	0.003582
omega	0.000081	0.000036	2.2531	0.024254
alpha1	0.068725	0.007489	9.1773	0.000000
beta1	0.916305	0.009173	99.8876	0.000000
gamma1	0.657409	0.076928	8.5457	0.000000
delta	1.298252	0.103689	12.5206	0.000000

CRITERIO DELLA MASSIMA VEROSOMIGLIANZA

Tabella 22: Confronto del criterio della massima verosimiglianza per i modelli autoregressivi eteroschedastici

MODELLO	CRITERIO DI MASSIMA VEROSOMIGLIANZA
APARCH(1,1)	24841.47
TGARCH(1,1)	24835.29
GJR GARCH(1,1)	24823.94
EGARCH(1,1)	24822.11
GARCH(1,1)	24729.78

Il metodo della massima verosimiglianza mostra come i modelli in cui il Sign Bias Test rifiuta l'ipotesi nulla, ovvero non viene colta totalmente l'asimmetria delle innovazioni, abbiano un valore più basso; il miglior modello per la descrizione della volatilità sembra essere un APARCH(1,1).

ALTRI MODELLI DI TIPO ARCH

Sono ora presentati altri due modelli autoregressivi condizionali che non si soffermano solo sull'effetto leva, ma che cercano di migliorare la flessibilità dei modelli (modello AGARCH) e di includere l'eterogeneità presente nel mercato (HGARCH).

MODELLO AGARCH

Hentschel (1995) riprende il modello parametrico Absolute Value Garch (AGARCH) proposto da Taylor (1986), Schwert (1989) e Nelson (1992) attraverso il quale è possibile definire gran parte dei processi eteroschedastici autoregressivi basati sulla dinamica descritta dei modelli ARCH. Le diverse specificazioni dei modelli simmetrici e asimmetrici appartenenti alla classe dei modelli GARCH sono possibili attraverso una trasformazione Box-Cox.

La descrizione della varianza condizionata per la struttura GARCH è legata linearmente alla varianza passata e all'innovazione, per permettere la descrizione del fenomeno dell'asimmetria degli shock viene formulato il seguente modello AGARCH:

$$h_t = \omega + \alpha_1 h_{t-1} f(\varepsilon_t) + \beta_1 h_{t-1} \quad 3.31$$

Dove:

$$f(\varepsilon_t) = |\varepsilon_t - b| - c(\varepsilon_t - b) \quad 3.32$$

Con la trasformazione si introducono i parametri λ e v :

$$\frac{\sigma_t^\lambda - 1}{\lambda} = \omega' + \alpha \sigma_{t-1}^\lambda f^v(\varepsilon_t) + \beta \frac{\sigma_{t-1}^\lambda - 1}{\lambda} \quad 3.33$$

Tali parametri se posti uguali a 1 riproducono la specificazione 3.30. Il parametro λ descrive la forma della trasformazione, se minore di 1 è convessa, se maggiore di uno è concava. Il parametro v descrive la trasformazione che subisce il valore assoluto della funzione $f(\cdot)$: se maggiore uguale a uno si ha una trasformazione asimmetrica convessa mentre se $0 < v < 1$ è concava.

Tramite la variazione dei parametri b, c, λ e v è possibile specificare la maggioranza dei modelli GARCH:

- Per $\lambda=2, v=2, b=0, c=0$ e $\beta=0$ il modello descritto è un ARCH
- Per $\lambda=2, v=2, b=0, c=0$ si ottiene il modello GARCH
- Per $\lambda=0, v=1, b=0$ si ha il modello EGARCH
- Per $\lambda=1, v=1, b=0, c \leq 1$ si ha il modello TGARCH

- Per $\lambda=1, v=1, c \leq 1$ si descrive il modello Absolute value Garch
- Per $\lambda=2, v=2, c=0$ si ottiene il modello Nonlinear Asymmetric GARCH
- Per $\lambda=2, v=2, b=0$ viene descritto il modello GJR GARCH
- Per λ =libero e $v = \lambda, b=0, c=0$ si specifica il nonlinear Arch
- Per λ =libero e $v = \lambda, b=0$ e $c \leq 1$ si ha L'asymmetric Power ARCH

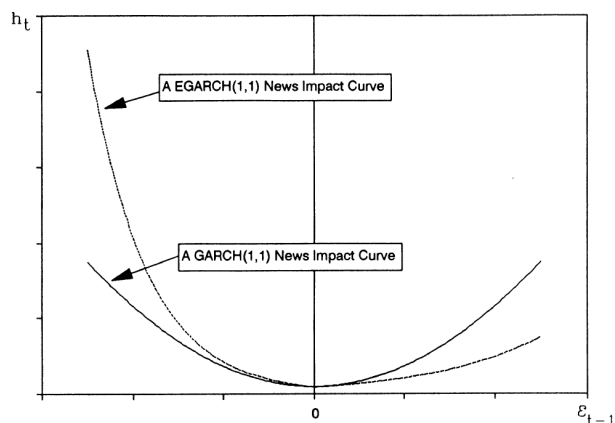
CURVA DELL'IMPATTO DELLE NOTIZIE

Un altro metodo utilizzato per mostrare come i diversi modelli reagiscono alle nuove informazioni è la curva d'impatto. Engle (1982) definì una nuova curva di impatto in modo tale da poter paragonare le proprietà descritte dai diversi modelli autoregressivi. Questa curva rappresenta tutti i ritardi delle varianze condizionali al livello della varianza non condizionale dei rendimenti delle azioni, ovvero mette in relazione i cambiamenti di rendimento con la volatilità futura.

La curva descrive graficamente l'effetto delle nuove informazioni sulla stima della volatilità. L'asimmetria può essere generata da due fenomeni: la rotazione della curva o la sua traslazione.

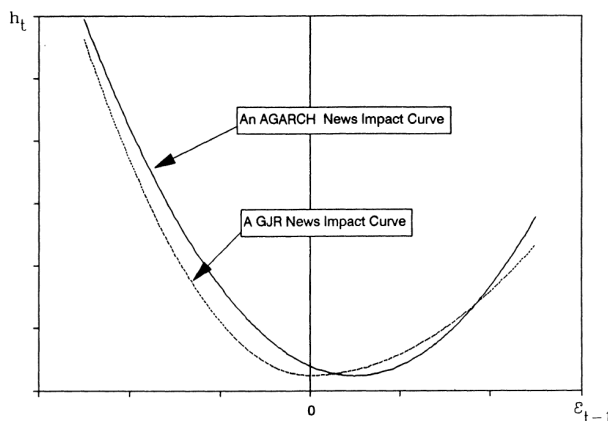
Il modello GARCH non descrive le asimmetrie delle informazioni ed infatti la curva d'impatto è una funzione centrata in $\varepsilon_{t-1} = 0$ con le "code" descritte da una funzione quadratica; diversi modelli che si basano sul modello generale con implementazioni asimmetriche mostrano una curva diversa, ad esempio il modello EGARCH è una funzione centrata come il modello GARCH ma con le code che aumentano esponenzialmente nelle due direzioni con parametri differenti. Questo consente al modello di descrivere un diverso impatto tra shock positivi e negativi e dare un impatto maggiore ai grandi cambiamenti rispetto al modello GARCH.

Figura 32: Grafico nuova curva d'impatto modello GARCH(1,1) ED EGARCH(1,1). Fonte: Engle (1982)



I modelli che descrivono il leverage effect sono molti, Engle contrappone le curve d'impatto di: AGARCH GJR model.

Figura 33: Grafico nuova curva d'impatto modello GJR GARCH(1,1)E AGARCH(1,1). Fonte: Engle (1982)



Ad esempio nella figura 32 si nota come i modelli non siano simmetrici, i motivi che portano a questa asimmetria sono diversi: nel caso del modello GJR il centro è posto in 0, ma le due code hanno una differente pendenza; contrariamente al modello AGARCH che presenta una serie decentrata, in particolare è detto che $\varepsilon_{t-1} = \gamma$, e questo è la chiave per l'asimmetria del modello.

L'asimmetria può essere descritta da "shifting" and "rotating" nei valori assoluti degli shocks. Il modello AGARCH è innovativo rispetto alle altre specificazioni mostrate fino ad ora perché la curva reagisce alle notizie, secondo la formula 3.31, attraverso il parametro b , dove un suo valore positivo crea uno spostamento verso destra descrivendo un'asimmetria e verificando il leverage effect ovvero un aumento di volatilità maggiore in caso di shock negativi; mentre la rotazione della curva è legata al parametro c , anche in questo caso una variazione positiva genera un rotazione in senso orario e descrive l'aumento di volatilità maggiore degli shock negativi.

MODELLO HARCH

Nel capitolo due sono state ricercate le cause della presenza del fenomeno della volatility clustering, in particolare si è visto che l'eterogeneità presente nei mercati conduce a reazioni, strategie e tempistiche diverse che creano periodi di persistenza di volatilità alta o bassa. Lo studio di Xue e Gençay (2012) considerava le diverse tempistiche di trading dei diversi operatori, questo fattore è stato analizzato anche da Müller et al. (1997) definendo un modello autoregressivo condizionale che descrive la natura eterogenea del mercato a partire dallo studio della volatilità a diverse risoluzioni temporali, questo metodo descrive i differenti componenti del mercato. Questo modello viene chiamato HARCH (heterogeneous interval autoregressive conditional heteroskedasticity).

Il metodo è descritto da una griglia, a diverse risoluzioni temporali, con cui tipologie di trader guardano la volatilità del mercato, un trader con un orizzonte temporale breve guarda più volte la volatilità del titolo in un giorno rispetto ad un trader di lungo termine, in questo caso la volatilità viene vista come la media dei cambiamenti assoluti dei prezzi. Il coefficiente di correlazione ρ_t è la misura lineare della dipendenza delle due serie sulla volatilità (coarse and fine volatility), attraverso di esso è dimostrato dagli autori che al lag 0 le serie sono simmetriche, mentre negli altri lags non lo sono, i primi due lags sono significativi. Questa asimmetria è spiegata "For short-term traders, the level of coarse volatility matters because it determines the expected size of trends and thus the scope of trading opportunities. Short-term traders react to clusters of coarse volatility by changing their trading behavior and so causing clusters of fine volatility. On the other hand, the level of fine volatility does not affect the trading strategies of long-term traders..."³⁹

Sul processo di una volatilità con diverse risoluzioni temporali è basato il modello HARCH che supera il limite della simmetria delle risposte del modello generalizzato, inoltre il modello replica in modo migliore la struttura eterogenea del mercato. La definizione di HARCH(N) è la seguente:

$$h_t = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j \left(\sum_{i=1}^j r_{t-i} \right)^2 \quad 3.34$$

dove dati i rendimenti $r_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t$ con $\varepsilon_t \sim \text{iid}$. I vincoli del modello sono: $c_0 > 0$, $c_j > 0$

La presenza del doppio prodotto dei rendimenti ritardati tiene traccia del segno delle innovazioni che descrivono l'effetto leverage.

³⁹ 40 Müller U.A., Dacorogna M.M., Davé R.D., Olsen R.B., Pictet O.V., Von Weizsäcker J.E., 1997, Volatilities of different time resolution - Analyzing the dynamics of market components, Journal of Empirical Finance 4 (1997) 213-239

Il processo è stazionario se vi è una varianza non condizionale costante:

$$E(r_t^2) = \frac{c_0}{1 - \sum_{j=1}^n jc_j} \text{ ovvero si ha } \sum_{j=1}^n jc_j < 1$$

Il modello HARCH ha bisogno di molti ritardi per descrivere il processo e per questo motivo è stato generalizzato in un modello più parsimonioso come è avvenuto dal modello ARCH al GARCH.

$$h_t = c_0 + \sum_{j=1}^n c_{jk} \left(\sum_{i=k}^j r_{t-1} \right)^2 + \sum_{i=1}^q b_i h_{t-1} \quad 3.35$$

Con i vincoli di non negatività di c_0 , c_{jk} e b_i .

LA PERSISTENZA DELLA VOLATILITÀ

Le serie finanziarie mostrano la presenza di alcuni fatti empirici che vengono descritti nei modelli autoregressivi condizionali, queste caratteristiche sono la leptocurtosi delle serie, la presenza dei cluster di volatilità e l'autocorrelazione dei rendimenti al quadrato e assoluti.

Il modello GARCH e i suoi modelli derivati per l'asimmetria descrivono la presenza della volatility clustering attraverso dei parametri. Questo fenomeno è visibile nella serie dei rendimenti dove si notano i raggruppamenti di valori alti o bassi di volatilità, la presenza di cluster è legata al grafico dell'autocorrelazione globale e parziale dei rendimenti assoluti e al quadrato che mostra come i valori al tempo t delle proxy della volatilità siano legati ai valori precedenti descrivendo un effetto memoria. I modelli presentati in precedenza descrivono la varianza non condizionata come somma dei valori di un'innovazione e dei valori della stessa nel passato. Il modello GARCH descrive il fattore di persistenza come somma dei parametri $\alpha_1 + \beta_1$.

I modelli che rappresentano l'effetto leva invece utilizzano come termini:

- EGARCH(1,1) β esponenziale
- TGARCH(1,1) $\alpha_1 + \beta_1 + \frac{\gamma}{2}$
- APARCH(1,1) $\alpha(1 - \gamma)^\delta + \beta$
- GJR GARCH(1,1) $\alpha_1 + \beta_1 + \frac{\gamma}{2}$

Nell'elaborato sono state analizzate alcune serie finanziarie riferite sia ad indici di mercati sia ad azioni di aziende quotate per vedere il rapporto che intercorre tra il fattore di persistenza della serie e la volatilità della serie stessa. Viene notato come il fattore di persistenza abbia valori nell'intorno dell'unità per la maggior parte del periodo analizzato e che la sua serie segua i momenti dei valori della deviazione standard per gli indici mostrando un valore minore in corrispondenza dei momenti di diminuzione della volatilità. Una dimostrazione analoga, ma meno accentuata, viene mostrata nella serie delle azioni.

Viene ora presentata la procedura utilizzata per il confronto tra le due serie, si è scelto di ripetere l'analisi sia su alcuni indici delle principali borse sia su azioni di aziende quotate per verificare se vi siano differenze tra le due categorie.

METODO UTILIZZATO

Il metodo per analizzare la volatility clustering consiste nell'analisi della serie economica finanziaria attraverso diversi step:

- analisi preliminari per verificare attraverso alcuni test statistici la linearità, la normalità e la stazionarietà della serie storica.
- identificazione del DGP e stima del modello per la media e successiva validazione del modello;
- sui residui del modello per la media viene identificato un modello per interpretare la varianza condizionale, nei casi analizzati non viene incluso il modello ARCH poiché il grafico dell'autocorrelazione parziale e globale mette in evidenza una serie infinita escludendo il modello per la sua necessità di utilizzare troppi ritardi nella descrizione della volatilità non condizionata. In questa fase si considera anche la possibilità della presenza di effetti leva che richiedono modelli in grado di interpretare risposte asimmetriche. Il modello viene stimato anche considerando la distribuzione dell'errore più opportuna.

Le serie storiche sono osservate dal 01/01/2000 al 30/06/2020 e sono suddivise in sottoperiodi di due anni, attraverso una rolling windows con uno spostamento di sei mesi permettendo di analizzare l'andamento temporale del fattore di persistenza.

Al termine del calcolo delle finestre temporali vengono rappresentati graficamente i risultati ottenuti per evidenziare i comportamenti della serie.

Il metodo utilizzato nell'analisi qui descritta presenta delle criticità: la scelta del modello avviene sull'intero sample temporale poi suddiviso in sottoperiodi, questi possono presentare, a causa di cambiamenti nella serie, dei valori non consoni al modello utilizzato. In altre parole una volta identificato un modello per la media e la varianza questo rimane invariato per tutto il ventennio analizzato.

SERIE UTILIZZATE

Le serie utilizzate sono state scaricate dal sito <https://it.finance.yahoo.com/>:

- l'indice DAX30 con Ticker “^GDAXI” e l'indice Standard & Poor's 500 (ticker: “^GSPC”) descritti nei capitoli precedenti.

- L'indice Nikkei-225 rappresenta i titoli più capitalizzati e più scambiati del Tokyo Stock Exchange (TSE), le azioni presenti sono scelte per la loro liquidità e per il rapporto tra prezzo e volume. Ticker “^N225”

Le azioni che sono state selezionate per vedere i cambiamenti che avvengono nel fattore di persistenza al variare della volatilità sono:

- The Coca Cola Company l'azienda leader nella produzione di bevande analcoliche gassate tra cui Coca-Cola, Fanta e Sprite. Il Ticker dell'azione è KO quotato nella borsa NYSE.
- ENEL S.P.A. multinazionale che opera nel settore energetico e del gas. La società opera in 30 paesi ed ha impianti di distribuzione e produzione di diversi tipi. Il ticker è ENEL.MI.
- Toyota motor corporation quotata nella borsa (NYSE) che appartiene al settore automobilistico a cui viene legato la sezione dei servizi finanziari per facilitare l'acquisto o il leasing dei veicoli prodotti.

INDICE DAX-30

L'analisi del titolo viene mostrata nel capitolo precedente, il modello scelto in base all'indice AIC è EGARCH(2,1).

Figura 34: Rendimenti giornalieri dell'indice DAX30

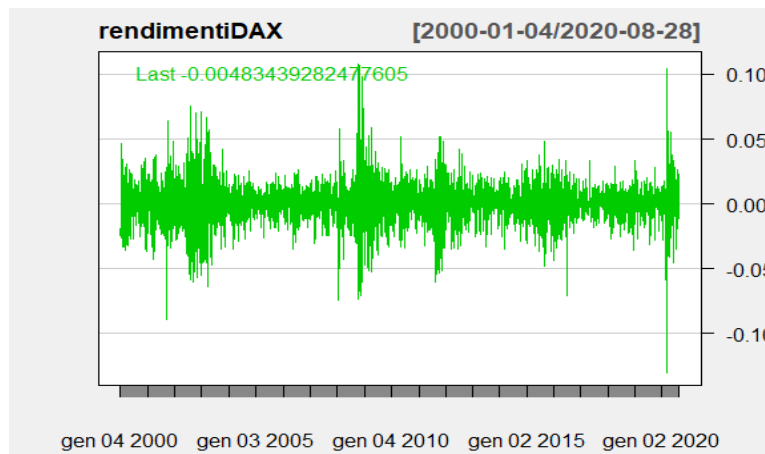


Figura 35: Rolling window della deviazione standard semestrale dell'indice DAX30.

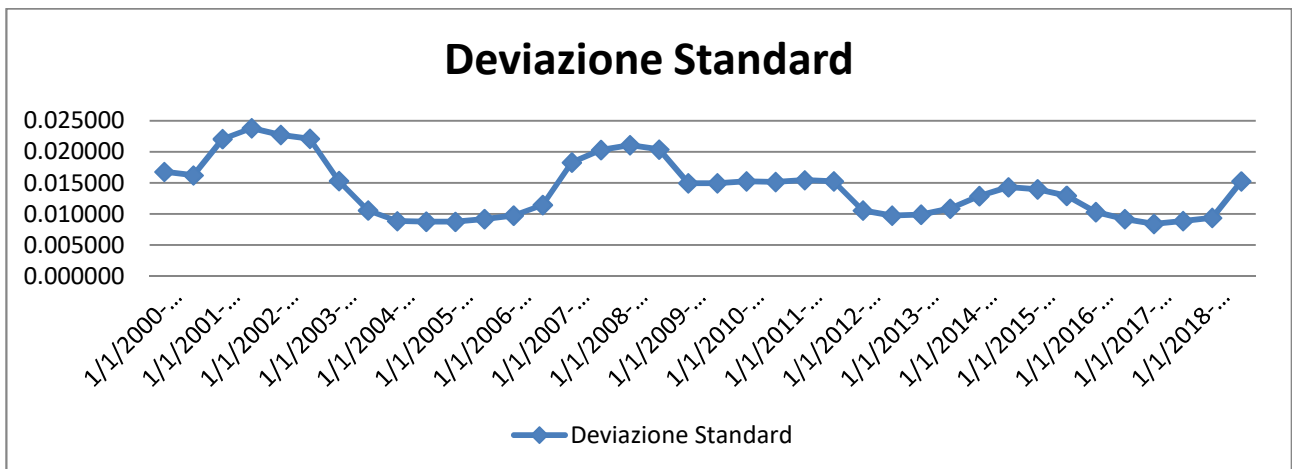
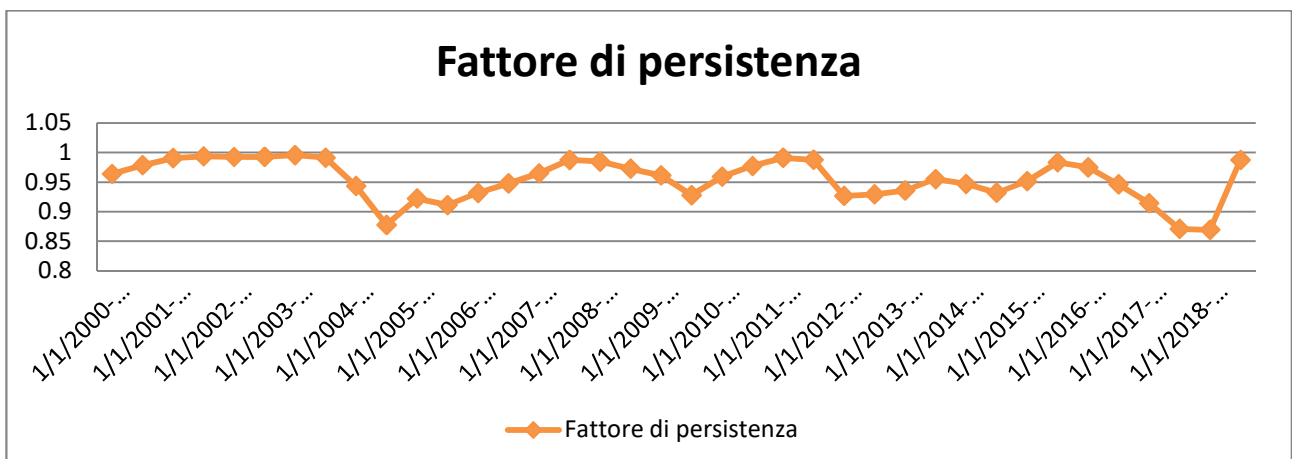


Figura 36: Rolling window semestrale del fattore di persistenza dell'indice DAX30.

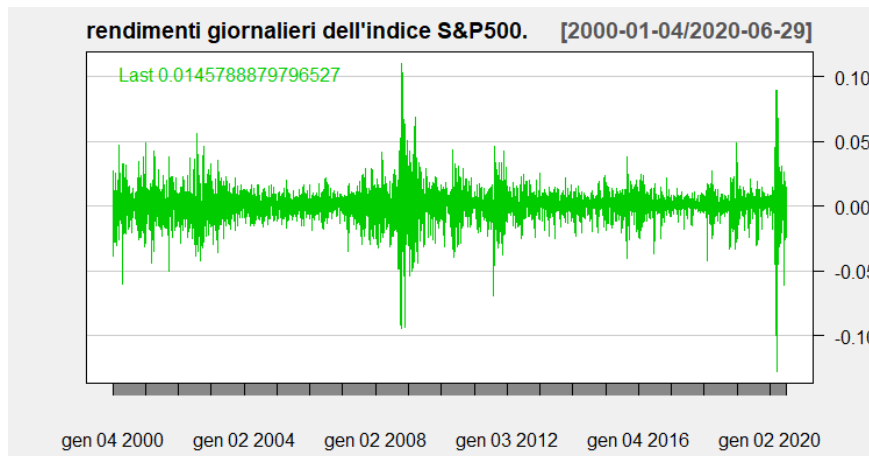


I due grafici mettono in evidenza come il fattore di persistenza segua la linea di tendenza della volatilità calcolata per gli stessi periodi semestrali.

Nel confronto tra il grafico dei rendimenti e il grafico del fattore si può notare che le fasi intorno ai minimi del fattore di persistenza corrisponde ai cluster di volatilità minore, mentre i valori vicini all'unità rappresentano i cluster di volatilità alta, replicando le successioni descritte dall'indice di dispersione.

INDICE S&P 500

Figura 37: Rendimenti giornalieri dell'indice S&P500.



I rendimenti giornalieri della serie storica dello S&P-500 nel periodo compreso tra 01-01-2000 e il 30-06-2020 mostrano la presenza del volatility clustering, la serie risulta essere non lineare, non normale e stazionaria.

Un'analisi della autocorrelazione globale e parziale dei rendimenti ci porta alla stima di un modello AR(6) con i parametri associati ai ritardi 2,3,4,5 fissati a zero. I residui della serie mostrano assenza di autocorrelazione seriale ma rifiutano l'ipotesi nulla del test BDS definendo i residui non IID. Il test ARCH invece evidenzia presenza di eteroschedasticità condizionata nella serie dei residui del modello per la media, come visibile dal grafico 38.

L'estensione infinita della PACF e ACF dei residui al quadrato suggerisce la stima di un modello GARCH(1,1), Per risolvere il problema della non normalità riscontrata sulla serie si è individuata come possibile alternativa la Generalized Error Distribution asimmetrica (si accetta l'ipotesi nulla del Adjusted Pearson Goodness-of-Fit Test, il test utilizza la distribuzione chi-quadro per verificare la distribuzione della serie con la distribuzione ipotizzata).

Il modello GARCH(1,1) mostra con il Sign Bias test la presenza dell'effetto leva per questo vengono analizzati le specificazioni asimmetriche:

Tabella 23: Sign Bias Test

	t-value	prob sig
Sign Bias	4.319	1.595e-05
Negative Sign Bias	1.082	2.795e-01
Positive Sign Bias	2.640	8.316e-03
Joint Effect	52.031	2.949e-11

Tra i vari modelli che considerano l'asimmetria sono stati scartati il modello APARCH(1,1) perché non rispetta il vincolo su gamma che è stimata pari a 1. Il modello non può essere utilizzato come modello di specificazione nell'analisi successiva. L'effetto leva è presente anche nel modello GJR GARCH(1,1), EGARCH(1,1) e TGARCH(1,1), quest'ultimo modello è il migliore in termini di AIC e verrà utilizzato nell'analisi del fattore di persistenza definito da $\alpha_1 + \beta_1 + \frac{\gamma}{2}$

Tabella 24: Confronto criteri informativi dei modelli autoregressivi condizionali per l'indice S&P500.

	LOGLIKELIHOOD	AIC
TGARCH(1,1)	16917,07	-6,5636
EGARCH(1,1)	16907,07	-6,5597
GJR GARCH(1,1)	16896,54	-6,5556
GARCH(1,1)	16801,01	-6,5189

Figura 38: Rolling window della deviazione standard semestrale dell'indice S&P500.

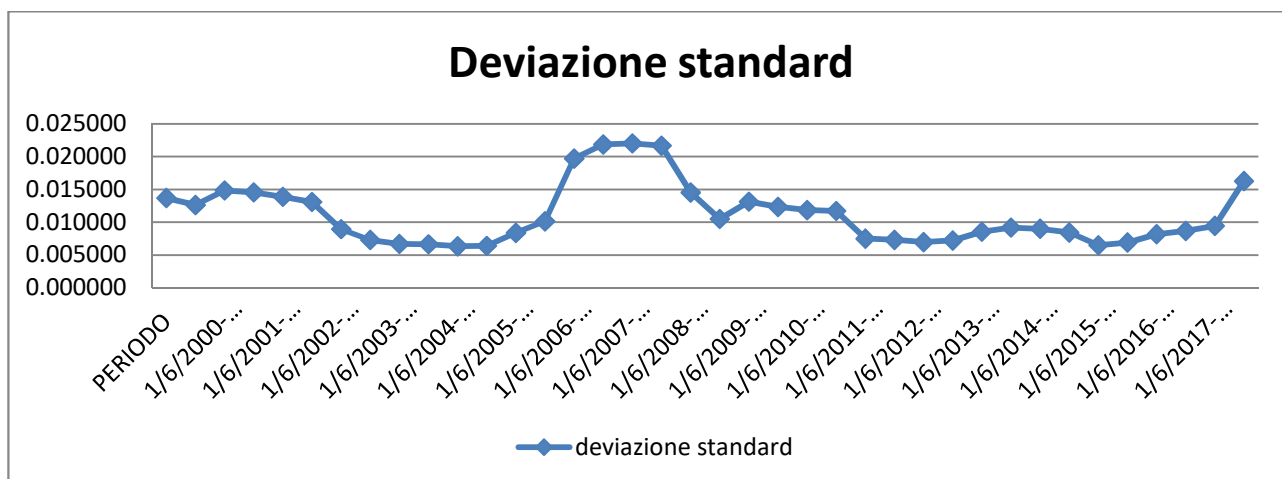
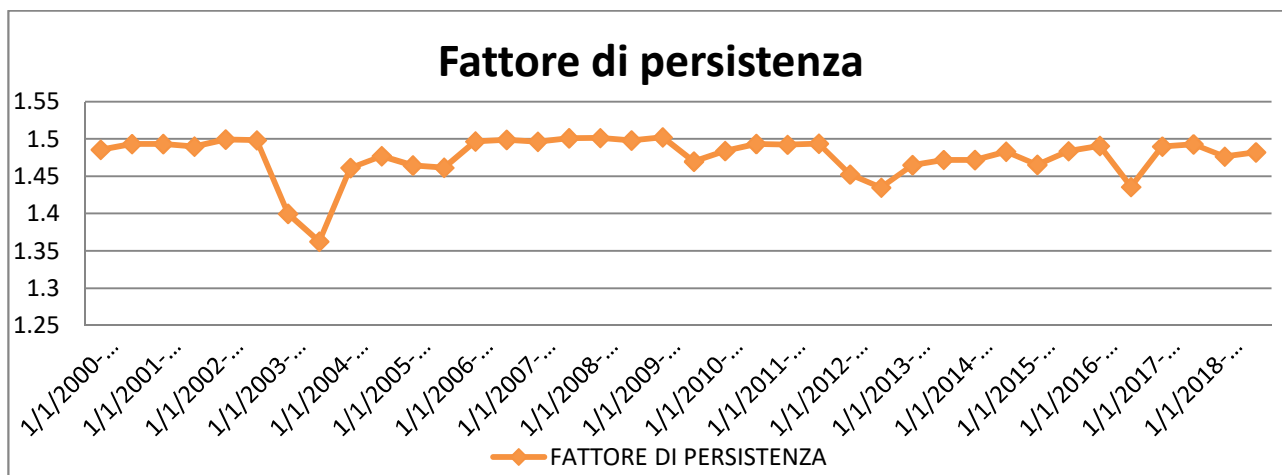


Figura 39: Rolling window del fattore di persistenza dell'indice S&P500.

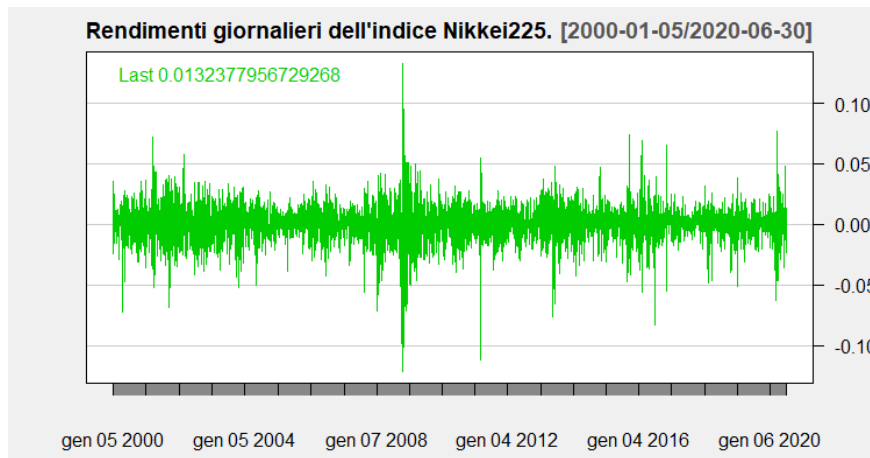


Il confronto tra i due grafici evidenzia come vi sia una stabilità pari al valore di 1,5 a cui tende il fattore di persistenza quando si creano i cluster e che nel caso in cui vi siano delle diminuzioni dei valori di volatilità esse vengono replicate con una diminuzione del fattore di persistenza.

Il grafico dei rendimenti sovrapposto al grafico del fattore di persistenza mostra come nei raggruppamenti di volatilità maggiore si generino dei valori più alti del fattore di persistenza e si sottolineano i cluster di volatilità bassa dai valori di minimo del fattore di persistenza.

INDICE NIKKEI-225

Figura 40: Rendimenti giornalieri dell'indice Nikkei225.



Anche la serie dei rendimenti giornalieri calcolati sull'indice NIKKEI-225 nel periodo compreso tra 01-01-2000 e 30-06-2020 risulta essere stazionaria, non lineare e non normale. Nel grafico dei rendimenti si nota la presenza di effetti ARCH.

Il modello identificato per questa serie è un AR(1). Il processo è invertibile e stazionario. I p-value del test Ljung Box applicato ai residui del modello, portano ad accettare l'ipotesi nulla di assenza di autocorrelazione seriale, ma si rifiuta l'ipotesi di residui I.I.D del test BDS e il test ARCH conferma la presenza di effetti di eteroschedasticità condizionale. Rispetto alla serie precedente il modello identificato è un APARCH(1,1) con distribuzione condizionale GED asimmetrica.

Il calcolo della persistenza utilizza la seguente formula $\alpha(1 - \gamma)^\delta + \beta$.

Tabella 25: Confronto criteri informati dei modelli autoregressivi condizionali dell'indice Nikkei225.

	LOGLIKELIHOOD	AIC
APARCH(1,1)	14768,21	-5,8821
TGARCH(1,1)	14768,2	-5,8825
EGARCH(1,1)	14765,86	-5,8816
GJR GARCH(1,1)	14748,94	-5,8749
GARCH(1,1)	14707,16	-5,8586

Figura 41: Rolling window della deviazione standard semestrale dell'indice Nikkei225.

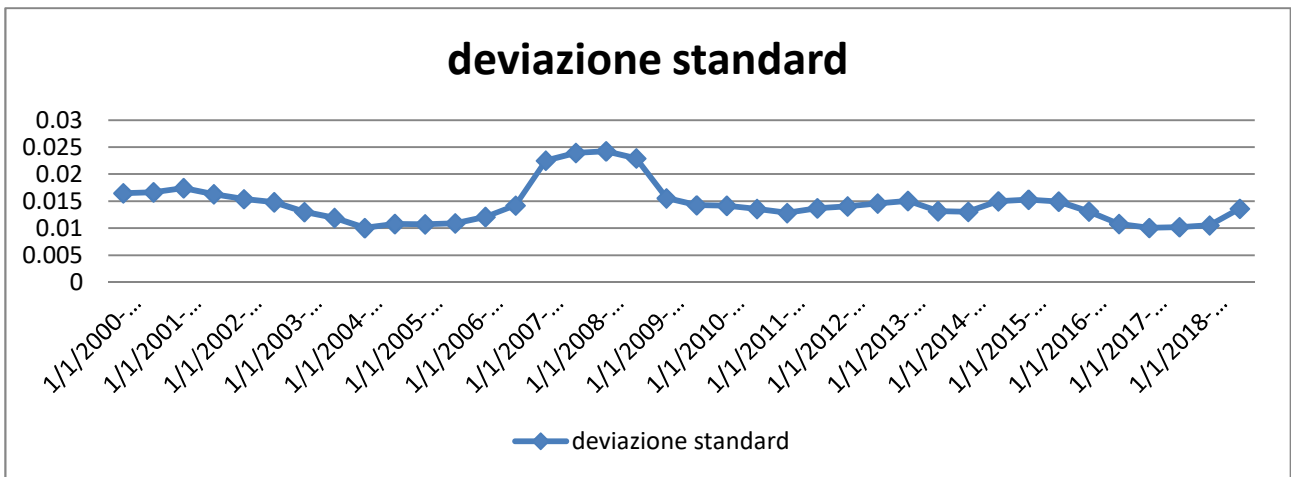
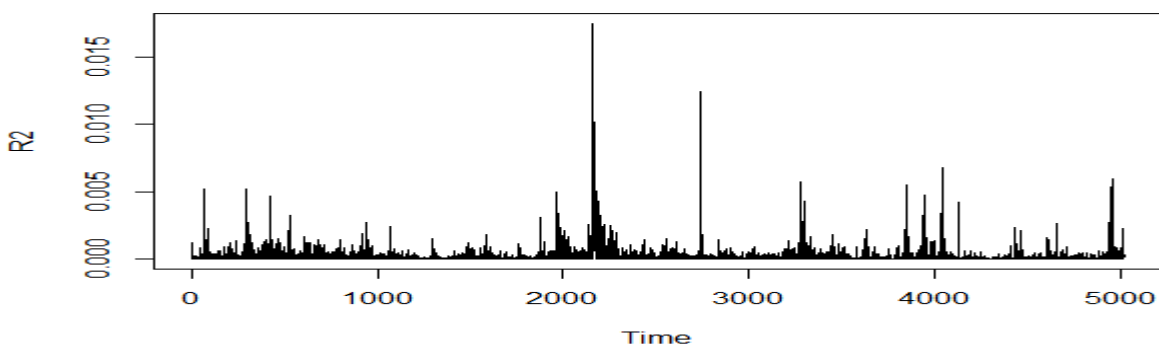
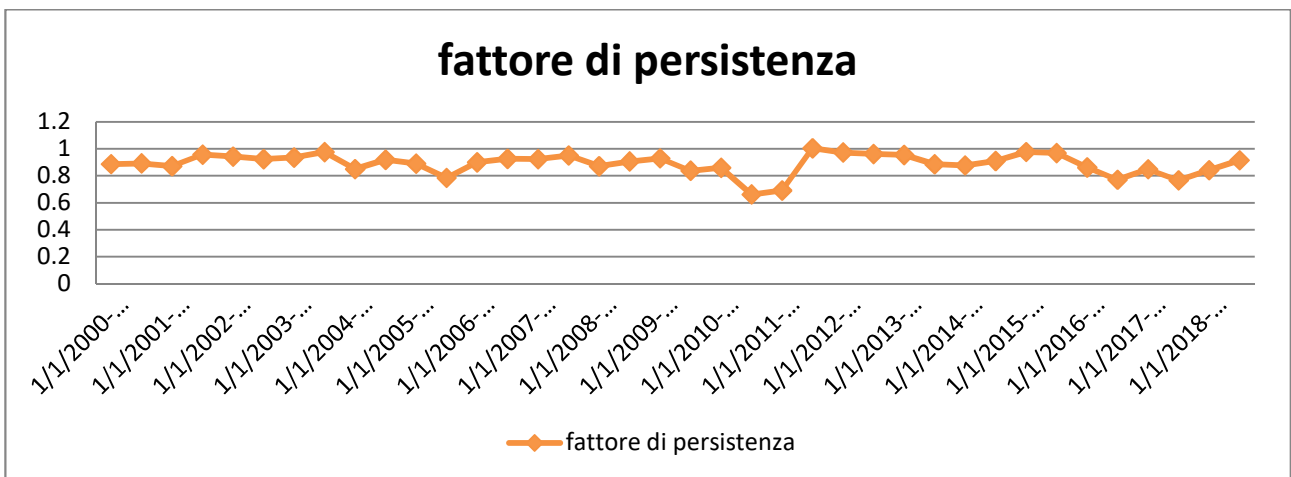


Figura 42: Rolling window del fattore di persistenza dell'indice Nikkei225.

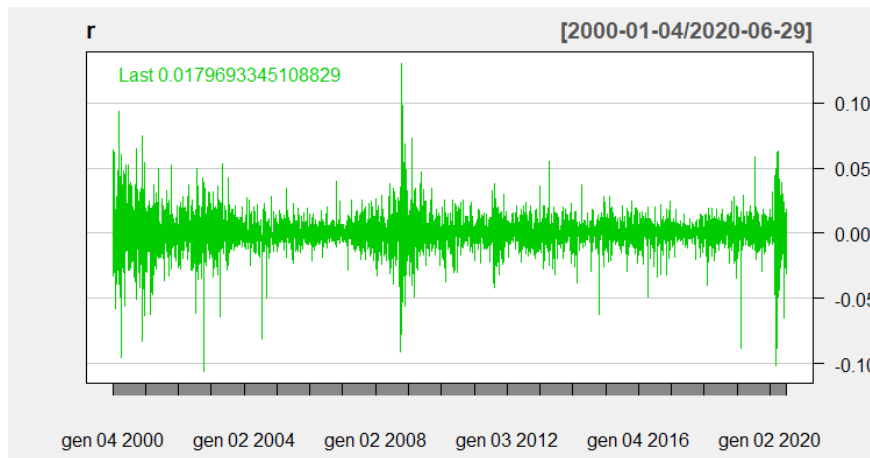


La serie dei rendimenti dell'indice Nikkei225 descrive la presenza di volatility clustering, ma, rispetto agli altri indici, questi sono meno marcati e meno duraturi. Questo comporta che il fattore di persistenza abbia una serie meno stabile; nonostante ciò è possibile notare la stessa rappresentazione degli altri indici, ovvero i cluster di bassa volatilità sono segnalati dai minimi della serie, mentre i valori vicini all'unità descrivono i cluster di alta volatilità. Nelle serie finanziarie degli indici azionari il fattore di persistenza sottolinea la presenza dei raggruppamenti poiché ha per la maggior parte del tempo valori vicini all'unità,

se questa è il limite per la stazionarietà del modello, o superiori. I cambiamenti al ribasso del valore e i cluster di volatilità bassa dell'indice di dispersione vengono sottolineati da una diminuzione del fattore. Il fattore mostra così i cluster presenti nei rendimenti attribuendo ai valori di minimo la presenza di un periodo di volatilità minore e ai cluster di maggior volatilità periodi con valori alti e stabili.

AZIONE KO

Figura 43: Rendimenti giornalieri dell'azione KO.



La serie risulta essere, secondo il test di Jarque Bera, non distribuita come una normale, inoltre secondo il test teraesvirta la serie non è lineare e dal grafico dei rendimenti si deduce che è stazionaria.

Il grafico della correlazione parziale e globale, come mostrato nel capitolo uno, ci induce a scegliere, dopo i test sui residui e il calcolo dei coefficienti, il modello MA(4) con i parametri associati al primo e terzo ritardo fissati a zero come modello per la media.

Il modello è invertibile e stazionario, inoltre i residui sono non autocorrelati e non IID. Il test per valutare la presenza di autocorrelazione sulla volatilità rifiuta l'ipotesi nulla e il modello che è stato identificato per interpretare la varianza condizionata è un GARCH(1,1).

Un confronto tra le distribuzioni mostra che la distribuzione segue la t di student asimmetrica. I residui del modello GARCH(1,1) non mostrano presenza di effetto leva quindi è possibile utilizzare tale specificazione per la stima del fattore di persistenza.

Tabella 26: Stima del modello GARCH(1,1) dell'azione KO.

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
omega	0.000001	0.000000	3.4321	0.000599
alpha1	0.068080	0.005973	11.3981	0.000000
beta1	0.925019	0.006072	152.3303	0.000000
skew	0.976977	0.017320	56.4087	0.000000
shape	4.960302	0.325757	15.2270	0.000000

Tabella 27: Sign Bias Test sul modello GARCH(1,1) dell'azione KO.

	t-value	prob sig
Sign Bias	0.6175	0.53692
Negative Sign Bias	1.3421	0.17963
Positive Sign Bias	0.5940	0.55250
Joint Effect	6.2740	0.09901

Figura 44: Rolling window della deviazione standard semestrale dell'azione KO.

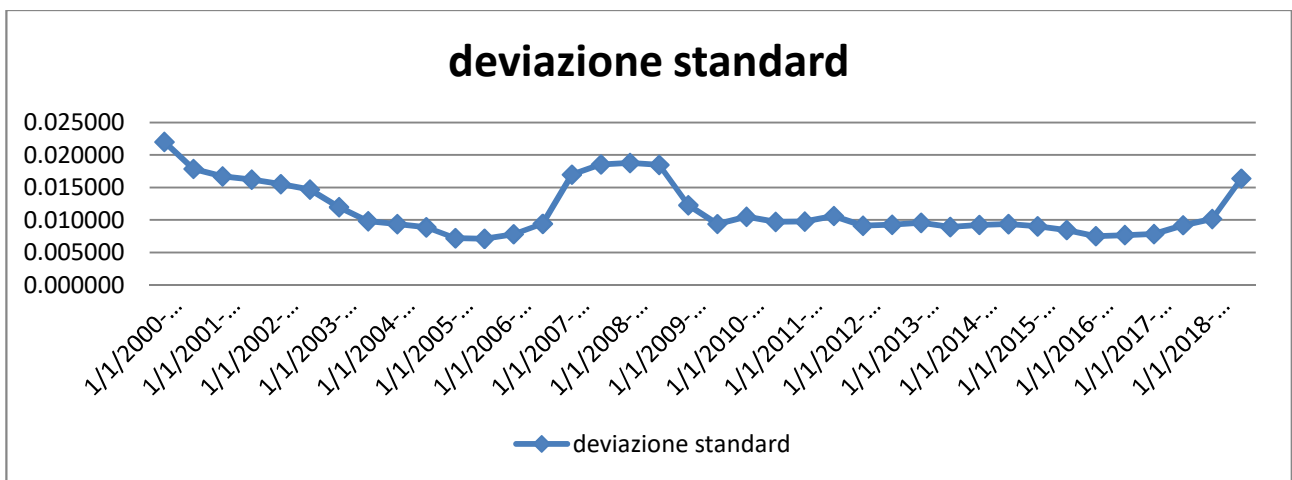


Figura 45: Rolling window del fattore di persistenza dell'azione KO.

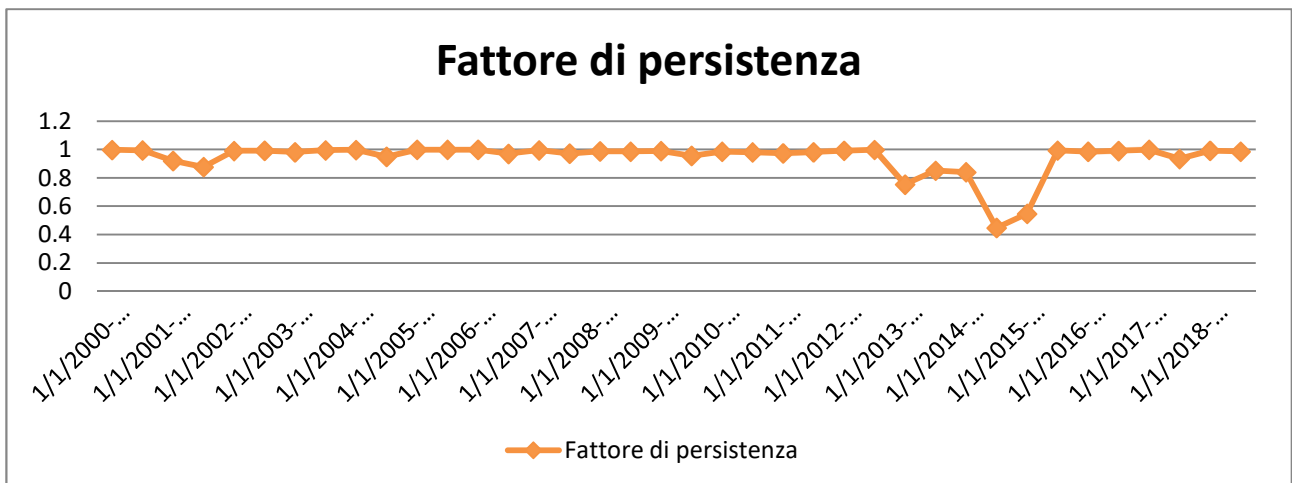
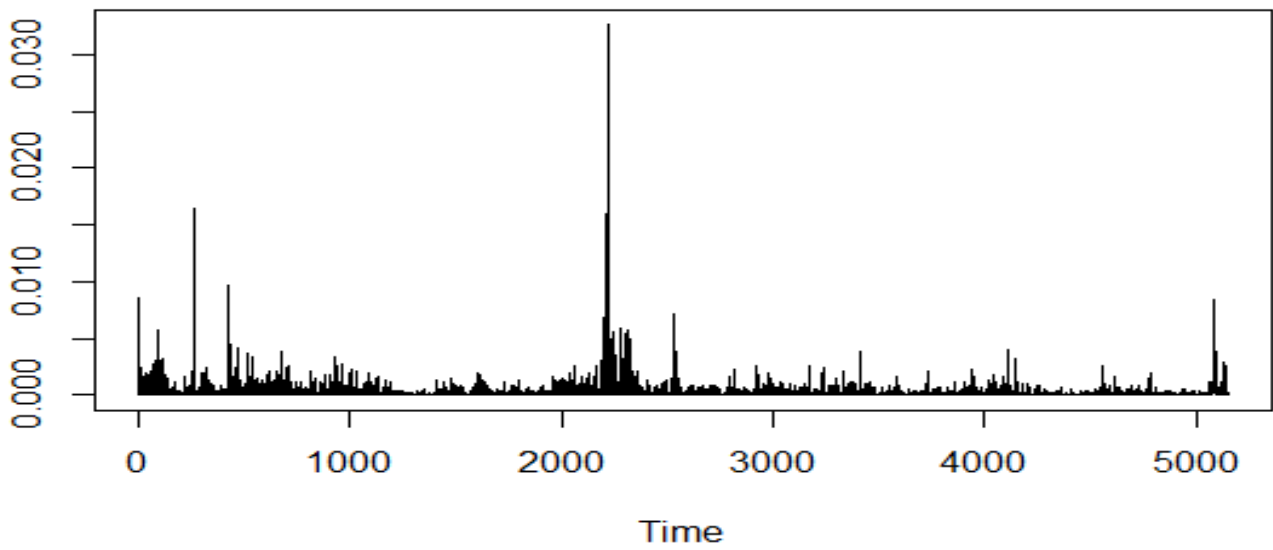


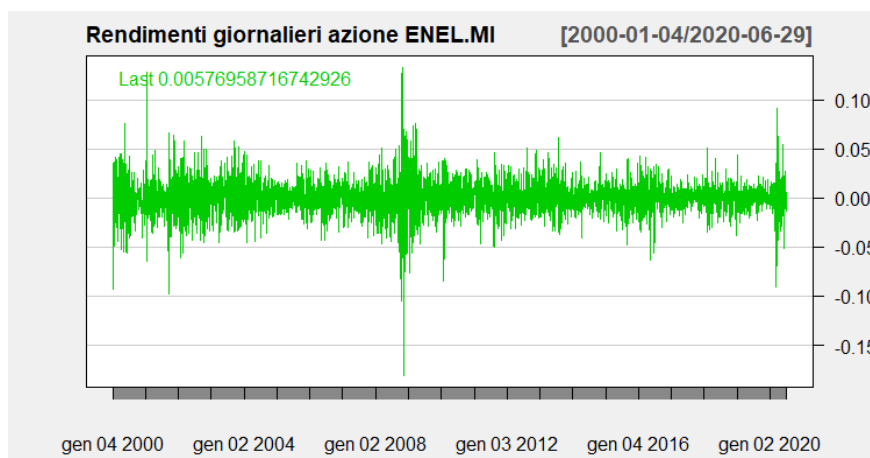
Figura 46: Volatilità dell'azione KO.



Il fattore di persistenza rimane stabile per tutto l'arco temporale con una lieve flessione tra il 2013-2016, questo mostra collegamenti con la presenza di cluster nella serie dei rendimenti, infatti nel grafico della deviazione standard si ha una maggiore volatilità negli anni 2006-2009 descritta dal valore vicino ad 1 del fattore di persistenza, mentre i punti di minimo del fattore descrivono la presenza di cluster di bassa volatilità.

AZIONE ENEL.MI

Figura 47: Rendimenti giornalieri dell'azione ENEL.MI.



La serie dei rendimenti della società ENEL S.P.A. mostra una distribuzione diversa da quella normale, poiché è presente un'asimmetria negativa e un valore di curtosi maggiore di 3.

I test effettuati sulla serie dimostrano che essa è non lineare e non stazionaria, inoltre nel grafico dei rendimenti è evidente il fenomeno della volatility clustering. Il miglior modello è risultato essere in MA(2) i cui residui presentano effetti ARCH, hanno un'estensione lunga della autocorrelazione parziale e globale e sono condizionati alle distribuzioni T di student asimmetrica. Data la presenza di effetto leva il modello per la varianza condizionata identificato e stimato è stato un EGARCH(2,1)

Tabella 28: Confronto dei criteri informativi dei modelli autoregressivi condizionali dell'azione ENEL.MI.

	LOGLIKELIHOOD	AIC
EGARCH(2,1)	15013,67	-5,7405
APARCH(1,1)	15006,42	-5,7381
TGARCH(2,1)	15002,15	-5,7361
GJR GARCH(1,1)	14996,13	-5,7346
GARCH(1,1)	14959,03	-5,7207

Nel confronto tra fattore di persistenza e deviazione standard si nota come vengono identificati in maniera precisa i cluster di volatilità alta poiché la persistenza rimane stabile nel valore intorno all'unità, mentre è presente una diminuzione del fattore di persistenza in corrispondenza di periodi con una diminuzione della varianza. Nel biennio 2003-2005 si evidenzia questa esemplificazione poiché vi è una netta diminuzione dell'indice in corrispondenza del cluster di varianza minima.

Figura 48: Rolling window della deviazione standard semestrale dell'azione ENEL.MI.

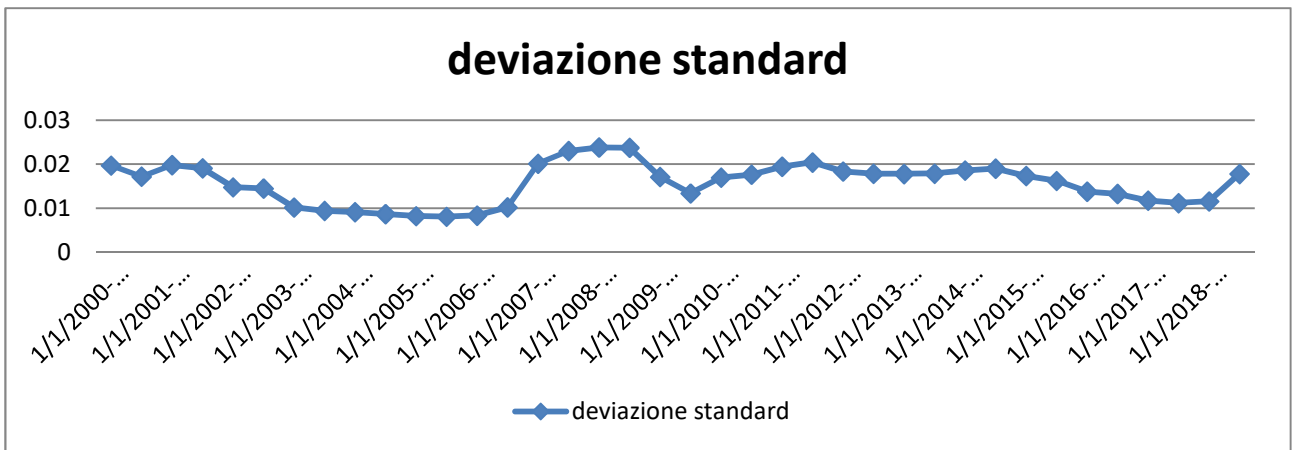


Figura 49: Rolling window del fattore di persistenza dell'azione ENEL.MI.

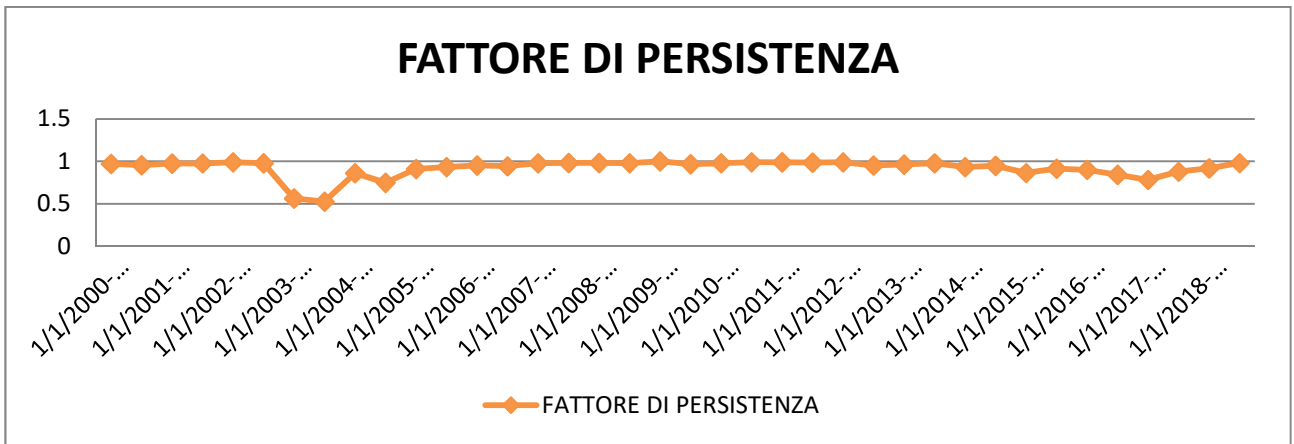
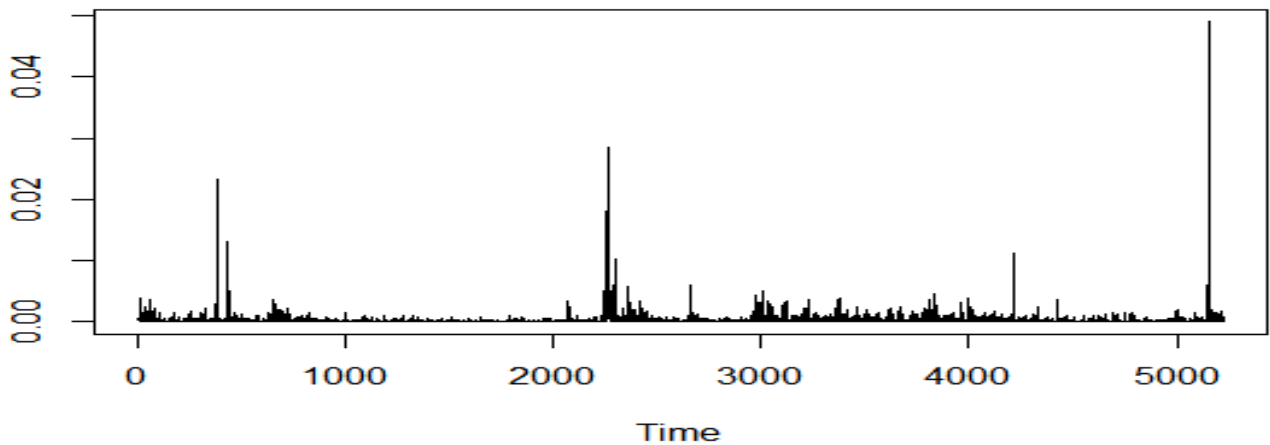
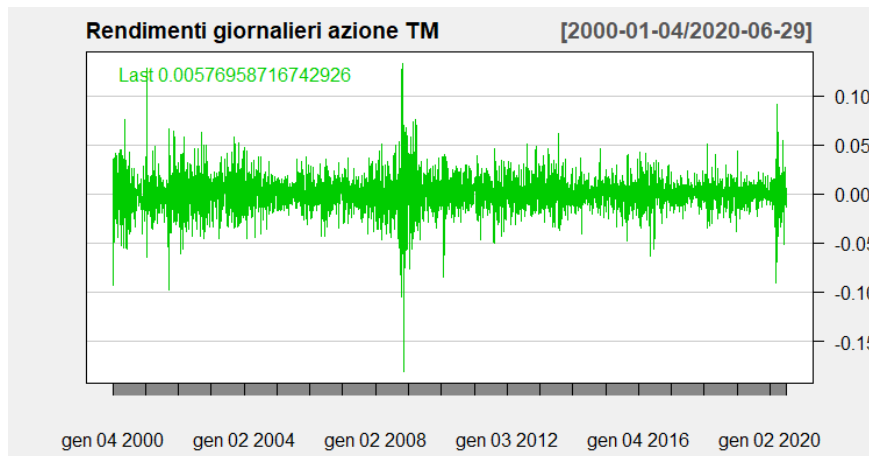


Figura 50: Volatilità dell'azione ENEL.MI.



AZIONE TM

Figura 51: Rendimenti giornalieri dell'azione TM.



La serie del prezzo di chiusura del titolo Toyota Motor Corporation è non lineare, stazionaria, non normale e presenta cluster di volatilità. La autocorrelazione parziale e globale suggeriscono di scegliere un modello MA(4) con il terzo ritardo non significativo.

L'applicazione dei test Ljung Box e BDS sui residui indicano incorrelazione sui residui ma la possibilità che sia presente una componente non lineare (come suggerito dai test preliminari) oppure residui non indipendenti e identicamente distribuiti.

Sebbene la procedura di identificazione-stima-validazione del modello eseguita sull'intera serie storica individua un modello GARCH(2,1) l'analisi con finestre mobili (intervallo biennale) individua come miglior modelli un GARCH(1,1) che non presenta effetti leva.

Il modello GARCH nella serie TM è sufficiente perché non sono presenti effetti leva secondo il Sign Bias Test.

Anche in questo caso, come nelle serie azionarie viste in precedenza, vi è corrispondenza tra aumenti e diminuzioni della volatilità che incidono nel fattore di persistenza, quest'ultimo infatti rimane stabile nei periodi di cluster positivi e ha delle lievi flessioni in corrispondenza delle diminuzioni della Deviazione Standard presenti, ad esempio, negli ultimi anni del sample campionario.

Figura 52: Rolling window della deviazione standard semestrale dell'azione TM.

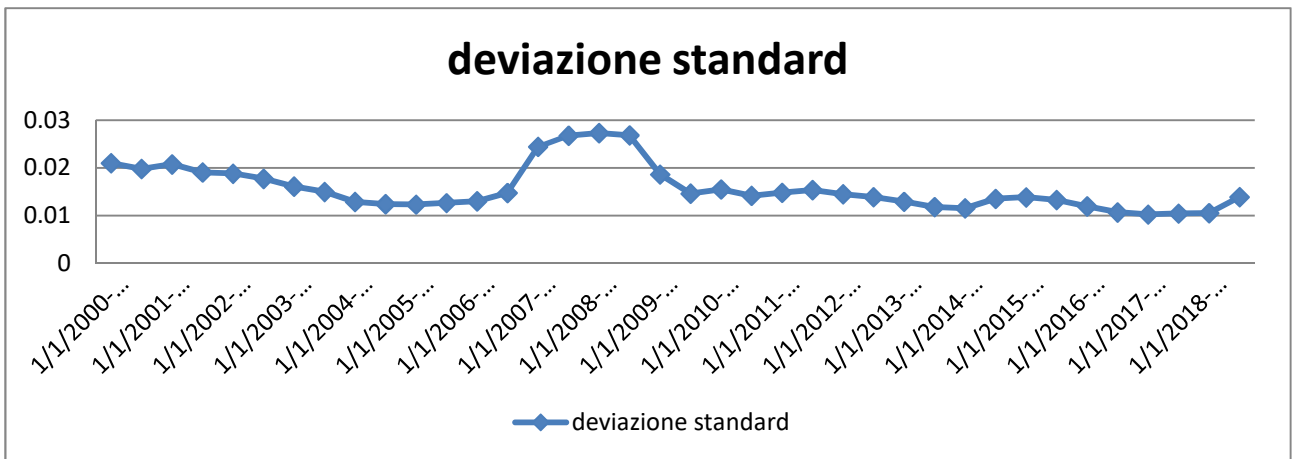


Figura 53: Rolling window del fattore di persistenza dell'azione TM.

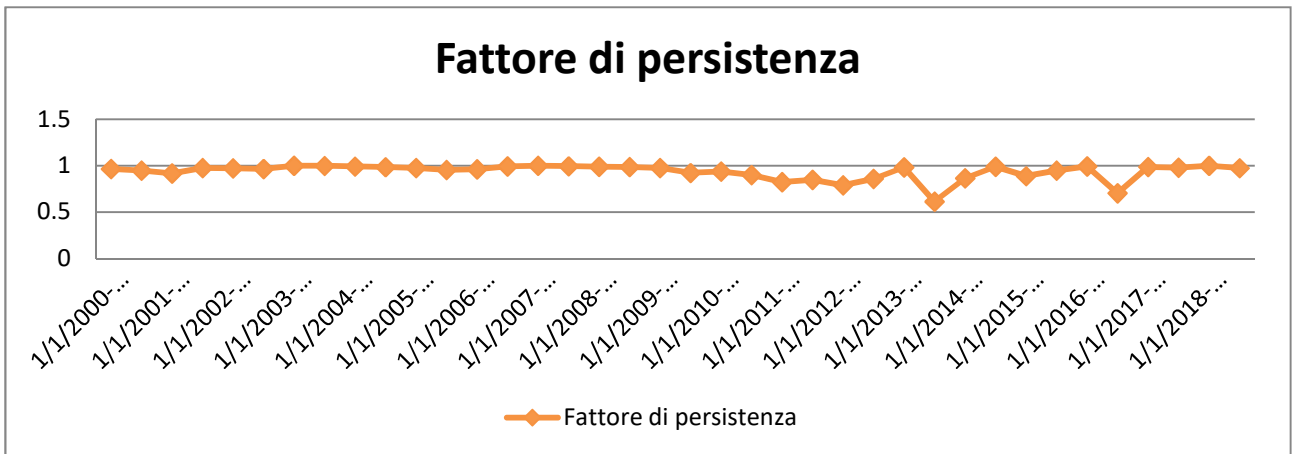
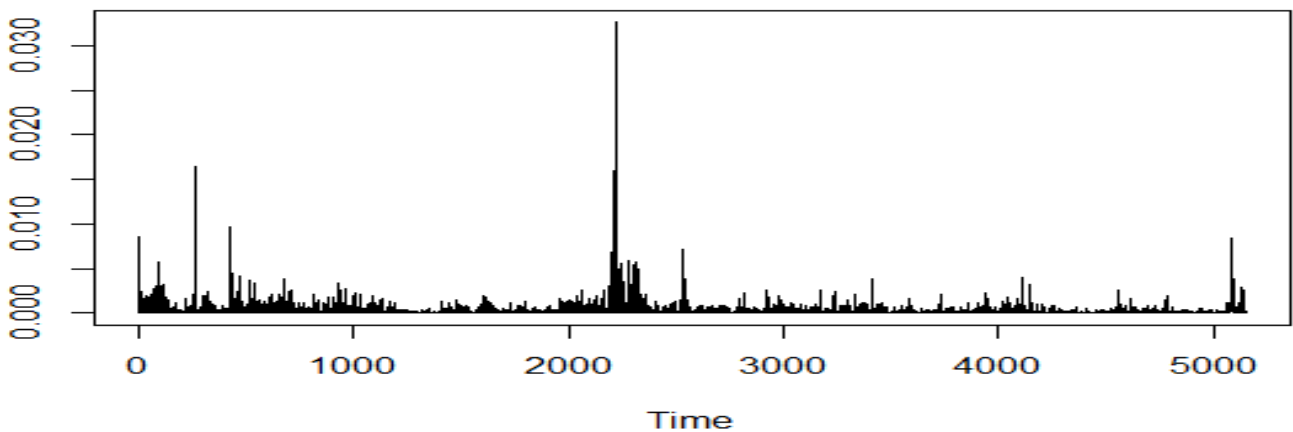


Figura 54: Volatilità dell'azione TM.



CONCLUSIONI

L'analisi effettuata su diverse serie storiche finanziarie accerta la presenza di alcuni dei fatti empirici mostrati nel primo capitolo, tra cui la leptocurtosi, l'asimmetria della serie e la correlazione della volatilità, con il conseguente fenomeno della memoria lunga. Questa caratteristica enfatizza l'importanza dell'utilizzo di un modello autoregressivo per la varianza, mentre i grafici dei rendimenti sottolineano la componente eteroschedastica poiché il valore varia nel tempo.

Lo studio della volatilità delle serie finanziarie attraverso il modello proposto da Engle (1982) e le successive specificazioni hanno permesso di analizzare il comportamento del fattore di dispersione, in particolare l'analisi effettuata sul fattore di persistenza ha permesso di comprendere se vi è la possibilità di specificare un modello che riesca a prevedere le caratteristiche dei cluster.

Il confronto tra serie storica e il fattore di persistenza calcolato sulle serie degli indici finanziari e sulle serie di titoli di aziende quotate ha messo in luce come i fattori di persistenza replichino il corso della serie della volatilità, in particolare si è visto che il fattore di persistenza tende all'unità, se essa è la condizione di stazionarietà del modello, mentre supera tale valore negli altri casi per descrivere il fenomeno dei cluster di volatilità a valori alti, mentre nel caso in cui sia presente una diminuzione di tale valore esso sottolinea la presenza di un cluster con valori minori. La presenza di periodi con il fattore di persistenza stabile sul valore massimo può essere associata alla caratteristica della volatility clustering di generare raggruppamenti di lunga durata in caso di valori alti di volatilità.

L'utilizzo di indici e di singole azione comporta delle differenze minime nei risultati ottenuti dalla stima del fattore di persistenza, in entrambi i casi infatti i cluster con valori di dispersione maggiore sono rappresentati dai valori nell'intorno dell'unità, mentre i cluster con valori di dispersione minori sono segnalati dalle diminuzioni dell'indice di dispersione. La differenza nelle due categorie è associata ad un indice di persistenza con valori minimi meno marcati nel caso delle azioni.

Il calcolo del fattore di persistenza, nonostante aiuti a sottolineare la presenza di cluster, presenta una serie di criticità: il modello autoregressivo eteroschedastico stimato sul sample campionario 01-01-2000/30-06-2020 non sempre è valido per il calcolo del fattore con passi di campionamento diversi, è possibile quindi che un'analisi completa per ogni periodo, ovvero una stima del modello per la media e del modello per la varianza con le opportune validazioni, possa generare un fattore di persistenza più accurato e che riesca a replicare meglio la presenza dei cluster di volatilità.

BIBLIOGRAFIA

- 1 Berger David, Chaboud Alain, Hjalmarsson Erik, (2009) What drives volatility persistence in the foreign exchange market? *Journal of Financial Economics* 94 (2009) 192–213
- 2 Black, F. (1976). Studies of stock price volatility changes. in *Proceedings of the 1976 Meeting of the Business and Economic Statistic Section, American Statistical Association*, pp. 177-181.
- 3 Bogachev Mikhail I., Eichner Jan F. and Bunde Armin, (2007), Effect of Nonlinear Correlations on the Statistics of Return Intervals in Multifractal Data Sets, *Physical Review letters* 99 240601, 2007
- 4 Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, 1986, pp. 307–327.
- 5 Bollerslev, T., 2009, Glossary to Arch (Garch),Duke University CREATES and NBER, February 16, 2009
- 6 "Bouchaud Jean-Philippe Matacz Andrew and Potters Marc (2008) The leverage effect in financial markets: retarded volatility and market panic, *Physical Review Letters* vol 87 no. 22, (2001)
- 7 "Bouchaud Jean-Philippe, Matacz Andrew and Potters Marc (2001) Leverage effect in financial markets: the retarded volatility model, *Physical Review Letters* vol 87 no. 22, (2001)
- 8 Brock William A., LeBaron Balke D., (1996), A Dynamic Structural Model for Stock Return Volatility and Trading Volume, *Review of Economics and Statistics*, vol. LXXVIII, no. 1, February 1996, pp. 94-110
- 9 Cabrales, Antonio & Hoshi, Takeo, 1996. "Heterogeneous beliefs, wealth accumulation, and asset price dynamics," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Elsevier, vol. 20(6-7), pages 1073-1100.
- 10 Campbell R. Harvey and Akhtar Siddique, (1999), Autoregressive Conditional Skewness, *The Journal of Financial and quantitative Analysis* Vol. 34, No. 4 (Dec., 1999), pp. 465-487
- 11 Chen Kan, Jayaprakash C. and Yuan Baosheng, (2006) Conditional Probability as a measure of volatility clustering in financial time series, Cornell University Library arXiv.org Physics (Other); Quantitative Finance 2006
- 12 Cont R., (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 1, 2001, 223–236
- 13 Cont R., (2005),Volatility Clustering in Financial Markets: Empirical Facts and Agent-Based Models, to appear in A.kirman &g. Teysere eds(Long memory in economics, Springer (2005)

- 14 De Fontnouvelle Patrick, (2000), Information dynamics in financial markets, *Macroeconomic Dynamics*, 4 , 2000, 139-169
- 15 Ding Zhusnxin, Granger Clive W.J., (1996), Modeling volatility persistence of speculative returns: a new approach, *Journal of econometrics* 73(1996) 185-215
- 16 Ding Zhusnxin, Granger Clive W.J., Engle Robert F., (1993) A long memory property of stock market returns and a new model, *Journal of Empirical Finance* 1(1993) 83-106
- 17 Ding, 2011, Modeling of Market Volatility with APARCH Model, U.U.D.M. Project Report 2011:6
- 18 Engle Robert (2004), Risk and volatility: Econometric models and financial practise, *The American Economic Review* Vol. 94, No. 3 (Jun., 2004), pp. 405-420
- 19 Engle Robert F. and Patton Andrew J. (2001) What good is a volatility model? *Quantitative finance* volume 1 (2001) 237–245
- 20 Engle Robert F. and Ng Viktor K., (1993), Measuring and testing the impact of news on volatility, the *journal of finance* vol. XLVIII, no. 5 december 1993
- 21 Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the U.K. inflation. *Econometrica*, 50, 1982, pp. 987–1008.
- 22 Engle, R. F., & Ng, V. K. (1993). Measuring and testing the impact of news on volatility. *The journal of finance*, 48(5), 1993, 1749-1778.
- 23 FOUQUE JEAN-PIERRE, PAPANICOLAOU GEORGE and SIRCAR K. RONNIE (1999), Financial Modeling in a Fast Mean-Reverting Stochastic Volatility Environment ?, *Asia-Pacific Financial Markets* 6: 37–48, 1999.
- 24 FOUQUE JEAN-PIERRE, PAPANICOLAOU GEORGE and SIRCAR K. RONNIE, (2000), MEAN-REVERTING STOCHASTIC VOLATILITY, *International Journal of Theoretical and Applied Finance* Vol. 03, No. 01, pp. 101-142 (2000)
- 25 Gallant, A. Ronald ; Rossi, Peter E. ; Tauchen, George, (1992), Stock Prices and Volume, *The Review of Financial Studies*, 1 January 1992, Vol.5(2), pp.199-242
- 26 Gallo G., Pacini B. (2002), *Metodi quantitativi per i mercati finanziari*, Carocci Editore.
- 27 Gaunersdorfer A., Hommes C. (2007) A Nonlinear Structural Model for Volatility Clustering. In: Teyssière G., Kirman A.P. (eds) *Long Memory in Economics*. Springer, Berlin, Heidelberg .
- 28 Ghalanos A., 2020, Introduction to the rugarch package. (Version 1.4-3), July 15, 2020

- 29 "Glosten Lawrence R., Jagannathan Ravi, Runkle David E., (1993), On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks , The Journal of Finance, Vol. 48, No. 5 (Dec., 1993), pp. 1779-1801
- 30 Granger Clive W.J. , Machina Mark j., (2006), Structural attribution of observed volatility clustering, Journal of econometrics 135 (2006) 15-29
- 31 "Harris L., (1986), A TRANSACTION DATA STUDY OF WEEKLY AND INTRADAILY PATTERNS IN STOCK RETURNS, Journal of Financial Economics 16 (1986) 99-117. North-Holland
- 32 Harvey A., Sucarrat G.,2014, EGARCH models with fat tails, skewness and leverage, Computational Statistics and Data Analysis 76 (2014) 320–338
- 33 Haug, Mark; Hirschey Mark, (2006), The January Effect, Financial Analysts Journal; Sep/Oct 2006; 62, 5; Accounting, Tax & Banking Collection pg. 78
- 34 Hentsche Ludger (1995), All in the family Nesting symmetric and asymmetric GARCH models, Journal of Financial Economics 39 (1995) 71-104
- 35 Huang Zhuo, Wang Tianyi, (2012), The Relationship between Volatility and Trading Volume in the Chinese Stock Market: A Volatility Decomposition Perspective, ANNALS OF ECONOMICS AND FINANCE 13-1, 211–236 (2012)
- 36 Jilla Karthik, Nayakb Sarat Chandra, Bathulac Archana, (2017), STYLIZED FACTS OF FINANCIAL TIME SERIES: A COMPREHENSIVE ANALYSIS International journal of recent trends in engineering & reserch 2017 302-307
- 37 Kirman Alan and Teyssière Gilles, (2002), Microeconomic models for long-memory in the volatility of financial time series, Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics, 2002, vol. 5, issue 4, 1-23
- 38 Kon Stanley J., (1984), Models of Stock Returns - A Comparison, The Journal of finance vol xxxix no. 1 march 1984
- 39 "LAKONISHOK JOSEF and MABERLY EDWIN, 1990, The Weekend Effect: Trading Patterns of Individual and Institutional Investors, THE JOURNAL OF FINANCE • VOL. XLV, NO. 1 • MARCH 1990
- 40 Liesenfeld, R.,(2001). A generalized bivariate mixture model for stock price volatility and trading volume. Journal of Econometrics 104, 141–178.
- 41 Louhichi W., (2011), What drives the volume–volatility relationship on Euronext Paris?, International Review of Financial Analysis, Vo. 20, Issue 4, August 2011, Pages 200-206

- 42 Mills Terence C., (1997) Stylized facts on the temporal and distributional properties of daily FT-SE returns, *Applied Financial Economics* 1997, 7, 599-604
- 43 Müller U.A., Dacorogna M.M., Davé R.D., Olsen R.B., Pictet O.V., Von Weizsäcker J.E., 1997, Volatilities of different time resolution - Analyzing the dynamics of market components, *Journal of Empirical Finance* 4 (1997) 213-239
- 44 Nardon M., Pianca P, INDICI DI VOLATILITÀ-VOLATILITY INDEXES, Dipartimento di Economia, Centro di Economia Quantitativa Università Ca' Foscari Venezia
- 45 Nelson D.B., 1991. Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach. *Econometrica* 59, 347–370.
- 46 Ning C., Xu D e Wirjanto T., (2014), "Is Volatility Clustering of Asset Returns Asymmetric?," *Journal of Banking and Finance* 52 (2015) pg. 62-76
- 47 "OLAN HENRY, (1998) Modelling the asymmetry of stock market volatility, *Applied Financial Economics*, 1998, 8, 145-153
- 48 Peiró Amado, Asymmetries and tails in stock index returns: are their distributions really asymmetric? *Quantitative Finance*, 01 February 2004, Vol.4(1), pp.37-44
- 49 Reinganum, M. R. (1983), The anomalous stock market behavior of small firms in January: Empirical tests for tax-loss selling effects, *Journal of Financial Economics* 12(1), 89–104.
- 50 Sewell Martin, (2011), Characterization of Financial Time Series, Research Note RN/11/01 UCL DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE
- 51 Su F., Wang L., (2019): Conditional Volatility Persistence and Realized Volatility Asymmetry: Evidence from the Chinese Stock Markets, *Emerging Markets Finance and Trade*, DOI: 10.1080/1540496X.2019.1574566
- 52 Timmermann, A. (2001). Structural Breaks, Incomplete Information and Stock Prices. UC San Diego: Department of Economics, UCSD. Retrieved from <https://escholarship.org/uc/item/1sn269d7>
- 53 Tseng Jie-Jun, Li Sai-Ping,(2012), Quantifying volatility clustering in financial time series, *International Review of Financial Analysis* 23 (2012) 11–19
- 54 Tseng, J. J., & Li, S. P. (2011). Asset returns and volatility clustering in financial time series. *Physica A*, 390, 1300–1314.

- 55 Wang Jian-Xin and Yang Minxian, Conditional Volatility Persistence (July 1, 2018). Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=3080693> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3080693>
- 56 Xue Yi, Gençay Ramazan, (2012), Trading Frequency and volatility clustering, Journal of Banking & Finance 36(2012) 760-773
- 57 Xue-Zhong He, Kai Li, Chuncheng Wang, (2016), Volatility clustering: A nonlinear theoretical approach, Journal of Economic Behavior & Organization 130 (2016) 274–297
- 58 Zakoian Jean-Michel, (1994), Threshold heteroskedastic models, Journal of Economic Dynamics and Control 18 (1994) 931-955

SITOGRAFIA

<https://vlab.stern.nyu.edu/docs/volatility>

[https://www.academia.edu/22210286/Introduzione alla Stima della Volatilit%C3%A0 con modelli Statici](https://www.academia.edu/22210286/Introduzione_alla_Stima_della_Volatilit%C3%A0_con_modelli_Statici)

<https://www.educazionefinanziaria.com/mercati-finanziari/indice-vix-volatilita-volatilita-implicita/>

<https://www.macroption.com/is-volatility-mean-reverting/>

<https://www.borsaitaliana.it/borsa/glossario/indici.html>

<https://www.borsaitaliana.it/borsa/glossario/indice-nikkei225.html>

<https://www.borsaitaliana.it/borsa/glossario/indice-s-p500.html>

<https://www.borsaitaliana.it/borsa/glossario/indice-dax30.html>

https://www.treccani.it/enciclopedia/stazionarieta-statistica_%28Dizionario-di-Economia-e-Finanza%29/