



Università  
Ca' Foscari  
Venezia

Corso di Laurea magistrale  
*in* Economia e Finanza

Tesi di Laurea

**Selezione di portafoglio  
con diverse misure di rischio:  
applicazione di una metaeuristica**

**Relatore**

Prof. Marco Corazza

**Laureando**

David Dalla Costa

867673

**Anno Accademico**

2019 / 2020



# Sommario

Introduzione .....	7
<b>1 Modern Portfolio Theory e criticità del modello di Markowitz .....</b>	<b>11</b>
1.1 Il criterio media-varianza .....	14
1.2 La teoria dell'utilità attesa .....	19
1.3 La diversificazione e il ruolo della correlazione .....	21
1.4 Criticità del modello di Markowitz.....	22
1.5 Le misure di rischio .....	24
1.5.1 Value-at-Risk.....	26
1.5.2 Expected Shortfall.....	27
<b>2 Il Value-at-Risk entropico .....</b>	<b>29</b>
2.1 L'entropia e le misure di rischio entropiche .....	29
2.1.1 Le misure di rischio entropiche: il caso di un titolo free-risk e un titolo rischioso.....	31
2.2 Il Value-at-Risk Entropico .....	34
2.3 Il modello di selezione di portafoglio .....	37
2.3.1 Il sistema dei vincoli.....	38
2.3.2 Il modello.....	41
<b>3 La Particle Swarm Optimization.....</b>	<b>42</b>
3.1 Le metaeuristiche.....	42
3.2 La Swarm Intelligence.....	44
3.3 La Particle Swarm Optimization .....	45
3.4 Differenti modelli di PSO .....	46
3.4.1 Il modello "global best" .....	46
3.4.2 Il modello "local best" .....	50

3.4.3	<i>Inertia Weight Approach</i> .....	51
3.4.4	<i>Constriction Factor Approach</i> .....	52
3.5	PSO e ottimizzazione vincolata .....	53
<b>4</b>	<b>Applicazione del modello e analisi dei risultati</b> .....	<b>55</b>
4.1	Presentazione del problema.....	55
4.1.1	<i>Vincoli della metaeuristica e parametri utilizzati</i> .....	58
4.1.2	<i>Gli Exchange Traded Funds</i> .....	61
4.2	Background finanziario .....	64
4.3	Applicazione.....	66
4.3.1	<i>1° Trimestre</i> .....	67
4.3.2	<i>2° Trimestre</i> .....	70
4.3.3	<i>3° Trimestre</i> .....	71
4.3.4	<i>4° Trimestre</i> .....	72
4.3.5	<i>5° Trimestre</i> .....	73
4.3.6	<i>6° Trimestre</i> .....	73
4.3.7	<i>Portafogli ottimi</i> .....	74
4.4	Confronto.....	78
4.4.1	<i>Analisi dei rendimenti</i> .....	78
4.4.2	<i>Indicatori utilizzati per l'analisi delle performance</i> .....	81
4.4.3	<i>Analisi con misure risk-adjusted</i> .....	84
	<b>Conclusioni</b> .....	<b>87</b>
	<b>Appendice</b> .....	<b>89</b>
	Dimostrazione del calcolo del vettore dei pesi ottimi.....	89
	Codice in Python della <i>Particle Swarm Optimization</i> .....	90
	<i>Algoritmo principale</i> .....	91
	<i>Codice per il Value-at-Risk</i> .....	96
	<i>Codice per l'Expected Shortfall</i> .....	96
	<i>Codice per l'Entropic VaR</i> .....	97

Risultati PSO e violazioni dei vincoli.....	97
2° Trimestre.....	98
3° Trimestre.....	99
4° Trimestre.....	101
5° Trimestre.....	103
6° Trimestre.....	104
<b>Bibliografia.....</b>	<b>107</b>
<b>Sitografia.....</b>	<b>108</b>



## Introduzione

In finanza, trattando di investimenti interessati da aleatorietà, risulta immancabile non andare rilevare quelli che, a tutti gli effetti, sono gli aspetti distintivi di un qualsiasi impiego di capitale in strumenti finanziari: il rendimento e il rischio. Se per il primo elemento è possibile affermare che è pratica diffusa adottare come stima del rendimento di un'attività finanziaria il valore atteso dei ritorni della stessa, il tema appare più articolato per quanto concerne il secondo aspetto.

La componente del rischio gioca un ruolo fondamentale all'interno di un portafoglio di investimento, o di un qualsiasi strumento finanziario. Tuttavia, la definizione univoca di questo concetto si rivela essere, ancora oggi, non semplice da formulare. Nel corso del tempo, la letteratura in materia ha elaborato diversi metodi per cercare di misurare il rischio, interpretandolo, ad esempio, come misura di dispersione intorno ad una media. Negli ultimi vent'anni l'idea classica di rischio in termini di volatilità dei rendimenti ha dimostrato tutta una serie di limiti sia logici che di applicabilità. Altri studi, in anni più recenti, hanno provato a riformulare il rischio in termini di probabilità, o ancora come importo monetario oggetto di potenziale perdita. Quanto ne consegue, si realizza in una pluralità di tecniche a disposizione per la misurazione del rischio di un'attività finanziaria, e l'adozione di una o dell'altra misura porta con sé implicazioni sia semantiche, dal momento che il significato che una misura attribuisce al concetto di rischio si lega alla struttura stessa di tale misura, sia influenze dirette sull'operatività stessa dell'investimento, poiché approcci diversi valutano il rischio in modo differente, producendo conseguentemente risultati diseguali.

L'obiettivo della presente trattazione consiste in una valutazione dei risultati ottenuti da differenti portafogli di investimento, utilizzando quale parametro di rischio quattro diverse misure. Lo scopo ultimo di questo studio è spinto dall'interesse nel cercare di fornire una risposta analitica alla tesi secondo la quale le misure di rischio sviluppate in tempi più recenti, e maggiormente affinate, corrispondono a performance di portafoglio migliori rispetto ad investimenti che adottano criteri più classici. A tal fine, le misure di rischio che saranno

oggetto di comparazione sono rappresentate rispettivamente dalla varianza, dal *Value-at-Risk*, dall'*Expected Shortfall* e, infine, dal *Value-at-Risk* entropico.

Il secondo aspetto caratterizzante di questa trattazione, ma per nulla secondario in termini di rilevanza, riguarda la selezione dei portafogli nei quali investire il capitale. Infatti, questo problema si lega fortemente alle tematiche di rischio e rendimento appena illustrate, tuttavia, si avrà modo di approfondire maggiormente la questione più avanti nello sviluppo della discussione.

Il problema della selezione di portafoglio è stato introdotto da H. Markowitz, nel 1952. L'argomento centrale del Capitolo I riguarda prevalentemente la presentazione della Moderna Teoria di Portafoglio, pubblicata dallo stesso Markowitz, analizzandone le implicazioni e verificando gli assunti di base. Inoltre, si pone un'attenzione particolare su uno degli aspetti chiave di questa teoria, ovvero il criterio di dominanza stocastica in media-varianza, dal momento che rappresenta uno dei fattori di maggior successo del lavoro di Markowitz. Successivamente, si illustrano quelle che sono le principali critiche che vengono mosse a questa teoria la quale, sia a causa del mutamento del contesto storico e delle caratteristiche dei mercati finanziari da una parte, sia per le forti assunzioni di alcune delle ipotesi base dall'altra, presenta oggi dei limiti di applicabilità. Infine, si introduce il concetto di coerenza delle misure di rischio, presentando due tecniche di valutazione della rischiosità simili, sviluppate negli ultimi anni e divenute molto note, ma che presentano delle differenze determinanti: il *Value-at-Risk* e l'*Expected Shortfall*.

Il Capitolo II prosegue il tema sulle misure di rischio, sviluppandolo ulteriormente andando a concentrarsi su una nuova classe di queste, note come misure di rischio entropiche. Dapprima presentando le caratteristiche generali di questa nuova famiglia di misure, la discussione andrà, successivamente, a trattare più nel dettaglio gli elementi distintivi e innovativi della quarta ed ultima misura di rischio adottata, ovvero il *Value-at-Risk* entropico. Presentata da Ahmadi-Javid nel 2012, l'*Entropic VaR*, o EVaR, rappresenta la misura più recente fra quelle utilizzate. Inoltre, considerati gli elementi che vanno a definire la struttura stessa del *Value-at-Risk* entropico, fra cui il suo legame con il concetto di entropia relativa e il rispetto di tutti gli assiomi di coerenza, le aspettative sono che questa misura ottenga dei risultati migliori rispetto alle performance realizzate dai portafogli che utilizzano le altre misure di rischio.



Nel Capitolo III si riprende il tema del problema di selezione di portafoglio, il quale si presenta come un problema di ottimizzazione, basato sulla minimizzazione di una misura di rischio, dato un certo rendimento obiettivo. Si evidenzia come questi problemi possano essere risolti efficacemente da una classe di tecniche denominate euristiche. Questi metodi sono particolarmente utili nel caso in cui il problema non possa essere risolto da metodi matematici esatti. In particolare, l'aspetto centrale del capitolo è rappresentato da una sottocategoria di queste tecniche, nota come metaeuristiche, le quali posseggono il vantaggio di essere in grado di trovare buone soluzioni a problemi matematici molto complessi (NP-hard), entro un tempo computazionale ragionevole. La metaeuristica implementata in questo studio per la risoluzione dei problemi di selezione di portafoglio è nota come *Particle Swarm Optimization*, o PSO, afferente alla classe delle metaeuristiche bio-ispirate; in questo caso, l'algoritmo utilizzato si ispira al comportamento sociale degli uccelli in uno stormo o dei pesci in un banco. Tuttavia, dal momento che la PSO è pensata per la soluzione di problemi di ottimizzazione non vincolati e, poiché il problema di selezione di portafoglio presenta, invece, una serie di vincoli, si rivela necessario riformulare il modello in termini non-vincolati, ricorrendo ad un metodo noto come delle "penalità esatte". Infine, si espone il modello oggetto dell'applicazione.

I risultati prodotti dell'algoritmo relativi al problema di selezione di portafoglio sono riportati al Capitolo IV. In questo ultimo capitolo si espongono i dati ottenuti dalle diverse reiterazioni della *Particle Swarm Optimization*, per andare a selezionare, in seguito, i portafogli che hanno presentato i valori migliori. Inoltre, vengono presentati gli strumenti finanziari utilizzati per la costruzione dei portafogli, qui interamente rappresentati da *Exchange Traded Funds*, conosciuti anche come ETF, e si illustreranno le motivazioni inerenti alla scelta di questi titoli. Poi, sulla base delle attività finanziarie selezionate e con le soluzioni ottime, ovvero le percentuali di capitale da investire in ciascun titolo, fornite dall'algoritmo di PSO, si costruiscono i portafogli oggetto della valutazione, e si analizzano le performance ottenute da questi. In particolare, si utilizzano una serie di indicatori aggiustati per il rischio e, sulla base anche dei profili di rischio e rendimento di ciascun portafoglio, si determina quale delle quattro misure di rischio avrà ottenuto i risultati migliori.



## CAPITOLO I

### 1 *Modern Portfolio Theory* e criticità del modello di Markowitz

La nascita della *Modern Portfolio Theory* (o MPT) può essere fatta coincidere con la pubblicazione del *paper* di H. Markowitz intitolato “*Portfolio Selection*” pubblicato in un articolo del *Journal of Finance*, nel 1952. Si tratta di un modello matematico per la costruzione di portafogli di investimento, la cui idea alla base consiste nella minimizzazione del rischio per un dato livello di rendimento atteso. Può essere interpretata come uno sviluppo del concetto di diversificazione negli investimenti. Infatti, il rischio e il rendimento di un singolo strumento finanziario non sono considerati fini a sé stessi, ma vengono posti in un’ottica di contribuzione generale al rischio di portafoglio. Questa teoria, conosciuta anche come modello media-varianza utilizza, come intuibile, proprio la varianza per definire il grado di rischio di un *asset*, mentre il rendimento atteso è rappresentato dalla sua media. Si considera allora un principio secondo cui l’investitore dovrebbe considerare il rendimento atteso come qualcosa di desiderabile, mentre la varianza qualcosa di non desiderabile (Markowitz, 1952). Quindi, per ogni dato livello di *expected return*, la MPT suggerisce di selezionare i titoli con il rischio, ovvero la varianza, minore (Luenberger, 2013). Come ogni teoria, anche il modello elaborato da Markowitz acquisisce maggior significato se inserito all’interno del proprio *framework* di riferimento. A tal proposito, si enunciano nel seguito le principali assunzioni della moderna teoria di portafoglio.

- Gli investitori sono avversi al rischio. A parità di rendimento, un soggetto preferirà sempre il titolo con il rischio minore e, qualora questo dovesse aumentare, dovrà essere compensato da un incremento del tasso medio di rendimento. Ne consegue che, nel modello media-varianza, ad un maggiore rischio deve corrispondere un maggiore rendimento medio.

- Non vi sono frizioni di mercato. L'ipotesi di *frictionless markets* prevede che non vi siano costi di transazione o di tassazione, e che tutte le attività finanziarie siano perfettamente divisibili (Corazza, 2018).
- Gli investitori sono *price-takers*. Le azioni dei soggetti economici non influenzano la distribuzione di probabilità dei rendimenti degli *assets*. Questo suggerisce l'assenza di grandi player di mercato e conseguentemente si assumono solamente piccoli investitori.
- La vendita allo scoperto è ammessa.
- Gli agenti economici conoscono la distribuzione di probabilità dei rendimenti.

I rendimenti di un titolo finanziario sono rappresentati da una variabile casuale, in quanto interessati da incertezza e aleatorietà sui valori futuri che possono assumere. La relativa distribuzione di probabilità viene descritta utilizzando i suoi primi due momenti: il valore atteso e la varianza. Il rendimento di un asset può allora essere indicato come:

$$E(R) = r$$

dove  $R$  rappresenta la variabile casuale, mentre  $r$  è la sua media. Allo stesso modo, è possibile scrivere la dispersione intorno al valore medio, e quindi la varianza, come segue:

$$Var(R) = \sigma^2.$$

Si supponga ora di avere a disposizione  $n$  differenti attività finanziarie, e sia  $X_0$  il capitale iniziale disponibile ad essere utilizzato per investire. È possibile costruire un portafoglio di investimento impiegando quote di questa ricchezza in diverse combinazioni di titoli. L'ammontare investito può essere espresso come frazioni dell'investimento totale (Luenberger, 2013):

$$X_{0i} = w_i X_0$$

dove  $w_i$  rappresenta la quota, o peso, di capitale investita nel titolo  $i$ -esimo. Chiaramente, la somma dei pesi equivale ad 1,  $\sum_{i=1}^N w_i = 1$ . Ripetendo il ragionamento per ciascun asset, è possibile scrivere il rendimento medio di portafoglio come di seguito:

$$r_p = \sum_{i=1}^N w_i r_i \quad (1.1)$$

con  $r_i$  che indica il rendimento atteso del titolo  $i$ -esimo. Il rendimento atteso del portafoglio è composto dalla somma dei rendimenti attesi dei titoli selezionati, pesati con la quota investita in ciascun asset. In altri termini, investendo una percentuale  $w_i$  nel titolo  $X_i$ , si otterrà un rendimento proporzionale alla quota impiegata. Lo stesso ragionamento non può essere seguito, invece, per la varianza del rendimento del portafoglio, che è:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (1.2)$$

La prima sommatoria esprime la somma delle varianze dei titoli pesati con i quadrati dei pesi. La seconda, invece, definisce la somma delle covarianze del titolo  $i$ -esimo con il titolo  $j$ -esimo moltiplicate per i pesi del titolo  $i$ -esimo e del titolo  $j$ -esimo: la particolarità di questa sommatoria è il fatto di poter assumere anche valori negativi, dipendentemente dal parametro di correlazione  $\rho_{ij}$ , detto anche indice di correlazione di Pearson, il quale esprime la relazione lineare che intercorre fra due variabili. In questo caso, infatti, va a comprimere il primo fattore, riducendo così la volatilità che entra in portafoglio. Inoltre, diversamente per quanto accade con il rendimento, la quota di rischio che entra in portafoglio non è pari alla percentuale di capitale investito nel singolo titolo ma, a causa della natura quadratica della varianza, sarà pari a  $w_i^2$ . Si chiarisce con un esempio numerico: sia  $w_i = 20\%$ , allora  $w_i^2 =$

$20\%^2 = 4\%$ , ovvero il contributo di questo titolo al rischio di portafoglio sarà solamente il 4% della sua varianza, a fronte di un investimento in esso del 20%.

### 1.1 Il criterio media-varianza

Si sono definite le misure con cui si valutano il rendimento e il rischio di una attività finanziaria. Poi si sono declinate queste misure in un'ottica di portafoglio. Nel seguito si vede il criterio di dominanza utilizzato nella *Modern Portfolio Theory* per la costruzione di un portafoglio di investimento.

Il criterio di dominanza stocastica in media-varianza rappresenta uno dei pilastri di questa teoria, e il concetto che sta alla base può essere delineato affermando che, dati due asset finanziari definiti come variabili casuali, un titolo è preferibile all'altro se il suo valore medio è più elevato e la sua varianza è inferiore rispetto a quelli della controparte. Formalmente, siano  $X_1$  e  $X_2$  due variabili casuali che rappresentano i rendimenti dei titoli, si dice che  $X_1$  non è dominato in media-varianza da  $X_2$  se:

$$E(X_1) \geq E(X_2)$$

e

$$Var(X_1) \leq Var(X_2)$$

e almeno una delle due disuguaglianze è soddisfatta in senso stretto.

Solamente a fini esemplificativi, si consideri il caso di un portafoglio composto da due soli asset,  $N = 2$ .

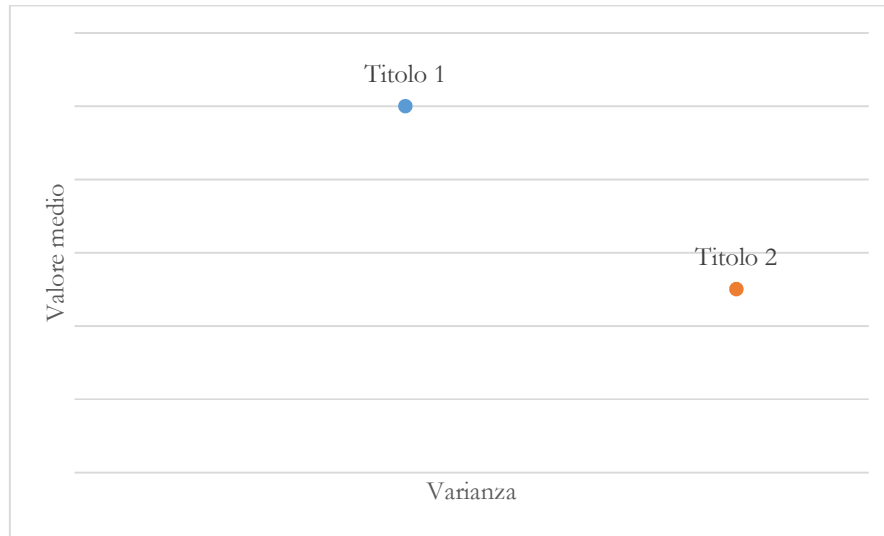


Figura 1.1 Dominanza stocastica in media-varianza

Come è possibile osservare dalla Figura 1.1, il titolo 1 domina in media-varianza il titolo 2, dal momento che possiede un rendimento atteso più elevato e una varianza minore. Tuttavia, questo criterio non è esente da problematiche, delle quali per ora si offrono alcuni cenni. Come intuibile, nel caso in cui una attività offrisse un rendimento medio maggiore, ma allo stesso tempo anche una maggiore volatilità rispetto ad un'altra, non sarebbe possibile alcun confronto. In questi casi, poiché nessun titolo è in grado di dominare l'altro, vengono considerati entrambi titoli efficienti. Questo ci consente di introdurre un ulteriore aspetto della teoria di Markowitz.

Tutti i titoli che secondo il criterio di dominanza stocastica in media-varianza sono preferibili ad altri o non dominati da altri, sono considerati efficienti e costituiscono la cosiddetta frontiera efficiente. La MPT propone, quindi, considerato un dato livello di rendimento, di selezionare i titoli con la varianza minore: in altre parole i titoli efficienti per quel dato valore medio. Si tratta di un problema di minimizzazione del rischio per un certo livello di rendimento oppure, viceversa, si può pensare la costruzione della frontiera efficiente come un problema di massimizzazione del rendimento per un dato livello di volatilità. In Figura 1.2 si riporta la frontiera dei titoli efficienti e inefficienti. Il grafico è stato prodotto utilizzando il software Python. Si sono generate 6.000 diverse combinazioni di portafogli partendo da 4 asset realmente esistenti; queste sono poi state rappresentate graficamente per

costruire la frontiera dei portafogli efficienti e inefficienti, nel seguito riportata. Come è possibile osservare, i portafogli efficienti si distribuiscono lungo questa curva: tuttavia, è possibile individuare un punto dove la varianza è minore: questo rappresenta il *Global Minimum Variance Portfolio* (GMVP), il quale separa la frontiera dei portafogli efficienti, in alto, da quella dei portafogli inefficienti, che si trovano in basso oltre il GMVP, che sono dominati dai primi.

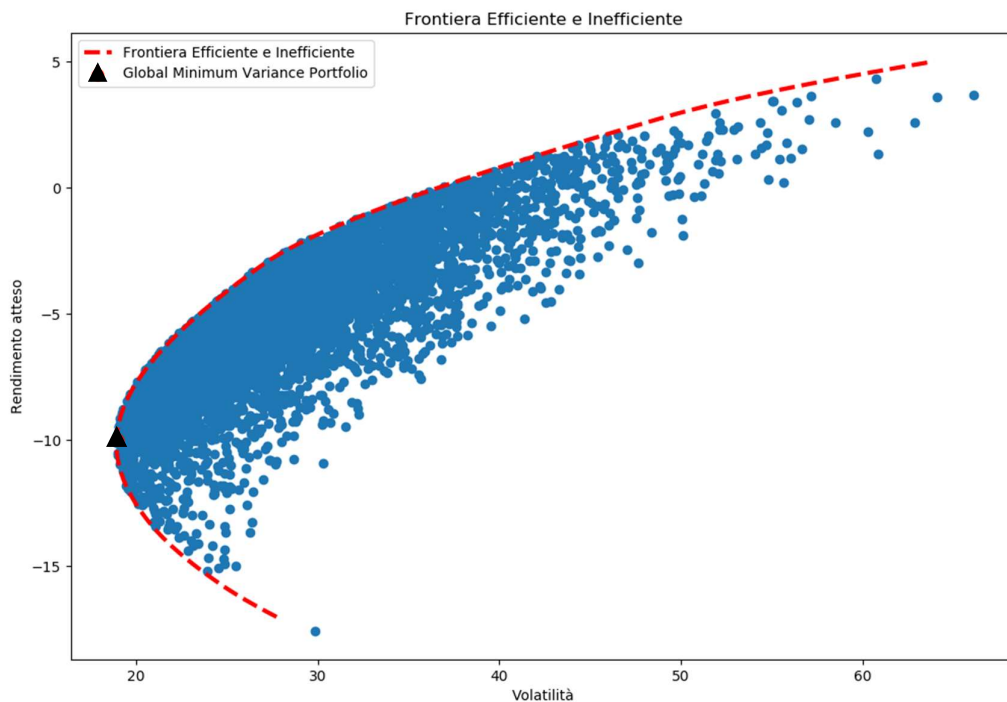


Figura 1.2 Frontiera dei portafogli efficienti e inefficienti

I portafogli efficienti, che dominano secondo il criterio media-varianza quelli inefficienti, possono essere costituiti a loro volta anche da titoli inefficienti, qualora questi ultimi apportino un beneficio in ottica di una riduzione del rischio di portafoglio, attraverso una correlazione negativa con gli altri titoli presenti.

Ponendo il caso di una frontiera efficiente composta da  $N$  titoli rischiosi, questa viene determinata risolvendo il seguente problema di ottimizzazione:



$$\begin{aligned} \min_{x_1, \dots, x_N} \quad & \sigma_P^2 \\ \text{s. t.} \quad & \begin{cases} r_P = \pi \\ \mathbf{x}'\mathbf{e} = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Il problema può essere scritto anche in forma matriciale:

$$\begin{aligned} \min_{x_1, \dots, x_N} \quad & \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} \\ \text{s. t.} \quad & \begin{cases} \mathbf{x}'\mathbf{r} = \pi \\ \mathbf{x}'\mathbf{e} = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.4)$$

dove:

- $\mathbf{V}$  indica la matrice quadrata e simmetrica di varianza-covarianza;
- $\pi$  rappresenta il rendimento medio atteso che l'investitore desidera realizzare con il portafoglio;
- $\mathbf{r}$  è il vettore dei rendimenti attesi;
- $\mathbf{x}$  è il vettore dei pesi di portafoglio, mentre  $\mathbf{e}$  è un vettore unitario.  $\mathbf{x}'\mathbf{e} = 1$  rappresenta il vincolo di bilancio, il quale impone di investire tutto il capitale a disposizione.

Nel seguito si presenta la soluzione a questo problema di selezione di portafoglio. Innanzitutto, sia  $\mathbf{V}$  una matrice NxN di varianze e covarianze e  $\mathbf{r}$  un vettore di medie. Allora, se:

- La matrice è invertibile: qualora una delle colonne/righe fosse espressa come combinazione lineare di altre, questa assunzione non sarebbe più valida. Infatti, una colonna, o una riga, contiene la struttura di rischio del titolo. Dal momento che una colonna contiene la varianza e la dipendenza di questo asset con gli altri, affermare che la rischiosità di un titolo è combinazione lineare delle rischiosità di altri titoli, comporta che il rischio di questo titolo è replicabile mediante combinazione lineare del rischio di altri titoli. La conseguenza è quella di avere un titolo la cui rischiosità è una "copia" delle rischiosità di altri titoli. Per questo motivo nella matrice non

devono essere presenti titoli che hanno la struttura di rischio ricavabile da quella di altri, altrimenti sarebbe possibile replicarli utilizzando i titoli di partenza;

- La matrice è definita positiva: tutte le varianze sono strettamente maggiori di zero. In altri termini, non si considerano titoli degeneri;
- Nel vettore delle medie, ci deve essere almeno un rendimento atteso differente rispetto agli altri. Infatti, se tutti i titoli avessero il medesimo ritorno si investirebbe solamente in quello con la varianza minore, con la conseguenza di non avere un portafoglio.

Una volta poste queste assunzioni, è possibile iniziare a risolvere il problema scrivendo la funzione di lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} - \lambda_1(\mathbf{x}'\mathbf{r} - \pi) - \lambda_2(\mathbf{x}'\mathbf{e} - 1)$$

con  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  che rappresentano i moltiplicatori lagrangiani. Attraverso una serie di passaggi riportati in Appendice si ottiene infine il vettore delle percentuali di ottimo, che definisce i pesi ottimi per costruire il portafoglio:

$$\mathbf{x} = \frac{(\gamma\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r} - \beta\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e})\pi + (\alpha\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e} - \beta\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r})}{\alpha\gamma - \beta^2} := \mathbf{x}^* \quad (1.5)$$

dove  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  sono degli scalari, definiti rispettivamente:

$$\alpha = \mathbf{r}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r};$$

$$\beta = \mathbf{r}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e} = \mathbf{e}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r};$$

$$\gamma = \mathbf{e}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}.$$

In conclusione, si noti che, con riferimento a questa soluzione di un problema di selezione di portafoglio:

- $E(R_{p^*}) = r_{p^*} = \mathbf{x}^*\mathbf{r} = \pi;$

- $Var(R_{P^*}) = \sigma_{P^*}^2 = \mathbf{x}^* \mathbf{V} \mathbf{x}^* = \dots = \frac{\gamma \pi^2 - 2\beta \pi + \alpha}{\alpha \gamma - \beta^2}$ . Questo risultato definisce una parabola, rappresentata nel piano media-varianza;
- $StDev(R_{P^*}) = \sigma_{P^*} = (\mathbf{x}^* \mathbf{V} \mathbf{x}^*)^{\frac{1}{2}} = \dots = \left( \frac{\gamma \pi^2 - 2\beta \pi + \alpha}{\alpha \gamma - \beta^2} \right)^{\frac{1}{2}}$ . Questo risultato descrive una iperbole nel piano media-deviazione standard.

La rischiosità dei portafogli efficienti è raffigurabile come una parabola, o iperbole, in  $\pi$ .

## 1.2 La teoria dell'utilità attesa

La frontiera efficiente è costituita dai portafogli che, per ogni livello di rendimento dominano tutti gli altri, minimizzando il rischio. Tuttavia, questa è la medesima per qualsiasi investitore. Si rivela così necessario individuare un fattore che permetta di spiegare per quale motivo ogni soggetto economico possa scegliere un proprio portafoglio di ottimo, che può essere differente rispetto a quello di un altro. A tal fine, si introduce il concetto di utilità attesa.

La rilevanza che può avere un guadagno, o una perdita, per gli investitori è soggettiva, dipende infatti dall'utilità che ognuno attribuisce a quel dato importo monetario. Formulata da John von Neumann e Oskar Morgenstern (1953), questa teoria si pone l'obiettivo effettuare scelte ottimali in ambito rischioso.

La teoria dell'utilità attesa si riferisce quindi ad un importo monetario, un rendimento certo, che potremmo anche genericamente definire come ricchezza. Tuttavia, se con il sopracitato principio, abbiamo affermato che gli individui, assumendo siano razionali, traggono maggiore utilità da quantità di denaro via via più elevate, si rivela necessario coniugare questo assunto con un'altra affermazione fondamentale di questa teoria: l'utilità dell'importo dipende anche dal patrimonio del singolo soggetto. Questo si spiega facilmente, essendo particolarmente intuitivo: 1.000 euro non hanno la stessa utilità per un individuo benestante e per un soggetto poco abbiente.

Questi due principi permettono di giungere alla cosiddetta funzione di utilità della ricchezza. Le caratteristiche principali di questa sono il suo essere crescente e la sua concavità. Questa funzione tende a crescere molto rapidamente nel primo tratto, per poi seguire un'inclinazione

minore in seguito: questo si spiega proprio in base a quanto appena detto, ovvero che in presenza di un patrimonio personale poco elevato, anche importi di denaro modesti fanno aumentare di molto l'utilità.

Le ipotesi sottostanti la teoria dell'utilità attesa sono le seguenti:

- Proprietà di riflessività. Per ogni  $X_i \in \mathbf{X}$  si ha  $X_i \succcurlyeq X_i$ ;
- Proprietà di transitività. Per ogni tripla  $X_h, X_i, X_j \in \mathbf{X}$ , se  $X_h \succcurlyeq X_i$  e  $X_i \succcurlyeq X_j$ , allora  $X_h \succcurlyeq X_j$ ;
- Proprietà di completezza. Per ogni coppia  $X_i, X_j \in \mathbf{X}$ , si ha  $X_i \succcurlyeq X_j$  oppure  $X_j \succcurlyeq X_i$ .

Queste prime tre sono comuni anche alla teoria del consumatore. Tuttavia, esistono delle ipotesi aggiuntive proprie della teoria dell'utilità in ambiti rischioso:

- Proprietà di archimedea: per ogni tripla  $X_b \succcurlyeq X_i \succcurlyeq X_j$  per un soggetto, questo non dovrebbe cambiare qualora gli estremi dovessero venire "sporcati" con le probabilità  $\alpha$  e  $\beta$ , per le quali si ha  $X_b \alpha X_j \succcurlyeq X_i \succcurlyeq X_j \beta X_b$ . È possibile interpretare questo assunto come un ordine di preferenza di tre investimenti per un soggetto, dove  $X_b$  rappresenta il titolo maggiormente preferito dall'investitore, e  $X_j$  quello meno. Qualora la scelta dovesse ricadere fra un portafoglio composto prevalentemente dal titolo  $X_b$  e una piccola quota del titolo  $X_j$ , ed un'alternativa che preveda il caso esattamente opposto, l'ordine di preferenza rimarrebbe in ogni caso invariato.
- Proprietà di sostituzione: per ogni coppia  $X_i, X_j \in \mathbf{X}$ , tale che  $X_i \succcurlyeq X_j$ , allora  $X_i \alpha X_b \succcurlyeq X_j \alpha X_b$  per ogni  $X_b$  appartenente a  $\mathbf{X}$  e per ogni probabilità  $\alpha$ .

La frontiera efficiente, che descrive il *trade-off* tra il rischio e il rendimento dei portafogli efficienti, dipende solamente dalla media e dalla varianza dei rendimenti dei portafogli. Tuttavia, sorge il problema se sia possibile utilizzare il concetto di utilità sopra definito per individuare il migliore dei portafogli, utilizzando solamente i primi due momenti della distribuzione dei rendimenti. Esiste una duplice soluzione a questo quesito, ovvero solamente due casi in cui ciò è possibile.

- Tutti gli investitori hanno una funzione di utilità quadratica, con  $a$  eventualmente diversi;

- Ognuno ha la propria funzione di utilità, ma allora in questa ipotesi le distribuzioni di probabilità congiunte dei rendimenti delle varie attività rischiose devono essere ellittiche<sup>1</sup>.

Essendo gli investitori *price-takers* la prima soluzione appare più percorribile, poiché appare più plausibile ipotizzare che tutti gli investitori abbiano la medesima funzione di utilità, nel caso specifico quella quadratica, piuttosto che imporre al mercato una distribuzione (congiunta) dei rendimenti differente da quella reale. Si consideri la funzione di utilità quadratica espressa in termini di rendimento di portafoglio  $R_P$ :

$$U(R_P) = R_P - \frac{a}{2} R_P^2$$

con  $a > 0$ . Il valore atteso di questa funzione di utilità è dato da:

$$E[U(R_P)] = r_P - \frac{a}{2} (r_P^2 + \sigma_P^2)$$

Si osserva che il rendimento del portafoglio dipende solo dal suo valor medio e dalla sua varianza anche utilizzando la funzione di utilità quadratica.

### 1.3 La diversificazione e il ruolo della correlazione

Come già affermato, la diversificazione è un aspetto rilevante della teoria di selezione di portafoglio elaborata da Markowitz: “[...] a rule of behavior which does not imply the superiority of diversification must be rejected both as a hypothesis and as a maxim.” (Markowitz, 1953). Il beneficio apportato da questa al rischio di portafoglio è crescente all’aumentare di  $N$ , ovvero i titoli sui

---

<sup>1</sup> Le distribuzioni ellittiche appartengono alla famiglia delle distribuzioni che generalizzano la distribuzione normale multivariata.

quali sono state impiegate quote di capitale. Tuttavia, la diversificazione comporta un reale vantaggio solamente quando permette di ridurre la volatilità del portafoglio. Come visto sopra, un ruolo fondamentale è giocato dalla correlazione fra i titoli che compongono il portafoglio di investimento: gli asset con un coefficiente di correlazione negativo contribuiranno sicuramente a ridurre la varianza apportata da ogni titolo. Al contrario, gli asset con una correlazione decisamente positiva faranno aumentare il rischio complessivo. Infine, nel caso in cui questa sia uguale a zero, la varianza del portafoglio sarà semplicemente la somma delle varianze dei titoli. Si riporta nel seguito, per una maggiore intuitività, l'equazione (1.2) della varianza di portafoglio.

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (1.6)$$

Alternativamente, per porre in evidenza la covarianza, questa formula può essere riscritta in modo più compatto come segue:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N w_i w_j \sigma_{i,j}$$

#### 1.4 Criticità del modello di Markowitz

L'aspetto innovativo del modello di Markowitz è individuabile nella facoltà di sintetizzare la moltitudine di informazioni di mercato in due variabili, il valore atteso e la varianza dei rendimenti che, tramite la risoluzione di un problema di ottimizzazione vincolata, permettono di identificare i portafogli efficienti. Tuttavia, alcune assunzioni che stanno alla base della teoria di Markowitz pur essendo irreali, non sono particolarmente irrealistiche. Le criticità del modello si sono manifestate invece negli anni più recenti, a causa del mutamento delle caratteristiche dei mercati, con la conseguenza di una maggiore volatilità (Wigglesworth, 2018).

- La prima problematica può essere rilevata nelle assunzioni di base della *Modern Portfolio Theory*. Come affermato, non tutte sono così irrealistiche da rappresentare delle vere e proprie criticità, tuttavia, l'assunzione dell'assenza di frizioni quali costi di transazione e tassazione, si presenta come un punto incompatibile con la realtà. In secondo luogo, il fatto che gli investitori siano *price-takers*, suggerisce l'assenza di grandi investitori istituzionali. Ne consegue che anche questa ipotesi non rispecchi in modo sufficientemente adeguato la realtà, si pensi infatti alla presenza delle banche centrali le quali hanno una influenza notevole sui mercati finanziari. Infine, l'assunzione di asset perfettamente divisibili è indubbiamente irrealistica, dal momento che i titoli possono essere acquistati, e venduti, solamente in modo unitario e spesso sono raggruppati in lotti.
- La seconda criticità è individuabile nell'utilizzo dei primi due momenti, media e varianza, per descrivere la distribuzione dei rendimenti. Questo funziona correttamente sotto l'ipotesi di rendimenti distribuiti ellitticamente, tuttavia, oggi il mondo reale è interessato da una maggiore asimmetria con la conseguenza di non potersi più affidare esclusivamente a questi due indicatori statistici.
- Il terzo problema è diretta conseguenza di quanto detto. Assumere che i rendimenti dei titoli seguano una distribuzione ellittica non è più possibile. Come reso palese dalla crisi finanziaria del 2007 – 2008, il presentarsi di situazioni estreme è molto più probabile di quanto predetto dai modelli normalmente utilizzati in finanza. Questo è dovuto al fenomeno delle *fat-tails*, ovvero le code della distribuzione sono molto più spesse di quanto non siano in una Normale, con la conseguenza di una maggiore probabilità per gli eventi più estremi. Inoltre, secondo Mittnik (2000), la distribuzione gaussiana ha portato a modelli fattoriali troppo semplicistici.
- Conseguentemente a queste osservazioni, è impossibile non rilevare l'inadeguatezza della varianza quale misura di rischio. Innanzitutto, stando a quanto appena riportato, dal momento che le distribuzioni dei rendimenti sono interessate da forti asimmetrie, la varianza perde di significato risultando una misura di rischio debole. Un altro aspetto che non permette alla varianza di essere una misura particolarmente significativa è rappresentato dal fatto di trattare in egual modo gli scostamenti dal valor medio positivi e quelli negativi. In altri termini, pone sullo stesso piano i profitti e le perdite. Tuttavia, come affermato sopra, si assumono investitori avversi al rischio, con la conseguenza che questi peseranno maggiormente le perdite rispetto ai

guadagni. Nel corso degli anni sono state teorizzate nuove misure di rischio che possono rappresentare un'alternativa migliore e più significativa alla varianza o alla deviazione standard, come la classe delle misure di rischio coerenti.

### 1.5 Le misure di rischio

La definizione di misura di rischio e, quindi, delle caratteristiche desiderabili che questa dovrebbe possedere è un tema molto rilevante, anche all'interno della presente trattazione. Nel seguito, si vedono gli assiomi che dovrebbero caratterizzare una misura di rischio in presenza di investitori razionali. Innanzitutto, è possibile definire una misura di rischio come una funzione  $\rho$  che assegna un valore reale, non negativo, a una variabile casuale  $X$  (Ahmadi-Javid, 2012), immaginabile come il rendimento futuro di un'attività rischiosa, con l'obiettivo di quantificare il suo grado di rischio. Le caratteristiche fondamentali che una misura di rischio standard dovrebbe possedere sono le seguenti:

- Positività: come affermato sopra, una misura di rischio associa ad una variabile casuale un valore strettamente positivo, o al massimo uguale a zero. Assegnare valori negativi sarebbe privo di significato;
- Convessità: questa proprietà permette di ridurre il rischio complessivo di portafoglio, sottolineando la rilevanza della diversificazione. Siano  $R_X$  e  $R_Y$  due variabili casuali rappresentanti i rendimenti di due titoli: dato il parametro  $\vartheta \in [0; 1]$ , una misura di rischio è definita convessa se:

$$\rho(\vartheta R_X + (1 - \vartheta)R_Y) \leq \vartheta \rho(R_X) + (1 - \vartheta)\rho(R_Y).$$

Questa caratteristica è soddisfabile anche indirettamente, ovvero nel momento in cui la misura di rischio rispetta gli assiomi di subadditività e di positiva omogeneità, definite nel seguito, previsti per misure di rischio coerenti (Follmer *et al.*, 2008).

Le misure di rischio coerenti sono state introdotte per la prima volta nel 1999 (Artzner *et al.*). Queste misure rappresentano un tentativo di rispecchiare in modo più fedele la realtà dei mercati. Una misura di rischio è definita coerente se soddisfa tutti i seguenti assiomi:



- *Translation Invariance*: l'assioma di invarianza transizionale assicura che, qualora una parte del capitale iniziale fosse investito in un titolo a rendimento certo, il rischio complessivo di portafoglio subirebbe una contrazione pari all'ammontare impiegato nell'asset *risk-free*:

$$\rho(X + c) = \rho(X) - c \text{ per ogni } X \in \mathbf{X} \text{ e } c \in \mathbb{R};$$

- *Subadditivity*: la caratteristica della subadditività si lega al concetto di diversificazione. La rischiosità connessa ad una combinazione di più titoli non deve essere maggiore della somma del rischio dei singoli asset:

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2) \text{ per tutte le } X_1, X_2 \in \mathbf{X};$$

- *Monotonicity*: la proprietà della monotonicità asserisce che il titolo, o portafoglio,  $X_1$  è preferito al titolo, portafoglio,  $X_2$  nel caso in cui il primo sia meno rischioso del secondo.

$$\text{se } X_1, X_2 \in \mathbf{X} \text{ e } X_1 \geq X_2, \text{ allora } \rho(X_1) \leq \rho(X_2);$$

- *Positive Homogeneity*: l'omogeneità positiva garantisce che all'aumentare del capitale investito in una posizione rischiosa, proporzionalmente aumenterà anche il rischio ad essa connesso. Formalmente può essere definita come segue:

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X) \text{ per tutte le } X \in \mathbf{X} \text{ e } \lambda \geq 0.$$

Questo assioma, congiuntamente a quello di subadditività, permette alla misura di rischio di soddisfare anche la caratteristica di convessità.

### 1.5.1 *Value-at-Risk*

Un esempio di misura di rischio moderna è il *Value-at-Risk*. Questa misura di rischio rappresenta il valore a rischio, ovvero la perdita massima potenziale che il portafoglio può realizzare in un intervallo di tempo  $t$ , chiamato anche *holding period*, e per una probabilità pari all'intervallo di confidenza<sup>2</sup>  $\alpha$  (Duffie, 1997). Formalmente, il VaR può essere scritto come:

$$VaR_{\alpha}(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) > \alpha\} = F_Y^{-1}(1 - \alpha) \quad (1.7)$$

dove  $X$  rappresenta la distribuzione dei rendimenti. Grazie anche alla sua facilità di comunicazione e interpretazione, negli anni il VaR ha riscosso un notevole successo, persino a livello normativo. Tuttavia, il VaR non è una misura coerente in quanto non sempre soddisfa la proprietà della subadditività. Inoltre, per profitti o perdite che non si distribuiscono secondo una Normale, il VaR si presenta come computazionalmente poco stabile e i modelli di ottimizzazione che utilizzano questa misura sono difficilmente trattabili qualora presentino grandi dimensioni (Ahmadi-Javid, 2012).

Per quanto concerne le misure di rischio coerenti è possibile citare il *Conditional Value-at-Risk*, conosciuto anche come *Expected Shortfall*, e il *Value-at-Risk* entropico, che sarà analizzato più dettagliatamente in seguito, e rappresenterà una delle misure di rischio adottate nella definizione del modello di selezione di portafoglio presentato in questa trattazione.

---

<sup>2</sup> In statistica, quando si procede alla stima di un parametro, il valore che ne consegue è accompagnato da un certo livello di incertezza, essendo il risultato di un processo di valutazione. Si rivela allora opportuno accompagnare tale stima con un livello di probabilità volto ad indicare il grado di plausibilità del parametro stimato.

### 1.5.2 Expected Shortfall

Per diverso tempo si è cercata una alternativa coerente al *Value-at-Risk*, al fine di evitare di incorrere nelle problematiche che la mancanza dell'assioma di subadditività di questa misura comporta.

L'*Expected Shortfall*, nel seguito anche ES, è stato formulato per la prima volta da Acerbi *et al.* (2002) riuscendo a formalizzare una misura di rischio che cogliesse la rischiosità insita nelle code della distribuzione, pur rispettando i quattro assiomi di coerenza. A differenza del VaR, che può essere identificato come un valore soglia, l'*Expected Shortfall* rappresenta il valore medio delle perdite realizzabili con una probabilità uguale a  $(1 - \alpha)\%$ , dove  $\alpha$  indica il livello di confidenza, e può essere definito come segue.

Sia  $X$  la distribuzione dei rendimenti di un portafoglio in uno specifico orizzonte temporale  $T$ , e  $\alpha = A\% \in (0,1)$  uno specifico livello di probabilità. L'*Expected Shortfall*, ad un livello  $A\%$ , di un portafoglio è allora definito come:

$$ES_{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha} \left( E[X 1_{\{X \leq x_{\alpha}\}}] - x_{\alpha} (P[X \leq x_{\alpha}] - \alpha) \right) \quad (1.8)$$

Al fine di cogliere maggiormente la semplicità e l'immediatezza dell'*Expected Shortfall*, gli autori suggeriscono di rinunciare a voler definire l'ES quale combinazione di valori attesi. Bensì, esiste una rappresentazione che evidenzia molto più chiaramente, rispetto a quanto presentato sopra, la diretta dipendenza del parametro  $\alpha$  e della funzione di distribuzione  $F(x) = P[X \leq x]$ . Infatti, introducendo la funzione inversa generalizzata di  $F(x)$ :

$$F^{\leftarrow}(p) = \inf\{x | F(x) \geq p\} \quad (1.9)$$

è possibile dimostrare che  $ES_{\alpha}$  può essere espresso come la media negativa di  $F^{\leftarrow}(p)$  ad un intervallo di confidenza  $p \in (0, \alpha]$ :

$$ES_{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} F^{-}(p) dp \quad (1.10)$$

L'*Expected Shortfall* si presenta quindi come una misura preferibile rispetto al *Value-at-Risk*, data la sua semplicità, universalità, in quanto applicabile a qualsiasi strumento o fonte di rischio, e completezza, poiché produce valutazioni globali uniche per portafoglio soggetti a differenti rischi.

Tuttavia, nonostante i vantaggi derivanti dall'utilizzo dell'*Expected Shortfall*, questo rimane meno usato rispetto al *Value-at-Risk*. La ragione principale di questo fenomeno è da ricercarsi nel fatto che il *backtesting*<sup>3</sup> con l'ES risulta più difficile se confrontato a quello fatto con il VaR. Tuttavia, come dimostrato da Acerbi (2014), seppure non è possibile condurre un processo di *backtesting*, in senso stretto, con l'*Expected Shortfall*, è comunque applicabile una approssimazione di questo processo.

Riassumendo, nel corso di questo capitolo si sono illustrati gli elementi fondamentali della *Modern Portfolio Theory* di Markowitz presentando, di conseguenza, il modello media-varianza. Si sono evidenziate le difficoltà di questo criterio arrivando, infine, ad introdurre delle misure di rischio più recenti, alternative alla varianza, quali il *Value-at-Risk*, per concludere con quelle coerenti come l'*Expected Shortfall*. Nel capitolo successivo si completa l'insieme delle misure di rischio che verranno utilizzate nell'applicazione del problema di selezione di portafoglio, introducendo una nuova classe di misure di rischio.

---

<sup>3</sup> Si tratta di una procedura volta a valutare le performance ex-post derivanti dall'utilizzo di una data misura di rischio.

## CAPITOLO II

### 2 Il *Value-at-Risk* entropico

#### 2.1 L'entropia e le misure di rischio entropiche

Nel capitolo precedente sono stati presentati gli assiomi sottostanti le misure di rischio coerenti. Nel seguito si approfondisce ulteriormente questo tema, in particolare introducendo il concetto di entropia, arrivando così a trattare le misure di rischio coerenti entropiche.

In fisica, l'entropia è una grandezza utilizzata per indicare il grado di disordine all'interno di un sistema, raffrontato ad uno standard di riferimento. Banalmente, potremmo sintetizzare la nozione di entropia, solamente a fini intuitivi, come la tendenza al disordine e ad uno stato di minor dispendio di energia; dal momento che tutto l'universo tende ad uno stato di conservazione di essa, questo è realizzabile attraverso una maggiore propensione al disordine, in contrapposizione all'ordine che invece, per il suo raggiungimento e mantenimento, richiede uno sforzo in termini energetici. A fini esemplificativi, si immagini una goccia di inchiostro che cada in un bicchiere d'acqua: questa si diffonderà senza nessun intervento esterno ed entro qualche tempo si sarà diffusa in tutto il bicchiere, raggiungendo quindi il maggior disordine. Tuttavia, il processo inverso, ovvero la separazione dell'inchiostro dall'acqua e quindi l'ottenimento dell'ordine, necessita un'azione esterna con conseguente uso di energia.

Una nozione più precisa e funzionale ai fini di questa trattazione definisce l'entropia come la misura della divergenza fra due distribuzioni di probabilità (Brandtner, Wolfgang, Rischau, 2018).

Applicando il concetto di entropia alle misure di rischio è possibile definire: una prima classe di cosiddette misure di rischio coerenti entropiche (*Coherent Entropic Risk Measures*, o CERM), ed una seconda classe di misure di rischio entropiche (*Entropic Risk Measures*, o ERM) quale

esempio di misure di rischio convesse. Le ERM, pure essendo convesse, non sono misure coerenti.

Come presentato precedentemente, le misure di rischio coerenti godono delle proprietà di monotonicità, invarianza transizionale, omogeneità positiva e subadditività, e possono essere rappresentate come di seguito:

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q(-X) \quad (2.1)$$

con  $\mathcal{Q}$  che rappresenta un insieme non vuoto di misure di probabilità in  $\Omega$  (Brandtner *et al.*, 2018). Le misure di rischio convesse ma non coerenti, invece, rispettano gli assiomi di monotonicità, convessità e *law invariance*<sup>4</sup>, e possono essere definite come:

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} \{E_Q(-X) - \alpha(Q)\} \quad (2.2)$$

dove  $\mathcal{P}$  è il set delle misure di probabilità in  $\Omega$ , e  $\alpha : \mathcal{P} \rightarrow (-\infty, \infty]$  è una funzione di penalità (Brandtner *et al.*, 2018). Tuttavia, l'aspetto fondamentale per entrambe le due misure di rischio è rappresentato dall'entropia relativa di una distribuzione Q rispetto a P:

$$H(Q|P) := \begin{cases} E_Q \left( \ln \frac{dQ}{dP} \right) & \text{se } Q \ll P \\ \infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (2.3)$$

La notazione  $H(Q|P)$  identifica l'entropia condizionale, che quantifica l'ammontare di informazioni richieste per poter descrivere i risultati di una variabile casuale Y, in questo caso

---

<sup>4</sup> Sia  $p: L^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  una misura di rischio coerente. Questa si dice *law invariant* se  $p(X) = p(Y)$ , qualora  $X, Y \in L^\infty$  abbiano la stessa legge di probabilità (Kusuoka, 2001).

$Q$ , conosciuta la variabile casuale  $X$ , rappresentata qui dalla distribuzione  $P$ . In altri termini, questo concetto offre una misura della divergenza di due distribuzioni di probabilità. Il concetto di entropia relativa espresso da questa equazione entra nella definizione delle misure di rischio entropiche coerenti, con lo scopo di selezionare un insieme di misure di probabilità  $Q$  rispetto a quanto visto all'equazione (2.1):

$$\mathcal{Q} := \{Q \in \mathcal{P}: H(Q|P) \leq c\} \quad (2.4)$$

dove  $c > 0$  è un parametro di rischio (Brandtner *et al.*, 2018). La formula delle CERM di cui sopra si esplicita allora come segue:

$$CERM_c(X) = \sup_{Q \in \mathcal{P}: H(Q|P) \leq c} E_Q(-X) \quad (2.5)$$

La misura così definita soddisfa tutte le proprietà enunciate sopra.

Si analizza ora il comportamento di questa misura coerente nell'applicazione ad un caso di selezione di portafoglio con un titolo rischioso ed uno a rendimento certo.

### 2.1.1 *Le misure di rischio entropiche: il caso di un titolo free-risk e un titolo rischioso*

Sia  $w_0$  la ricchezza iniziale di un investitore, mentre  $z$  e  $w_0 - z$  rappresentano rispettivamente l'ammontare impiegato nel titolo rischioso e in quello *risk free*, con  $R - 1$  e  $r - 1$  i relativi rendimenti. Il rendimento atteso dell'asset rischioso è assunto superiore rispetto a quello del titolo privo di rischio,  $E(R) \geq r$ , così da poter studiare il trade-off fra rischio e rendimento (Brandtner *et al.*, 2018). La ricchezza finale dell'investitore è espressa così dalla seguente relazione:

$$W(z) = z * R + (w_0 - z) * r \quad (2.6)$$

Inoltre, si assume che l'investitore utilizzi come regola la minimizzazione di una misura di rischio  $\rho$ , la quale fornisce l'ammontare ottimale di ricchezza da impegnare nel titolo rischioso:

$$z^* = \underset{[0, w_0]}{\operatorname{arg\,min}} \rho((w_0 - z) * r + z * R) \quad (2.7)$$

La costruzione di questo semplice portafoglio suggerisce che in caso di un modello rischio-rendimento come quello presentato, fintato che il premio al rischio<sup>5</sup> è positivo, diversificazione e investimento rischioso dovrebbero essere ottimali. Tuttavia, il modello CERM fallisce questo test. Sebbene il CERM tenga in considerazione sia il rischio che il rendimento, questo riflette tali aspetti in una maniera piuttosto ristretta. Ciò è imputabile alle proprietà di invarianza traslativa e omogeneità positiva, contraddicendo il paradigma standard di diversificazione. Questo avviene in tre differenti aspetti:

- Dal momento che nessun portafoglio è dominato secondo il criterio di dominanza stocastica di secondo ordine<sup>6</sup>, o SSD, le soluzioni di ottimo sono solamente le due

---

<sup>5</sup> Rappresenta l'extra-rendimento, rispetto ad una attività priva di rischio, richiesto da un investitore avverso al rischio, al fine di impegnarsi nell'acquisto di un titolo rischioso.

<sup>6</sup> La dominanza stocastica rappresenta una forma di ordinamento stocastico ed è utilizzata per riferirsi a situazioni in cui una distribuzione di probabilità, con i suoi risultati, può essere considerata superiore ad un'altra. Il criterio di dominanza stocastica di secondo ordine prevede che, date due distribuzioni di probabilità  $F_1$  e  $F_2$  sugli esiti  $x$ ,  $F_1(x)$  domini stocasticamente  $F_2(x)$  al secondo ordine se per ogni funzione concava non decrescente  $x: R^+ \rightarrow R$  succede che:

$$\int_{-\infty}^z F_1(x) dx \leq \int_{-\infty}^z F_2(x) dx \quad \forall z \in \Omega$$

Le distribuzioni di frequenza dei risultati delle alternative vengono confrontate in base alle aree sottostanti le funzioni di distribuzione cumulate. In tal modo la dominanza stocastica di secondo grado richiede che la curva della funzione di distribuzione cumulata dominante cioè la scelta migliore, si trovi al di sotto e a destra delle altre alternative.



agli estremi,  $z = 0$  e  $z = w_0$ . Le soluzioni intermedie  $z \in [0, w_0]$  non sono mai scelte;

- Come già detto, un premio per il rischio positivo è una condizione non sufficiente per investire nel titolo rischioso;
- Infine, l'investimento ottimale  $z^*(c)$  mostra costanti intervalli o salti da una soluzione estrema all'altra al cambiare del parametro di rischio  $c$  (Brandtner *et al.*, 2018).

Le CERM conducono a soluzioni che non prevedono alcuna diversificazione, imponendo di investire la totalità della ricchezza iniziale nel titolo rischioso o nel titolo a rendimento certo. Le misure di rischio entropiche convesse, invece, non sono viziate da questo problema e rappresentano un'alternativa migliore per questo problema di selezione di portafoglio.

Si consideri un investitore che minimizzi una ERM, con parametro di rischio  $\gamma$  come visto nell'equazione (2.5). La quota di investimento ottimale  $z^*$  per il titolo *risk free* è data da:

$$E(R) - r = \frac{\text{cov}(R, e^{-\gamma z^* R})}{E(e^{-\gamma z^* R})} \quad (2.8)$$

I risultati che si ottengono sono i seguenti:

- Il soggetto investirà nel titolo rischioso solamente se il premio per il rischio è positivo:  $z^* > 0$  se  $E(R) - r > 0$ .
- Nel caso in cui il rendimento atteso dell'asset rischioso sia superiore a quello del *risk free*,  $E(R) > r$ , l'investimento ottimale nel titolo rischioso sarà continuo e strettamente decrescente nel parametro di rischio  $\gamma$  per  $\gamma > \bar{\gamma}$ , dove  $\bar{\gamma}$  è definito da  $E(R * e^{-\bar{\gamma} w_0 R}) = E(r * e^{-\bar{\gamma} w_0 R})$ .

Di conseguenza, sostituire le proprietà di coerenza di omogeneità positiva e subadditività con una proprietà più debole come la convessità, si dimostra sensato nell'ipotesi di problema di portafoglio qui esposto (Brandtner *et al.*, 2018).

## 2.2 Il *Value-at-Risk* Entropico

Un approccio molto diffuso ai problemi di ottimizzazione di portafoglio è quello largamente utilizzato dell'ottimizzazione stocastica, dove una singola funzione obiettivo, che rappresenta il rischio di portafoglio, è ottimizzata sotto una serie di vincoli deterministici, i quali riflettono le caratteristiche, la strategia, e le politiche dell'investitore. Un fattore chiave nell'ottimizzazione di un portafoglio di investimento che utilizzi questo metodo è la scelta di una misura di rischio che esprima il rischio di portafoglio: questa quantifica il grado di rischio associato ad un risultato casuale (Ahmadi-Javid, Fallah-Tafti, 2019).

Quasi tutte le misure di rischio introdotte prima degli anni 2000 non possedevano alcune delle caratteristiche assiomatiche richieste per la coerenza. Un esempio classico è il criterio media-varianza di Markowitz (1952) il quale manca, ad esempio, della proprietà di monotonicità, rendendolo economicamente poco rilevante. Lo stesso VaR, come già visto, non costituisce una misura di rischio coerente in quanto non soddisfa l'assioma di subadditività (Ahmadi-Javid, 2019).

Per superare queste problematiche, la recente letteratura in materia di ottimizzazione di portafoglio si è concentrata sulle misure di rischio coerenti, arrivando a formularne diverse, come le *spectral risk measures*<sup>7</sup>. Tuttavia, queste ultime presentano il problema di non poter essere utilizzate in portafogli di grandi dimensioni, dal momento che i risultanti problemi di ottimizzazione non sono considerati computazionalmente trattabili (Ahmadi-Javid, 2019). Un'ulteriore misura coerente introdotta negli ultimi anni è rappresentata dall'*Entropic Value-at-Risk*.

---

<sup>7</sup> Le *spectral risk measures* identificano una classe di misure di rischio coerenti che consistono in una media ponderata dei quantili della distribuzione dei rendimenti, con la parte inerente le perdite che viene pesata maggiormente. Formalmente è possibile definirle come segue:

$$M_\phi = - \int_0^1 \phi(p) F_X^{-1}(p) dp$$

dove  $\phi$  è una funzione definita nell'intervallo  $[0,1]$  tale che  $\int_0^1 \phi(p) dp = 1$  (Adam *et al.*, 2007).

Il VaR entropico, o EVaR, è una misura di rischio coerente introdotta recentemente da Ahmadi-Javid (2012), e fa parte di una classe di misure note come *g-entropic*<sup>8</sup>. Oltre ad essere coerente, l'EVaR, a differenza di altre misure come il VaR o l'*Expected Shortfall* che posseggono la proprietà di monotonicità, è strettamente monotono (Ahmadi-Javid, 2019).

Fra le caratteristiche che rendono questa misura di rischio apprezzabile ed interessante vi è la trattabilità, da un punto di vista computazionale, per ampie classi di rischi. Questo, infatti, per misure come il VaR o l'*Expected Shortfall*, non avviene in maniera efficiente. In secondo luogo, il VaR entropico possiede una forte monotonicità, a differenza del classico VaR o dell'*Expected Shortfall*, proprietà che è desiderabile in una misura di rischio (Ahmadi-Javid, 2012).

Definendo formalmente il *Value-at-Risk* entropico, è possibile descrivere questa misura di rischio come il più stretto limite superiore ottenibile dalla disuguaglianza di Chernoff per il VaR e l'*Expected Shortfall*. Questa disuguaglianza può essere definita, per qualsiasi costante  $\alpha$  e  $X \in \mathbf{L}_{M^+}$ , come segue:

$$Pr(X \geq a) \leq e^{-za} M_X(z), \quad \forall z > 0.$$

Risolvendo l'espressione  $e^{-za} M_X(z) = \alpha$ , con riferimento ad  $a$  per  $\alpha \in ]0,1]$ , si ottiene

$$a_X(\alpha, z) := z^{-1} \ln(M_X(z)/\alpha)$$

per la quale si ha  $Pr(X \geq a_X(\alpha, z)) \leq \alpha$ . Per ogni  $z > 0$ ,  $a_X(\alpha, z)$  è un limite superiore per  $VaR_{1-\alpha}(X)$ . Si considera il miglior limite superiore di questo tipo come una nuova misura

---

<sup>8</sup> Sia  $g$  una funzione convessa con  $g(1) = 0$ , e  $\beta$  un numero non negativo. La misura di rischio  $g$ -entropica con livello di divergenza  $\beta$  è definita come:

$$ER_{g,\beta}(X) := \sup_{Q \in \mathfrak{S}} E_Q(X)$$

dove  $\mathfrak{S} = \{Q \ll P: H_g(P, Q) \leq \beta\}$ .

di rischio che limiti  $VaR_{1-\alpha}(X)$  utilizzando momenti esponenziali. L'*Entropic VaR*, ad un livello di confidenza pari a  $1 - \alpha$ , può essere scritto come segue:

$$EVaR_{1-\alpha}(X) := \inf_{z>0} \{a_X(\alpha, z)\} = \inf_{z>0} \{z^{-1} \ln(M_X(z)/\alpha)\} \quad (2.9)$$

L'EVaR è allora il più stretto limite superiore possibile che può essere ottenuto dalla disuguaglianza di Chernoff per il VaR.

Una particolarità dell'*Entropic VaR* consiste nella sua doppia rappresentazione: per quanto concerne la prima, la si è illustrata appena sopra, mentre la seconda sfrutta il concetto di entropia relativa. Tale teoria entra nella definizione dell'EVaR tramite una generalizzazione della formula di Donsker-Varadhan<sup>9</sup>. Questa misura di rischio coerente può essere riscritta come:

$$EVaR_{1-\alpha}(X) := \inf_{t>0} \{k_\alpha(X, t)\}$$

dove la parte destra dell'equazione è una funzione convessa, per la formula di Donsker-Varadhan, con  $k_\alpha(X, t)$  che è congiuntamente convessa in  $(X, t)$  (Ahmadi-Javid, 2012).

Come accennato sopra, il VaR entropico è caratterizzato dal fatto di possedere una forte monotonicità. Una misura di rischio  $\rho$  è detta fortemente monotona se vale la disequazione  $\rho(X) < \rho(Y)$  per ogni coppia di variabili casuali  $X$  e  $Y$  nel dominio di  $\rho$  che soddisfi le seguenti condizioni:

---

<sup>9</sup> Formula di Donsker-Varadhan. Per ogni  $X \in \mathbf{L}_\infty$ , si ha

$$\ln E_P(E^X) = \sup_{Q \ll P} \{E_Q(X) - D_{KL}(Q||P)\},$$

dove  $D_{KL}(Q||P) := \int \frac{dQ}{dP} \left( \ln \frac{dQ}{dP} \right) dP$  è l'entropia relativa di  $Q$  rispetto a  $P$ , o la divergenza di Kullback-Leibler da  $Q$  a  $P$ .

- $X \succcurlyeq Y$  indica che tutte le osservazioni in  $X$  sono maggiori o uguali a tutte le singole osservazioni in  $Y$ ;
- $\Pr\{X \succ Y\} > 0$  assicura che l'evento  $X \succ Y$  sia possibile;
- $\text{ess sup } X > \text{ess sup } Y$  or  $\text{ess sup } X = \text{ess sup } Y = +\infty$

Di fatto, queste condizioni implicano la stretta preferenza di  $X$  su  $Y$  dalla misura di rischio  $\rho$ .

Ricapitolando, si è introdotta una misura di rischio coerente che rappresenta il più stretto limite superiore ottenibile dalla disuguaglianza di Chernoff per il *Value-at-Risk* e l'*Expected Shortfall*, e si è visto come l'*Entropic VaR* sia legato al concetto di entropia relativa e al VaR. In particolar modo, questo definisce la “dualità” dell'EVaR, o doppia rappresentazione. Fra i vantaggi di questa misura si è citata la forte monotonicità e l'efficienza computazionale nel risolvere problemi di ottimizzazione stocastica. Infine, applicando una generalizzazione della formula di Donsker-Varadhan si è arrivati a definire l'EVaR. Nel proseguo si andrà a definire un problema di ottimizzazione vincolata di portafoglio che utilizzi il VaR Entropico come misura di rischio (Ahmadi-Javid, 2012).

### 2.3 Il modello di selezione di portafoglio

Sia  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  il vettore di portafoglio che indica le frazioni di ricchezza investita in ognuno degli  $n$  strumenti finanziari. Sia  $\mathbf{R}$  un vettore di variabili casuali  $k$ -dimensionale con una distribuzione di probabilità nota, rappresentante  $k$  fattori di rischio richiesti per specificare il rendimento del portafoglio. Il vettore randomico  $\mathbf{R}$  è modellizzato sul sottostante spazio di probabilità  $(\Omega, \mathbf{F}, P)$ . La perdita del portafoglio, ovvero i rendimenti negativi, è anch'essa una variabile casuale definita come  $G(\mathbf{w}, \mathbf{R})$ , la quale dipende dal vettore dei fattori di rischio  $\mathbf{R}$  e dal vettore di portafoglio  $\mathbf{w}$ . Assumendo che la vendita allo scoperto non sia ammessa, assunzione comunque non irrealistica dal momento che l'Autorità di Vigilanza sui Mercati Finanziari in circostanze particolarmente delicate come periodi di crisi può decidere di vietare lo *short-selling*, è possibile determinare il seguente problema di ottimizzazione di portafoglio:

$$\min t \ln \left( \sum_{j=1}^N p_j e^{t^{-1} G(\mathbf{w}, a^j)} \right) - \ln \alpha \quad (2.10)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1 \\ \mathbf{w} \in D \\ \mathbf{w} \geq \mathbf{0}, \quad t > 0 \end{cases}$$

dove  $D \subset \mathbb{R}^n$  è un insieme compatto che rappresenta i vincoli imposti dall'investitore, che verranno qui definiti successivamente. Inoltre, la variabile  $\theta$ , presente nella definizione dell'EVaR, è stata sostituita con  $t^{-1}$  (Ahmadi-Javid, 2019).

### 2.3.1 Il sistema dei vincoli

Si introducono ora i vincoli che andranno a costituire parte integrante del modello di selezione di portafoglio che sarà utilizzato nell'applicazione concreta. La finalità che svolge l'introduzione di questi vincoli all'interno del problema di ottimizzazione è quella di cercare di rendere il modello più verosimile rispetto a quella che è la realtà dei mercati finanziari. Sinteticamente, i vincoli che nel seguito verranno più dettagliatamente definiti e sviluppati sono:

- Vincolo di bilancio;
- Vincolo sul rendimento medio minimo;
- Vincolo di interezza;
- Vincolo di cardinalità;
- Vincoli di *bound*.

Il vincolo di bilancio riguarda la ricchezza iniziale dell'investitore. Tramite questa relazione si intende impegnare nell'investimento l'intero capitale disponibile al tempo  $t_0$ . Formalmente, questo vincolo può essere scritto come segue:

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1$$

Il secondo vincolo concerne il rendimento medio minimo. Si tratta di impostare un livello di rendimento medio annuo di portafoglio che deve essere rispettato, ed è deciso in modo esogeno dall'investitore. In altri termini, sarà questi a decidere qual è il ritorno che, in media, intende ottenere dal proprio portafoglio di investimento. Questo vincolo è così definito:

$$\sum_{i=1}^N x_i \hat{r}_i \geq \pi$$

dove  $\hat{r}_i$  rappresenta il rendimento atteso dell' $i$ -esimo strumento finanziario, e  $x_i$  la quota di capitale investita nell'asset  $i$ -esimo. La parte sinistra della disequazione rappresenta quindi il rendimento del portafoglio,  $\hat{R} = \sum_{i=1}^N x_i \hat{r}_i$ . Il vincolo sul rendimento può allora essere riscritto come  $\hat{R} \geq \pi$ .

Le successive relazioni appartengono alla categoria dei vincoli a variabili miste-intero. Queste variabili hanno la caratteristica di poter assumere anche valori discreti, e non continui.

Il vincolo sulla cardinalità impedisce, da un lato, una eccessiva frammentazione dell'investimento, dall'altro, come diretta conseguenza, che i costi di transazione siano gestiti efficientemente. Di fatto, questo vincolo permette di limitare il numero massimo di titoli nei quali investire.

$$\sum_{i=1}^N \delta_i = K$$

dove  $\delta_i$  è una variabile binaria che assume solamente o il valore 0, qualora il titolo non dovesse entrare in portafoglio, oppure valore 1 in caso contrario;  $K$  rappresenta il numero di titoli presenti in portafoglio (Corazza, 2018). In modo analogo, è possibile decidere anche un numero minimo di asset che devono essere detenuti: questo può essere utile al fine di evitare che il l'investimento si concentri su pochi titoli, con la conseguenza di avere un portafoglio poco diversificato.

I vincoli di *bound* sono costituiti da un doppio vincolo: da una parte, quello che potremmo definire *lower bound*, ovvero un limite inferiore. Si tratta della quota minima di uno stesso titolo che deve essere acquistata. Questo permette di superare il classico problema dei portafogli costruiti secondo il modello media-varianza, che impongono di investire anche piccolissime quantità di capitale in alcuni asset. Dall'altra parte si trova un *upper bound* che, al contrario, impone un limite massimo alla percentuale di un titolo che è possibile tenere in portafoglio.

$$l_i * \delta_i \leq x_i \leq u_i * \delta_i, \quad i = 1, \dots, N$$

dove:

- $l_i$  e  $u_i$  rappresentano rispettivamente le percentuali di *lower bound* e di *upper bound*.

Inoltre, l'inserimento di un vincolo che impone dei limiti strettamente positivi alle quote investite nei singoli asset può essere interpretato come un vincolo di divieto di vendita allo scoperto: in quest'ultimo caso, infatti, si avrebbero quote negative.



## 2.3.2 Il modello

Riassumendo, è possibile definire un modello di selezione di portafoglio avente come obiettivo l'ottimizzazione di una misura di rischio coerente, in questo caso l'Entropic VaR, e come vincoli quelli sopra descritti, nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 & \min_{x_i, \delta_i} t \ln \left( \sum_{j=1}^N p_j e^{t^{-1} G(w, a^j)} \right) - \ln \alpha \\
 & \text{s. t. } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N x_i = 1 \\ \sum_{i=1}^N x_i \hat{r}_i \geq \pi \\ \sum_{i=1}^N \delta_i = K \\ l_i * \delta_i \leq x_i \leq u_i * \delta_i, \quad i = 1, \dots, N \\ \delta_i \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, N \end{array} \right. \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

## CAPITOLO III

### 3 La *Particle Swarm Optimization*

#### 3.1 Le metaeuristiche

Quanto verrà introdotto nel presente capitolo riguarderà l'algoritmo che sarà successivamente applicato ad un concreto problema di ottimizzazione di portafoglio per risolverlo. Formalmente, un algoritmo è definibile come un insieme ordinato di operazioni chiare, non ambigue, ed effettivamente calcolabili in modo tale che, se eseguito, produce un *output* in una quantità di tempo finita e possibilmente ragionevole. In questo specifico caso, si tratta della cosiddetta *Particle Swarm Optimization*, nel seguito anche PSO.

La *Particle Swarm Optimization*, introdotta per la prima volta da R. Eberhart e J. Kennedy (1995), è un algoritmo di natura iterativa il cui scopo è risolvere problemi di ottimizzazione non vincolata. Si tratta di una metaeuristica di ispirazione biologica, del tipo *population-based*: in altri termini, si ispira al comportamento sociale degli uccelli in stormi. Da un punto di vista pratico, la popolazione, o lo *swarm*, rappresenta l'insieme delle soluzioni possibili all'interno della quale gli individui, ovvero tutti i portafogli possibili, si muovono alla ricerca della migliore posizione.

Il problema di selezione di portafoglio appartiene alla classe dei problemi di Ottimizzazione Combinatoria, nei quali l'obiettivo è trovare una soluzione all'interno di un insieme finito di elementi. Questi problemi possono essere formalizzati come  $P = (S, f)$ . Nel dettaglio:

- Vi è un insieme di variabili  $X = (x_1, \dots, x_n)$ , con domini  $D_1, \dots, D_n$ ;
- Vi è una funzione obiettivo  $f$  da minimizzare, dove  $f: D_1 \times \dots \times D_n \rightarrow R^+$ ;
- Vi sono dei vincoli sulle variabili.

Lo spazio di tutte le combinazioni possibili è definito come:

$$S = \{s = \{(x_1, v_1) \dots (x_n, v_n)\} | v_i \in D_i, s \text{ soddisfa tutti i vincoli}\}$$

L'insieme  $S$  sopra presentato può essere denominato spazio delle soluzioni, in quanto al suo interno sono racchiusi tutti gli elementi che hanno la possibilità di rappresentare una soluzione al problema. L'elemento che viene identificato come soluzione del problema è detto soluzione ottima, o  $s^*$ .

Al fine di risolvere problemi di ottimizzazione combinatoria sono percorribili due alternative: l'una è rappresentata dagli algoritmi esatti, mentre l'altra è data dagli algoritmi approssimativi, detti anche euristici.

I primi hanno la caratteristica di individuare la soluzione ottima entro un tempo limitato e di dimensioni finite. Tuttavia, nel caso di problemi di tipo *NP-hard*<sup>10</sup>, non esistono algoritmi esatti che siano in grado di trovare una soluzione ottima in tempo polinomiale.

La particolarità degli algoritmi euristici, o più brevemente euristiche, è quella di trovare una buona approssimazione alla soluzione del problema. Le metaeuristiche rappresentano una sottocategoria di questi algoritmi, della quale fa parte anche la *Particle Swarm Optimization*. Questa particolare tipologia di intelligenza, che come si vedrà nel seguito attiene alla categoria della *Swarm Intelligence*, appartiene appunto alla classe delle metaeuristiche. Una definizione di metaeuristica può risultare di difficile formulazione, a causa della continua evoluzione di questa materia nel corso degli ultimi 60 anni. Cionondimeno, si fornirà comunque un'esplicitazione del termine poiché funzionale allo svolgimento della presente dissertazione. Le metaeuristiche delineano uno sviluppo delle euristiche: queste ultime sono insite nella natura umana in quanto rappresentano un insieme di strategie, tecniche e procedimenti inventivi volti alla ricerca di una risoluzione di un problema (Treccani). Contestualizzando, un'euristica è un algoritmo il cui obiettivo è la costruzione di una soluzione ad un problema di ottimizzazione: non deve trattarsi necessariamente della migliore soluzione possibile, è sufficiente che questa approssimi bene la soluzione ottima in tempi di calcolo non eccessivi. Considerata la fluidità terminologica da cui è stato caratterizzato questo argomento a partire dalla metà degli anni 80, quando il termine metaeuristica è stato utilizzato per la prima volta,

---

<sup>10</sup> La definizione di questo concetto prevede che, un problema  $X$  sia NP-hard (o NP-difficile), se c'è un problema NP-completo (o NP-completo)  $Y$ , tale che  $Y$  è riducibile a  $X$  in tempo polinomiale. In informatica, il tempo polinomiale, o complessità temporale, è la complessità computazionale che descrive l'ammontare di tempo necessario ad un algoritmo per essere eseguito. La complessità temporale solitamente è stimata considerando il numero di operazioni elementari processate dall'algoritmo, cui viene associata ad ognuna di essere una quantità di tempo fissa per essere eseguita.

una definizione esaustiva può essere un po' azzardata, tuttavia, non impossibile. È possibile definire una metaeuristica come un algoritmo altamente indipendente dal problema che fornisce un insieme di linee guida, o strategie, volte allo sviluppo di algoritmi euristici per l'ottimizzazione (Sorensen, Glover, Sevaux, 2017). Un significato più chiaro del termine può essere dedotto dalla seguente seconda spiegazione:

“[...] the term “*metabeuristic* denotes a specific implementation of an algorithm based on such a framework (or on a combination of concepts from different frameworks) designed to find a solution to a specific optimization problem.” (Sorensen *et al.*, 2017).

Si tratta quindi di un algoritmo designato alla ricerca di una soluzione ad uno specifico problema di ottimizzazione. In particolare, una metaeuristica concentra maggiormente la ricerca della soluzione ottimale nelle aree dello spazio delle possibili soluzioni che appaiono essere più probabili.

### 3.2 La Swarm Intelligence

L'intelligenza rappresentata dall'algoritmo della PSO vede la sua ispirazione nel movimento degli animali in gruppo. In particolare, Eberhart e Kennedy si resero conto durante lo sviluppo di questa metaeuristica che il comportamento delle particelle assomigliava maggiormente a quello di uno sciame: è possibile, quindi, parlare di *Swarm Intelligence*.

Come scritto da Millonas (1994), questa intelligenza bio-ispirata dovrebbe possedere alcune caratteristiche ben precise. Innanzitutto, gli individui che compongono la popolazione dovrebbero essere in grado di eseguire semplici calcoli spaziali e temporali. Inoltre, dovrebbe poter rispondere a stimoli qualitativi provenienti dall'ambiente e non dovrebbe concentrarsi troppo in aree ristrette. Infine, la popolazione non dovrebbe cambiare il proprio comportamento ogni qual volta mutino le condizioni ambientali, tuttavia, per la regola dell'adattabilità, gli individui devono essere in grado di modificare il proprio comportamento, qualora questo comporti dei vantaggi (Eberhart *et al.*, 1995). Plausibilmente, è possibile tradurre queste caratteristiche, nel concreto, come il movimento delle particelle all'interno dello spazio, alla ricerca di una posizione, o soluzione, migliore di quella corrente.

### 3.3 La Particle Swarm Optimization

Come descritto precedentemente, la PSO simula il comportamento di animali inseriti all'interno di un gruppo, con l'obiettivo di cercare una posizione ottimale all'interno dello spazio di ricerca. Nel caso di un problema di ottimizzazione di portafoglio la posizione è data dal vettore dei pesi. Il movimento degli uccelli dello stormo è simulato dalle iterazioni dell'algoritmo: ad ogni iterazione la popolazione "evolve", ovvero modifica la propria velocità e posizione, seguendo una strategia di ricerca che si potrebbe esprimere come un equilibrio fra:

- *Exploration* (esplorazione), che si lega alla ricerca compiuta dal singolo individuo;
- *Exploitation* (sfruttamento), che concerne il comportamento sociale degli individui i quali utilizzano i risultati, e in particolare i successi, ottenuti dagli altri individui durante la ricerca, al fine di migliorare la propria.

Più dettagliatamente, ogni individuo, o più precisamente ogni particella, rappresenta un possibile candidato alla soluzione ottima. Le particelle si muovono nello spazio delle possibili soluzioni tenendo ogni volta traccia dei propri migliori risultati, ovvero tutte le posizioni pregresse, alle quali è associata una funzione di *fitness*. Questa può essere rappresentata da una misura di rischio, come la varianza. Il miglior valore associato a questa funzione è detto *personal best*, o *pbest* (Eberhart, Kennedy, 1995). Questo passaggio riguarda il processo di esplorazione. Di conseguenza, se viene tenuta memoria di ogni miglior risultato ottenuto da ogni singolo individuo, si avrà anche una particella che avrà raggiunto, in un dato momento, la posizione migliore in assoluto, a livello globale. Il miglior valore raggiunto a livello dell'intera popolazione è detto *global best*, o *gbest* (Eberhart *et al.*, 1995).

Le particelle che compongono la popolazione, ispirandosi al comportamento degli animali, ne emulano i movimenti: al fine di raggiungere il proprio obiettivo dovranno modificare la propria posizione, spostandosi ad una data velocità, e allo stesso tempo tenere in considerazione la direzione e la velocità assunte dall'intera popolazione. Con questo tipo di algoritmo di ottimizzazione infatti, ad ogni iterazione, si realizza un cambio di velocità verso il *pbest* e il *gbest* (Eberhart *et al.*, 1995). Più specificamente, è possibile pensare alla velocità come una distanza da percorrere ad ogni iterazione. Ogni individuo, ad ogni iterazione, percorrerà una data distanza nella direzione verso la quale si sta correntemente dirigendo. Al contempo, però, si muoverà, sempre per una certa distanza, verso la propria migliore posizione trovata fino a quel momento, ovvero il *personal best*. Infine, la particella si dirigerà verso la miglior posizione ottenuta dall'intera

popolazione, ovvero il *global best*. Ad ogni iterazione, quindi, viene trovata una nuova posizione, la quale risulta dalla convergenza di queste tre posizioni.

In sintesi, la PSO è un algoritmo per la per l'ottimizzazione non vincolata di un problema:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

dove  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  è la funzione obiettivo del problema di minimizzazione. Considerando una PSO con  $N$  particelle, in ogni iterazione  $k$ -esima sono associati quattro vettori ad ognuna delle  $j$ -esime particelle  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ .

- $\mathbf{x}_j^k \in \mathbb{R}^d$ , rappresenta la posizione della particella  $j$ -esima all'iterazione  $k$ -esima;
- $\mathbf{v}_j^k \in \mathbb{R}^d$ , rappresenta la velocità della particella  $j$ -esima all'iterazione  $k$ -esima;
- $\mathbf{p}_j \in \mathbb{R}^d$ , rappresenta la migliore posizione raggiunta della particella  $j$ -esima;
- $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^d$ , rappresenta la migliore posizione raggiunta dall'intera popolazione.

Si noti che  $\mathbf{pbest}_j = f(\mathbf{p}_j)$  delinea il valore della funzione obiettivo nella posizione  $\mathbf{p}_j$  della particella  $j$ -esima (Corazza, Fasano, 2013).

### 3.4 Differenti modelli di PSO

Si sono visti gli elementi fondanti della *Particle Swarm Optimization*, i quali vanno a comporre la struttura base dell'algoritmo. Tuttavia, questo non è da considerarsi esaustivo: infatti, nel corso del tempo, molti sono stati i contributi per cercare di migliorare questo algoritmo, modificando elementi preesistenti oppure suggerendone di nuovi. Gli stessi autori dell'algoritmo originale proposero due versioni della PSO. Nel seguito si analizzano alcune delle varianti più significative.

#### 3.4.1 Il modello "global best"

Presentato da Eberhart e Kennedy nel 1995, questo rappresenta il modello originale della *Particle Swarm Optimization*. In questa prima formulazione, le particelle convergono verso il proprio *personal best*, ma allo stesso tempo hanno coscienza anche del miglior risultato ottenuto dall'intera

popolazione, ovvero il *global best*, il quale viene considerato al fine della ricerca della soluzione ottima. Siano:

- $\mathbf{p}_g$  la migliore posizione raggiunta della popolazione;
- $c_1, c_2$  due parametri che rappresentano l'effetto prodotto rispettivamente dalla migliore posizione individuale e da quella collettiva;
- $r_1, r_2$  rappresentano due numeri casuali compresi nell'intervallo fra 0 e 1.

La posizione della singola particella alla nuova iterazione è data da:

$$\mathbf{x}_j^{k+1} = \mathbf{x}_j^k + \mathbf{v}_j^k, \quad (3.2)$$

in cui la velocità è calcolata come segue:

$$\mathbf{v}_j^{k+1} = \mathbf{v}_j^k + c_1 r_1 (\mathbf{p}_j - \mathbf{x}_j^k) + c_2 r_2 (\mathbf{p}_g - \mathbf{x}_j^k) \quad (3.3)$$

Considerando la formulazione dell'algoritmo originale è possibile individuare tre addendi: il primo riguarda semplicemente la velocità all'iterazione precedente, mentre il secondo fa riferimento al comportamento individuale della singola particella, che si potrebbe definire parte "cognitiva". Al contrario, il terzo addendo concerne la collaborazione delle varie particelle fra di loro, quindi, la parte "sociale" (Eberhart, Shi, 1998).

L'algoritmo può essere illustrato come successione logica dei seguenti passaggi (Schutte, 2005):

1. Inizializzazione:
  - a. Si impostano i valori delle costanti  $k_{max}$ , ovvero del numero massimo di iterazioni,  $c_1$  e  $c_2$ ;
  - b. Vengono generate in modo casuale le posizioni delle particelle, rappresentate da un vettore di dimensioni  $N$ :  $\mathbf{x}_j^k \in \mathbb{R}^d$  per  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Nella formulazione originale gli autori hanno utilizzato una popolazione composta da massimo 50 particelle;

- c. Vengono generate casualmente le velocità delle particelle, rappresentate da un vettore di  $N$  dimensioni:  $\mathbf{v}_0^k \leq \mathbf{v}_{max}^k$  per  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Per evitare che la velocità diventi troppo elevata è auspicabile determinare una velocità massima raggiungibile (Eberhart *et al.*, 1995);
  - d. Si imposta per  $k = 1$ , che rappresenta la prima iterazione.
2. Ottimizzazione:
- a. Viene valutata la funzione obiettivo  $f(\mathbf{x}_j^k)$  per  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ ;
  - b. Se  $f(\mathbf{x}_j^k) < f(\mathbf{p}_j)$  allora si aggiorna impostando  $\mathbf{p}_j = \mathbf{x}_j^k$ , questo nel caso in cui l'obiettivo sia la minimizzazione della funzione obiettivo;
  - c. Se  $f(\mathbf{x}_j^k) < f(\mathbf{p}_g)$  allora si aggiorna impostando  $\mathbf{p}_g = \mathbf{x}_j^k$ . Analogamente al passaggio precedente, quando viene trovata una posizione con la funzione di *fitness* migliore a livello collettivo, di intera popolazione, la *global best* viene posta uguale a questa nuova posizione;
  - d. Se il criterio di terminazione è raggiunto si passa direttamente al punto 3, altrimenti si prosegue;
  - e. Si incrementa il valore di  $k$ , con  $k = k + 1$  e si ritorna al punto (a) ripetendo il ciclo.
3. Termine.

Uno degli aspetti di maggiore rilievo dell'algorithmo della *Particle Swarm Optimization* è rappresentato dalla velocità di movimento delle particelle. La problematica legata a questo elemento deriva dal fatto che, se lasciata incontrollata, nel corso delle varie iterazioni la velocità potrebbe tendere a degenerare. In altri termini, sussiste il rischio che le particelle finiscano con il muoversi troppo velocemente. Una conseguenza di questo comportamento può essere individuata nel fatto che, se la velocità è troppo elevata, le particelle tenderanno ad un maggiore esplorazione dello spazio di ricerca, a scapito però dello sfruttamento delle aree esplorate: ovvero, tendono ad evitare di concentrare la ricerca nelle zone già note e che potenzialmente possono rappresentare il punto adatto dove cercare la soluzione. La prima alternativa, proposta dagli stessi autori nell'articolo originale, consiste nel limitare la velocità ponendo una soglia massima pari a  $v_{max}$ , impostata esogenamente. Tuttavia, se questa soluzione da un lato risolve il problema dell'aumento incontrollato della velocità, dall'altro limita la capacità di esplorazione di nuove aree da parte della popolazione.



A seconda di come le particelle comunicano fra loro, è possibile ottenere esiti diversi: più propriamente si parla di topologia della popolazione. Solamente a fini esemplificativi, e decisamente non esaustivi, si presentano tre differenti topologie:

- Topologia *Fully Connected*: in questo caso ogni particella comunica con tutte le altre. Ogni singolo individuo ha coscienza dell'intera popolazione ed è a conoscenza dei successi degli altri: questa è la fattispecie del modello *global best*;

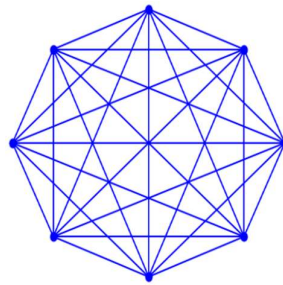


Figura 3.1 Topologia Fully-Connected

- Topologia di von Neumann: dove ogni particella è collegata con quella situata sopra, sotto, a destra e a sinistra. Si tratta di un modello *local best*, dove il *neighborhood*, ovvero il numero di individui con cui una singola particella “comunica”, è pari a 4;

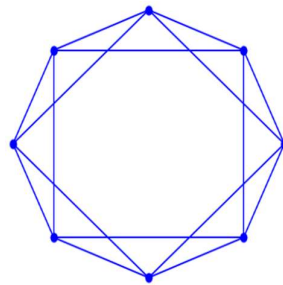


Figura 3.2 Topologia di von Neumann

- Topologia ad anello: in questa ipotesi le particelle della popolazione sono connesse solamente con quelle che si trovano a destra e a sinistra. Rappresenta un modello *local best* con  $neighborhood = 2$ , presentato al paragrafo successivo.

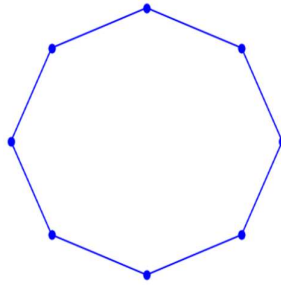


Figura 3.3 Topologia ad anello

### 3.4.2 Il modello “local best”

La seconda versione proposta da Eberhart e Kennedy consiste in un algoritmo che emula più verosimilmente il comportamento degli animali cui si ispira. In questo caso le particelle non si muovono più avendo piena informazione di tutti gli spostamenti della popolazione, ma solamente degli individui più vicini, chiamati anche *neighborhood* (vicinato). Di conseguenza, non si parlerà più di *global best* ma di *local best*, o *lbest*. Le particelle non si muoveranno più verso il *pbest* ed il *gbest*, bensì verso il *pbest* e il *lbest*. Questo approccio richiede un numero minore di iterazioni per raggiungere l’ottimo locale, tuttavia le performance appaiono essere inferiori rispetto al modello *gbest*. Si tratta comunque di un approccio molto decentralizzato e più flessibile, in modo particolare con un vicinato ristretto (es.  $neighborhood = 2$ ), e può essere fatto funzionare con qualsiasi numero di particelle. Inoltre, avendo un elevato numero di aree in cui la ricerca si concentra fa in modo che le particelle non si concentrino in un’unica zona. Aumentare il numero delle particelle vicine permette di trovare una soluzione in tempi più rapidi, dal momento che vi è una maggiore numerosità di individui che ricercano il risultato ottimo, tendendo sempre più ad incorrere però nelle problematiche del *global best*, ovvero una ricerca più veloce ma che si concentra rapidamente in un’unica area. Queste possono essere ravvisate in un maggior numero di iterazioni necessarie per raggiungere una soluzione ottimale, e la tendenza della popolazione a concentrarsi in alcune aree di ricerca a scapito di altre.

### 3.4.3 Inertia Weight Approach

Un'alternativa alla PSO originale è stata proposta da Erberhart e Shi nel 1998, dove l'elemento di novità è rappresentato dall'introduzione di un nuovo parametro  $w$ , chiamato inerzia.

La PSO con l'introduzione del parametro di inerzia  $w$  è la seguente:

$$\mathbf{v}_j^{k+1} = w^k * \mathbf{v}_j^k + c_1 r_1 (\mathbf{p}_j - \mathbf{x}_j^k) + c_2 r_2 (\mathbf{p}_g - \mathbf{x}_j^k) \quad (3.4)$$

dove  $w^k$  rappresenta il peso d'inerzia all'iterazione k-esima.

Si è osservato che per livelli di inerzia bassi, ovvero inferiori a 0.8, nel caso in cui la PSO riesca a trovare l'ottimo, lo fa in tempi brevi. Al contrario, quando il parametro  $w$  assume valori più elevati, indicativamente superiori a 1.2, la popolazione tende ad esplorare nuove zone. Nel primo caso la situazione è riconducibile ad un modello di *local best*, nella seconda ipotesi invece si è in presenza di un modello più simile a quello di *global best*. Infine, quando l'inerzia assume valori compresi fra 0.8 e 1.2 si ottiene un compromesso che aumenta le probabilità di riuscire a trovare la soluzione ottima, e allo stesso tempo richiede un numero di iterazioni non troppo elevato (Eberhart *et al.*, 1998). In ogni caso, una condizione per agevolare la convergenza verso l'ottimo del problema è quella di rispettare la seguente disequazione:

$$\left(\frac{c_1 + c_2}{2}\right) - 1 < w$$

Questo permette di evitare comportamenti troppo lenti oppure troppo veloci.

Generalmente, è consigliabile che l'algoritmo possieda una maggiore capacità di esplorazione nelle fasi iniziali della ricerca, per poi andare a concentrarsi verso le aree più promettenti. Per fare questo, è necessario che il parametro  $w$  sia decrescente all'aumentare delle iterazioni. A tal fine, generalmente si imposta un valore iniziale di inerzia relativamente elevato, ad esempio uguale a 1.4, per poi fare in modo che decresca linearmente all'aumentare del numero delle generazioni, fino ad

arrivare all'ultima in cui l'inerzia è uguale a 0 (Eberhart *et al.*, 1998). La seguente equazione fornisce il valore dell'inerzia all'iterazione  $k$ -esima.

$$w^k = w_{max} - \left( \frac{w_{max} - w_{min}}{k_{max}} \right) * k$$

dove  $w_{max}$  e  $w_{min}$  rappresentano rispettivamente il valore massimo e minimo del parametro di inerzia, mentre  $k_{max}$  è il numero massimo di iterazioni predefinite.

#### 3.4.4 Constriction Factor Approach

Come osservato, sono differenti gli approcci che tentano di limitare, o comunque controllare, la velocità con cui le particelle svolgono le attività di *exploration* ed *exploitation*, andando ad intervenire sulle componenti cognitive e sociali dell'algoritmo. Alcuni di questi approcci propongono un limite artificiale alla velocità, impostando un range predefinito compreso fra  $v_{max}$  e  $v_{min}$ , mentre altri suggeriscono l'introduzione di un parametro detto inerzia (Dieu, Dung, Khai, 2013).

Un'ulteriore alternativa è rappresentata dal modello *constriction factor*, che prevede un parametro  $\lambda$  per controllare la velocità di movimento. L'utilizzo di questo fattore permette una convergenza più stabile verso l'ottimo del problema e talvolta ha prodotto risultati migliori rispetto al modello con il peso d'inerzia. La velocità delle particelle di un algoritmo di PSO con *constriction factor* (o PSO-CF) è data da:

$$\mathbf{v}_j^{k+1} = \lambda * [\mathbf{v}_j^k + c_1 r_1 (\mathbf{p}_j - \mathbf{x}_j^k) + c_2 r_2 (\mathbf{p}_g - \mathbf{x}_j^k)]. \quad (3.5)$$

in cui il parametro  $\lambda$  è dato dalla seguente equazione:

$$\lambda = \frac{2}{\left[ \left| 2 - \alpha - (\alpha^2 - 4\alpha)^{\frac{1}{2}} \right| \right]} \quad (3.6)$$

dove  $\alpha = c_1 + c_2$  e  $\alpha > 4$ .

Nella PSO-CF, il fattore  $\alpha$  produce un certo impatto sulla convergenza del sistema, e si reputa che questo debba essere maggiore di 4. Inoltre, all'aumentare di  $\alpha$ , il parametro  $\lambda$  decresce, con la conseguenza di produrre una maggiore diversificazione, la quale porta ad una risposta nei risultati più lenta. Solitamente,  $\alpha$  è impostato pari a 4.1, come somma delle costanti  $c_1$  e  $c_2$ , ognuna pari a 2.05 (Dieu *et al.*, 2013).

Confrontando l'algoritmo con il parametro di inerzia con la PSO-CF, è possibile affermare che i due modelli possono essere equivalenti nel caso in cui il peso di inerzia  $w$  sia posto uguale al fattore  $\lambda$ , e  $\alpha$  sia maggiore di 4. Tuttavia, molto dipende dal problema che si è chiamati a risolvere: una buona regola generale può essere quella di utilizzare il modello *constriction factor* andando a limitare la velocità massima e lo spazio delle soluzioni, oppure ricorrere al modello *inertia weight* con le considerazioni di cui sopra (Eberhart, Shi, 2000).

### 3.5 PSO e ottimizzazione vincolata

La *Particle Swarm Optimization* è un algoritmo iterativo che può essere utilizzato anche per la risoluzione di problemi matematici di tipo *NP-hard*. In particolar modo, questa metaeuristica può essere utilizzata per la soluzione di problemi di ottimizzazione globali non lineari. Ai fini dei presenti sviluppi, l'aspetto più rilevante deriva dal fatto che la PSO originale è stata ideata per problemi non vincolati, tuttavia l'ottimizzazione di portafoglio come illustrata in precedenza, rappresenta un problema sottoposto a vincoli.

Ne deriva che applicare l'algoritmo originale ad un problema di questo tipo risulta essere improprio. In caso contrario, la PSO darebbe luogo a posizioni delle particelle che non potrebbero non essere ammissibili. Per ovviare a questa problematica, nel corso degli anni sono state elaborate diverse proposte da parte della letteratura, le quali permettono che ad ogni step siano generate posizioni ammissibili; queste soluzioni riguardano, ad esempio, il riposizionamento casuale delle particelle (Corazza, Fasano, 2013).

Tuttavia, nel nostro caso si utilizzerà una PSO coerente con l'algoritmo originale. Per procedere in tal senso, si rivela necessario riformulare il problema di ottimizzazione di portafoglio vincolato in uno non vincolato, tramite la funzione di penalità  $\ell_1$ . Si tratta di un approccio conosciuto come metodo delle penalità esatte, o *exact penalty method*, dove il termine esatto si riferisce alla corrispondenza fra la minimizzazione del problema originale vincolato e la minimizzazione di quello non vincolato, o penalizzato. Il problema può essere riformulato utilizzando la funzione di penalità non differenziabile come segue:

$$\min_{X,Z} P(X,Z; \varepsilon) \quad (3.7)$$

dove

$$P(X,Z; \varepsilon) = \rho_{a,p}(R) + \frac{1}{\varepsilon} [\max\{0, l - \hat{R}\} + |\sum_{i=1}^N x_i - 1| + \max\{0, K_d - \sum_{i=1}^N z_i\} + \max\{0, \sum_{i=1}^N z_i - K_u\} + \sum_{i=1}^N \max\{0, z_i d - x_i\} + \sum_{i=1}^N |z_i(1 - z_i)|] \quad (3.8)$$

con  $\varepsilon$  che corrisponde al parametro di penalità (Corazza, Fasano, 2013).

Quanto descritto in (3.9) rappresenta un problema di ottimizzazione vincolato riscritto in forma non vincolata. In questo caso i vincoli posti sono dati da:

- Vincolo sul rendimento medio minimo, rappresentato da  $\max\{0, l - \hat{R}\}$ .
- Vincolo di bilancio, corrispondente a  $|\sum_{i=1}^N x_i - 1|$ .
- Vincolo di cardinalità, dato da  $\max\{0, K_d - \sum_{i=1}^N z_i\} + \max\{0, \sum_{i=1}^N z_i - K_u\}$ .
- Vincolo sulle quote investite in ogni titolo, espresso come  $\sum_{i=1}^N \max\{0, z_i d - x_i\} + \sum_{i=1}^N |z_i(1 - z_i)|$ .

## CAPITOLO IV

### 4 Applicazione del modello e analisi dei risultati

Questo ultimo capitolo si concentra sull'applicazione del modello di selezione di portafoglio, precedentemente presentato, ad un insieme di serie finanziarie reali. Dapprima si illustra la struttura dello studio, per concentrarsi successivamente sugli strumenti finanziari utilizzati, sulle specificità dei parametri adottati e le motivazioni sottostanti queste scelte. Infine, si presentano i risultati prodotti dall'algoritmo di ottimizzazione, il quale è stato sviluppato utilizzando il software Python 3.7. Segue, quindi, una valutazione di tali esiti avvalendosi di una serie di indici, per poi concludere con una comparazione dei risultati relativi ai portafogli ottenuti tramite l'utilizzo delle quattro differenti misure di rischio adottate, che rappresenta l'oggetto della presente trattazione.

#### 4.1 Presentazione del problema

Quanto esposto più avanti rappresenta i risultati ottenuti dall'applicazione del modello di ottimizzazione di portafoglio previamente sviluppato. Avvalendosi della metaeuristica bioispirata presentata, la *Particles Swarm Optimization*, o PSO, e attraverso multiple replicazioni, o *runs*, dello stesso algoritmo, sono stati individuati quattro portafogli ritenuti ottimi.

Ognuno dei quattro differenti portafogli adotta una misura di rischio diversa, nel seguito sinteticamente riportate con la relativa formula di riferimento utilizzata. In questa sede si è deciso di confrontare le performance degli investimenti che utilizzano le seguenti misure:

- **Varianza:** con l'utilizzo di questa misura si adotta sostanzialmente il modello alla Markowitz, il quale si propone di adottare il momento secondo della distribuzione di probabilità come *proxy* del rischio che è possibile attendersi da un determinato investimento. Si richiama qui la formula di questa misura di rischio:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

- *Value-at-Risk*: si tratta di una misura di rischio non coerente. Come citato in precedenza, il VaR ha riscosso un certo successo, anche a livello normativo. Di conseguenza, data la rilevanza di questa misura, si è deciso di includerla in questa analisi. Uno dei fattori chiave della diffusione di questa misura è indubbiamente la sua immediatezza e facilità di comprensione e comunicazione, in quanto esprime la perdita minima che è possibile aspettarsi da un dato investimento, considerato un orizzonte temporale e un intervallo di confidenza. Si riveda di seguito l'espressione formale del *Value-at-Risk*:

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) > \alpha\}$$

- *Expected Shortfall*: analogamente al VaR, anche l'*Expected Shortfall* utilizza un intervallo di tempo e un livello di probabilità, ma a differenza del primo, questo esprime la perdita media oltre il livello  $1 - \alpha$ . Inoltre, il secondo si differenzia dal primo per il fatto di essere una misura di rischio coerente. L'*Expected Shortfall* può essere espresso come illustrato di seguito:

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \left( E[X 1_{\{X \leq x_\alpha\}}] - x_\alpha (P[X \leq x_\alpha] - \alpha) \right)$$

- *Entropic Value at Risk*: come già discusso nel Capitolo II, si tratta di una misura introdotta da Ahmadi-Javid nel 2012, afferente alla classe delle misure di rischio entropiche. Oltre ad essere la misura di più recente formulazione fra quelle qui considerate, rappresenta anche la misura maggiormente affinata, considerato il suo legame con il concetto di entropia. A livello meramente teorico, le aspettative sono



che i portafogli ottenuti con il VaR entropico producano risultati migliori rispetto alle performance conseguite dagli investimenti che utilizzano le misure di rischio precedentemente illustrate. Si riporta qui la formula dell'Entropic VaR.

$$EVaR_{1-\alpha}(X) = \min t \ln \left( \sum_{j=1}^N p_j e^{t^{-1}G(w, a^j)} \right) - \ln \alpha$$

Si ricorda, quindi, che l'oggetto di questo studio è rappresentato dal confronto delle performance dei portafogli ottenuti applicando le sopracitate misure di rischio.

Innanzitutto, al fine di calcolare le quote ottime per ciascun titolo dell'investimento, si è proceduto ad ottenere le serie storiche dei prezzi di quindici ETF.

Le serie finanziarie impiegate hanno un orizzonte di due anni, dal 1° dicembre 2017 al 29 novembre 2019. Il metodo di analisi adottato è quello della *rolling window*, la quale consiste in un'analisi progressiva della serie storica a disposizione, campionandone un intervallo composto da un numero fisso di osservazioni e procedendo in avanti, ottenendo così molteplici periodi “*in-sample*” e “*out-of-sample*”. In questo studio si è scelto di utilizzare un campione *in-sample* della durata di sei mesi, che rappresenta il periodo sul quale viene svolta l'ottimizzazione. Con i risultati ottenuti si procede allo studio dei tre mesi successivi, definiti “futuro virtuale”, o “*out-of-sample*”. In quest'ultimo periodo si misura quanto effettivamente realizzato dal portafoglio, calcolato con i pesi ottimi trovati dall'algoritmo sulla base del periodo precedente, ovvero *in-sample*.

- 1° Trimestre (Q1):
  - *In-sample*: 1° dicembre 2017 – 31 maggio 2018;
  - *Out-of-sample*: 1° giugno 2018 – 31 agosto 2018;
- 2° Trimestre (Q2):
  - *In-sample*: 1° marzo 2018 – 31 agosto 2018;
  - *Out-of-sample*: 1° settembre 2018 – 30 novembre 2018;
- 3° Trimestre (Q3):
  - *In-sample*: 1° giugno 2018 – 30 novembre 2018;

- *Out-of-sample*: 1° dicembre 2018 – 28 febbraio 2019;
- 4° Trimestre (Q4):
  - *In-sample*: 1° settembre 2018 – 28 febbraio 2019;
  - *Out-of-sample*: 1° marzo 2019 – 31 maggio 2019;
- 5° Trimestre (Q5):
  - *In-sample*: 1° dicembre 2018 – 31 maggio 2019;
  - *Out-of-sample*: 1° giugno 2019 – 31 agosto 2019;
- 6° Trimestre (Q6):
  - *In-sample*: 1° marzo 2019 – 31 agosto 2019;
  - *Out-of-sample*: 1° settembre 2019 – 29 novembre 2019.

Per un maggiore chiarezza espositiva, si veda la seguente Figura 4.1, la quale illustra l'arco temporale relativo ai periodi *in-sample* e *out-of-sample*.

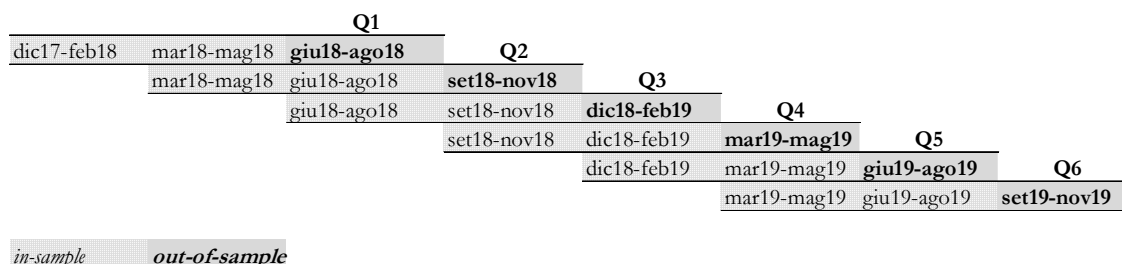


Figura 4.1 Rolling window

La principale assunzione nell'utilizzo di questa tecnica di analisi richiede di ipotizzare che il periodo di applicazione dei risultati ottenuti dall'ottimizzazione, ovvero il futuro virtuale o *out-of-sample*, sia "simile" sotto il profilo di rischio e rendimento al periodo *in-sample*.

#### 4.1.1 Vincoli della metaeuristica e parametri utilizzati

Il modello di ottimizzazione implementato per questa selezione di portafoglio si configura come un problema vincolato. Il sistema di vincoli adottato con i relativi valori ad esso associati si presenta come di seguito alla Tabella 4.1.

Vincoli	Valore
Numero massimo di titoli	10
Numero minimo di titoli	5
Quota massima in ogni titolo	30%
Quota minima in ogni titolo	5%
Rendimento minimo	Rendimento medio giornaliero del periodo <i>in-sample</i> + 1% annuo

Tabella 4.1 Vincoli

In secondo luogo, per quanto concerne i parametri della *Particle Swarm Optimization*, questi sono stati selezionati sulla base dei valori suggeriti da Kennedy e Blackwell (2007).

- Coefficiente di accelerazione cognitiva  $c_1$ : 1,49681;
- Coefficiente di accelerazione sociale  $c_2$ : 1,49681;
- Peso di inerzia  $w$ : 0,7298.

Per quanto concerne il numero di iterazioni che l'algoritmo effettua ad ogni *run*, questo è stato selezionato sulla base di un valore ritenuto idoneo a produrre risultati soddisfacenti entro un ragionevole arco di tempo, questo anche considerando la tipologia *fully-connected* della PSO qui utilizzata che, per sua stessa natura, tende a convergere verso la soluzione ottimale piuttosto velocemente.

- Numero di iterazioni: 1.000.

Per quanto concerne gli altri due parametri, ovvero il numero di particelle e il parametro di penalizzazione  $\varepsilon$ , si è rivelato necessario effettuare alcuni test in via preliminare al fine di

individuare i valori più idonei da associare a queste componenti dell'algoritmo. La successiva Tabella 4.2<sup>11</sup> illustra i risultati ottenuti.

Epsilon	Ampiezza popolazione		
	30	45	60
1.00e-0	-0,564	-1,172	-0,711
1.00e-1	-0,684	-0,534	-0,637
1.00e-2	-0,563	-0,447	-0,579
1.00e-3	-0,902	-0,564	-0,453
0.00e-4	-0,616	-1,007	-0,757
0.00e-5	-0,622	-0,484	-1,023
0.00e-6	-1,109	-1,365	-0,521
0.00e-7	-0,985	-0,841	-1,141
0.00e-8	-0,635	-0,538	-1,092

*Tabella 4.2 Risultati dei test per la scelta di epsilon e il numero delle particelle*

Si precisa che i valori della funzione di fitness sono stati normalizzati al fine di tenere in considerazione l'effetto dei diversi valori di  $\epsilon$ .

Allo scopo di determinare il valore del parametro di penalizzazione e il numero di particelle ottimali da utilizzare in fase di implementazione dell'algoritmo, si è proceduto a selezionare tre popolazioni di particelle di ampiezze differenti. In particolare, queste rappresentano multipli del numero di titoli utilizzati per l'ottimizzazione, rappresentati da 15 ETF. Poi, per ogni combinazione di numero di particelle e parametro di penalizzazione sono state

---

<sup>11</sup> I valori riportati in Tabella 4.2 sono il risultato di una normalizzazione delle fitness ottenute, operata con l'utilizzo di una formula presente in Microsoft Excel. Questa funzione standardizza i valori secondo una Normale, motivo per cui le fitness riportate, che si riferiscono solamente a quelle con i valori più piccoli, risultano negative, pur essendo in effetti una somma di elementi positivi. Non si è potuto optare per una normalizzazione nell'intervallo fra 0 e 1 poiché, ripetendo l'operazione per ogni livello di  $\epsilon$ , la fitness minore per ognuno di questi livelli sarebbe stata uguale a zero, rendendo inutile il confronto.

effettuate 5 replicazioni della PSO, selezionando ogni volta il valore della funzione di fitness migliore.

I risultati ritenuti ottimali sono dati dalla combinazione del valore di epsilon e dal numero di particelle, ovvero la popolazione, che ha prodotto la fitness con il valore minore. Sulla base dei test preliminari effettuati, è stato possibile individuare i seguenti parametri:

- Ampiezza della popolazione: 45;
- Valore di  $\epsilon$ : 0,00e-6.

#### 4.1.2 *Gli Exchange Traded Funds*

Le serie storiche utilizzate per questa analisi si riferiscono integralmente ad una categoria di strumenti finanziari noti come *Exchange Traded Funds*, o ETF.

Gli ETF sono particolari fondi di investimento afferenti al macro-gruppo degli *Exchange Traded Products*. In Italia, questi fondi assumono la forma giuridica delle Sicav, e alcune delle loro caratteristiche principali possono essere individuate nelle seguenti osservazioni.

- Gli ETF sono negoziati su mercati regolamentati. Quello italiano prende il nome di ETFplus, ed è gestito da Borsa Italiana. Di conseguenza questi titoli possono essere scambiati, acquistati e venduti, come avviene per i titoli azionari. Come per gli altri fondi, l'acquisto di ETF equivale all'acquisto di un paniere di asset;
- L'obiettivo degli *Exchange Traded Funds* è quello di replicare l'andamento dell'indice di riferimento o il prezzo di una determinata asset class, attraverso una gestione passiva. Tuttavia, si precisa che esistono anche ETF a gestione attiva.

Le motivazioni per le quali in questa analisi si è propeso per un investimento in questa categoria di strumenti è da ricercarsi, in parte, nel successo di cui gli ETF stanno godendo negli ultimi anni e, in secondo luogo, in una serie di caratteristiche apprezzabili proprie degli ETF che rendono questi asset degni di essere presi in considerazione. Nel seguito si evidenziano più dettagliatamente gli aspetti chiave che caratterizzano questi fondi.

- **Diversificazione:** rappresenta uno dei vantaggi principali di un investimento in questi strumenti. Acquistando un ETF si comprano le quote di un fondo: di conseguenza è possibile impiegare il capitale in un ampio numero di titoli, rendendo più efficace il processo di diversificazione ed eliminando il problema legato ai rischi specifici dell'acquisto di un singolo titolo.
- **Bassi costi:** per come sono strutturati questi fondi, i gestori hanno la possibilità ottimizzare le operazioni di acquisto e di vendita, riducendo così i costi generali della gestione. Gli ETF infatti hanno una commissione totale annua (TER) piuttosto ridotta, così come sono assenti le commissioni all'entrata, all'uscita o di performance<sup>12</sup>.
- **Proventi periodici:** l'investitore beneficia dei dividendi staccati dai titoli azionari detenuti nel fondo e, a seconda della tipologia di ETF, questi proventi possono essere liquidati oppure venire automaticamente reinvestiti nel capitale;
- **Diminuzione del rischio emittente:** il capitale investito negli ETF è separato dal patrimonio delle società che li emettono e che si occupano della gestione e amministrazione. In altri termini, gli investitori non diventano soci della società, ma i loro investimenti vanno a costituire un patrimonio autonomo, distaccato da quello che è il capitale sociale. In questo modo, anche in caso di fallimento dell'emittente, l'ammontare impiegato viene comunque rimborsato ([borsaitaliana.it](http://borsaitaliana.it)).

I titoli utilizzati per il problema di selezione di portafoglio presentato in questa trattazione sono stati scelti fra gli ETF quotati alla Borsa di Milano. La successiva Tabella 4.3 illustra nel dettaglio gli strumenti selezionati.

---

<sup>12</sup>Le commissioni di performance sono commissioni prelevate dalle società di gestione in base ai risultati conseguiti dal fondo, quindi all'overperformance ottenuta rispetto al benchmark di riferimento. Queste rappresentano uno dei costi maggiormente variabili, occulti e quindi potenzialmente più lesivi per i rendimenti dei risparmiatori ([www.moneyfarm.com](http://www.moneyfarm.com)).

#	ISIN	Nome	Asset class
1	IE00BKM4GZ66	iShares Core MSCI EM IMI UCITS ETF	Azionario
2	IE00B4L5Y983	iShares Core MSCI World UCITS ETF	Azionario
3	IE00B02KXK85	iShares China Large Cap UCITS ETF	Azionario
4	FR0010010827	Lyxor FTSE MIB UCITS ETF	Azionario
5	IE0031442068	iShares S&P 500 UCITS ETF	Azionario
6	IE0008471009	iShares EURO STOXX 50 UCITS ETF	Azionario
7	IE0032523478	iShares Corp Bond Large Cap UCITS ETF	Obbligazionario
8	IE00B2NPKV68	iShares J.P. Morgan EM Bond UCITS ETF	Obbligazionario
9	IE00B66F4759	iShares High Yield Corp Bond UCITS ETF	Obbligazionario
10	IE0032895942	iShares Corp Bond UCITS ETF	Obbligazionario
11	IE00BCRY6003	iShares Short Duration High Yield Corp Bond UCITS ETF	Obbligazionario
12	LU0290356871	Xtrackers II Eurozone Government Bond 1-3 UCITS ETF	Obbligazionario
13	LU0290358224	Xtrackers II Eurozone Inflation-Linked Bond UCITS ETF	Obbligazionario
14	LU0290355717	Xtrackers II Eurozone Government Bond UCITS ETF	Obbligazionario
15	LU0378818131	Xtrackers II Global Government Bond UCITS ETF	Obbligazionario

*Tabella 4.3 ETF selezionati per la costruzione dei portafogli*

Infine, si specifica che per l'ottimizzazione sono stati utilizzati i rendimenti logaritmici giornalieri, ricavati dalle serie storiche dei prezzi dei titoli sopra indicati. Tali rendimenti sono stati ottenuti applicando la formula seguente:

$$R_{i,t} = \ln\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}}\right) \quad (4.1)$$

dove:

- $R_{i,t}$  rappresenta il rendimento del titolo  $i$ -esimo al tempo  $t$ ;
- $P_{i,t}$  indica il prezzo del titolo  $i$ -esimo al tempo  $t$ ;
- $P_{i,t-1}$  è il prezzo del titolo  $i$ -esimo al tempo  $t - 1$ .

Poiché si assume che la legge finanziaria che governa la generazione dei prezzi sia quella della capitalizzazione continua, utilizzare i rendimenti logaritmici risulta più corretto e preciso rispetto ai rendimenti percentuali. Tuttavia, dal momento che i rendimenti utilizzati per questa analisi sono calcolati su base giornaliera, le differenze fra i due tipi di rendimenti risultano molto modeste.

## 4.2 Background finanziario

Prima di procedere con la presentazione dei risultati prodotti dalla PSO, si ritiene opportuno andare a fornire una panoramica del background finanziario relativo al periodo preso in considerazione, ripercorrendo l'andamento dei mercati per il biennio 2018 – 2019.

I dodici mesi del 2018 sono stati un periodo globalmente caratterizzato da incertezza politica ed economica, con tensioni commerciali che hanno influenzato negativamente i mercati azionari. Infatti, si evidenzia come il numero delle asset class in territorio negativo sia stato anche superiore a quello del 2008, con il mese di dicembre che ha segnato per i mercati uno dei punti più bassi dell'anno (moneyfarm.it).

L'indebolimento della crescita dell'economia mondiale è certamente l'aspetto più caratterizzante del 2018, che ha visto un peggioramento della congiuntura economica sia nei paesi emergenti, prima, sia sui mercati più sviluppati, dopo. In particolar modo, eventi come l'inasprimento delle tensioni commerciali fra Stati Uniti e Cina hanno contribuito ad una maggiore incertezza a livello globale. Inoltre, l'apprezzamento del dollaro ha comportato la svalutazione di altre monete, in particolare valute di paesi emergenti. Come evidenziato sopra, l'ultima parte dell'anno rappresenta il periodo più negativo del 2018, con un rialzo della volatilità sui mercati e una correzione dei prezzi delle attività più rischiose nei paesi sviluppati (bancaditalia.it). Alla Figura 4.2 si riporta l'andamento del prezzo relativo all'indice sull'azionariato globale.





Figura 4.2 Andamento dei prezzi dell'indice MSCI World

Il 2019 ha segnato un'inversione di questo trend, grazie anche ad alla politica monetaria statunitense che ha favorito una maggiore distensione sui mercati finanziari. Successivamente, in seguito al rapido deprezzamento dell'azionario avvenuto nell'ultimo trimestre del 2018, i primi quattro mesi del 2019 hanno visto questo mercato in forte rialzo, probabilmente influenzato dall'attività di supporto al ciclo economico delle banche centrali, le quali hanno rivisto le politiche di rialzo dei tassi di interesse. Le negoziazioni fra Stati Uniti e Cina hanno caratterizzato anche il 2019: in questo clima di costante incertezza, l'andamento dei prezzi dei listini azionari ha comunque continuato a segnare un trend di crescita, seppure non senza importanti oscillazioni (am.jpmorgan.com).

Per quanto concerne il mercato delle obbligazioni governative, questo si è comportato secondo le aspettative; non sono emersi particolari elementi che abbiano intaccato in modo rilevante l'andamento dei prezzi di questa asset class.

Nel seguito, si riporta la Figura 4.3, con l'andamento dell'indice J.P.Morgan Government Bond Index Global, il quale investe in titoli di Stato di tutto il mondo.

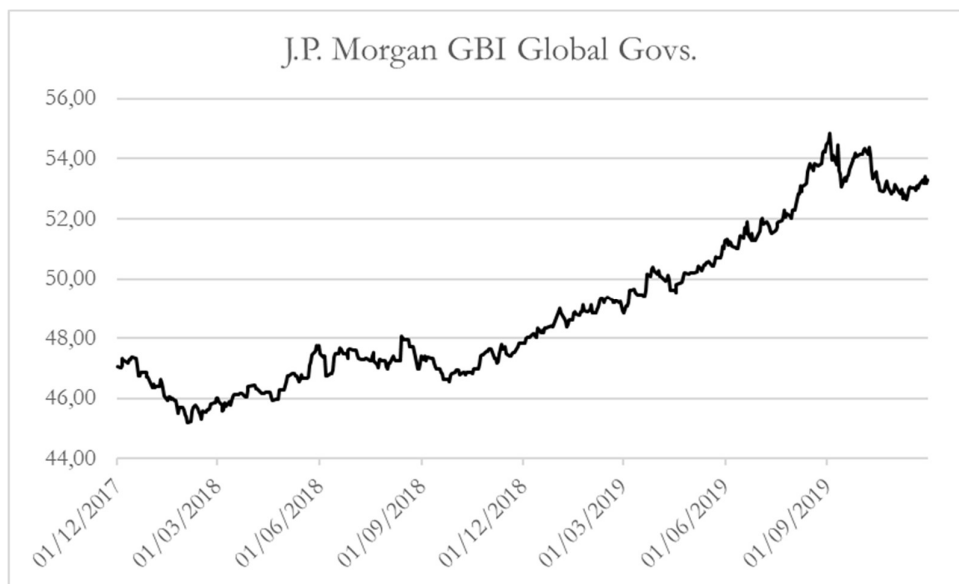


Figura 4.3 Andamento dei prezzi dell'indice J.P. Morgan GBI

### 4.3 Applicazione

Ora che tutti gli elementi necessari sono stati definiti, è possibile procedere con la presentazione dei risultati ottenuti dall'applicazione del modello di ottimizzazione di portafoglio, ricavati tramite l'implementazione dell'algoritmo di PSO.

Come specificato precedentemente, i risultati originano dall'utilizzo della metaeuristica, applicata secondo la tecnica della *rolling window* come illustrato dalla Figura 4.1. Seguendo questa stessa struttura, si espongono tali esiti su base trimestrale, analizzando le diverse soluzioni ottenute per ognuna della quattro misure di rischio considerate.

Infine, prima di procedere ulteriormente, si riporta la Tabella 4.4 dei rendimenti attesi obiettivo per ciascun trimestre, al fine di poter comparare i rendimenti *out-of-sample*, frutto dell'ottimizzazione di portafoglio, con quelli posti come vincolo di rendimento minimo. Questi sono stati calcolati come media dei rendimenti giornalieri dei sei mesi del periodo *in-sample*, maggiorati di un 1,00% annuo, opportunamente convertito su base giornaliera.

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6
Rendimento obiettivo giornaliero	0,0084%	0,0058%	-0,0219%	0,0160%	0,0345%	0,0389%
Rendimento obiettivo annuo	2,14%	1,48%	-5,37%	4,12%	9,08%	10,29%

## 4.3.1 1° Trimestre

Le successive tabelle riportano i risultati ottenuti per ogni misura di rischio relativi al primo trimestre, individuato nell'intervallo di tempo dal 1° giugno 2018 al 31 agosto 2018. Per ognuna di queste sono state effettuate tre *run* dell'algoritmo, selezionando solamente quelle con i valori associati alla funzione di fitness migliori, e tenendo in considerazione le violazioni dei vari vincoli imposti.

PSO con Varianza			
Parametro	1° run	2° run	3° run
Fitness	38332,19	22371,24	136,91
Rendimento % <i>in-sample</i>	-4,29E-03	5,62E-03	-5,30E-03
Varianza <i>in-sample</i>	7,09E-06	1,98E-05	8,66E-06
Rendimento % <i>out-of-sample</i>	-5,70E-03	-2,59E-02	-1,40E-02
Varianza <i>out-of-sample</i>	4,38E-06	1,05E-05	6,39E-06
Vincolo di bilancio	7,34E-07	2,21E-04	0
Vincolo di rendimento	2,05E-04	2,77E-05	1,37E-04
Vincolo di non negatività	6,30E-03	0	0
Vincolo n. massimo di titoli	0	0	0
Vincolo n. minimo di titoli	0	0	0
Vincolo quota massima	3,18E-02	2,36E-02	0
Vincolo quota minima	0	0	0

Nel caso della varianza, come osservabile alla tabella soprastante, la *run* migliore risulta essere la terza, con una fitness pari a 136,91. L'unico vincolo che risulta violato, per questa *run*, è quello di rendimento, il quale misura in che misura il rendimento *in-sample* si discosta dal rendimento minimo richiesto. Sotto questo punto di vista, la seconda *run* presenta una violazione minore di questo vincolo, suggerendo un rendimento più vicino a quello obiettivo. Il motivo per cui questa *run* non è da preferire a quella successiva è dato dalla violazione del vincolo di bilancio, il quale suggerisce che per ottenere quei risultati è stata investita una quantità di capitale superiore di quella a disposizione. Per quanto concerne il rendimento del portafoglio *out-of-sample*, si evidenzia che questo si trova in territorio negativo, coerentemente con quanto realizzato dal portafoglio *in-sample*.

PSO con Value at Risk

Parametro	1° run	2° run	3° run
Fitness	173,43	6633,06	56827,75
Rendimento % <i>in-sample</i>	-8,95E-03	6,53E-03	4,15E-03
VaR <i>in-sample</i>	7,21E-03	9,17E-03	8,23E-03
Rendimento % <i>out-of-sample</i>	-2,49E-02	-1,53E-03	-5,45E-02
VaR <i>out-of-sample</i>	5,33E-03	4,36E-03	5,70E-03
Vincolo di bilancio	0	2,17E-05	9,70E-06
Vincolo di rendimento	1,73E-04	1,86E-05	4,25E-05
Vincolo di non negatività	0	3,60E-03	8,07E-03
Vincolo n. massimo di titoli	0	0	0
Vincolo n. minimo di titoli	0	0	0
Vincolo quota massima	0	2,90E-10	4,91E-02
Vincolo quota minima	0	3,00E-03	0

Anche nel caso dei risultati ottenuti tramite l'applicazione del *Value-at-Risk*, per quanto riguarda la *run* con la fitness minore, le violazioni dei vincoli risultano soddisfacenti. Si osserva, però, che i rendimenti dei due periodi appaiono inferiori rispetto a quelli ottenuti dai portafogli precedenti, che implementavano la varianza. In riferimento, invece, alla misura di rischio, per questo investimento la perdita massima giornaliera, realizzabile con un intervallo di confidenza del 95%, è pari a 0,53%.

PSO con Expected Shortfall

Parametro	1° run	2° run	3° run
Fitness	54143,39	132658,08	69,63
Rendimento % <i>in-sample</i>	-4,06E-03	-4,43E-03	1,54E-02
Expected Shortfall <i>in-sample</i>	4,36E-03	4,28E-03	1,11E-02
Rendimento % <i>out-of-sample</i>	-1,04E-02	-1,99E-02	-6,19E-02
Expected Shortfall <i>out-of-sample</i>	3,43E-03	3,51E-03	7,27E-03
Vincolo di bilancio	3,95E-07	1,51E-06	0
Vincolo di rendimento	1,25E-04	1,28E-04	6,96E-05
Vincolo di non negatività	1,53E-02	0,07067486	0
Vincolo n. massimo di titoli	0	0	0
Vincolo n. minimo di titoli	0	0	0
Vincolo quota massima	2,98E-02	7,08E-04	0
Vincolo quota minima	8,95E-03	6,12E-02	0

Come riscontrato anche nei due casi precedenti, la *run* con il valore della fitness migliore presenta un'unica violazione dei vincoli, associabile a quello di rendimento.

Tuttavia, nei risultati ottenuti con l'*Expected Shortfall* questa violazione è indubbiamente più contenuta: inoltre, il rendimento del portafoglio *in-sample* è positivo, risultato che però non si ripresenta nel periodo *out-of-sample*, al contrario questo è leggermente inferiore a quello ottenuto con il VaR.

PSO con Entropic VaR			
Parametro	1° run	2° run	3° run
Fitness	52797,42	84712,78	85,09
Rendimento % <i>in-sample</i>	-6,92E-04	1,98E-02	1,27E-02
Entropic VaR <i>in-sample</i>	2,9957326	2,9959517	2,9958689
Rendimento % <i>out-of-sample</i>	-4,65E-02	-3,18E-02	-1,07E-02
Entropic VaR <i>out-of-sample</i>	2,995273139	2,99542425	2,99563086
Vincolo di bilancio	1,43E-05	1,80E-12	0
Vincolo di rendimento	5,14E-05	1,54E-04	8,21E-05
Vincolo di non negatività	3,00E-03	6,89E-03	0
Vincolo n. massimo di titoli	0	0	0
Vincolo n. minimo di titoli	0	0	0
Vincolo quota massima	4,90E-02	7,77E-02	0
Vincolo quota minima	8,77E-04	0	0

Analogamente a quanto osservato nella *run* ottenuta con l'*Expected Shortfall*, anche con il VaR entropico si evidenzia un rendimento *in-sample* positivo, mentre quello *out-of-sample* continua ad essere negativo. Tuttavia, è possibile constatare come il rendimento *out-of-sample* della *run* migliore ottenuta con l'EVaR sia il migliore fra tutti quelli osservati finora.

Quale osservazione di carattere generale, è possibile affermare che, inerentemente a questo trimestre, l'algoritmo di PSO ha performato in maniera differente da quanto ci si potesse aspettare. Infatti, come desumibile anche dai grafici presentati nel paragrafo relativo al background finanziario del periodo di riferimento, i mesi di giugno – luglio – agosto 2018 non sono stati particolarmente negativi, seppure si osservi un movimento al ribasso dei prezzi in una parte del trimestre. Tuttavia, tutti i rendimenti *out-of-sample* ottenuti in per questo trimestre si trovano in territorio negativo.

Nel seguito si presentano i risultati ottenuti negli altri cinque trimestri. Tuttavia, per una maggiore chiarezza espositiva e al fine di non appesantire eccessivamente la fruizione, vengono riportate delle tabelle più sintetiche, contenenti solamente gli esiti delle *run* migliori.

Per un maggiore dettaglio si rinvia all'Appendice, dove sono riportati i risultati in modo più completo.

#### 4.3.2 2° Trimestre

##### PSO - 2nd Quarter

Parametro	<i>Varianza</i>	<i>Value-at-Risk</i>	<i>Expected Shortfall</i>	<i>Entropic VaR</i>
Fitness	42,97	21,01	33,25	358,02
Rendimento % <i>in-sample</i>	1,01E-02	7,92E-03	2,49E-03	3,74E-02
Risk measure <i>in-sample</i>	2,32E-05	5,86E-03	4,82E-03	2,996117198
Rendimento % <i>out-of-sample</i>	-4,05E-02	-2,37E-02	-2,48E-02	-3,03E-02
Risk measure <i>out-of-sample</i>	2,42E-05	4,64E-03	4,21E-03	2,995439678
Vincolo di bilancio	0	0	2,22E-16	2,01E-05
Vincolo di rendimento	4,30E+03	2,10E-05	3,33E-05	3,55E-04
Vincolo di non negatività	0	0	0	0
Vincolo n. massimo di titoli	0	0	0	0
Vincolo n. minimo di titoli	0	0	0	0
Vincolo quota massima	0	0	0	0
Vincolo quota minima	0	0	0	0

La tabella di cui sopra riporta i risultati ottenuti nel secondo trimestre, identificato nel periodo da settembre 2018 a novembre 2018. Come è possibile osservare, le varie *run* presentano violazioni soddisfacenti, così come i valori della funzione di fitness appaiono essere contenuti. L'unica eccezione è rappresentata dall'EVaR, dove è presente una violazione del vincolo di bilancio, motivo per il quale anche la fitness risulta più elevata. La violazione di tale vincolo, osservabile nel caso dell'*Expected Shortfall*, data la sua entità è del tutto trascurabile.

Tuttavia, le quattro *run* selezionate presentano, tendenzialmente, risultati analoghi fra loro, con rendimenti *in-sample* positivi, e negativi per quanto concerne il futuro virtuale. Questo si spiega analizzando l'andamento dei prezzi nel trimestre di riferimento. Infatti, a partire da

settembre 2018, i mercati sono entrati in una fase di correzione<sup>13</sup> al ribasso, che ha portato in territorio negativo numerose asset class, con il conseguente realizzo di rendimenti negativi.

Con riferimento al periodo *out-of-sample* considerato, è possibile affermare che i rendimenti annualizzati sono comunque vicini allo zero, nonostante la fase negativa: l'EVaR ha realizzato un rendimento annuo pari a -7,36%, mentre varianza, VaR ed ES hanno ottenuto rispettivamente -9,69%, -5,79% e -6,06%. Il rendimento migliore è stato realizzato dal VaR, con un valore associato a questa misura di rischio pari a 0,46%, calcolato su base giornaliera.

#### 4.3.3 3° Trimestre

##### PSO - 3rd Quarter

Parametro	Varianza	Value-at-Risk	Expected Shortfall	Entropic VaR
Fitness	75,71	91,05	30,53	81,57
Rendimento % <i>in-sample</i>	-1,43E-02	-3,10E-02	-1,89E-02	-1,80E-02
Risk measure <i>in-sample</i>	1,21E-05	9,77E-03	6,49E-03	2,995556617
Rendimento % <i>out-of-sample</i>	4,24E-02	5,35E-02	4,70E-02	3,60E-02
Risk measure <i>out-of-sample</i>	2,02E-05	7,13E-03	5,85E-03	2,996100717
Vincolo di bilancio	0	0	0	2,44E-09
Vincolo di rendimento	7,57E-05	9,10E-05	3,05E+03	7,85E-05
Vincolo di non negatività	0	0	0	0
Vincolo n. massimo di titoli	0	0	0	0
Vincolo n. minimo di titoli	0	0	0	0
Vincolo quota massima	0	0	0	0
Vincolo quota minima	0	0	0	0

Il terzo periodo di ottimizzazione si riferisce all'intervallo temporale che va da dicembre 2018 a febbraio 2019. Simmetricamente a quanto avvenuto nel periodo precedente, qui si osservano rendimenti *in-sample* negativi, ma rendimenti *out-of-sample* positivi. L'andamento di questo trimestre risulta essere particolare: infatti, nel dicembre 2018 i mercati

<sup>13</sup> Normalmente per correzione si intende il movimento al ribasso del corso di un titolo che si verifica all'interno di un movimento rialzista del mercato, mentre la correzione al rialzo che si verifica nel corso di un movimento al ribasso è denominata rimbalzo. Si ha correzione quando il movimento non è tale da far invertire il trend dominante. (borsaitaliana.it)

azionari hanno raggiunto i punti più bassi dell'intero anno, tuttavia, il 2019 ha segnato un punto di svolta, e già dai primi mesi i prezzi dei titoli sono tornati a crescere. Questo ha permesso di compensare le perdite realizzate nel primo mese del trimestre e anche di ottenere un certo margine.

#### 4.3.4 4° Trimestre

##### PSO - 4th Quarter

Parametro	<i>Varianza</i>	<i>Value-at-Risk</i>	<i>Expected Shortfall</i>	<i>Entropic VaR</i>
Fitness	84,51	55,57	0,702	13,03
Rendimento % <i>in-sample</i>	7,58E-03	1,05E-02	1,60E-02	1,11E-02
Risk measure <i>in-sample</i>	2,45E-05	1,01E-02	7,49E-03	2,995854832
Rendimento % <i>out-of-sample</i>	9,54E-03	7,26E-03	7,59E-03	6,94E-03
Risk measure <i>out-of-sample</i>	1,43E-05	6,62E-03	4,40E-03	2,995808551
Vincolo di bilancio	0	0	0	0
Vincolo di rendimento	8,45E-05	5,56E-05	6,94E-07	1,00E-05
Vincolo di non negatività	0	0	0	0
Vincolo n. massimo di titoli	0	0	0	0
Vincolo n. minimo di titoli	0	0	0	0
Vincolo quota massima	0	0	0	0
Vincolo quota minima	0	0	0	0

Il trimestre marzo – aprile – maggio 2019 prosegue il trend positivo iniziato con il 2019 e questo si riflette sui rendimenti qui ottenuti.

In questo caso non si rilevano violazioni dei vincoli, ad eccezione di quello di rendimento, da parte di nessuna delle quattro misure di rischio adottate. Si evidenzia una fitness molto bassa ottenuta dalla *run* con l'*Expected Shortfall*, che presenta anche la violazione minore del vincolo del rendimento obiettivo, impostato ad un livello pari a 4,12% annuo. Tuttavia, il rendimento *out-of-sample* annualizzato ottenuto con l'ES risulta pari a 1,93%, secondo solo a quello ottenuto con la varianza, uguale a 2,43%, che però è la misura a performare meno nel periodo *in-sample*.



## 4.3.5 5° Trimestre

## PSO - 5th Quarter

Parametro	<i>Varianza</i>	<i>Value-at-Risk</i>	<i>Expected Shortfall</i>	<i>Entropic VaR</i>
Fitness	70,57	62,11	62,42	52,81
Rendimento % <i>in-sample</i>	2,74E-02	2,83E-02	4,07E-02	3,55E-02
Risk measure <i>in-sample</i>	2,45E-05	6,39E-03	6,49E-03	2,996090673
Rendimento % <i>out-of-sample</i>	5,38E-02	5,05E-02	7,30E-02	7,25E-02
Risk measure <i>out-of-sample</i>	3,31E-05	3,85E-03	4,19E-03	2,996462187
Vincolo di bilancio	0	0	0	0
Vincolo di rendimento	7,06E-05	6,21E-05	6,24E-05	4,98E-05
Vincolo di non negatività	0	0	0	0
Vincolo n. massimo di titoli	0	0	0	0
Vincolo n. minimo di titoli	0	0	0	0
Vincolo quota massima	0	0	0	0
Vincolo quota minima	0	0	0	0

La tabella relativa al quinto trimestre riporta i risultati conseguiti dall'algoritmo per i mesi di giugno – agosto 2019. L'andamento positivo dei mercati continua anche in questo periodo, producendo effetti positivi sui portafogli considerati. Inoltre, si nota anche una rischiosità inferiore rispetto al trimestre precedente, come osservabile dai valori più contenuti del VaR e dell'*Expected Shortfall*. I rendimenti annui maggiori sono stati raggiunti dal VaR entropico e dall'ES, rispettivamente pari a 20,03% e 20,18%, contro un rendimento minimo richiesto pari a 9,08%.

## 4.3.6 6° Trimestre

## PSO - 6th Quarter

Parametro	<i>Varianza</i>	<i>Value-at-Risk</i>	<i>Expected Shortfall</i>	<i>Entropic VaR</i>
Fitness	52,95	58,27	72,41	53,7
Rendimento % <i>in-sample</i>	4,42E-02	4,47E-02	3,16E-02	4,00E-02
Risk measure <i>in-sample</i>	2,22E-05	4,11E-03	5,54E-03	2,996137419
Rendimento % <i>out-of-sample</i>	6,92E-03	8,64E-03	1,36E-02	9,87E-03
Risk measure <i>out-of-sample</i>	9,64E-06	2,21E-03	2,60E-03	2,995833128
Vincolo di bilancio	0	0	0	0
Vincolo di rendimento	5,30E-05	5,83E-05	7,24E-05	5,07E-05
Vincolo di non negatività	0	0	0	0
Vincolo n. massimo di titoli	0	0	0	0
Vincolo n. minimo di titoli	0	0	0	0
Vincolo quota massima	0	0	0	0
Vincolo quota minima	0	0	0	0

L'ultimo trimestre va dal 1° settembre 2019 al 29 novembre 2019. Anche in questo periodo a realizzare le performance migliori sono l'*Expected Shortfall* e l'*Entropic VaR*, i quali raggiungono un rendimento annualizzato pari rispettivamente a 3,49% e 2,52% a fronte di un rendimento obiettivo del 10,29% e ad un ulteriore contenimento del rischio.

#### 4.3.7 *Portafogli ottimi*

Si sono presentati i risultati ottenuti dall'applicazione della metaeuristica ai vari problemi di selezione di portafoglio, andando ad illustrare le soluzioni migliori per ogni trimestre. A questo punto è possibile andare a visionare i portafogli di ottimo in termini di quote di capitale da investire in ciascun titolo.

Come è possibile rilevare osservando le tabelle che seguono, per ognuna delle misure di rischio adottate, i risultati non sono particolarmente coerenti fra un trimestre e l'altro. In altri termini, non si osserva una continuità nei pesi di ciascun titolo, bensì questi tendono a differire, talvolta anche molto, nel corso dei periodi. Questo aspetto può essere spiegabile dal fatto di aver utilizzato per la risoluzione del problema di ottimizzazione di portafoglio una metaeuristica, in particolare la *Particle Swarm Optimization*. Come presentato al Capitolo III, la PSO rappresenta un algoritmo afferente alla classe delle metaeuristiche le quali, per loro stessa natura, non individuano la soluzione esatta del problema, quanto piuttosto una buona approssimazione di quest'ultima, con la conseguenza di ottenere risultati, ovvero soluzioni allo stesso problema, che possono essere diversi fra loro. Inoltre, il fatto di aver utilizzato il sistema della *rolling window* spinge maggiormente in questa direzione, dal momento che se si fosse considerato un arco temporale *out-of-sample* uniperiodale invece della suddivisione in trimestri, la soluzione ottima sarebbe ovviamente stata unica, per una stessa misura di rischio; tuttavia, questo potrebbe non risultare il percorso ottimale, soprattutto per periodi così lunghi, superiori all'anno, dal momento che questo non avrebbe permesso di cogliere le incertezze dei mercati finanziari che hanno caratterizzato il 2018, e avrebbe probabilmente penalizzato la crescita dei rendimenti ricominciata con il 2019.

In sintesi, la tecnica della *rolling window* è importante al fine di cogliere la dinamicità dei mercati; d'altra parte, la natura "approssimativa" della *Particle Swarm Optimization* può dare

luogo a soluzioni ottime che differiscono molto fra loro, pur implementando il medesimo algoritmo ad ogni *run*, motivo per cui le soluzioni differiscono, anche sensibilmente, fra un trimestre e l'altro. Nel seguito si presentano i portafogli ottenuti con le differenti misure di rischio adottate.

Portafoglio PSO con Varianza						
N° Titolo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6
1	3,0%	2,9%	8,8%	5,2%	16,6%	15,0%
2	6,1%	22,3%	0,0%	8,3%	2,3%	2,2%
3	0,2%	4,0%	6,8%	6,4%	2,4%	3,0%
4	4,5%	12,7%	2,5%	4,7%	3,0%	0,1%
5	2,7%	6,7%	15,2%	6,2%	15,1%	8,2%
6	7,5%	9,1%	1,7%	17,5%	7,3%	6,5%
7	6,8%	0,8%	2,4%	1,1%	10,3%	1,7%
8	7,7%	4,3%	6,6%	2,0%	3,6%	34,1%
9	12,1%	2,2%	1,6%	0,7%	5,0%	0,8%
10	3,4%	2,0%	10,5%	3,8%	4,8%	5,6%
11	6,9%	2,3%	4,5%	4,8%	8,2%	4,4%
12	8,7%	6,5%	0,1%	9,7%	4,1%	5,1%
13	20,0%	8,8%	4,4%	14,8%	11,9%	3,7%
14	6,6%	9,6%	30,1%	8,2%	2,9%	8,7%
15	3,6%	5,7%	4,8%	6,7%	2,4%	1,0%
<b>Totale</b>	<b>100,00%</b>	<b>100,00%</b>	<b>100,00%</b>	<b>100,00%</b>	<b>100,00%</b>	<b>100,00%</b>

Le tabelle con i portafogli ottimi qui riportate, evidenziano come in questi ultimi cambino nel corso dei trimestri, chiarendo maggiormente quanto anticipato sopra, ovvero le differenze significative che vi sono fra le quote di ciascun titolo fra i vari periodi. I numeri associati a ciascun titolo riprendono la medesima numerazione proposta nella Tabella 4.3, la quale presentava gli ETF utilizzati. In questo modo, è possibile osservare come il portafoglio con la varianza impieghi mediamente il 41,2% del capitale nel mercato azionario, una percentuale ben più elevata rispetto a quanto rilevato per gli altri portafogli.

Portafoglio PSO con Value-at-Risk

N° Titolo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6
1	0,4%	2,2%	6,8%	0,1%	6,6%	3,9%
2	5,1%	0,3%	1,4%	19,2%	1,9%	4,2%
3	3,1%	4,4%	21,1%	9,7%	6,8%	0,3%
4	7,8%	5,9%	1,0%	15,0%	1,6%	2,4%
5	1,5%	3,1%	1,5%	11,3%	3,6%	10,1%
6	4,7%	10,6%	6,1%	0,1%	13,6%	4,2%
7	2,9%	0,1%	1,9%	1,0%	16,8%	0,5%
8	30,9%	4,1%	3,7%	7,6%	0,7%	8,6%
9	1,3%	1,1%	12,6%	4,3%	8,7%	7,2%
10	9,1%	29,8%	16,6%	7,1%	7,9%	1,3%
11	15,3%	11,7%	19,7%	2,0%	3,0%	15,9%
12	5,9%	5,1%	4,6%	1,1%	8,5%	5,5%
13	9,9%	2,6%	0,0%	6,5%	11,3%	13,2%
14	0,2%	6,9%	1,1%	0,0%	8,9%	16,7%
15	1,9%	12,1%	1,7%	15,0%	0,1%	6,2%
<b>Totale</b>	<b>100,00%</b>	<b>100,00%</b>	<b>100,00%</b>	<b>100,00%</b>	<b>100,00%</b>	<b>100,00%</b>

Il caso contrario lo si riscontra con il *Value-at-Risk*, il cui portafoglio è composto mediamente per il 33,6% da ETF azionari, e per il restante 66,4% da obbligazionario, presentando l'incidenza di bond più elevata di tutti i portafogli considerati.

Portafoglio PSO con Expected Shortfall

N° Titolo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6
1	20,7%	7,1%	1,8%	6,5%	7,2%	7,2%
2	5,9%	3,4%	2,8%	3,0%	9,0%	1,8%
3	18,3%	0,6%	8,0%	5,4%	6,3%	5,3%
4	3,0%	0,1%	1,9%	5,3%	8,0%	10,0%
5	0,4%	2,6%	9,4%	0,8%	3,2%	4,6%
6	4,1%	14,0%	7,7%	5,5%	3,2%	4,3%
7	1,6%	17,7%	11,7%	2,9%	5,4%	28,7%
8	5,2%	4,0%	9,0%	9,1%	21,2%	2,4%
9	8,9%	0,5%	8,9%	1,6%	0,1%	3,8%
10	0,1%	1,0%	20,1%	6,1%	13,5%	4,6%
11	4,4%	6,9%	5,8%	25,3%	2,2%	3,5%
12	15,2%	4,1%	9,5%	1,5%	4,8%	5,8%
13	6,3%	5,9%	0,0%	10,4%	1,5%	7,4%
14	2,7%	14,5%	1,3%	15,3%	10,7%	1,5%
15	3,3%	17,7%	2,2%	1,4%	3,5%	9,1%
<b>Totale</b>	<b>100,00%</b>	<b>100,00%</b>	<b>100,00%</b>	<b>100,00%</b>	<b>100,00%</b>	<b>100,00%</b>

Infine, i portafogli che utilizzano quale misura di rischio l'*Expected Shortfall* e il VaR entropico presentano mediamente un'incidenza del mercato dell'equity sul totale pari rispettivamente a 34,8% e 35,0%, con valori, quindi, molto simili fra loro.

Portafoglio PSO con Entropic VaR

N° Titolo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6
1	3,9%	1,3%	12,2%	7,9%	2,6%	5,2%
2	26,2%	9,7%	4,2%	9,6%	3,1%	6,9%
3	9,8%	1,0%	1,5%	6,2%	2,4%	2,6%
4	0,4%	0,0%	1,7%	3,7%	3,6%	0,4%
5	0,5%	29,9%	8,8%	1,9%	0,5%	6,2%
6	2,9%	5,7%	4,9%	14,0%	5,7%	3,0%
7	2,0%	5,7%	30,3%	15,5%	0,8%	7,1%
8	0,2%	11,6%	6,5%	2,2%	19,6%	0,0%
9	4,0%	3,9%	0,4%	0,4%	1,2%	3,0%
10	3,3%	5,2%	0,1%	1,6%	0,4%	3,4%
11	2,2%	9,7%	4,5%	21,5%	6,1%	20,9%
12	12,5%	0,5%	7,5%	2,5%	1,0%	3,3%
13	1,0%	6,3%	6,4%	0,6%	22,8%	27,2%
14	25,7%	7,3%	3,0%	3,6%	11,1%	7,7%
15	5,2%	2,1%	7,9%	8,9%	18,9%	3,0%
<b>Totale</b>	<b>100,00%</b>	<b>100,00%</b>	<b>100,00%</b>	<b>100,00%</b>	<b>100,00%</b>	<b>100,00%</b>

Si evidenzia che talvolta i portafogli presentati violano le percentuali massime e minime da investire in ciascun titolo imposte inizialmente: questo è dovuto principalmente al fatto che è stata utilizzata una metaeuristica la quale, come espresso sopra, non individua una soluzione esatta. Tuttavia, tali violazioni sono di modesta entità e, conseguentemente, risultano trascurabili ai fini del presente studio.

Differente è il caso in cui si dovesse dare operatività ai portafogli selezionati: l'effettivo utilizzo di questi risultati richiederebbe un post-processamento degli stessi, ad esempio ponendo le quote inferiori al *lower bound* uguali a quest'ultimo, e analogamente portando i pesi superiori all'*upper bound* pari a questo, per poi procedere ad una normalizzazione delle percentuali affinché queste sommino all'unità.

#### 4.4 Confronto

I portafogli d'investimento ottenuti sono oggetto della seguente comparazione, che si propone l'obiettivo di osservare le differenti performance ottenute con le diverse misure di rischio; dapprima, questo viene fatto sotto il profilo del rendimento, mentre, successivamente, si applicano alcuni noti indicatori aggiustati per il rischio.

##### 4.4.1 Analisi dei rendimenti

L'approccio più immediato per confrontare differenti portafogli è individuabile nell'analisi dei risultati ottenuti da questi, dal punto di vista dei rendimenti. Nelle successive tabelle si riportano le performance ottenute dai differenti portafogli, sia in termini di rendimenti medi giornalieri, sia in termini di risultati totali per singolo trimestre.

La prima tabella illustra il rendimento medio giornaliero realizzato da ciascuna misura di rischio per ognuno dei trimestri considerati. Inoltre, ai fini di una comparazione più chiara, si riporta il rendimento medio giornaliero ottenuto da ognuna delle quattro misure sul totale del periodo considerato.

Rendimento medio giornaliero portafogli ottimi

Misura di rischio	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Totale
<i>Varianza</i>	-0,005%	-0,040%	0,044%	0,013%	0,058%	0,017%	<b>0,014%</b>
<i>Value-at-Risk</i>	-0,020%	-0,024%	0,051%	0,009%	0,056%	0,013%	<b>0,014%</b>
<i>Expected Shortfall</i>	-0,042%	-0,025%	0,049%	0,023%	0,071%	0,021%	<b>0,016%</b>
<i>Entropic VaR</i>	0,001%	-0,030%	0,040%	0,014%	0,076%	0,014%	<b>0,019%</b>

Differentemente, la seconda tabella esprime le performance in termini di rendimento totale realizzato per ogni trimestre, sia quanto effettivamente ottenuto da ciascuna misura di rischio su tutto l'arco temporale preso in considerazione per l'investimento.

Rendimento totale portafogli ottimi

Misura di rischio	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Totale
<i>Varianza</i>	-0,32%	-2,52%	2,79%	0,80%	3,70%	1,08%	<b>5,53%</b>
<i>Value-at-Risk</i>	-1,25%	-1,48%	3,28%	0,60%	3,59%	0,81%	<b>5,56%</b>
<i>Expected Shortfall</i>	-2,58%	-1,55%	3,13%	1,44%	4,59%	1,32%	<b>6,35%</b>
<i>Entropic VaR</i>	0,05%	-1,89%	2,56%	0,91%	4,88%	0,87%	<b>7,38%</b>

Stando a quanto presentato dalle tabelle sopra, è possibile osservare come i portafogli seguano l'andamento del mercato allo stesso modo, con rendimenti negativi nei primi due trimestri, che coincidono con il 2018, per poi tornare a crescere nel 2019. Si evidenzia come il portafoglio ottenuto con il VaR entropico nel primo trimestre sia l'unico in grado di ottenere un rendimento positivo. Inoltre, si rileva come i portafogli ottenuti con l'EVaR riescano a sovra-performare quelli utilizzando le altre misure di rischio, raggiungendo un risultato positivo per il periodo giugno 2018 – novembre 2019 pari al 7,38%.

Per una maggiore chiarezza espositiva, si presenta alla seguente Figura 4.4 il rendimento totale di ogni portafoglio per trimestre.

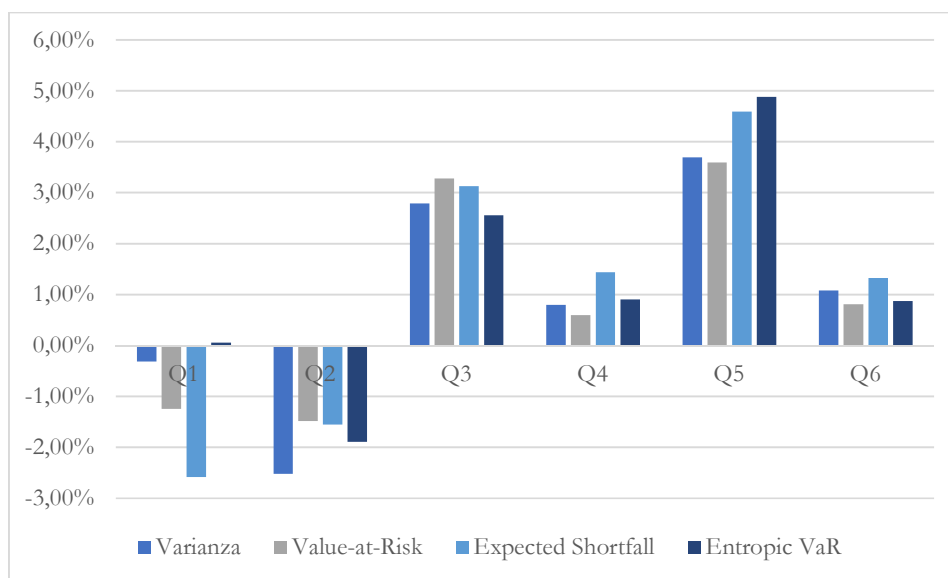


Figura 4.4 Andamento dei rendimenti di portafoglio

A complemento di questa analisi preliminare, nel seguito si riportano i risultati derivanti dal confronto dei vari portafogli secondo il criterio di dominanza stocastica in media-varianza. Nonostante le limitazioni di cui questo modello si fa portatore, approfondite e discusse al Capitolo I, si è comunque deciso di inserire questo metodo di confronto, solamente a fini integrativi per questa analisi comparativa, in quanto rappresenta un elemento classico della letteratura in materia. Alla successiva tabella si riportano i risultati ottenuti da questo confronto. Per ognuno dei trimestri considerati, si illustrano il rendimento medio e la

varianza dei rendimenti dei portafogli costruiti utilizzando le quattro misure di rischio implementate.

		Varianza	VaR	ES	EVaR
Q1	Media	-5,06E-05	-1,99E-04	-4,15E-04	8,36E-06
	Varianza	6,45E-06	1,00E-05	2,53E-05	1,06E-05
Q2	Media	-4,05E-04	-2,37E-04	-2,48E-04	-3,03E-04
	Varianza	2,42E-05	9,24E-06	7,20E-06	2,19E-05
Q3	Media	4,37E-04	5,13E-04	4,89E-04	4,01E-04
	Varianza	2,18E-05	3,44E-05	2,14E-05	1,82E-05
Q4	Media	1,27E-04	9,49E-05	2,27E-04	1,43E-04
	Varianza	1,41E-05	1,80E-05	8,43E-06	1,39E-05
Q5	Media	5,76E-04	5,61E-04	7,13E-04	7,57E-04
	Varianza	3,24E-05	1,85E-05	2,44E-05	1,05E-05
Q6	Media	1,71E-04	1,28E-04	2,09E-04	1,37E-04
	Varianza	9,29E-06	4,37E-06	5,02E-06	4,08E-06
Totale	Media	1,37E-04	1,37E-04	1,55E-04	1,86E-04
	Varianza	1,78E-05	1,53E-05	1,52E-05	1,30E-05

L'ultima riga della tabella evidenzia i risultati conseguiti dai portafogli sul totale del periodo considerato. Il tentativo di andare a selezionare un portafoglio che di trimestre in trimestre domini tutti gli altri appare un percorso poco agevole e probabilmente poco significativo, in quanto non sempre è possibile stabilire quale investimento domini tutti gli altri. D'altra parte, considerando le performance in un'ottica globale, ovvero sulla base dell'intero orizzonte temporale oggetto di studio, è possibile osservare quali portafogli riescano a dominare gli altri, come illustrato dalla seguente Figura 4.5.



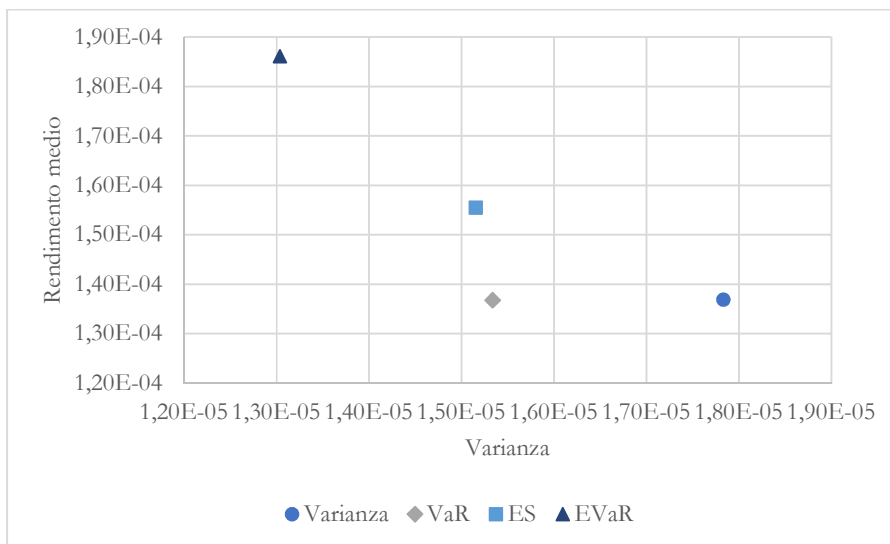


Figura 4.5 Confronto in media-varianza dei portafogli selezionati

La Figura 4.5 evidenzia il confronto fra i vari portafogli secondo il criterio media-varianza. Come si evince da quanto riportato, l'investimento che ha utilizzato il VaR entropico quale parametro di rischio domina tutti gli altri portafogli, seguito dall'*Expected Shortfall*. Infine, si conferma il rendimento simile ottenuto dai portafogli con VaR e varianza, come già presentato sopra; tuttavia, il primo presenta una volatilità decisamente inferiore rispetto al secondo.

Come detto, questo modello non è esente da limiti, motivo per cui nel seguito si approfondisce la valutazione ricorrendo ad un serie di metriche aggiustate per il rischio.

#### 4.4.2 Indicatori utilizzati per l'analisi delle performance

Si sono visti i risultati ottenuti dai portafogli in termini di rendimento. Tuttavia, l'analisi di questo unico aspetto non può considerarsi esaustiva, né tantomeno definitiva, in quanto è stata tralasciata una componente fondamentale dell'investimento, ovvero il rischio. Uno dei principali motivi per i quali il solo confronto dei rendimenti non è considerarsi attendibile risiede nel fatto che questo è solitamente legato al livello di rischio presente in portafoglio: come visto nel Capitolo I, ad un maggiore rischio corrisponde tendenzialmente un maggior rendimento.

Al fine di tenere in considerazione questa relazione fra rischio e rendimento, numerosi indicatori di performance sono stati sviluppati nel corso del tempo, i quali prendono il nome di misure aggiustate per il rischio, o *risk-adjusted*.

Nel seguito si presentano alcune delle misure più note e maggiormente diffuse, le quali sono poi utilizzate per l'analisi comparativa dei portafogli ottenute con le quattro misure di rischio adottate.

- *Sharpe ratio*. L'indice di Sharpe è stato elaborato dal premio Nobel William F. Sharpe, ed esprime il rendimento medio ottenuto in più rispetto al titolo privo di rischio per unità di volatilità.

$$\text{Sharpe ratio} = \frac{R_p - r_f}{\sigma_p} \quad (4.2)$$

dove:

$R_p$  rappresenta il rendimento del portafoglio;

$r_f$  esprime il rendimento del titolo privo di rischio;

$\sigma_p$  è la deviazione standard del rendimento di portafoglio.

Uno Sharpe ratio elevato è desiderabile quando si comparano portafogli simili fra loro, poiché quello con l'indice di Sharpe maggiore, date le caratteristiche simili, incorporerà un grado inferiore di rischio rispetto all'altro. Inoltre, una maggiore diversificazione dovrebbe comportare un incremento di questo indicatore, in relazione ad investimenti simili. Affinché questo sia valido l'investitore deve accettare la volatilità come misura di rischio e, come già chiarito in precedenza, questa condizione potrebbe presentare alcuni limiti.

Infine, fra le debolezze più rilevanti di questo indice si rileva l'assunzione di rendimenti distribuiti normalmente.

- *Sortino ratio*. L'indice di Sortino rappresenta una variazione dello Sharpe ratio: mentre quest'ultimo utilizza come misura di rischio la volatilità, che considera allo stesso

modo gli scostamenti positivi e quelli negativi, il Sortino ratio differenzia questi due tipi di variazioni, concentrandosi solamente sulla parte pericolosa per l'investitore, utilizzando una misura che può essere definita come *downside deviation*, o *downside risk*.

Questo indice utilizza lo stesso numeratore dello Sharpe ratio, ovvero il premio per il rischio, e al denominatore la misura di cui sopra.

$$\text{Sortino ratio} = \frac{R_p - r_f}{\sigma_d} \quad (4.3)$$

dove:

$R_p$  indica il rendimento del portafoglio;

$r_f$  è il rendimento del titolo privo di rischio;

$\sigma_d$  è la *downside deviation*.

Analogamente all'indice di Sharpe, anche un valore più elevato dell'indice di Sortino è un risultato positivo. Infatti, considerando due portafogli simili, l'investitore razionale preferirà quello con un Sortino ratio maggiore perché significa che l'investimento farà guadagnare di più per ogni unità di rischio, inteso in senso negativo, aggiuntivo.

- *Treynor ratio*. L'indice di Treynor, sviluppato dall'economista americano Jack Treynor, sfrutta un principio analogo a quello delle due misure sopra considerate, in quanto individua il rendimento in eccesso generato per ogni unità di rischio che entra in portafoglio. Tuttavia, il Treynor ratio utilizza quale misura della rischiosità di un investimento il beta di portafoglio. Questo esprime il rischio sistematico e la sensibilità dei rendimenti del portafoglio ai cambiamenti di mercato.

$$\text{Treynor ratio} = \frac{R_p - r_f}{\beta_p} \quad (4.4)$$

dove:

$R_p$  rappresenta il rendimento del portafoglio;

$r_f$  esprime il rendimento del titolo privo di rischio;

$\beta_p$  è il beta di portafoglio.

Questo indicatore esprime la remunerazione, in eccesso al titolo privo di rischio, di un investimento per unità di rischio sistematico che entra in portafoglio. L'idea dietro questa misura è che l'investitore debba essere remunerato per il rischio sistematico presente nel proprio investimento, in quanto questo non è eliminabile tramite la diversificazione.

Fra le principali limitazione dell'indice di Treynor emerge la base storica su cui è calcolata la misura di rischio, il beta. Inoltre, seppure un ratio maggiore implica investimenti migliori, questo indicatore non esprime quanto un portafoglio è migliore di un altro.

#### 4.4.3 *Analisi con misure risk-adjusted*

In questo paragrafo, si presenta l'applicazione degli indicatori aggiustati per il rischio ai vari portafogli selezionati. Le tre misure sono calcolate su ognuno dei sei trimestri in considerazione, per ognuna della quattro misure di rischio. Si vedano i risultati alla seguente Tabella 4.5.

Ratio	Portafoglio	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6
Sharpe	Varianza	-0,05531	-0,08222	0,09431	0,02525	0,09351	0,02229
	Value-at-Risk	-0,07781	-0,07789	0,09392	0,01692	0,11665	0,04018
	Expected Shortfall	-0,12439	-0,09256	0,10505	0,02626	0,14623	0,06000
	Entropic VaR	0,03295	-0,06477	0,08785	0,01863	0,22342	0,04752
Sortino	Varianza	-0,07140	-0,10215	0,13780	0,03241	0,12090	0,03112
	Value-at-Risk	-0,09782	-0,09906	0,13903	0,02266	0,15779	0,05390
	Expected Shortfall	-0,15803	-0,11490	0,15698	0,03472	0,20475	0,08346
	Entropic VaR	0,04317	-0,08019	0,12764	0,02424	0,37475	0,06614
Treynor	Varianza	-0,00165	-0,00344	0,00220	0,00047	0,00231	0,00056
	Value-at-Risk	-0,00296	-0,00670	0,00206	0,00033	0,00263	0,00091
	Expected Shortfall	-0,00423	-0,00595	0,00230	0,00063	0,00321	0,00124
	Entropic VaR	0,00129	-0,01631	0,00197	0,00038	0,00463	0,00099

*Tabella 4.4 Analisi con indicatori risk adjusted*

Prima di proseguire, si ricorda la regola generale per la quale ad un maggior valore associato a questi indicatori, corrisponde una miglior performance del portafoglio. Tuttavia, nel caso in cui queste misure assumano valori negativi<sup>14</sup>, l'interpretazione di queste può essere fuorviante e non particolarmente significativa; di conseguenza, ai fini del confronto dei diversi portafogli ottenuti, si è preferito non tenere conto dei *ratio* negativi. Inoltre, si specifica che nel calcolo del premio per il rischio, che rappresenta il numeratore nel calcolo di questi indicatori, il tasso di rendimento privo di rischio è stato assunto pari a zero, essendo il rendimento dei titoli di Stato tedeschi a 10 anni negativi.

Come è possibile osservare dalla Tabella 4.5 di cui sopra, non è possibile decretare quale portafoglio ottiene i migliori risultati in assoluto. Tuttavia, si rileva una tendenza dell'*Expected Shortfall* ad ottenere con più frequenza valori più elevati, con tutte le metriche implementate e, nel caso specifico, risulta essere la misura che arriva ad ottenere i risultati migliori nel terzo, quarto e sesto trimestre. L'EVaR, invece, presenta risultati soddisfacenti per quanto riguarda il primo trimestre, durante il quale si afferma come unica misura di rischio ad ottenere un valore positivo per tutti gli indicatori. Le cause di questo fenomeno sono da ricercarsi nel fatto che il portafoglio con l'EVaR per il primo periodo è riuscito ad ottenere un rendimento positivo, a differenza degli altri che si trovano tutti in territorio negativo. L'*Entropic VaR* si comporta bene anche negli ultimi due trimestri, dove ottiene il miglior risultato con riguardo al quinto periodo, e posizionandosi solo dopo l'*Expected Shortfall* per quanto concerne il sesto. Contrariamente, la varianza sembra ottenere buoni risultati prevalentemente nella prima parte del 2019, ovvero nel terzo e quarto trimestre. Infine, per il *Value-at-Risk*, pur non fornendo mai valori in grado di porsi al di sopra di tutte le altre misure, appare la più costante, dal momento che non risulta nemmeno ottenere performance peggiori in assoluto.

I bassi valori dell'indice di Treynor, per i portafogli ottenuti con l'*Entropic VaR* nel terzo trimestre, o dalla varianza nell'ultimo semestre, potrebbero suggerire una maggior sensibilità

---

<sup>14</sup> Tendenzialmente, le misure aggiustate per il rischio assumono valori negativi quando il rendimento in eccesso del portafoglio, ovvero il numeratore, è negativo. Questo è possibile quando il rendimento del portafoglio è inferiore a 0, oppure quando quest'ultimo risulta minore del rendimento del titolo privo di rischio. In questi casi non si perviene ad alcun risultato significativo.

di questi ai mutamenti di mercato, nei periodi considerati: ragionando a parità di rendimenti, beta più elevati suggeriscono una maggiore dipendenza dal mercato, comportando un Treynor ratio più alto; al contrario, valori di beta inferiori conducono ad una minore correlazione con il *benchmark* di riferimento<sup>15</sup>.

Come affermato dallo studio dei risultati presentati alla Tabella 4.5, i portafogli ottenuti con l'*Expected Shortfall* appaiono presentare valori degli indicatori *risk-adjusted* più elevati con una frequenza maggiore rispetto agli altri tipi di portafogli. Tuttavia, anche l'EVaR riporta delle performance non trascurabili risultando la misura di rischio migliore per due trimestri, contro la frequenza di tre periodi dell'*Expected Shortfall*, e posizionandosi quale seconda misura migliore durante l'ultimo intervallo temporale.

---

<sup>15</sup> Il *benchmark* è rappresentato dall'indice di riferimento, ovvero il mercato borsistico sul quale sono quotati i titoli considerati. In questo studio, dal momento che tutti gli ETF utilizzati sono scambiati presso la Borsa di Milano, il mercato cui si fa riferimento è rappresentato dall'indice FTSEMIB40.

## Conclusioni

In questa trattazione si è affrontato il tema della selezione di portafoglio e, in particolare, come investimenti adottanti parametri di rischio differenti, possano produrre risultati diversi. Per la costruzione di questi portafogli di titoli, si sono utilizzate le serie storiche di quindici ETF, in un arco temporale di due anni, compreso fra dicembre 2017 e novembre 2019. A causa della difficoltà NP-hard del problema di selezione di portafoglio si è deciso di implementare una delle tecniche afferenti alla famiglia delle euristiche per la risoluzione dello stesso, e nello specifico una metaeuristica bio-ispirata nota come *Particle Swarm Optimization*, o PSO. Una delle caratteristiche principali di questo algoritmo risiede nella capacità di fornire una buona approssimazione della soluzione ottima del problema, entro un tempo computazionale ragionevole. Il modello di ottimizzazione di portafoglio è stato riformulato applicando il metodo delle penalità esatte, al fine di poter applicare efficacemente la PSO.

In seguito ad alcuni test preliminari, si sono determinati di stabilire i valori ritenuti idonei, ai fini della presente analisi, di alcuni parametri della PSO. Successivamente, utilizzando la tecnica della *rolling window*, si è data esecuzione all'algoritmo, risolvendo il problema di ottimizzazione di portafoglio adottando quattro differenti misure di rischio: la varianza, il *Value-at-Risk*, l'*Expected Shortfall*, e il *Value-at-Risk* entropico. In questo modo, per ognuno dei trimestri del periodo campionario, si sono ottenuti quattro diversi portafogli, ognuno con un parametro di rischio diverso.

Infine, si è proceduto a valutare i risultati ottenuti da questi ipotetici investimenti, dapprima comparando fra loro i rendimenti ottenuti e, in seconda battuta, ricorrendo ad una batteria di indici corretti per il rischio, o *risk-adjusted*. L'analisi dei rendimenti su base giornaliera, così come trimestrale, non ha fatto emergere la superiorità di una misura di rischio rispetto ad un'altra, tuttavia, si rileva come il *Value-at-Risk* entropico e, in misura minore, l'*Expected Shortfall*, abbiano prodotto un rendimento totale maggiore rispetto al VaR e alla varianza, se si considera l'orizzonte temporale dell'investimento nella sua interezza.

Per quanto concerne la valutazione comparativa con l'utilizzo degli indicatori *risk-adjusted*, si evidenzia una situazione analoga. Infatti, anche in questo caso, andando a considerare i singoli trimestri non è possibile stabilire in via definitiva quale misura sia migliore delle altre. D'altra parte, si rileva come l'*Expected Shortfall* abbia ottenuto ottime performance con una frequenza maggiore rispetto alle altre misure: inoltre, si osserva come anche il *VaR* entropico sia riuscito a raggiungere ottimi risultati, posizionandosi quasi sullo stesso piano dell'*Expected Shortfall*.

Quanto emerge dall'analisi di comparazione effettuata, conferma in parte le aspettative iniziali, secondo le quali misure di rischio più recenti e affinate avrebbero prodotto performance migliori. Come si è visto, infatti, quale osservazione di carattere generale, sono i portafogli che adottano l'*Expected Shortfall* e il *VaR* entropico ad ottenere i risultati migliori, tuttavia anche il *VaR* produce performance soddisfacenti. Come si è detto, le aspettative iniziali sono rispettate solo in parte dal momento che anche una misura più classica come la varianza, pur con tutte le limitazioni di cui si fa carico, ha ottenuto buoni risultati, arrivando in alcuni periodi a performare meglio delle altre misure di rischio. Tuttavia, è impossibile trascurare il progresso che c'è stato nella letteratura in materia, e di conseguenza, date le caratteristiche teoriche possedute dalle misure di rischio più recenti, all'atto pratico risulta indubbia la preferibilità di queste ultime rispetto a quelle più classiche.



# Appendice

## Dimostrazione del calcolo del vettore dei pesi ottimi

Nel seguito si riportano i passaggi necessari per risolvere la funzione lagrangiana al fine di individuare il vettore dei pesi ottimi di portafoglio.

$$\mathcal{L} = \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} - \lambda_1(\mathbf{x}'\mathbf{r} - \pi) - \lambda_2(\mathbf{x}'\mathbf{e} - 1)$$

Ponendo le derivate parziali rispetto a  $\mathcal{L}$  uguali a 0:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{x}'\mathbf{V} - \lambda_1\mathbf{r}' - \lambda_2\mathbf{e}' = \mathbf{0}_N \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = \mathbf{x}'\mathbf{r} + \pi (= -\mathbf{r}'\mathbf{x} + \pi) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = \mathbf{x}'\mathbf{e} + 1 (= -\mathbf{e}'\mathbf{x} + 1) = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha una soluzione unica se il determinante della matrice costituita dai suoi coefficienti è diverso da zero, ad esempio se:

$$\begin{vmatrix} 2\mathbf{V} & \mathbf{r} & \mathbf{e} \\ \mathbf{r}' & 0 & 0 \\ \mathbf{e}' & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Si procede risolvendo il sistema. Ricordando che la matrice  $\mathbf{V}$  è invertibile, è possibile riscrivere il sistema come:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \frac{1}{2}\lambda_1\mathbf{r}'\mathbf{V}^{-1} + \frac{1}{2}\lambda_2\mathbf{e}'\mathbf{V}^{-1} \\ \mathbf{x}'\mathbf{r} = \pi \\ \mathbf{x}'\mathbf{e} = 1 \end{cases}$$

Ora, sostituendo l'espressione ottenuta per  $\mathbf{x}'$  nelle ultime due condizioni di primo ordine, si può riscrivere il sistema nel seguente modo:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \frac{1}{2}\lambda_1\mathbf{r}'\mathbf{V}^{-1} + \frac{1}{2}\lambda_2\mathbf{e}'\mathbf{V}^{-1} \\ \frac{1}{2}\lambda_1 = \frac{\pi\gamma - \beta}{\alpha\gamma - \beta^2} \\ \frac{1}{2}\lambda_2 = \frac{\alpha\gamma - \pi\beta}{\alpha\gamma - \beta^2} \end{cases}$$

Infine, sostituendo l'espressione ottenuta per  $\frac{1}{2}\lambda_1$  e  $\frac{1}{2}\lambda_2$  in quella ottenuta per  $\mathbf{x}'$ , e prendendo il suo trasposto, si ottiene:

$$\mathbf{x} = \frac{(\gamma\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r} - \beta\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e})\pi + (\alpha\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e} - \beta\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r})}{\alpha\gamma - \beta^2} := \mathbf{x}^*$$

### Codice in Python della *Particle Swarm Optimization*

Nel seguito si espone il codice dell'algoritmo della *Particle Swarm Optimization* utilizzato in questa trattazione per la risoluzione del problema di ottimizzazione di portafoglio. Si specifica il codice qui riportato fa riferimento all'ottimizzazione svolta con la varianza quale misura di rischio per il primo trimestre. Al termine si illustrano anche i codici per il calcolo del *Value-at-Risk*, dell'*Expected Shortfall* e dell'*Entropic VaR*, i quali tuttavia potranno essere implementati nell'algoritmo di PSO solamente previ alcuni adeguamenti. Infine, si specifica che il codice è stato scritto e processato utilizzando il software Python 3.7.

*Algoritmo principale*

```
import numpy as np

import pandas as pd

# INIZIALIZZAZIONE

np.random.seed()

etf = pd.read_csv('serie_storiche.csv',delimiter = ",")

r = np.log(etf/etf.shift(1)) # Rendimenti logaritmici

in_sample = 125

rt_is = r[:125]

rt_os = r[126:189]

media = np.mean(rt_is) # Media dei rendimenti

varcov = rt_is.cov() # Matrice di varianza-covarianza

pi = np.mean(media) + 0.0000394862 # Rendimento percentuale desiderato (daily)

Kmax = 1000 #Numero massimo iterazioni

W = 0.7298 # Peso di inerzia

C1 = 1.49618

C2 = 1.49618

eps = 1.0e-006 # Parametro di penalizzazione (epsilon)

pop = 45 #Popolazione (Numero particelle)

Kd = 5 # Numero minimo di asset
```

```

Ku = 10 # Numero massimo di asset

d = np.ones((1, len(r.columns))) * 0.05 # Percentuale minima

u = np.ones((1, len(r.columns))) * 0.30 # Percentuale massima

# Vettori di servizio

x = np.random.rand(pop, len(r.columns)) # Vettore posizioni
z = np.random.rand(pop, len(r.columns)) # Vettore posizioni
v_x = np.random.rand(pop, len(r.columns)) # Vettore velocità
v_z = np.random.rand(pop, len(r.columns)) # Vettore velocità
x1 = np.zeros((pop, len(r.columns))) # Matrice di appoggio

Vmax_x = np.zeros((1, len(r.columns))) # Vettore velocità massima
Vmax_z = np.zeros((1, len(r.columns))) # Vettore velocità massima

e = np.ones((pop, 1)) # Vettore unitario

pbest_x = x # Matrice Personal best

pbest_z = z # Matrice Personal best

gbest_x = np.zeros((1, len(r.columns)))

gbest_z = np.zeros((1, len(r.columns))) # Vettore Global best

fitness = (np.ones((pop, 1))) * 1.0e+015

f_pbest = np.full((pop, 1), np.inf) # Funzione di fitness associata alla miglior posizione
individuale

f_gbest = float('Inf') # Funzione di fitness associata alla miglior posizione collettiva

var_port = np.zeros((pop, 1))

med_port = np.zeros((pop, 1))

```

---

```
vinc_1 = np.zeros((pop, 1)) # Vincolo di bilancio
vinc_2 = np.zeros((pop, 1)) # Vincolo rendimento minimo
app_3 = np.zeros((pop, len(r.columns)))
vinc_3 = np.zeros((pop, 1)) # Vincolo di non negatività ( $x \geq 0$ )
vinc_4 = np.zeros((pop, 1)) # Vincolo sul numero massimo di titoli
vinc_5 = np.zeros((pop, 1)) # Vincolo sul numero minimo di titoli
app_6 = np.zeros((pop, len(r.columns)))
vinc_6 = np.zeros((pop, 1)) # Vincolo sulla % massima
app_7 = np.zeros((pop, len(r.columns)))
vinc_7 = np.zeros((pop, 1)) # Vincolo sulla % minima
app_8 = np.zeros((pop, len(r.columns)))
vinc_8 = np.zeros((pop, 1)) # Variabile binaria z

all_gbest = np.zeros((Kmax, 1))
all_pbest = np.zeros((Kmax, pop))

# OTTIMIZZAZIONE

k = 1

while k in range(Kmax):
    #print(k)
    for j in range(len(r.columns)):
```

$$V_{\max\_x}[0, j] = \text{abs}(\max(x[:, j]) - \min(x[:, j]))$$

$$V_{\max\_z}[0, j] = \text{abs}(\max(z[:, j]) - \min(z[:, j]))$$

for i in range(pop):

for j in range(len(r.columns)):

$$x1[i, j] = x[i, j] * z[i, j]$$

$$\text{app\_3}[i, j] = \max(0, -x[i, j])$$

$$\text{app\_6}[i, j] = \max(0, x[i, j] - u[0, j] * z[i, j])$$

$$\text{app\_7}[i, j] = \max(0, d[0, j] * z[i, j] - x[i, j])$$

$$\text{app\_8}[i, j] = \text{int}(\text{round}(\text{abs}(z[i, j] * (1 - z[i, j]))))$$

$$\text{var\_port}[i] = (\text{np.dot}(x1[i].T, \text{np.dot}(\text{varcov}, x1[i]))) \#xVx'$$

$$\text{med\_port}[i] = \text{sum}(x1[i] * \text{media})$$

$$\text{vinc\_1}[i] = \text{abs}(\text{sum}(x[i]) - 1)$$

$$\text{vinc\_2}[i] = \text{abs}(\text{sum}(x[i] * \text{media}) - \text{pi})$$

$$\text{vinc\_3}[i] = \text{sum}(\text{app\_3}[i])$$

$$\text{vinc\_4}[i] = \max(0, \text{sum}(z[i]) - Ku)$$

$$\text{vinc\_5}[i] = \max(0, Kd - \text{sum}(z[i]))$$

$$\text{vinc\_6}[i] = \text{sum}(\text{app\_6}[i])$$

$$\text{vinc\_7}[i] = \text{sum}(\text{app\_7}[i])$$

$$\text{vinc\_8}[i] = \text{sum}(\text{app\_8}[i])$$

$$\text{fitness}[i] = \text{var\_port}[i] + (1/\text{eps}) * (\text{vinc\_1}[i] + \text{vinc\_2}[i] + \text{vinc\_3}[i] + \text{vinc\_4}[i]$$

$$+ \text{vinc\_5}[i] + \text{vinc\_6}[i] + \text{vinc\_7}[i] + \text{vinc\_8}[i])$$

---

```

for i in range(pop):
    if fitness[i] < f_pbest[i]:
        f_pbest[i] = fitness[i]
        for j in range(len(r.columns)):
            pbest_x[i, j] = x[i, j]
            pbest_z[i, j] = z[i, j]

if (min(f_pbest) < f_gbest):
    f_gbest = min(f_pbest)
    for i in range(pop):
        for j in range(len(r.columns)):
            gbest_x[0, j] = x[(np.where(f_pbest[:,0] == min(f_pbest))), j]
            gbest_z[0, j] = z[(np.where(f_pbest[:,0] == min(f_pbest))), j]

for i in range(pop):
    for j in range(len(r.columns)):

        v_x[i, j] = W * (v_x[i, j] + (C1 * np.random.random(1) * (pbest_x[i, j] - x[i, j]))
            + (C2 * np.random.random(1) * (gbest_x[0, j] - x[i, j]))) #Nuova velocità

        v_z[i, j] = W * (v_z[i, j] + (C1 * np.random.random(1) * (pbest_z[i, j] - z[i, j]))
            + (C2 * np.random.random(1) * (gbest_z[0, j] - z[i, j]))) #Nuova velocità

```

```
if v_x[i, j] > Vmax_x[0, j]:
```

```
    v_x[i, j] = Vmax_x[0, j]
```

```
if v_z[i, j] > Vmax_z[0, j]:
```

```
    v_z[i, j] = Vmax_z[0, j]
```

```
for i in range(pop):
```

```
    x[i] = x[i] + v_x[i] #Nuova posizione
```

```
    z[i] = z[i] + v_z[i] #Nuova posizione
```

```
k += 1
```

*Codice per il Value-at-Risk*

```
alfa = 0.05
```

```
q = round(alfa * len(rt_is_new.index))
```

```
for i in range(pop):
```

```
    for n in range(len(rt_is_new.index)):
```

```
        var_rt[i, n] = np.dot(x[i].T, rt_is_arr[n])
```

```
for i in range(pop):
```

```
    var_rt[i] = np.sort(var_rt[i])
```

```
    var[i] = (var_rt[i, q-1])*-1
```

*Codice per l'Expected Shortfall*

```
alfa = 0.05
```

```
q = round(alfa * len(rt_is_new.index))
```



```

for i in range(pop):
    for n in range(len(rt_is_new.index)):
        es_rt[i, n] = sum(x[i] * rt_is_arr[n])
for i in range(pop):
    es_rt[i] = np.sort(es_rt[i])
    es[i] = (np.mean(es_rt[i, :q-1]))*-1

```

*Codice per l'Entropic VaR*

```

t = 1
alfa = 0.05
evar = np.zeros((pop, 1))
stimatore = np.zeros((pop, len(rt_is_new.index)))
for i in range(pop):
    for n in range(len(rt_is_new.index)):
        stimatore[i, n] = (m.exp((t**-1)*np.dot(x[i], rt_is_arr[n])))
for i in range(pop):
    evar[i] = (t * np.log(((1/in_sample)*(sum(stimatore[i])))) - t * np.log(alfa))

```

### **Risultati PSO e violazioni dei vincoli**

Si espongono qui i risultati delle diverse iterazioni dell'algoritmo svolte ai fini di individuare una *run* che ottenesse delle buone soluzioni, sulla base della funzione di fitness e delle violazioni dei vincoli presentate. Nel seguito si riportano in maniera estesa le tabelle contenenti i risultati di tre diverse iterazioni effettuate per ogni misura di rischio in ognuno dei periodi campionari considerati. I risultati completi per il primo trimestre sono già stati

presentati al Capitolo IV, tuttavia, per garantire una lettura più chiara, i risultati dei trimestri successivi presentati nel detto capitolo sono stati sintetizzati in singole tabelle. Di conseguenza, per una maggiore completezza, si riportano qui i risultati integrali.

2° Trimestre

PSO con Varianza

Parametro	1° run	2° run	3° run
Fitness	33400,25	53161,53	42,97
Rendimento % <i>in-sample</i>	3,68E-04	-2,70E-04	1,01E-02
Varianza <i>in-sample</i>	3,23E-05	8,09E-06	2,32E-05
Rendimento % <i>out-of-sample</i>	-1,63E-03	-9,83E-04	-4,05E-02
Varianza <i>out-of-sample</i>	3,41E-05	6,50E-06	2,42E-05
Vincolo di bilancio	4,82E-06	4,48E-06	0
Vincolo di rendimento	3,06E-06	9,87E-05	4,30E+03
Vincolo di non negatività	7,51E-04	0,00768958	0
Vincolo n. massimo di titoli (10)	0	0	0
Vincolo n. minimo di titoli (5)	0	0	0
Vincolo quota massima (30%)	2,57E-02	3,86E-02	0
Vincolo quota minima (5%)	9,30E-03	0,00687122	0

PSO con Value at Risk

Parametro	1° run	2° run	3° run
Fitness	7840,74	21,01	3882,96
Rendimento % <i>in-sample</i>	-1,64E-04	7,92E-03	2,87E-04
VaR <i>in-sample</i>	8,38E-03	5,86E-03	4,33E-03
Rendimento % <i>out-of-sample</i>	-1,94E-03	-2,37E-02	-1,07E-03
VaR <i>out-of-sample</i>	7,92E-03	4,64E-03	3,50E-03
Vincolo di bilancio	1,13E-06	0	6,17E-04
Vincolo di rendimento	8,28E-05	2,10E-05	1,51E-05
Vincolo di non negatività	2,66E-04	0	6,24E-04
Vincolo n. massimo di titoli	0	0	0
Vincolo n. minimo di titoli	0	0	0
Vincolo quota massima	7,50E-03	0	5,69E-03
Vincolo quota minima	0	0	0

PSO con Expected Shortfall

Parametro	1° run	2° run	3° run
Fitness	33,25	14238,62	10406,18
Rendimento % <i>in-sample</i>	2,49E-03	1,23E-03	1,20E-03
Expected Shortfall <i>in-sample</i>	4,82E-03	5,48E-03	6,83E-03
Rendimento % <i>out-of-sample</i>	-2,48E-02	-1,83E-03	-7,93E-04
Expected Shortfall <i>out-of-sample</i>	4,21E-03	4,88E-03	5,98E-03
Vincolo di bilancio	2,22E-16	1,38E-05	3,23E-10
Vincolo di rendimento	3,33E-05	1,26E-04	1,22E-04
Vincolo di non negatività	0,00E+00	0	0,00116396
Vincolo n. massimo di titoli	0	0	0
Vincolo n. minimo di titoli	0	0	0
Vincolo quota massima	0	0	8,23E-03
Vincolo quota minima	0	1,44E-02	8,85E-04

PSO con Entropic VaR

Parametro	1° run	2° run	3° run
Fitness	950,01	358,02	590,35
Rendimento % <i>in-sample</i>	2,49E-03	3,74E-02	-1,07E-03
Entropic VaR <i>in-sample</i>	2,995903884	2,996117198	2,995582088
Rendimento % <i>out-of-sample</i>	-2,02E-03	-3,03E-02	-2,00E-03
Entropic VaR <i>out-of-sample</i>	2,995300378	2,995439678	2,995444274
Vincolo di bilancio	1,11E-05	2,01E-05	7,93E-06
Vincolo di rendimento	1,44E-04	3,55E-04	1,79E-04
Vincolo di non negatività	4,24E-04	0	0,00021895
Vincolo n. massimo di titoli	0	0	0
Vincolo n. minimo di titoli	0	0	0
Vincolo quota massima	0	0	0
Vincolo quota minima	0,00037304	0	1,93E-04

3° Trimestre

PSO con Varianza

Parametro	1° run	2° run	3° run
Fitness	133670,97	75,71	12177,53
Rendimento % <i>in-sample</i>	-2,47E-03	-1,43E-02	-2,78E-03
Varianza <i>in-sample</i>	1,65E-05	1,21E-05	3,41E-05
Rendimento % <i>out-of-sample</i>	3,68E-03	4,24E-02	3,93E-03
Varianza <i>out-of-sample</i>	2,38E-05	2,02E-05	5,18E-05
Vincolo di bilancio	8,35E-03	0	1,52E-05

Vincolo di rendimento	1,51E-04	7,57E-05	1,97E-04
Vincolo di non negatività	5,89E-02	0	1,38E-05
Vincolo n. massimo di titoli (10)	0	0	0
Vincolo n. minimo di titoli (5)	0	0	0
Vincolo quota massima (30%)	3,47E-02	0	1,21E-02
Vincolo quota minima (5%)	6,15E-02	0	0

PSO con Value at Risk

Parametro	1° run	2° run	3° run
Fitness	91,05	169791,31	74784,75
Rendimento % <i>in-sample</i>	-3,10E-02	-1,20E-03	-9,10E-04
VaR <i>in-sample</i>	9,77E-03	5,58E-03	5,29E-03
Rendimento % <i>out-of-sample</i>	5,35E-02	2,91E-03	1,76E-03
VaR <i>out-of-sample</i>	7,13E-03	5,10E-03	5,53E-03
Vincolo di bilancio	0	1,09E-02	3,20E-06
Vincolo di rendimento	9,10E-05	3,98E-05	8,27E-05
Vincolo di non negatività	0	1,29E-02	1,34E-02
Vincolo n. massimo di titoli	0	0	0
Vincolo n. minimo di titoli	0	0	0
Vincolo quota massima	0	1,73E-01	6,06E-02
Vincolo quota minima	0	2,77E-03	1,06E-03

PSO con Expected Shortfall

Parametro	1° run	2° run	3° run
Fitness	30,53	117,99	32009,29
Rendimento % <i>in-sample</i>	-1,89E-02	-2,25E-03	-5,60E-04
Expected Shortfall <i>in-sample</i>	6,49E-03	1,14E-02	5,09E-03
Rendimento % <i>out-of-sample</i>	4,70E-02	3,15E-03	2,07E-03
Expected Shortfall <i>out-of-sample</i>	5,85E-03	1,03E-02	4,70E-03
Vincolo di bilancio	0	1,95E-07	7,01E-05
Vincolo di rendimento	3,05E+03	1,18E-04	1,35E-04
Vincolo di non negatività	0	0	5,03E-03
Vincolo n. massimo di titoli	0	0	0
Vincolo n. minimo di titoli	0	0	0
Vincolo quota massima	0	0	2,71E-02
Vincolo quota minima	0	0	0

PSO con Entropic VaR

Parametro	1° run	2° run	3° run
Fitness	81,57	80516,19	89424,36
Rendimento % <i>in-sample</i>	-1,80E-02	-3,32E-03	-6,08E-04
Entropic VaR <i>in-sample</i>	2,995556617	2,995245951	2,995642964
Rendimento % <i>out-of-sample</i>	3,60E-02	4,06E-03	2,23E-03
Entropic VaR <i>out-of-sample</i>	2,996100717	2,996353755	2,996070006
Vincolo di bilancio	2,44E-09	5,92E-05	2,63E-06
Vincolo di rendimento	7,85E-05	2,39E-04	1,67E-04
Vincolo di non negatività	0	7,18E-03	3,35E-03
Vincolo n. massimo di titoli	0	0	0
Vincolo n. minimo di titoli	0	0	0
Vincolo quota massima	0	7,47E-02	8,58E-02
Vincolo quota minima	0	0	1,45E-04

4° Trimestre

PSO con Varianza

Parametro	1° run	2° run	3° run
Fitness	84,51	60736,51	49948,9
Rendimento % <i>in-sample</i>	7,58E-03	5,22E-04	3,69E-04
Varianza <i>in-sample</i>	2,45E-05	1,45E-05	8,09E-06
Rendimento % <i>out-of-sample</i>	9,54E-03	7,83E-04	1,19E-03
Varianza <i>out-of-sample</i>	1,43E-05	8,62E-06	5,01E-06
Vincolo di bilancio	0	1,19E-04	5,73E-12
Vincolo di rendimento	8,45E-05	8,20E-05	1,05E-04
Vincolo di non negatività	0	6,53E-03	4,00E-03
Vincolo n. massimo di titoli (10)	0	0	0
Vincolo n. minimo di titoli (5)	0	0	0
Vincolo quota massima (30%)	0	5,49E-02	4,58E-02
Vincolo quota minima (5%)	0	7,30E-05	0

PSO con Value at Risk

Parametro	1° run	2° run	3° run
Fitness	55,57	13950,54	45460,93
Rendimento % <i>in-sample</i>	1,05E-02	8,37E-04	4,54E-04
VaR <i>in-sample</i>	1,01E-02	7,66E-03	6,09E-03
Rendimento % <i>out-of-sample</i>	7,26E-03	1,72E-03	1,44E-03
VaR <i>out-of-sample</i>	6,62E-03	4,51E-03	3,11E-03
Vincolo di bilancio	0	3,26E-07	3,06E-04

Vincolo di rendimento	5,56E-05	3,47E-05	9,23E-05
Vincolo di non negatività	0	7,59E-03	5,24E-04
Vincolo n. massimo di titoli	0	0	0
Vincolo n. minimo di titoli	0	0	0
Vincolo quota massima	0	0	4,53E-02
Vincolo quota minima	0	6,33E-03	0

PSO con Expected Shortfall

Parametro	1° run	2° run	3° run
Fitness	0,702	121000,29	189799,62
Rendimento % <i>in-sample</i>	1,60E-02	8,37E-04	1,69E-03
Expected Shortfall <i>in-sample</i>	7,49E-03	8,64E-03	1,20E-02
Rendimento % <i>out-of-sample</i>	7,59E-03	6,65E-04	-1,35E-03
Expected Shortfall <i>out-of-sample</i>	4,40E-03	5,02E-03	8,30E-03
Vincolo di bilancio	0	4,06E-05	4,25E-05
Vincolo di rendimento	6,94E-07	3,48E-05	9,38E-05
Vincolo di non negatività	0	2,28E-02	2,65E-02
Vincolo n. massimo di titoli	0	0	0
Vincolo n. minimo di titoli	0	0	0
Vincolo quota massima	0	8,37E-02	1,59E-01
Vincolo quota minima	0	1,57E-02	4,31E-03

PSO con Entropic VaR

Parametro	1° run	2° run	3° run
Fitness	23,83	135711,91	13,03
Rendimento % <i>in-sample</i>	6,67E-04	5,88E-04	1,11E-02
Entropic VaR <i>in-sample</i>	2,995841922	2,995831372	2,995854832
Rendimento % <i>out-of-sample</i>	-6,48E-04	1,62E-04	6,94E-03
Entropic VaR <i>out-of-sample</i>	2,995641053	2,995762906	2,995808551
Vincolo di bilancio	0	3,71E-04	0
Vincolo di rendimento	2,08E-05	3,27E-05	1,00E-05
Vincolo di non negatività	0	1,83E-02	0
Vincolo n. massimo di titoli	0	0	0
Vincolo n. minimo di titoli	0	0	0
Vincolo quota massima	0	1,08E-01	0
Vincolo quota minima	0	1,22E-02	0

5° Trimestre

PSO con Varianza

Parametro	1° run	2° run	3° run
Fitness	70,57	1064,51	88598,18
Rendimento % <i>in-sample</i>	2,74E-02	2,23E-03	1,49E-03
Varianza <i>in-sample</i>	2,45E-05	2,62E-05	1,99E-05
Rendimento % <i>out-of-sample</i>	5,38E-02	5,03E-03	3,10E-03
Varianza <i>out-of-sample</i>	3,31E-05	3,19E-05	2,69E-05
Vincolo di bilancio	0	1,28E-08	1,90E-05
Vincolo di rendimento	7,06E-05	1,07E-05	1,21E-04
Vincolo di non negatività	0	5,75E-04	1,45E-02
Vincolo n. massimo di titoli (10)	0	0	0
Vincolo n. minimo di titoli (5)	0	0	0
Vincolo quota massima (30%)	0	0	7,42E-02
Vincolo quota minima (5%)	0	4,79E-04	0

PSO con Value at Risk

Parametro	1° run	2° run	3° run
Fitness	101,006	62,11	3008,17
Rendimento % <i>in-sample</i>	1,63E-03	2,83E-02	1,56E-03
VaR <i>in-sample</i>	4,61E-03	6,39E-03	5,90E-03
Rendimento % <i>out-of-sample</i>	2,83E-03	5,05E-02	3,24E-03
VaR <i>out-of-sample</i>	2,77E-03	3,85E-03	3,07E-03
Vincolo di bilancio	0	0	4,90E-09
Vincolo di rendimento	1,01E-04	6,21E-05	1,11E-04
Vincolo di non negatività	0	0	1,58E-03
Vincolo n. massimo di titoli	0	0	0
Vincolo n. minimo di titoli	0	0	0
Vincolo quota massima	0	0	1,20E-06
Vincolo quota minima	0	0	0,00131678

PSO con Expected Shortfall

Parametro	1° run	2° run	3° run
Fitness	62,42	84418,15	103,22
Rendimento % <i>in-sample</i>	4,07E-02	1,99E-03	1,61E-03
Expected Shortfall <i>in-sample</i>	6,49E-03	5,74E-03	8,26E-03
Rendimento % <i>out-of-sample</i>	7,30E-02	3,64E-03	2,99E-03
Expected Shortfall <i>out-of-sample</i>	4,19E-03	3,51E-03	5,43E-03
Vincolo di bilancio	0	1,84E-04	0

Vincolo di rendimento	6,24E-05	4,66E-05	1,03E-04
Vincolo di non negatività	0	1,49E-02	0
Vincolo n. massimo di titoli	0	0	0
Vincolo n. minimo di titoli	0	0	0
Vincolo quota massima	0	7,01E-02	0
Vincolo quota minima	0	7,93E-04	0

PSO con Entropic VaR

Parametro	1° run	2° run	3° run
Fitness	52,81	9002,93	99850,54
Rendimento % <i>in-sample</i>	3,55E-02	1,50E-03	2,79E-03
Entropic VaR <i>in-sample</i>	2,996090673	2,995973576	2,996164287
Rendimento % <i>out-of-sample</i>	7,25E-02	2,83E-03	3,63E-03
Entropic VaR <i>out-of-sample</i>	2,996462187	2,99617824	2,996292622
Vincolo di bilancio	0	6,01E-07	1,62E-04
Vincolo di rendimento	4,98E-05	8,00E-05	1,13E-04
Vincolo di non negatività	0	4,74E-03	1,21E-02
Vincolo n. massimo di titoli	0	0	0
Vincolo n. minimo di titoli	0	0	0
Vincolo quota massima	0	0	8,85E-02
Vincolo quota minima	0	4,18E-03	4,40E-04

6° Trimestre

PSO con Varianza

Parametro	1° run	2° run	3° run
Fitness	52,95	19709,98	289136,66
Rendimento % <i>in-sample</i>	4,42E-02	1,07E-03	1,81E-03
Varianza <i>in-sample</i>	2,22E-05	2,89E-05	4,01E-05
Rendimento % <i>out-of-sample</i>	6,92E-03	2,99E-04	2,98E-03
Varianza <i>out-of-sample</i>	9,64E-06	1,14E-05	1,40E-05
Vincolo di bilancio	0	2,23E-07	6,92E-05
Vincolo di rendimento	5,30E-05	2,28E-04	1,17E-04
Vincolo di non negatività	0	2,63E-03	4,30E-02
Vincolo n. massimo di titoli (10)	0	0	0
Vincolo n. minimo di titoli (5)	0	0	0
Vincolo quota massima (30%)	0	1,69E-02	2,46E-01
Vincolo quota minima (5%)	0	0	0



PSO con Value at Risk

Parametro	1° run	2° run	3° run
Fitness	58,27	107203,02	361676,01
Rendimento % <i>in-sample</i>	4,47E-02	3,44E-03	2,01E-03
VaR <i>in-sample</i>	4,11E-03	3,26E-03	8,44E-03
Rendimento % <i>out-of-sample</i>	8,64E-03	6,04E-04	1,46E-03
VaR <i>out-of-sample</i>	2,21E-03	1,71E-03	3,37E-03
Vincolo di bilancio	0	1,11E-06	1,63E-04
Vincolo di rendimento	5,83E-05	1,27E-04	8,78E-05
Vincolo di non negatività	0	1,51E-02	8,37E-03
Vincolo n. massimo di titoli	0	0	0
Vincolo n. minimo di titoli	0	0	0
Vincolo quota massima	0	9,20E-02	3,55E-01
Vincolo quota minima	0	1,39E-05	0

PSO con Expected Shortfall

Parametro	1° run	2° run	3° run
Fitness	72,41	10264,07	121,20
Rendimento % <i>in-sample</i>	3,16E-02	2,69E-03	3,40E-03
Expected Shortfall <i>in-sample</i>	5,54E-03	4,28E-03	4,58E-03
Rendimento % <i>out-of-sample</i>	1,36E-02	-2,40E-04	1,21E-03
Expected Shortfall <i>out-of-sample</i>	2,60E-03	3,05E-03	3,44E-03
Vincolo di bilancio	0	1,96E-06	1,11E-16
Vincolo di rendimento	7,24E-05	1,50E-05	1,21E-04
Vincolo di non negatività	0	5,59E-03	0
Vincolo n. massimo di titoli	0	0	0
Vincolo n. minimo di titoli	0	0	0
Vincolo quota massima	0	0	0
Vincolo quota minima	0	4,66E-03	0

PSO con Entropic VaR

Parametro	1° run	2° run	3° run
Fitness	53,7	5761,05	33997,54
Rendimento % <i>in-sample</i>	4,00E-02	1,45E-03	3,16E-03
Entropic VaR <i>in-sample</i>	2,996137419	2,995961003	2,996214705
Rendimento % <i>out-of-sample</i>	9,87E-03	4,45E-04	1,75E-03
Entropic VaR <i>out-of-sample</i>	2,995833128	2,995803295	2,995998921
Vincolo di bilancio	0	1,01E-07	3,37E-04
Vincolo di rendimento	5,07E-05	1,32E-04	1,25E-04
Vincolo di non negatività	0	6,70E-04	1,85E-03

Vincolo n. massimo di titoli	0	0	0
Vincolo n. minimo di titoli	0	0	0
Vincolo quota massima	0	4,96E-03	3,24E-02
Vincolo quota minima	0	0	3,44E-04

## Bibliografia

- Acerbi C., Tasche D.: *Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk*, Economic notes, Wiley Online Library, 2002.
- Acerbi C., Szekely B.: *Backtesting Expected Shortfall*, Risk, 2014.
- Adam A., Houkari M., Laurent J.P.: *Spectral risk measures and portfolio selection*, Journal of Banking & Finance, Elsevier, 2008.
- Ahmadi-Javid A.: *Entropic Value-at-Risk: a new coherent risk measure*, Journal of Optimization Theory and Application, 2012.
- Ahmadi-Javid A., Fallah-Tafti M.: *Portfolio Optimization with Entropic Value-at-Risk*, European Journal of Operational Research, 2019.
- Artzner P., Delbaen F., Eber J.M., Heath D.: *Coherent measures of risk*, Mathematical finance, 1999.
- Banca d'Italia, *Relazione annuale in sintesi*, 2019.
- Bell M., *Review of markets over 2019*, J.P. Morgan, 2020.
- Blum C., Roli A.: *Metaheuristic in Combinatorial Optimization: Overview and Conceptual Comparison*, ACM computing surveys, 2003.
- Brandtner M., Wolfgang K., Rischau R.: *Entropic risk measures and their comparative statics in portfolio selection: Coherence vs. convexity*, European Journal of Operational Research, 2018.
- Corazza, M.: corso di Metodi per la gestione di portafogli, Università Ca' Foscari, Venezia, 2018.
- Corazza M., Fasano G., Riccardo G.: *Particle Swarm Optimization with non-smooth penalty reformulation, for a complex portfolio selection problem*, Applied Mathematics and Computation, Elsevier, 2013.
- D'Arcangelis A.M., *Elementi di distribuzione dei rendimenti e analisi rendimento-rischio per il portafoglio azionario*, Teseo, 2011.

Dieu V.N., Dung L.A., Khai N.P.: *Particle Swarm Optimization with Constriction Factor for Optimal Reactive Power Dispatch*, GMSARN International Journal, 2013.

Duffie D., Pan J.: *An Overview of Value at Risk*, Journal of derivatives, 1997.

Eberhart R., Kennedy J.: *A New Optimizer using Particle Swarm Theory*, Citeseer, 1995.

Eberhart R.C., Shi Y.: *Comparing Inertia Weights and Constriction Factors in Particle Swarm Optimization*, Conference paper, 2000.

Eberhart R., Shi Y.: *A Modified Particle Swarm Optimizer*, Conference paper, 1998.

Eldwin, E. J., Gruber, M. J., Brown, S. J., Goetzmann, W. N.: *Teorie di portafoglio e analisi degli investimenti*, Apogeo, 2007.

Follmer H., Schied A.: *Convex and coherent risk measures*, Encyclopedia of Quantitative Finance, Citeseer, 2008.

Kusuoka S., *On Law Invariant Coherent Risk Measures*, Advances in mathematical economics, Springer, 2001.

Luenberger D. G.: *Investment Science*, Oxford University Press, 2013.

Markowitz H., *Portfolio Selection*, The Journal of Finance, 1952, pp. 77-91.

Mittnik S., Rachev S.: *New approaches for Portfolio Optimization*, Risiko Manager Journal, 2000.

Poli R., Kennedy J., Blackwell T.: *Particle Swarm Optimization*, Swarm Intelligence, 2007.

Shutte J.F.: *The Particle Swarm Optimization Algorithm*, Structural Optimization, 2005.

Sorensen K., Sevaux M., Glover F.: *A History of Metaheuristics*, 2017.

Wigglesworth R.: *How a volatility virus infected Wall Street*, Financial Times, 2018.

## Sitografia

[www.borsaitaliana.it](http://www.borsaitaliana.it)

[www.finance.yahoo.com](http://www.finance.yahoo.com)

[www.investopedia.com](http://www.investopedia.com)

[www.moneyfarm.com](http://www.moneyfarm.com)

[www.treccani.it](http://www.treccani.it)

[www.okpedia.com](http://www.okpedia.com)

[www.wikipedia.com](http://www.wikipedia.com)