Università
Ca'Foscari
Venezia

Corso di Laurea magistrale in Economia e finanza
ordinamento ex D.M. 270/2004

Tesi di Laurea

# Portafogli in media-entropia: applicazioni e confronti

**Relatore**
Ch. Prof. Marco Corazza

**Laureando**
Filippo Salviato
Matricola 846728

**Anno Accademico**
2017 / 2018

ABSTRACT

L'entropia è una misura di rischio che recentemente sta raccogliendo sempre più consensi ed attenzione in ambito finanziario. Nel lavoro proposto viene inizialmente effettuata una review della letteratura, prima riguardante la teoria classica del portafoglio, poi riguardante le misure di entropia diffuse nell'ambito dell'economia e della finanza. Successivamente viene presentata la letteratura in tema di entropia applicata alla selezione dei portafogli. Infine la parte centrale del lavoro riguarda le analisi effettuate per confrontare l'efficacia dei portafogli media-entropia, confrontando fra loro alcuni modelli presentati, fra cui il modello media-entropia di Rényi che consiste in una semplice variante originale di uno dei modelli presentati.

INDICE

Capitolo/ paragrafo

Pagina

1 PORTAFOGLIO DI MARKOWITZ 3

1.1 INTRODUZIONE 3

1.2 ASSUNTI 8

1.3 CRITERIO DI SCELTA MEDIA-VARIANZA 10

1.4 DIVERSIFICAZIONE DEL PORTAFOGLIO 11

1.5 COSTRUZIONE DELLA FRONTIERA EFFICIENTE 12

1.5.1 FRONTIERA EFFICIENTE CON DUE TITOLI RISCHIOSI 15

1.5.2 FRONTIERA EFFICIENTE CON UN TITOLO RISCHIOSO E UN TITOLO PRIVO DI RISCHIO 19

1.5.3 FRONTIERA EFFICIENTE CON N TITOLI RISCHIOSI 21

1.5.4 FRONTIERA EFFICIENTE CON N TITOLI RISCHIOSI ED UN TITOLO RISK FREE 24

RIFERIMENTI CAPITOLO 1 26

2 LIMITI DEL MODELLO MEDIA-VARIANZA 27

2.1 CRITICHE AL MODELLO MEDIA-VARIANZA 27

2.2 ERRORI DI STIMA E INSTABILITÀ DEL MODELLO MEDIA-VARIANZA 30

2.3 ERRORI DI STIMA, SCARSE PERFORMANCE OUT OF SAMPLE E CONCENTRAZIONE DEL PORTAFOGLIO 32

RIFERIMENTI CAPITOLO 2 34

3 ENTROPIA 35

3.1 INTRODUZIONE 35
3.2 ENTROPIA NEL CAMPO DELLA TEORIA DELL'INFORMAZIONE 38
3.3 PROPRIETÀ FONDAMENTALI DELL' ENTROPIA NELLA TEORIA DELL'INFORMAZIONE 41
3.4 MISURE DI ENTROPIA PIÙ UTILIZZATE IN FINANZA 42
3.4.1 ENTROPIA DI SHANNON 42
3.4.2 ENTROPIA DI TSALLIS 43
3.4.3 ENTROPIA DI RÉNYI 45
3.4.4 ENTROPIA RELATIVA O KULLBACK CROSS-ENTROPY 46
3.4.5 ENTROPIA RELATIVA DI TSALLIS 47
3.4.6 ENTROPIA DI YAGER 48
3.4.7 MINIMAX DISPARITY MODEL 49
3.5 PRINCIPI RELATIVI ALL'ENTROPIA 50
3.5.1 PRINCIPIO DELLA MASSIMA ENTROPIA 50
3.5.2 PRINCIPIO DELLA MINIMA ENTROPIA 50
RIFERIMENTI CAPITOLO 3 51
4 REVIEW DELLA LETTERATURA SULLA COSTRUZIONE DEL PORTAFOGLIO INCLUDENDO MISURE DI ENTROPIA 53
4.1 PRIMO MODELLO 53
4.2 PROPOSTE DI MODELLI ALTERNATIVI 57
4.2.1 PROPOSTE DI MODELLI ALTERNATIVI UTILIZZANDO L'ENTROPIA DI SHANNON 58
4.2.2 PROPOSTE DI MODELLI ALTERNATIVI UTILIZZANDO ALTRE MISURE DI ENTROPIA 63
RIFERIMENTI CAPITOLO 4 66
5 ANALISI E CONFRONTI 67
5.1 STRUTTURA DELL' ESPERIMENTO 67
5.2 ANALISI DELLE PERFORMANCE DEI MODELLI 79
RIFERIMENTI CAPITOLO 5 118
CONCLUSIONI 119
APPENDICE A FRONTIERE 120
APPENDICE B COMPOSIZIONE PORTAFOGLI 131
APPENDICE C - SIGLE TITOLI 208
APPENDICE D OWA OPERATOR E MINIMAX DISPARITY MODEL 210
APPENDICE E DATI DEI GRAFICI 211
APPENDICE F – CODICI MATLAB 212

# 1 - PORTAFOGLIO DI MARKOWITZ

In questo capitolo verrà introdotto il modello più diffuso e consolidato, sia in letteratura che in ambito operativo, della teoria del portafoglio. L'obiettivo è quello di fornire gli strumenti necessari per poter comprendere alcuni modelli alternativi proposti di recente in letteratura che verranno esposti nei capitoli successivi.

## 1.1 INTRODUZIONE*

Markowitz nel 1952 [1] propose un modello che pose le fondamenta della finanza moderna, il modello di selezione del portafoglio. Con il termine "portafoglio" si indica un paniere di titoli, o più in generale di asset, a rendimento rischioso, intendendo per asset qualunque bene economico. Ipotizzando nel presente lavoro che il portafoglio sia composto da azioni, un portafoglio può essere rappresentato come un vettore di percentuali rispetto al valore investito nel portafoglio complessivo. Quindi se il valore del portafoglio è il 100%, o 1, un singolo titolo viene associato al peso che ha nel portafoglio. L'analisi del portafoglio di Markowitz si è sviluppata utilizzando due misure statistiche fondamentali di un titolo: il rendimento atteso o medio e la varianza del rendimento atteso. Sono però necessarie alcune definizioni.

Con il termine rendimento si intende una delle seguenti misure alternative:

$$il\ rendimento\ netto\ percentuale\ o\ rendimento\ semplice \quad R_{t=}\frac{P_t + D - P_{t-1}}{P_{t-1}} \tag{1.1}$$

oppure

$$il\ rendimento\ logaritmico\ o\ continuo \quad R_t = \log\left(\frac{Pt + D}{P_{t-1}}\right) \tag{1.2}$$

dove D rappresentano i dividendi o qualunque altra entrata (ad esempio cedole) pagati nel periodo da t-1 a t (normalmente capitalizzati in t per computarne correttamente il valore);

$P_t$ rappresenta il prezzo del titolo all'epoca t;

log(·) indica il logaritmo naturale.

**Per maggiori dettagli vedi [1], [5].*

A livello di proprietà matematiche, il rendimento logaritmico gode della proprietà di additività temporale, quindi se ad esempio il rendimento di un titolo da $t_0$ a $t_1$, misurato attraverso la formula del rendimento logaritmico, è pari al 5% e da $t_1$ a $t_2$ è pari ad 1%, il rendimento per il periodo $t_0 - t_2$ è pari al 6%, cioè la loro somma.

Il rendimento netto percentuale gode invece della proprietà matematica di additività fra più titoli, quindi se ad esempio il rendimento di un titolo da $t_0$ a $t_1$ misurato attraverso la formula del rendimento netto percentuale è pari a 2% e il rendimento di un altro titolo sempre da $t_0$ a $t_1$ è pari al 3%, il rendimento complessivo dei due titoli sarà pari al 5%, se questi vengono considerati come un titolo unitario. Questa caratteristica rende l'utilizzo del rendimento netto percentuale calcolato con la (1.1) migliore nell'ambito di un portafoglio.

Le due formule offrono comunque risultati molto vicini fra loro per piccoli intervalli temporali e il rendimento logaritmico rappresenta una approssimazione lineare del rendimento netto percentuale.

Nell'analisi di portafoglio i rendimenti hanno natura stocastica, poiché non sono conosciute le performance future dei titoli, ma solo quelle storiche. Per tale motivo mentre le formule precedenti (1.1) e (1.2) Riguardano i rendimenti storici, misurati ex post, i rendimenti da utilizzare nella selezione di portafoglio sono invece quelli attesi.

Per compiere questo passaggio è necessario introdurre i concetti statistici di variabile casuale e di valore atteso o medio della variabile casuale*. Esemplificando, una variabile casuale discreta X è una variabile che assume i valori $\{x_1, x_i, \dots, x_N\}$ dove $x_i$ è il valore assunto dalla variabile casuale X con probabilità $p_i$. Inoltre $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$ $p_i \geq 0$ e $p_i \leq 1$.

Una variabile casuale continua X definita nell' intervallo $(-\infty, +\infty)$ è tale se rispetta le seguenti condizioni:

1) $f(x) \geq 0$
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$
3) $\int_a^b f(t)dt = P(a < X < b)$ $dove\ a\ e\ b\ sono\ valori\ di\ X\ tali\ che\ a < b$
4) $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

dove il termine f(x) indica la funzione di densità di probabilità della variabile casuale X;

F(x) indica la funzione di ripartizione della variabile casuale X.

**Per maggiori dettagli vedi [4].*

Il valore atteso è una media ponderata delle possibili realizzazioni di una variabile casuale X dove i pesi sono le probabilità $p_i$ che la variabile casuale assuma il valore $x_i$. Per le variabili casuali discrete, si indica come:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} p_i \, x_i \tag{1.3}$$

Per le varabili casuali continue il valore atteso si indica come segue:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f(x) dx \tag{1.4}$$

Introducendo una variabile casuale R, che indica il rendimento di un titolo e può assumere i valori $R_1, R_i, \dots, R_N$, il suo valore atteso o medio sarà indicato come:

$$\mu = E(R)\,, \tag{1.5}$$

che indica il rendimento che un investitore si aspetta di ricevere nel periodo considerato ed è una misura di profittabilità dell'investimento, quindi una caratteristica desiderabile da parte dell'investitore.

La varianza invece indica invece la rischiosità del titolo e viene misurata attraverso la seguente espressione nel caso di variabili casuali discrete:

$$\sigma^2(R) = \sum_{i=1}^{N} pi \, (Ri - E(R))^2 \tag{1.6}$$

Nel caso di variabili casuali continue la varianza del rendimento si esprime come segue:

$$\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \tag{1.7}$$

Dove X è la variabile casuale che rappresenta il rendimento del titolo e $\mu = E(X)$.

Nella selezione del portafoglio di solito si preferisce usare la radice quadrata della varianza che viene definita deviazione standard o in linguaggio finanziario volatilità del rendimento di un titolo. Nel caso di rendimento discreto corrisponde quindi a:

$$\sqrt{\sigma^2(R)} = \sigma(R) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} pi\ (Ri - E(R))^2} \tag{1.8}$$

Nel caso di rendimento continuo si definisce invece come segue:

$$\sqrt{\sigma^2(X)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx} \tag{1.9}$$

Dal punto di vista interpretativo, la varianza del rendimento è una caratteristica non desiderabile per l'investitore, rappresentando la dispersione delle realizzazioni della variabile casuale attorno alla media. Maggiore dispersione (quindi varianza) vengono visti come maggior rischio dal punto di vista finanziario. L'analisi per la selezione di portafoglio si basa quindi sul paradigma media-varianza, cioè utilizza come indicatori sintetici per la selezione dei titoli che compongono il portafoglio Il rendimento atteso di quest'ultimo e la varianza del rendimento medesimo.

Dal punto di vista della stima, avendo a disposizione i rendimenti storici del titolo si utilizzano la media e la varianza o deviazione standard campionaria utilizzando le seguenti formule per un titolo generico, il pedice verrà chiamato t per indicare il periodo temporale a cui si riferisce il rendimento. Inoltre Relativamente al calcolo della media campionaria di un titolo:

$$R_m = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} R_t \tag{1.10}$$

dove $R_t$ rappresenta il rendimento del titolo osservato nel periodo t e N rappresenta il numero dei periodi in cui si misurano i rendimenti storici.

Relativamente alla stima della varianza campionaria del titolo si avrà:

$$Var = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} (R_t - R_m)^2 \tag{1.11}$$

La deviazione standard campionaria corrisponde invece alla radice della varianza campionaria:

$$\sigma(R) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} (R_t - R_m)^2}\ . \tag{1.12}$$

Una misura importante a livello statistico è la varianza corretta, la formule (1.6) e (1.7) assumono infatti che l'investitori conoscano esattamente $E(R)$. In realtà l'investitore non conosce l'esatto valore atteso dei rendimenti ma lo stima grazie alla formula (1.11). È possibile quindi apportare una correzione statistica alla misura dividendo per N-1 invece che dividere per N. Così facendo le formule per stimare la varianza e la deviazione standard corrette diventano:

$$\sigma^2(R) = \frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N}(R_t - R_m)^2 \tag{1.13}$$

$$\sigma(R) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N}(R_t - R_m)^2} \tag{1.14}$$

Un'altra importante misura è la covarianza. Tale misura indica concettualmente come i rendimenti dei titoli variano fra di loro. La covarianza si calcola attraverso la seguente espressione, nel caso di rendimenti aleatori discreti:

$$Cov(R_a, R_b) = E[\big(R_a - E(R_a)\big)\big(R_b - E(R_b)\big)] \tag{1.15}$$

dove $R_a$ corrisponde al rendimento del titolo a mentre $R_b$ al rendimento del titolo b.

Invece, nel caso di rendimenti aleatori continui si definisce come segue:

$$Cov(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(X - \mu_x)\big(Y - \mu_y\big)f(x, y)dxdy \tag{1.16}$$

Dove X corrisponde al rendimento aleatorio del primo titolo, Y corrisponde al rendimento aleatorio del secondo titolo, $\mu_x = E(X)$, $\mu_y = E(Y)$ e $f(x, y)$ è la funzione di densità congiunta della variabile casuale doppia (X,Y).

Per comprendere tale misura si può osservare che quando la covarianza è positiva, se il rendimento del primo titolo aumenta incrementa anche il rendimento del secondo titolo e viceversa nel caso in cui il rendimento primo titolo diminuisce. Quando invece la covarianza è negativa, se il rendimento del primo titolo aumenta (diminuisce) il rendimento del secondo titolo diminuisce (aumenta), variando

quindi in direzione opposta. Nel caso in cui la covarianza sia pari a 0, la variazione del rendimento del primo titolo non è linearmente legata alla variazione del rendimento del secondo titolo.

Per la stima della covarianza da utilizzare nel lavoro di selezione del portafoglio, sulla scorta delle considerazioni già effettuate per la media e la varianza, si utilizza la seguente formula che rappresenta la covarianza campionaria:

$$Cov(R_a, R_b) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(R_{at} - R_{am})(R_{bt} - R_{bm}). \tag{1.17}$$

È possibile anche per la covarianza effettuare una correzione statistica apportando una variazione al denominatore, ottenendo la seguente espressione:

$$Cov(R_a, R_b) = \frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N}(R_{at} - R_{am})(R_{bt} - R_{bm}) \tag{1.18}$$

## 1.2 ASSUNTI

La teoria del portafoglio di Markowitz si sorregge su alcune ipotesi di base:

1) Gli individui nella loro scelta considerano solo il rendimento atteso dei titoli e il loro rischio, che viene misurato attraverso la varianza. La regola fondamentale di scelta è molto semplice: a parità di rendimento di un titolo gli individui preferiscono sopportare un rischio minore e allo stesso modo, a parità di rischio gli investitori preferiscono ottenere un maggior rendimento del titolo. Le due ipotesi fondamentali che supportano un approccio basato sull'utilizzo delle misure di sintesi media e varianza per poter applicare il modello sono:

    - L'utilizzo di una funzione di utilità degli investitori di tipo quadratico (come dimostrato da Tobin[6]):
      essendo la teoria del portafoglio un problema di scelta, le preferenze degli individui in economia vengono rappresentate attraverso le funzioni di utilità. L'utilità è una misura che indica il "benessere" relativo dell'individuo [7]. Il problema della scelta del portafoglio può essere rappresentato attraverso una funzione di utilità con determinate caratteristiche, allo scopo di descrivere il

comportamento tipico dell'investitore razionale. Normalmente la teoria economica ipotizza infatti che l'investitore sia avverso al rischio, preferendo una quantità di rischio minore a parità di rendimento atteso. Sono però ammessi come casi particolari individui neutrali al rischio, quindi non influenzati dal maggiore o minore rischio a parità di rendimento atteso o propensi al rischio, che preferiranno assumere a parità di rendimento atteso un rischio maggiore.

Con queste premesse Tobin indica come requisito del criterio media-varianza la seguente funzione di utilità degli investitori

$$U(R) = (1 + b)R + bR^2 \qquad (1.19)$$

dove b rappresenta il coefficiente di avversione al rischio, infatti se $-1 < b < 0$ l'investitore viene considerato avverso al rischio, mentre se $0 < b < 1$ l'investitore viene considerato propenso al rischio;

R indica il rendimento.

In particolare dato che l'utilità marginale del rendimento non può essere negativa, in quanto un investitore trarrà sempre maggiore beneficio da un rendimento maggiore è necessario imporre il seguente limite:

$(1 + b) + 2bR \geq 0$

- La distribuzione congiunta dei rendimenti è una distribuzione ellittica. In particolare è prassi consolidata sia in ambito teorico che operativo ipotizzare che la distribuzione dei rendimenti sia un caso particolare di ellittica, la distribuzione normale $N(\mu, \sigma^2)$ dove $\mu$ indica la media e $\sigma^2$ la varianza.

Basandoci su queste due condizioni è quindi possibile impostare un approccio utilizzando solamente la media e la varianza del portafoglio. Uno dei più grandi vantaggi del modello è che bastano quindi solo queste due misure per poterlo utilizzare.

Vengono poste inoltre per convenzione altre due ipotesi tipiche dei modelli economici.

2) I mercati sono “frictionless markets”, non vi sono tasse o costi di transazione. I titoli inoltre sono perfettamente divisibili, il che significa che è possibile acquistare o vendere anche frazioni minime di un titolo.

3) Gli investitori sono “price-taker” quindi non influenzano con le loro operazioni la distribuzione di probabilità dei rendimenti, dato che il peso di un singolo investitore è molto ridotto rispetto a quello del mercato.

## 1.3 CRITERIO DI SCELTA MEDIA-VARIANZA

La base della teoria del portafoglio consiste nella regola decisionale della media-varianza per prendere le decisioni in contesti di incertezza. Gli indicatori da considerare nella scelta sono infatti due, la media o rendimento atteso e la varianza del titolo, che rappresenta il suo rischio. Il criterio media-varianza si può descrivere nel seguente modo: dati due titoli a e b con rendimento atteso rispettivamente $\mathrm{E}(\mathrm{R_a})$ ed $\mathrm{E}(\mathrm{R_b})$ e varianza $\sigma^2(\mathrm{R_a})$ e $\sigma^2(\mathrm{R_b})$ il titolo a domina in media-varianza il titolo b se vengono rispettate le condizioni:

$$\mathrm{E}(\mathrm{R_a}) \geq \mathrm{E}(\mathrm{R_b})$$

e

$$\sigma^2(\mathrm{R_a}) \leq \sigma^2(\mathrm{R_b}) \qquad (1.20)$$

dove almeno una delle due disequazioni deve valere in senso stretto.

Il criterio media-varianza ha due debolezze principali:

1) La varianza per essere interpretata come misura di rischio deve, come si approfondirà successivamente, riferirsi ad una distribuzione simmetrica.
2) L’ordinamento secondo il criterio media-varianza non è completo e alcuni titoli non possono essere preferiti ad altri solo in base all’applicazione delle condizioni (1.20), Infatti attraverso l’applicazione del criterio non è possibile scegliere fra due titoli nei casi in cui la varianza di un titolo sia maggiore, ma sia maggiore anche il rendimento e nei casi in cui il rendimento di un titolo sia minore, ma anche la varianza del titolo sia minore.

## 1.4 DIVERSIFICAZIONE DEL PORTAFOGLIO

Per diversificazione del portafoglio si intende la riduzione del rischio complessivo del portafoglio. Si può ottenere seguendo due strade, preferibilmente combinate fra loro. Il primo modo consiste nell'aumentare il numero di titoli inseriti nel portafoglio. Il secondo modo consiste nell'inserire titoli con bassa correlazione fra loro; ne deriva che la covarianza dei rendimenti è una misura fondamentale per ottenere la diversificazione del portafoglio nell'approccio classico. Infatti se si aumenta il numero dei titoli inseriti nel portafoglio (se N tende ad ∞), la varianza complessiva del portafoglio tende alla covarianza media fra tutti i titoli che lo compongono. Se quindi la covarianza media è bassa, la diversificazione permette una notevole diminuzione del rischio complessivo sopportato dall'investitore.

Questa osservazione porta in luce però la presenza di una quota di rischio che risulta ineliminabile anche attraverso la diversificazione del portafoglio che viene indicata come rischio non diversificabile.

Per dimostrare questa affermazione si ricorre a quanto segue:

partendo dalla varianza del portafoglio che corrisponde alla seguente espressione (passaggi per arrivare all'espressione visionabili nel capitolo 4 del testo [1]):

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}(X_j\, X_k \sigma_{jk}) \tag{1.21}$$

con $X_j$ e $X_k$ che indicano rispettivamente il peso del titolo j-esimo e k-esimo nel portafoglio e $\sigma_{jk}$ che indica la covarianza fra il titolo j-esimo e il titolo k-esimo.

Ipotizzando un portafoglio equipesato in cui il peso $X_i$ di ciascun titolo nel portafoglio è pari a $\frac{1}{N}$, dalla (1.21) si avrà:

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{N^2}\,\sigma_{jk}\,.$$

Riscrivendo l'espressione precedente si ha:

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^{N}(\frac{1}{N^2}\sigma_{jj}) + \sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\ j\neq k}}^{N}\frac{1}{N^2}\sigma_{jk}\,,$$

portando poi all'esterno della sommatoria 1/N e notando che i termini$\sum_{j=1}^{N} \frac{\sigma_{jj}}{N} = Varianza\ media$ e $\sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^{N} \frac{\sigma_{jk}}{N(N-1)} = Covarianza\ media$, moltiplicando e dividendo per la quantità N-1 l'addendo $\sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^{N} \frac{1}{N^2} \sigma_{jk}$ e riorganizzando l'espressione si arriva alla seguente formulazione:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{N}\ x\ (Varianza\ media) + \frac{N-1}{N}\ x\ (Covarianza\ media)$$

Da questo risultato si comprende come si comporta la varianza del portafoglio se N, il numero dei titoli, aumenta in modo sufficientemente elevato: il termine $\frac{1}{N}\ x\ (Varianza\ media)$ diventa trascurabile e il rischio totale del portafoglio tende a coincidere con la covarianza media dei titoli. Tenendo presente infatti che se N tende ad ∞, il termine $\frac{N-1}{N}$ tenderà ad 1 mentre il termine $\frac{1}{N}$ tenderà a 0, comportando:

$$\sigma_p^2 \rightarrow Covarianza\ media$$

## 1.5 COSTRUZIONE DELLA FRONTIERA EFFICIENTE*

Basandoci sul criterio media-varianza indicato nel capitolo 1.3, è possibile individuare i portafogli, costruiti attraverso la combinazione dei diversi titoli disponibili, che dato il rendimento hanno la varianza minore possibile, oppure equivalentemente che data la varianza hanno il rendimento atteso maggiore possibile. Operando per ogni possibile livello di rendimento e trovando i portafogli con la minore varianza è possibile trovare l'insieme dei portafogli che formano la frontiera. Il portafoglio con la minore varianza in assoluto viene definito portafoglio a minima varianza. Come si comprenderà dalla lettura del paragrafo, la parte efficiente della frontiera parte dal livello di rendimento corrispondente al portafoglio a minima varianza e prosegue per i livelli superiori di rendimento. Nella parte inferiore della frontiera invece, per un dato livello di rischio è sempre possibile individuare nella parte efficiente della frontiera un portafoglio con rendimento più elevato; tale parte di frontiera è quindi inefficiente. I portafogli che appartengono alla parte efficiente della frontiera si chiamano portafogli efficienti.

Per la costruzione della frontiera efficiente bisogna poi distinguere il caso in cui le short selling sono ammesse e il caso in cui esse non siano espletabili. Vendita allo scoperto o short selling indica l'operazione di vendita di un titolo che l'investitore non possiede. Operativamente è possibile vendere

**Per maggiori dettagli vedi [1].*

allo scoperto attraverso un broker, prendendo a prestito i titoli e vendendoli nella speranza che il loro prezzo diminuisca, per poterli così acquistare in futuro ad un prezzo minore, chiudendo la posizione.

Il primo passo per comprendere i passaggi necessari per la costruzione della frontiera efficiente è considerare un semplice portafoglio formato dalle diverse combinazioni di due titoli rischiosi, titolo a e titolo b.

Il rendimento di un portafoglio si può esprimere come la media ponderata del rendimento dei titoli che lo compongono, dato $X_i$ il peso del titolo i-esimo e $R_i$ il rendimento stocastico del titolo i allora il rendimento del portafoglio corrisponderà alla variabile casuale $R_p$ indicata come:

$$R_P = \sum_{i=1}^{N} X_i \, R_i \tag{1.22}$$

dove N indica il numero dei titoli che compongono il portafoglio.

Essendo $R_p$ una variabile casuale, è possibile calcolarne il valore atteso per trovare il rendimento atteso del portafoglio, sfruttando le proprietà del valore atteso E come operatore lineare. Il rendimento atteso del portafoglio si esprime quindi come:

$$E(R_P) = \sum_{i=1}^{N} Xi \; E(Ri\,) \tag{1.23}$$

La varianza di un portafoglio in termini generali, comprendendo N titoli viene espressa come:

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^{N} (X_j^2 \sigma_j^2) + \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{K=1 \\ j \neq k}}^{N} (X_j \, X_k \sigma_{jk}) \tag{1.24}$$

dove $\sigma_{jk}$ indica la covarianza fra il titolo j-esimo e il titolo k-esimo.

Ottenuta dall'equazione (1.21) suddividendo il termine delle varianze $\sum_{j=1}^{N} (X_j^2 \sigma_j^2)$ che consiste nella somma di tutti i pesi dei titoli elevati al quadrato moltiplicati per la varianza del titolo stesso e nel termine delle covarianze $\sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{K=1 \\ j \neq k}}^{N} (X_j \, X_k \sigma_{jk})$ che consiste nella somma di tutte le covarianze fra il titolo j-esimo e il titolo k-esimo moltiplicate per i rispettivi pesi del titolo j-esimo e k-esimo.

È preferibile ora la definizione del coefficiente di correlazione, che livello interpretativo fornisce le stesse informazioni della covarianza $\sigma_{jk}$ tra il rendimento del titolo j e il rendimento del titolo k, però a differenza di quest'ultima misura il coefficiente di correlazione viene standardizzato attraverso la divisione per il prodotto tra le deviazioni standard del rendimento dei rispettivi titoli $\sigma_j \sigma_k$. Si deriva quindi la misura che segue:

$$\rho_{j,k} = \frac{\sigma_{jk}}{\sigma_j \sigma_k}. \tag{1.25}$$

Si ottiene così un valore il cui campo di variazione corrisponde a [-1, +1] ed è perciò standardizzato, permettendo una diretta comparabilità fra titoli diversi. Il valore -1 corrisponde al caso di perfetta correlazione negativa ed indica che quando il rendimento del titolo j varia in una direzione, il rendimento del titolo k varia nella direzione esattamente opposta. Nel caso di correlazione perfettamente positiva, quando il coefficiente di correlazione è pari a +1, quando il rendimento di un titolo varia in una direzione, anche il rendimento dell'altro titolo aumenta esattamente nello stesso verso. Nel caso in cui il coefficiente di correlazione sia pari a 0, i rendimenti dei due titoli non sono linearmente correlati fra loro; quindi concettualmente se il rendimento di un titolo aumenta o diminuisce, il rendimento dell'altro titolo non ne è influenzato.

Tenendo presente la (1.25) è quindi possibile modificare la (1.24) tenendo presente la relazione tra la covarianza $\sigma_{jk}$ e il coefficiente di correlazione $\sigma_{jk} = \sigma_j \sigma_k \, . \, \rho_{j,k}$:

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^{N} (X_j^2 \sigma_j^2) + \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{K=1 \\ j \neq k}}^{N} (X_j \, X_k \sigma_j \sigma_k \rho_{j,k}). \tag{1.26}$$

Di conseguenza la standard deviation del portafoglio corrisponde alla radice quadrata della (1.26):

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \left(X_j^2 \sigma_j^2\right) + \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{K=1 \\ j \neq k}}^{N} (X_j \, X_k \sigma_j \sigma_k \rho_{j,k})} \tag{1.27}$$

### 1.5.1 FRONTIERA EFFICIENTE CON DUE TITOLI RISCHIOSI

Si considera inizialmente il caso di un portafoglio costituito dalla combinazione di due titoli rischiosi (cioè $\sigma^2 > 0$ ) A e B.

La standard deviation complessiva del portafoglio, applicando la (1.27) nel caso di due titoli si ha:

$\sigma_p = \sqrt{X_A^2\sigma_A^2 + X_B^2\sigma_B^2 + 2X_AX_B\sigma_A\sigma_B\rho_{AB}}$ ,

oppure in modo equivalente, allo scopo di semplificare l'esposizione:

$$\sigma_p = (X_A^2\sigma_A^2 + X_B^2\sigma_B^2 + 2X_AX_B\sigma_A\sigma_B\rho_{AB})^{\frac{1}{2}} \tag{1.28}$$

Se si considera pari a 1 il peso del portafoglio totale, il peso del titolo A verrà indicato come $X_A$ , quindi il peso del titolo B nel portafoglio $X_B$ diventa pari a $1 - X_A$. Di conseguenza l'espressione (1.28), sostituendo i pesi in tal modo ricavati diventa:

$$\sigma_p = (X_A^2\sigma_A^2 + (1 - X_A)^2\sigma_B^2 + 2X_A(1 - X_A)\sigma_A\sigma_B\rho_{AB})^{\frac{1}{2}} \tag{1.29}$$

Tramite l'utilizzo di questa espressione generale nel caso di due titoli si possono derivare i primi concetti fondamentali riguardanti la forma della frontiera efficiente e il ruolo della correlazione nella selezione del portafoglio.

Nel seguito del paragrafo si analizzeranno alcuni casi particolari, allo scopo di capire le caratteristiche principali della frontiera efficiente.

**Nel caso di correlazione perfettamente positiva $\boldsymbol{\rho = +1}$**, che come in precedenza indicato rappresenta la massima correlazione positiva possibile, la standard deviation complessiva di portafoglio diventa pari a:

$$\sigma_{P=} X_A\sigma_A + (1 - X_A)\sigma_B \text{ ,} \tag{1.30}$$

se risolviamo per $X_A$ la (1.26) otteniamo:

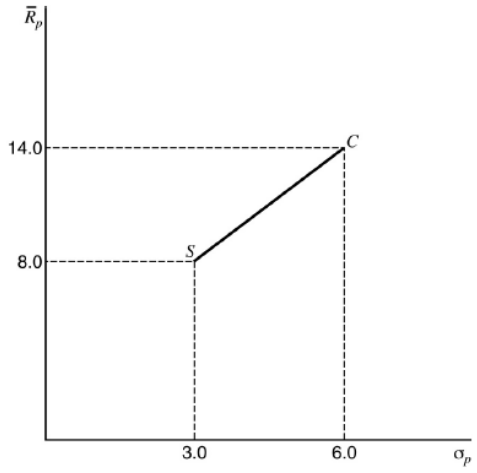
$$X_A = \frac{\sigma_P - \sigma_B}{\sigma_A - \sigma_B} \tag{1.31}$$

Dalla (1.31) operando una sostituzione in (1.23) si ottiene l'equazione che rappresenta la frontiera efficiente nel caso di correlazione $\rho = +1$:

$$E(R_P) = \frac{\sigma_P - \sigma_B}{\sigma_A - \sigma_B} + \left(\frac{\sigma_A - \sigma_P}{\sigma_A - \sigma_B}\right) E(R_B) \qquad (1.32)$$

Graficamente nel piano ( $\sigma_P, E(R_P)$), la (1.32) viene rappresentata come una retta che unisce il punto $\left(\sigma_A, E(R_A)\right)$ al punto $(\sigma B, E(RB))$. Questa retta rappresenta la relazione fra rischio e rendimento del portafoglio.

In questo caso si può notare come non vi sia diversificazione del rischio poiché la standard deviation complessiva risulta infatti una combinazione lineare della standard deviation dei singoli titoli.




*Fonte : [1]**

**Nel caso di correlazione perfettamente negativa $\boldsymbol{\rho = -1}$** , che corrisponde al valore minimo possibile della correlazione. La standard deviation complessiva di portafoglio diventa pari a:

$$\sigma_{P=} |X_A \sigma_A - (1 - X_A)\sigma_B| \qquad (1.33)$$

Indicato in valore assoluto per evitare che la deviazione standard del portafoglio risulti un numero negativo. La varianza infatti essendo la somma degli scarti dalla media elevati al quadrato è sempre un numero maggiore o uguale a 0.

**I grafici relativi a questo paragrafo a titolo esemplificativo sono tratti dal testo [1], in appendice E del lavoro si riportano la tabella contenente le caratteristiche dei titoli utilizzati per la costruzione e alcune precisazioni sulle notazioni usate nei grafici.*

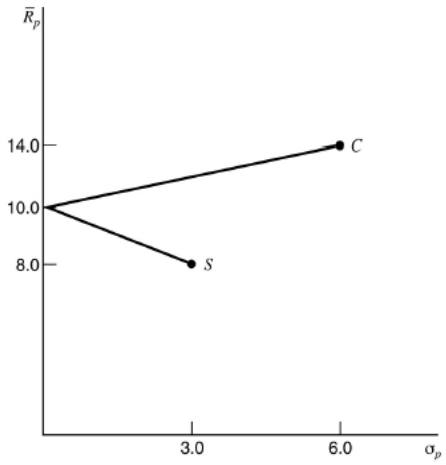
L'espressione (28) corrisponde quindi alternativamente ad una solo delle due seguenti espressioni, in base a quella che risulta essere positiva.

$\sigma_{P=} X_A\sigma_A - (1 - X_A)\sigma_B$

oppure a

$\sigma_{P=} - X_A\sigma_A + (1 - X_A)\sigma_B$

Graficamente, nel piano rendimento atteso-Deviazione standard questa situazione si rappresenta come due rette che si diramano dal livello di rendimento corrispondente al portafoglio a minima varianza. In questo caso si osserva il massimo livello di diversificazione possibile.




*Fonte: [1]*

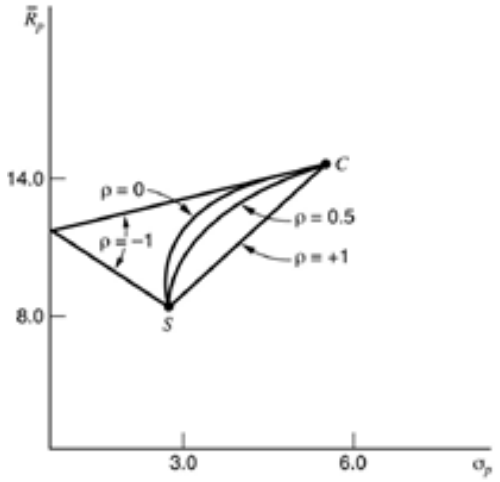
**Nel caso di assenza di correlazione con $\boldsymbol{\rho = 0}$** la standard deviation complessiva di portafoglio diventa pari a:

$$\sigma_p = (X_A^2\sigma_A^2 + (1 - X_A)^2\sigma_B^2\ )^{\frac{1}{2}} \qquad (1.34)$$

**Nei casi intermedi, nei quali il coefficiente di correlazione è compreso tra $(-1, +1)$ estremi non compresi**, graficamente si ottengono curve convesse che risiedono nella porzione del piano compresa fra la retta ottenuta nel caso in cui il coefficiente di correlazione tra i rendimenti dei titoli sia pari a +1 e le due rette che si diramano nel caso in cui il coefficiente di correlazione sia pari a -1.

In alcuni dei casi intermedi è possibile diversificare il rischio e quindi ridurre la deviazione standard complessiva del portafoglio in base al valore del coefficiente di correlazione tra i titoli. Minore è il coefficiente di correlazione e maggiore sarà, nei casi possibili, la diversificazione ottenibile attraverso la combinazione dei titoli fra loro.

Dalla presente analisi ne consegue che il coefficiente di correlazione gioca la parte del leone nella costruzione di portafogli ben diversificati e in base al suo valore è possibile trovare anche combinazioni di titoli che possiedono un rischio minore rispetto al rischio dell'asset meno rischioso o equivalentemente ritenuto più sicuro.




*Fonte: [1]*

Un portafoglio di particolare importanza teorica è il portafoglio a minore varianza o deviazione standard poiché rappresenta la combinazione di titoli che comporta il minor rischio per l'investitore. Partendo dalla formula generale della deviazione standard del portafoglio nel caso in cui si abbiano a disposizione due titoli (1.29) è possibile derivare la formula che permette di individuare tale portafoglio:

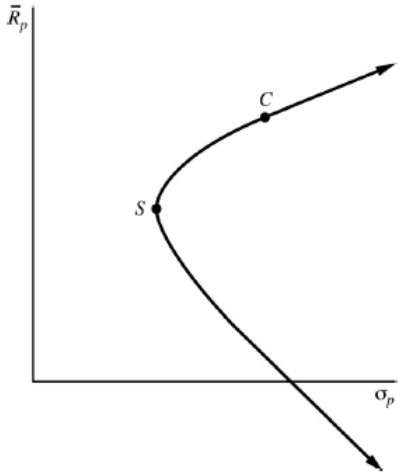
$$\sigma_p = (X_A^2\sigma_A^2 + (1 - X_A)^2\sigma_B^2 + 2X_A(1 - X_A)\sigma_A\sigma_B\rho_{AB})^{\frac{1}{2}},$$

si calcola poi la derivata prima di $\partial\sigma_p/\partial X_A$ e si pone uguale a 0 per ricavare la condizione di primo ordine e ricavare il punto di minimo. Dato che le curve sono convesse non è necessario porre anche la condizione di secondo ordine attraverso la derivata seconda, in quanto il punto trovato attraverso la derivata prima uguagliata a 0 rappresenta sicuramente un punto di minimo. Attraverso questa

procedura si ricava l'equazione generale che permette di ricavare il portafoglio a minima varianza nel caso di un portafoglio composto da due titoli rischiosi:

$$X_A = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}} \tag{1.35}$$

Nel caso in cui non vi siano restrizioni sulle vendite allo scoperto, la frontiera graficamente, oltre ad essere diversa rispetto alla frontiera relativa al caso in cui le vendite allo scoperto non sono ammesse, si espande e prosegue oltre al livello del rendimento massimo che nel caso di vincoli sulle vendite allo scoperto è limitato. L'espansione della frontiera si osserva poiché non vi è più un limite al rendimento massimo ottenibile dall' investitore, perché potenzialmente è sempre possibile vendere allo scoperto il titolo con minor rendimento e acquistare il titolo con il rendimento atteso maggiore.




*Fonte: [1]*

### 1.5.2 FRONTIERA EFFICIENTE CON UN TITOLO RISCHIOSO E UN TITOLO PRIVO DI RISCHIO

Nel secondo caso a titolo di approfondimento, si considera l'esempio di un portafoglio composto da un'attività rischiosa e da un'attività priva di rischio o risk free, il lettore non interessato può saltare il paragrafo e procedere direttamente al paragrafo successivo. Un'attività risk free per definizione garantisce un rendimento certo ad una certa data e di solito viene associata in letteratura ai titoli di stato a breve termine. Gli stati emittenti o le società devono però godere di un rating elevato per dare sufficiente garanzia della restituzione del capitale e del pagamento degli interessi agli investitori. Le caratteristiche di rischio e di rendimento di un titolo risk free sono le seguenti:

$R_f$ è $certo \rightarrow E(R_f) = R_f$;

$\sigma_{Rf} = 0$;

$\sigma_{Rf,j} = 0$.

Indicando rispettivamente che il rendimento del titolo risk free $R_f$ è certo per definizione, quindi la sua varianza $\sigma_{Rf}$ (e quindi rischio) è nulla. Inoltre la covarianza tra il rendimento del titolo risk free e quello di un qualsiasi titolo j rischioso $\sigma_{Rf,j}$ è pari a 0.

Se si considera quindi un portafoglio composto dall'attività risk free e da un'attività rischiosa j allora $X_j$ indica la percentuale investita nel titolo generico j, tenendo presente che può essere maggiore di 1 dato che è possibile indebitarsi per ipotesi al tasso $R_f$.

Il rendimento atteso del portafoglio tenendo conto di queste considerazioni e applicando la (1.23) diventa:

$$E(R_p) = X_j E(R_j) + R_f(1 - X_j) \tag{1.36}$$

Il peso del titolo privo di rischio sarà calcolato come $1 - X_j$ dato che la somma dei pesi in un portafoglio deve essere pari ad 1.

Per quanto riguarda la deviazione standard del portafoglio, applicando la (1.29) e tenendo conto che $\sigma_{Rf} = 0$ e $\sigma_{Rf,j} = 0$, si giunge alla seguente espressione:

$$\sigma_p = \sqrt{{X_j}^2 \sigma_j^2} = X_j \sigma_j \tag{1.37}$$

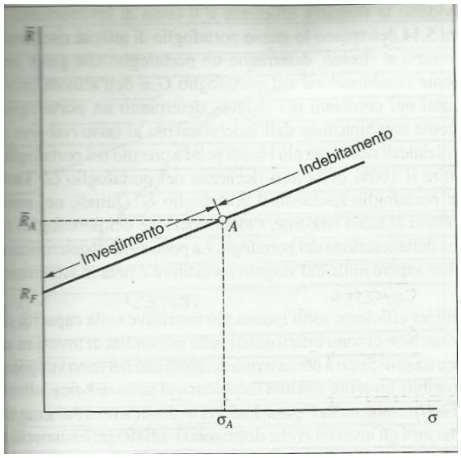
Di conseguenza il peso del titolo generico j sarà pari a $X_j$ che isolato dalla precedente equazione dà:

$$X_j = \frac{\sigma_p}{\sigma_j} \ , \tag{1.38}$$

che sostituito alla (1.36) porta all' equazione della frontiera efficiente nel caso in cui si abbiano due attività, una rischiosa e una priva di rischio:

$$E(R_P) = R_f + \frac{E(R_j) - R_f}{\sigma_j}\sigma_p \tag{1.39}$$

Graficamente la frontiera efficiente si presenta come una linea retta che parte dall'intercetta in $R_f$ (corrispondente al punto in cui l'investitore possiede solo titoli risk free) e passa per il punto corrispondente a $(\sigma_j, E(R_j))$ per poi proseguire. Fino al punto $(\sigma_j, E(R_j))$ l'investitore detiene sia il titolo risk free che il titolo rischioso, oltre tale soglia l'investitore prende a prestito al tasso risk free e acquista il titolo rischioso, il cui peso $X_j$ assumerà quindi un valore superiore all'unità.




*Fonte: [1]*

### 1.5.3 FRONTIERA EFFICIENTE CON N TITOLI RISCHIOSI

È possibile costruire la frontiera efficiente generalizzando il problema considerando la presenza di N titoli rischiosi, seguendo la seguente procedura. Innanzitutto è necessario dotarsi di una notazione matriciale per rendere più agevole l'esposizione. Il vettore dei pesi è il seguente:

$$\boldsymbol{w} = (w_1 \quad \dots \quad w_N)', \tag{1.40}$$

dove $w_i$, con i che va da 1 ad N , è il peso percentuale del i-esimo titolo nel portafoglio.

Dato il vettore dei rendimenti attesi, dove $\mu_i$ è $il\ rendimento\ medio\ o\ atteso\ del\ titolo\ i-esimo$

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1 \quad \cdots \quad \mu_N)', \tag{1.41}$$

definita la matrice di varianza e covarianza ∑:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \dots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \dots & \sigma_N^2 \end{pmatrix} \tag{1.42}$$

dove nella diagonale principale si trovano tutti i termini $\sigma^2{}_i$ che rappresentano la varianza del titolo i-esimo mentre altrove vi sono le covarianze $\sigma_{ij}$ che indicano la covarianza tra il titolo i e il titolo j.

Definito il rendimento atteso del portafoglio pari $\mu_p$ dove:

$$\mu_p = \sum_{i=1}^{N} w_i \, \mu_i \, ,$$

che in notazione matriciale corrisponde a:

$$E(rp) = \boldsymbol{w'\mu} \tag{1.43}$$

e riprendendo la varianza del portafoglio $\sigma^2{}_p$ (1.21) dove:

$$\sigma^2{}_p = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} wi \; wj \; \sigma ij$$

che in notazione matriciale corrisponde a:

$$\sigma^2 p = \boldsymbol{w'} \sum \boldsymbol{w}. \tag{1.44}$$

Inoltre si introduce il vettore colonna unità composto interamente da uni:

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.45}$$

Con le precedenti notazioni, la costruzione della frontiera efficiente consiste nel massimizzare il rendimento del portafoglio data la varianza oppure alternativamente nel minimizzare la varianza dato il rendimento del portafoglio. Formalmente:

(Formulazione 1)

$$max_w \; \boldsymbol{w}'\boldsymbol{\mu}$$

$$s.t \begin{cases} \boldsymbol{w}'\sum \boldsymbol{w} = Var & \text{con Var una data varianza} \\ \boldsymbol{w}'\mathbf{1} = 1 \end{cases}$$

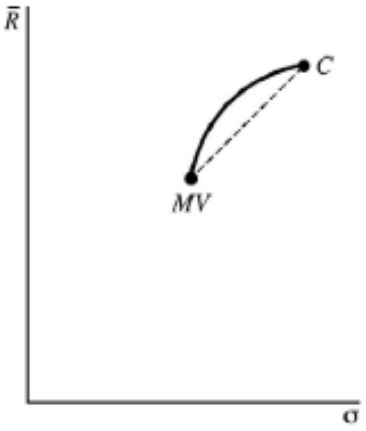
Alternativamente (Formulazione 2):

$$min_w \; \boldsymbol{w}'\sum \boldsymbol{w}$$

$$\text{s.t} \begin{cases} \boldsymbol{w}'\boldsymbol{\mu} = E \text{ con E un dato rendimento} \\ \boldsymbol{w}'\mathbf{1} = 1 \end{cases}$$

Concettualmente si applica quindi la procedura illustrata nel paragrafo 1.3, alternativamente massimizzando il rendimento data la varianza oppure minimizzando la varianza dato il rendimento del portafoglio. Il vincolo $\boldsymbol{w}'\mathbf{1} = 1$ ha come obiettivo quello di fare in modo che la somma dei pesi $w_i$ sia sempre pari ad 1. Il problema consiste quindi nel risolvere una ottimizzazione vincolata. Nel caso in cui si scelga la formulazione 2 il risultato porta al vettore dei pesi desiderato dato il rendimento atteso. Se si sceglie la formulazione 1 si ottiene il vettore dei pesi per un dato valore della varianza.

A livello grafico in un piano in cui nell'asse delle x trova rappresentazione la deviazione standard del portafoglio e nell'asse delle y il rendimento atteso del portafoglio, la frontiera efficiente forma una iperbole. Si tratta anche in questo caso di una funzione convessa, forma tipica della frontiera efficiente.




*Fonte: [1]*

É possibile introdurre o togliere la possibilità di effettuare vendite allo scoperto nel seguente modo:

- Se le vendite allo scoperto sono permesse non viene posto il vincolo $w_i \geq 0$ per ogni i, espressione che indica che il peso del titolo i-esimo deve essere positivo oppure pari a 0. Infatti nel caso di possibile vendita allo scoperto il peso di un titolo può assumere un peso negativo nel portafoglio.
- Se le vendite allo scoperto non sono ammesse basta porre $wi \geq 0$ per ogni i come ulteriore vincolo in entrambi i due metodi proposti.

Come nel caso di due titoli rischiosi permettere la vendita allo scoperto dei titoli consiste in una estensione del problema e graficamente porta, oltre ad una frontiera differente, anche ad un proseguimento della frontiera efficiente oltre al livello massimo di rendimento che si osserva nel caso di frontiera con vincoli sulle vendite allo scoperto, dato che attraverso lo short selling il rendimento atteso potenzialmente ottenibile è teoricamente illimitato.

### 1.5.4 FRONTIERA EFFICIENTE CON N TITOLI RISCHIOSI ED UN TITOLO RISK FREE

L'ultimo caso da considerare riguarda la situazione in cui si vuole formare un portafoglio di N titoli rischiosi e si ha anche a disposizione un titolo risk free. Questo paragrafo costituisce un approfondimento e richiede la previa lettura del paragrafo 1.5.2. In questo caso il portafoglio detenuto dall'investitore risulta la combinazione del titolo privo di rischio, con tutte le caratteristiche precedentemente indicate e un portafoglio composto da N titoli rischiosi. Il portafoglio rischioso detenuto dall'investitore sarà il portafoglio che risulta dalla tangenza tra la retta con intercetta nel

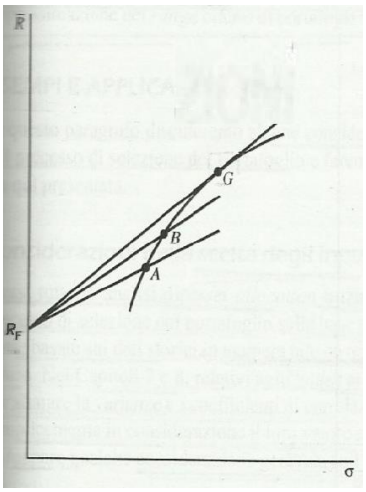
tasso $R_f$ e la frontiera efficiente derivata dall'insieme dei possibili portafogli efficienti in media-varianza composti da N titoli rischiosi. Questo perché ogni altro portafoglio che comporta una pendenza minore della retta Rf-portafoglio di tangenza (chiamato G nel grafico) data una certa deviazione standard, in combinazione con il titolo risk free, offrirà un rendimento minore rispetto al portafoglio P combinato al titolo privo di rischio. Il problema di ottimizzazione risulta simile al caso di costruzione di un portafoglio con N titoli rischiosi ma presenta alcune varianti significative. Viene indicato per praticità solo la formulazione 2 in cui si minimizza la varianza ma è sempre possibile costruire la frontiera anche attraverso la strada 1 che consiste nella massimizzazione del rendimento atteso:

$$min_w \; \boldsymbol{w}' \sum \boldsymbol{w}$$

$$E(R_c) = \boldsymbol{w_p}' \boldsymbol{\mu} + (1 - \boldsymbol{w}' \mathbf{1}) R_f = E \quad con\ E\ un\ dato\ rendimento\ atteso$$

$$\boldsymbol{w_p} + (1 - \boldsymbol{w_p}' \mathbf{1}) = 1$$

dove $R_c$ indica il rendimento del portafoglio "complessivo" contando sia il portafoglio G che il titolo risk free, $\boldsymbol{w_p}$ indica il vettore dei pesi dei titoli che compongono il portafoglio rischioso G e diversamente dal caso precedente, non devono obbligatoriamente sommati dare come risultato l'unità. La ricchezza non investita nel portafoglio rischioso viene investita nel titolo risk free per cui la quota assegnata al titolo privo di rischio sarà pari a $1 - \boldsymbol{w_p}' \mathbf{1}$.




*Fonte: [1]*

***Riferimenti Capitolo 1***

*[1] Teorie di portafoglio e analisi degli investimenti. E. J. Elton, M. J. Gruber, S. J. Brown, W. N. Goetzmann. Apogeo (2007).*

*[2] Portfolio selection. H. Markowitz. The Journal of Finance, Vol. 7 No. 1 (1952).*

*[3] An introduction to Modern Portfolio Theory: Markowitz, CAPM, APT and Black Litterman. G. West. Financial Modelling Agency (2004).*

*[4] Probabilità e statistica. Cicchitelli. Maggioli editore (2003).*

*[5] Investments. A. Kane, A. Markus, Z. Bodie. McGraw Hill (2008).*

*[6] Liquidity Preference as Behavior Towards Risk. J. Tobin. The Review of Economic Studies, Vol. 25, No. 2 (1958).*

*[7] Microeconomia 2 edizione. D.B. Bernheim, M. D. Whinston. McGraw Hill (2013).*

# 2 - LIMITI DEL MODELLO MEDIA-VARIANZA

In questo capitolo verranno illustrate le principali debolezze del modello media-varianza che hanno spinto diversi studiosi nella ricerca di varianti rispetto al tradizionale modello di Markowitz.

## 2.1 CRITICHE AL MODELLO MEDIA-VARIANZA

Una delle due principali assunzioni del modello, come già visto nel primo capitolo, indica che i rendimenti dei titoli si distribuiscono come una elittica, in particolare è prassi diffusa l'assunto di normalità della distribuzione. Questa assunzione permette di descrivere compiutamente la distribuzione attraverso i primi due momenti, rispettivamente media (momento primo) e varianza (momento secondo). Secondo Wang e Chen [6] limitare la selezione di portafoglio ai soli asset con rendimento distribuito secondo una distribuzione normale esclude l'applicabilità generale del modello, precludendo il caso in cui il rendimento dei titoli si caratterizza per un'asimmetria significativa.

È utile considerare che l'assunto di normalità dei rendimenti congiunti non sempre viene rispettato nella realtà. Questo fatto viene asserito sia da Wang e Chen [6], che criticano gli assunti alla base del modello media-varianza, ma soprattutto da Cassese e Pelagatti [8] che nel loro lavoro hanno riassunto le tendenze empiriche riguardanti le caratteristiche finanziarie dei titoli. Infatti una tendenza generale che si osserva nei rendimenti dei titoli è l'asimmetria negativa della distribuzione dei rendimenti. Una variabile distribuita secondo una distribuzione di tipo normale è caratterizzata da una asimmetria nulla, la distribuzione è infatti simmetrica per i suoi valori positivi o negativi. L'asimmetria di una distribuzione indica invece che questa è sbilanciata verso valori positivi, in tal caso il valore dell'asimmetria sarà positivo oppure verso valori negativi, in tale caso il valore dell'asimmetria sarà negativo. Tendenza molto forte nei mercati finanziari è l'asimmetria negativa dei rendimenti, tale situazione indica che spesso le conseguenze negative portano a rendimenti molto più negativi rispetto ai rendimenti positivi dati da situazioni favorevoli. Tale situazione tipica si può individuare nel caso dei bond, dove la conseguenza di un default, cioè il mancato pagamento integrale o parziale di capitale ed interessi porta ad un rendimento molto negativo, mentre il rendimento positivo è fissato. Anche nel caso di titoli azionari, sebbene spesso l'asimmetria sia meno accentuata, si osserva un'asimmetria negativa delle distribuzioni dei rendimenti.

Ulteriore considerazione, che porta ad un'altra deviazione rispetto all'assunto di normalità del rendimento dei titoli finanziari riguarda la curtosi. La curtosi misura lo spessore nelle code della distribuzione e una tendenza registrata nei mercati finanziari indica come spesso i rendimenti osservati nella realtà quotidiana presentino valori importanti di curtosi. Una distribuzione normale ha una curtosi che assume un valore pari a 3. Nella realtà però, confrontando il valore di curtosi assunto da una distribuzione normale e le distribuzioni dei rendimenti osservate nei mercati, si osservano distribuzioni dei rendimenti con valori superiori di curtosi. Un valore superiore di curtosi indica che gli eventi estremi (rendimenti molto positivi o molto negativi) si osservano più spesso di quanto si registrerebbe nel caso di rendimenti distribuiti secondo una normale.

La conseguenza principale è che non sempre i rendimenti di tutti i titoli si distribuiscono secondo una normale multivariata, ne derivano quindi errori dovuti al fitting fra l'assunto di normalità richiesto dal modello media-varianza e le distribuzioni empiriche dei rendimenti utilizzate come input del modello.

Inoltre, vi sono diversi lavori [9], [7] che sottolineano che trascurare i momenti superiori al secondo comporti una perdita di informazione utile che non viene considerata nel modello. È possibile limitarsi ai primi due momenti solo nel caso in cui la distribuzione sia unimodale e simmetrica, altrimenti è necessario estendere il modello ai momenti superiori al secondo.

Anche l'assunto di utilità attesa di tipo quadratico viene spesso avversato in letteratura. Samuelson ha criticato questa impostazione, sottolineando la mancanza di generalità dell'approccio e i limiti della funzione di utilità, in modo particolare quando la ricchezza (inserita come variabile indipendente nella funzione di utilità) tende ad aumentare secondo i principi economici dovrebbe aumentare anche l'utilità, mentre una funzione di utilità di tipo quadratico oltre a un certo livello di ricchezza decresce. Questa caratteristica non sembrerebbe coerente con il comportamento degli individui. Samuelson [7] ritiene però che l'utilizzo di una funzione di utilità di questo tipo sia comunque una buona approssimazione nel caso in cui la deviazione standard tenda a 0, quindi nel caso di un rischio molto ridotto. Infatti ha notato che più il rischio è elevato e più l'utilizzo di momenti di ordine successivo al secondo, non compatibili con funzioni di utilità di tipo quadratico, migliora la precisione del modello.

Borch [2] in una nota del 1963 sottolinea come la base della selezione del portafoglio impostata da Markowitz sia l'assunto che la funzione di utilità dipenda da media e varianza:

$$f(E, V) \tag{2.1}$$

dove E indica il rendimento atteso e V la varianza del rendimento.

Le conseguenze che derivano da tale impostazione sono intuitive:

$$\frac{df}{dE} > 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{df}{dV} < 0 \tag{2.3}$$

L'individuo preferirà quindi un rendimento atteso maggiore ed essendo avverso al rischio preferirà un rischio minore.

L'autore, confermando la critica di Samuelson, indica come condizione necessaria per avere le condizioni (2.1),(2.2) e (2.3) la forma quadratica della funzione dell'utilità della moneta. Tale forma funzionale comporta però una decrescenza oltre ad un certo livello di ricchezza, portando quindi a conclusioni controintuitive. Il modello media-varianza secondo Borch è quindi applicabile, ma solo dopo aver specificato alcune limitazioni. Viene inoltre indicato come l'introduzione dell'asimmetria e quindi del momento terzo possa portare ad un miglioramento teorico nella funzione dell'utilità, utilizzando una funzione dell'utilità della moneta rappresentabile come un polinomio di terzo grado.

Anche Hanoch e Levy [4] criticano l'impostazione basata sulla funzione di utilità quadratica, assunto del modello media-varianza. Gli autori Indicano che la debolezza teorica implicita nell'assumere la forma quadratica della funzione di utilità della moneta risiede nella avversione al rischio sempre crescente che ne deriva. Secondo gli autori la teoria economica parrebbe invece suggerire che un'avversione al rischio decrescente al crescere della ricchezza sia maggiormente compatibile con il comportamento degli agenti economici. Hanoch e levy affermano quindi che il criterio media-varianza, date tali debolezze teoriche nel rappresentare il comportamento degli individui dovrebbe essere migliorato e suggeriscono una possibile modifica: una funzione di utilità cubica. In tale modo viene considerato anche il ruolo dell'asimmetria, l'approccio diventerebbe più generale e meno vincolante, si risolverebbe il problema della decrescenza dell'utilità marginale, che diventa non decrescente in tutto il dominio e permette di rappresentare sia l'avversione al rischio degli investitori che casi di propensione al rischio. Il "prezzo" da pagare per la maggiore generalità dell'approccio è la minore semplicità del modello. A differenza del criterio media-varianza infatti, dove la media maggiore e la varianza minore determinavano una dominanza, nel criterio esteso si possono presentare combinazioni molto più ampie che riguardano anche il momento terzo e possono essere valutate solo caso per caso attraverso la funzione di utilità individuale.

## 2.2 ERRORI DI STIMA E INSTABILITÀ DEL MODELLO MEDIA-VARIANZA

La stima del rendimento atteso dei titoli e della matrice di varianza-covarianza, composta dalle varianze dei titoli nella diagonale principale e all'esterno dalle covarianze tra di essi, come input necessari alla selezione del portafoglio avviene generalmente attraverso l'uso di dati storici. Il rendimento atteso viene quindi stimato attraverso l'uso della media campionaria (1.8), mentre le deviazioni standard attraverso la formula della deviazione standard campionaria (1.10). La stima dei primi due momenti, comporta necessariamente degli errori di stima.

Un errore di stima, prendendo come esempio la stima di un parametro a porta ad una differenza tra il valore "vero" a e il valore del parametro stimato â, la differenza $a - \hat{a}$ misurerà quindi l'errore di stima nel parametro a.

In generale gli input utilizzati nel modello media–varianza sono intaccati dagli errori di stima, il risultato principale di tali errori porta ad un portafoglio che:

1) Sovrappesa i titoli con un elevato rendimento atteso, mentre sottopesa i titoli con rendimento atteso più basso;
2) Sovrappesa i titoli con bassa covarianza mentre sottopesa i titoli con covarianza più elevata;
3) Sovrappesa i titoli con bassa varianza mentre sottopesa i titoli con varianza dei rendimenti più elevata.

Il modello media-varianza secondo Michaud [3] enfatizza i problemi causati dagli errori di stima dei momenti, tanto che l'autore definisce tale modello "massimizzatore di errori di stima".

In questa direzione Best e Grauer [5] nell'indagare l'effetto della variazione del rendimento atteso utilizzato come input nella selezione di portafoglio, notano come anche una minima variazione del rendimento atteso di un titolo abbia un effetto importante nella composizione del portafoglio.

In particolare nella loro analisi vengono elaborati due importanti risultati:

1) Più ampio è il paniere di titoli da includere nel portafoglio e più i pesi che derivano dall'ottimizzazione di media e varianza sono sensibili anche a piccole variazioni dei rendimenti attesi dei titoli utilizzati come input.
2) Se le variazioni dei rendimenti attesi dei titoli utilizzati come input nella procedura di costruzione del portafoglio sono significative, allora ciò comporta variazioni importanti nel rendimento atteso del portafoglio, nella deviazione standard del portafoglio e nei pesi dei titoli che compongono il portafoglio.

Procedendo poi con delle analisi empiriche, gli autori, partendo da un portafoglio efficiente in media varianza notano cambi importanti nei pesi componenti il portafoglio, anche a seguito di variazioni minime del rendimento e della varianza dei titoli. Ne risulta un portafoglio con una composizione alterata in termine di pesi, comportando però solo minime variazioni nella media e nella varianza del portafoglio. Un piccolo miglioramento nel rendimento medio di un titolo quindi, pur offrendo poco margine di miglioramento complessivo, altera in modo sostanziale la costruzione del portafoglio. Questa constatazione porta quindi con sé tutti i problemi operativi e i costi derivanti da un cambio repentino del portafoglio titoli. In particolare gli autori offrono un esempio. Incrementando il rendimento medio di un solo titolo, rispetto al portafoglio di partenza efficiente in media-varianza composto in totale da 10 asset si ottiene come risposta alla variazione l'esclusione di 4 titoli dal portafoglio. L'esclusione dal portafoglio è una diretta conseguenza dell'imposizione del vincolo di positività dei pesi $wi \geq 0$ dove wi è il peso del titolo i-esimo del portafoglio. In tale caso il cambiamento della media di un titolo causa un'importante variazione del portafoglio, escludendo titoli. Se fossero ammesse le vendite allo scoperto, la variazione della media di un titolo porterebbe a dei pesi negativi per i titoli a minor rendimento. Di conseguenza gli autori derivano che, in generale, i pesi nel portafoglio variano sensibilmente alle variazioni del rendimento atteso dei titoli e a causa del vincolo di non negatività le conseguenze in termini di media-varianza del portafoglio sono particolarmente ridotti.

Best e Grauer procedono infine con un'analisi in termini di elasticità. Valutando quindi la variazione del rendimento atteso stimato di un titolo, in termini di elasticità gli autori notano che all'aumentare delle dimensioni del portafoglio la variazione del rendimento atteso complessivo del portafoglio diventa mano a mano sempre più trascurabile, comportando però un notevole cambiamento in termini di pesi. Sempre attraverso un'analisi in termini di elasticità gli autori individuano come tanto più le dimensioni del portafoglio aumentano, tanto più le variazioni in termine di pesi conseguenti alla variazione della media di un titolo sono ampie, comportando di norma l'esclusione dal portafoglio di uno o più titoli.

Come conseguenza dell'analisi riportata, si può considerare la notevole sensibilità del modello media-varianza risetto ai rendimenti attesi stimati. Infatti un errore di stima di un solo rendimento atteso può portare a notevoli conseguenze in termini di output.

In generale, secondo Michaud [3] gli errori di stima sono un problema se si considera l'instabilità dei pesi dei titoli nel portafoglio come risultato della procedura di ottimizzazione. L'approccio media-varianza è infatti molto sensibile al valore degli input utilizzati nella procedura di ottimizzazione,

causando una notevole variazione degli output a seguito di minime variazioni dei dati inseriti nel processo. Non soltanto, come già indicato, i pesi sono sensibili a variazioni, anche minime, nel valore del rendimento atteso di un titolo, ma anche la matrice di varianza-covarianza viene considerata un input piuttosto delicato in quanto cambiamenti anche lievi della matrice possono portare ad un cambiamento notevole nei pesi ottenuti.

Il problema dell'instabilità del modello media-varianza, con tutte le conseguenze in termini operativi e i costi di transazione che ne derivano viene inasprito dal fatto che spesso gli input utilizzati variano nel tempo, essendo caratterizzati da non stazionarietà. Specialmente i rendimenti attesi dei titoli sono caratterizzati da un'ampia volatilità, invece la matrice di varianza-covarianza risulta più stabile nel tempo.

## 2.3 ERRORI DI STIMA, SCARSE PERFORMANCE OUT OF SAMPLE E CONCENTRAZIONE DEL PORTAFOGLIO

Gli errori di stima già presentati nel paragrafo 2.2 hanno come ulteriore effetto quello di condurre i principali modelli media-varianza a scarse performance "out of sample". Nel loro lavoro fondamentale sul tema, De Miguel, Garlappi e Uppal [1] analizzano criticamente le performance del modello classico proposto da Markowitz e le diverse varianti proposte in letteratura con lo scopo di ridurre gli errori di stima degli input nel modello. Gli autori indicano che il modello media-varianza porti ad alcuni risultati indesiderati dagli investitori come:

1) Una scarsa diversificazione che implica un portafoglio concentrato in pochi titoli, oppure che propende a eccessivi livelli di short selling;
2) Scarse performance del portafoglio "out of sample".

Concentrandosi sul secondo aspetto, gli autori indicano come principale causa delle scarse performance out of sample gli errori di stima nella stima degli input del modello.

Nel loro lavoro vengono analizzate le performance sia del modello tradizionale di Markowitz [10] che delle varianti del modello proposte in letteratura, confrontando poi le performance dei modelli standard con quelle del portafoglio equipesato utilizzato come portafoglio benchmark. Tale modello sfrutta solo la prima leva della diversificazione, come illustrato nel paragrafo 1.4, consistente nell'aumentare il numero dei titoli nel portafoglio, per questo tale modello attua una cosiddetta "naive diversification", intendendo una diversificazione non completa, dato che non considera le caratteristiche dei titoli inseriti nel portafoglio. Nonostante la naive diverification non permetta una

completa diversificazione, gli autori osservano che tale portafoglio sovraperforma "out of sample" tutti gli altri modelli media-varianza proposti in letteratura. Risultato ancora più pregnante è il numero dei dati necessari per ottenere un periodo di stima sufficiente per far sì che i modelli classici sovraperformino il modello equipesato. Il numero di mesi necessario per stimare gli input che permette di contenere gli errori di stima e consente altresì delle performance superiori al benchmark è infatti molto elevato ed aumenta all'aumentare dell'universo di titoli considerato nella formazione del portafoglio. In concreto i risultati degli autori indicano che per sovraperformare il benchmark è necessario un periodo di stima di 3000 mesi (pari a 250 anni) per un portafoglio composto da 25 titoli, tale periodo di stima considerando un set di 50 titoli sale addirittura a 6000 mesi (pari a 500 anni).

Un ulteriore risultato che deriva dall'analisi di De Miguel, Garlappi e Uppal permette inoltre di comprendere la portata degli errori di stima nelle performance "out of sample" del portafoglio (performance di interesse primario per gli investitori). Gli autori osservano infatti come le correzioni proposte in letteratura allo scopo di affrontare o ridurre gli errori di stima non riescono di fatto a migliorare le performance "out of sample" in modo tale da superare quelle del benchmark.

Il lavoro riveste una portata generale in quanto oltre a considerare i modelli principali, effettua il confronto di performance utilizzando diversi dataset, sia reali che simulati.

I punti di forza del portafoglio costruito tramite la "naive diversification" rispetto alla procedura di ottimizzazione media-varianza risiedono in due aspetti principali:

1) Evitare livelli elevati di concentrazione in pochi titoli, dato che l'investimento totale viene ripartito in modo equo tra l'universo dei titoli;
2) Maggiore stabilità in termini di pesi nel tempo. Questa caratteristica si deduce dal fatto che periodo per periodo è necessario ripristinare il peso del titolo i in modo che $wi = \frac{1}{N}$. Come conseguenza diretta di questa regola, il portafoglio non è sensibile alle variazioni del valore degli input e ai relativi errori di stima (in particolare la media, come indicato in precedenza).

Considerando il problema della concentrazione del portafoglio ottenuto attraverso il metodo media-varianza, si considera in particolare che tale problema è stato uno dei motivi principali che ha spinto notevolmente la ricerca di metodi alternativi. Alcuni autori (vedi [11], [12]) suggeriscono infatti un modello basato sull'entropia come misura di rischio (verrà esposta nel prossimo capitolo), proprio allo scopo di attenuare la concentrazione eccessiva del portafoglio in un numero ridotto di asset.

*Riferimenti capitolo 2*


*[1] Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the 1/N portfolio Strategy?. V. DeMiguel, L.Garlappi, R.Uppal. The Review of Financial Studies, vol. 22 no. 5 (2009).*

*[2] Communications to the Editor—A Note on Utility and Attitudes to Risk. K. Borch. Management Science, vol. 9 no.4 (1963).*

*[3] The markowitz Optimization Enigma: Is "Optimized" Optimal?. R.O.Michaud. Financial Analysts Journal January-February (1989).*

*[4] Efficient Portfolio Selection with Quadratic and Cubic Utility (1970), G. Hanoch, H. levy.*

*The Journal of Business, Vol. 43, No. 2 (1970).*

*[5] On the Sensitivity of Mean-Variance-Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some analytical and Computational Results .M.J. Best, R.R. Grauer. The Review of Financial Studies, vol. 4 no. 2 (1991).*

*[6] Two-sided coherent risk measures and their application in realistic portfolio optimization. Z. Chen, Y. Wang. Journal of Banking & Finance, 32 (2008).*

*[7] The Fundamental Approximation Theorem of Portfolio Analysis in terms of Means,Variances and Higher Moments (1970), P.A Samuelson. The Review of Economic Studies, Vol. 37, No. 4 (1970).*

*[8] Finanza Quantitativa. Risk Management e Statistica dei Mercati Monetari e Finanziar, G. Cassese, M. Pelagatti. Dipartimento di Statistica, Università Milano Bicocca.*

*[9] A mean-Variance-Skewness optimization model. H. konno, K. Suzuki. Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol.38 No. 2 (1995)*

*Vol, 38, No, 2, June 1995*

*[10] Portfolio selection (1952). H. Markowitz. The Journal of Finance, Vol. 7 No. 1 pp. 77-91*

*[11] Diversified portfolios with different entropy measures. J. Yu, W. Lee, W.P.Chiou. Applied Mathematics and Computation, 241 (2014).*

*[12] Multi-objective Mean-variance-skewness model for Portfolio Optimization. P. Jana, T.K.Roy and S.K. Mazumder. AMO - Advanced Modeling and Optimization, Volume 9, Number 1 (2007).*

# 3 – ENTROPIA

In questo capitolo, dopo un'introduzione sulla definizione e sull'evoluzione storica del concetto di entropia verranno illustrate le misure di entropia più diffuse nella letteratura economica e finanziaria.

## 3.1 INTRODUZIONE

L'entropia è un concetto che deriva dalla fisica e permette di valutare il grado di disordine in un sistema. Se aumenta il livello di disordine aumenta l'entropia, viceversa se diminuisce il disordine in un sistema, l'entropia cala. Recentemente questa misura è stata esportata in campi differenti, come la teoria dell'informazione, l'informatica, la biologia, la medicina e le scienze sociali. Inoltre, viene sempre più utilizzata da diversi studiosi anche nella risoluzione di problemi di natura economica e finanziaria. In quest' ottica, l'entropia può essere interpretata come un'espressione di rischio ed incertezza. Per comprendere però le caratteristiche di base e il funzionamento di questa misura è necessario ripercorrerne brevemente la storia e i principali campi in cui essa viene applicata*.

Il concetto di entropia è stato teorizzato inizialmente da Thomas Savery nel 1698 allo scopo di misurare l'energia rilasciata e dissipata dai motori. Sviluppato poi da Sadi Carnot nel 1824 nel campo della termodinamica, elaborando l'entropia come misura del disordine o complessità di un sistema termodinamico. Normalmente in natura si osserva spontaneamente un aumento del disordine dei sistemi fisici isolati (come affermato dal secondo principio della termodinamica). Da questa osservazione Carnot ha compreso che tanto più aumenta il grado di disordine del sistema, passando da un sistema più ordinato ad un sistema con un maggior livello di disordine, tanto più incrementa la misura che successivamente verrà denominata entropia. L'informazione fornita dall'entropia è quindi di tipo dinamico, in quanto segue la trasformazione del sistema.

È stato Rudolf Clausius che nel 1865 ha battezzato la misura introdotta da Carnot (dal greco: "en" che significa dentro e "tropé" che significa trasformazione) come entropia e l'ha applicata alla cessione di calore in un sistema. La versione proposta da Clausius diverrà la versione di base dell'entropia nell'ambito della termodinamica e viene misurata in termini di variazione:



**Per maggiori dettagli si rimanda a [21].*

$$\Delta S = \frac{Qrev}{T} \tag{3.1}$$

Questa relazione si ottiene rapportando piccole variazioni di calore dovute all'assorbimento o alla cessione di questo da parte del sistema (Qrev) rapportato alla temperatura del sistema (T).

L'entropia inoltre trova numerose applicazioni anche nel campo dei gas, di cui fornisce una misura dell'espansione e più in generale nella fisica classica, misurando la cessione dell'energia. Molto importante inoltre l'utilizzo in meccanica quantistica dove viene espressa, a differenza della termodinamica classica, non solo in termini relativi, misurando una variazione, ma anche in termini assoluti. Per chiarire questo aspetto si indica la misura di entropia più utilizzata in tale campo applicativo, l'entropia di Von Neumann che si definisce come segue:

$$S = -k\, Tr\, (\boldsymbol{\rho} Log \boldsymbol{\rho}) \tag{3.2}$$

con k costante denominata costante di Boltzmann, Tr l'operatore matriciale di traccia e $\boldsymbol{\rho}$ una tipologia di matrice utilizzata in meccanica quantistica chiamata matrice di densità.

Ai fini del seguente lavoro è utile invece comprendere l'applicazione dell'entropia nel campo della meccanica statistica, dove viene per la prima volta applicata come uno strumento statistico. L'entropia in tale campo viene normalmente indicata con la lettera S. La base della misura in meccanica statistica si può ricavare dal seguente principio di Boltzmann:

$$S = k\, Log\, \Gamma \tag{3.2}$$

con k costante costante di Boltzmann e Log che è il logaritmo naturale. Γ è il numero dei possibili microstati che si possono verificare nel sistema (o macrostato) data una certa temperatura, da questo fatto deriva il carattere probabilistico della misura.

In meccanica statistica grazie a tale principio si osserva un'estensione del concetto di entropia come misura della complessità o il disordine in un sistema. La misurazione avviene in base alla probabilità di verificarsi dei diversi microstati che compongono un sistema. L'obiettivo è quindi quello di ottenere informazioni sull'intero sistema, partendo dalla conoscenza dei diversi componenti dello stesso, definiti microstati. Maggiore è il numero di microstati e maggiore è la complessità del sistema e quindi

dell'entropia risultante. Intuitivamente il sistema tenderà a muoversi verso i macrostati più probabili e quindi quelli caratterizzati da maggior disordine.

Questa misura dell'entropia si è affermata come misura standard di entropia e da questa formulazione si ricava l'applicazione successiva da parte di Shannon [16] nel campo della teoria dell'informazione. La (3.2) gode infatti di due importanti caratteristiche:

1) È una formulazione generale rispetto alle misure introdotte in precedenza. È quindi possibile derivare le altre misure particolari partendo dalla (3.2).
2) Pur essendo espressa in termini assoluti, come avviene nel caso dell'applicazione nel campo meccanica quantistica, è possibile esprimerla in termini relativi grazie alla proprietà di addittività che gode la (3.2), valutando quindi la variazione di S.

Dal principio di Boltzmann, Willard Gibbs [19] deriva una formulazione che permette di descrivere un sistema in base alle probabilità ($p_{\mathrm{i}}$) di verificarsi dei suoi microstati, dove k rappresenta la costante di Boltzmann.

$$S = -k \sum_{i} pi \operatorname{Log} pi \tag{3.3}$$

S viene rappresentato in termini assoluti, rappresentando le unità di capacità termica.

Dalla (3.3) Claude Shannon [16] nel suo celebre articolo del 1948 deriva la formulazione di entropia che da questo studioso prenderà il nome. L'entropia di Shannon fonda le basi dell'applicazione dell'entropia nel campo della teoria dell'informazione come misura della perdita di informazione e sarà la prima misura di entropia applicata in finanza nello studio della selezione di portafoglio da parte di Philippatos e Wilson [15], letta come misura alternativa alla varianza in un approccio differente rispetto alla diversificazione del portafoglio classica. Nella teoria dell'informazione, l'entropia misura l'incertezza media che deriva dalla trasmissione di un messaggio dal soggetto che lo invia al soggetto che lo riceve, a seguito del passaggio del messaggio stesso attraverso un determinato canale. L'entropia in questo contesto si può interpretare come il contenuto informativo medio che viene effettivamente ricevuto dal destinatario. Il passaggio dalla teoria dell'informazione alla finanza è dovuto al carattere probabilistico assunto dalla misura che ne permette un'applicabilità generale a qualsiasi variabile casuale.

## 3.2 ENTROPIA NEL CAMPO DELLA TEORIA DELL'INFORMAZIONE*

Vista la relazione diretta tra il concetto di entropia sviluppato nell'ambito della teoria dell'informazione e le misure di entropia esportate da diversi autori in finanza è utile esaminarne l'evoluzione e le caratteristiche fondamentali per poter comprendere meglio il significato delle espressioni contenute nel paragrafo 3.4.

Nella teoria dell'informazione, lo schema concettuale di base consiste nel sistema di comunicazione che deve percorrere il messaggio. In un sistema di comunicazione si possono individuare alcune componenti fondamentali:

- FONTE O SORGENTE: il soggetto o l'oggetto che produce un messaggio o più messaggi successivi;
- TRASMETTITORE: meccanismo che permette di codificare e trasmettere il messaggio
- CANALE: connette il trasmettitore e il ricevente;
- RICEVENTE: meccanismo che decodifica il messaggio e compie l'operazione opposta rispetto al trasmettitore;
- DESTINATARIO: colui a cui è destinato il messaggio.

A livello interpretativo, l'entropia indica il contenuto informativo medio di un messaggio: un messaggio con alta probabilità di essere inviato conterrà poca informazione, mentre un messaggio avrà un maggiore contenuto informativo se la ricezione di tale messaggio è molto improbabile. Un messaggio viene interpretato come uno solo dei messaggi possibili contenuti in un certo insieme. Ad esempio se si prendono in considerazione l'insieme delle parole della lingua italiana come insieme di messaggi possibili la sequenza "ca" sarà molto più probabile e avrà meno entropia rispetto al messaggio "nz", poiché questo è più improbabile. All'aumentare quindi della casualità o minore frequenza del messaggio aumenta il contenuto entropico di questo. Data una sorgente che genera un numero N di possibili messaggi $S_i$ con i=1,… N, vi è quindi una maggiore probabilità per le sequenze comuni tipo "ca" piuttostro che altre.

La sorgente genera una serie di messaggi regolati da un certo processo stocastico e allo stesso modo del singolo messaggio di conseguenza la teoria mira anche a valutare l'informazione originata dalla sorgente o fonte. È possibile effettuare quindi oltre ad un'analisi del contenuto informativo di un singolo messaggio, anche un'analisi aggregata di più messaggi consecutivi. L'entropia come misura informativa è stata sviluppata da Claude Shannon nel 1948 [16], ispirandosi al teorema di Boltzmann (3.2) e alla successiva formulazione di Gibbs (3.3).

**Per maggiori dettagli si rinvia a [17].*

Shannon ha modellizzato a livello matematico il contenuto informativo di un certo evento casuale e per estensione, di una serie di eventi casuali in sequenza generati da una certa sorgente. La logica fondamentale è quella di assegnare un alto contenuto informativo ad un evento raro ed un contenuto informativo più basso ad un evento meno raro. In questa ottica, a differenza dell'applicazione dell'entropia in fisica dove questa misura indica il grado di disordine di un sistema o più in generale lo stato di chaos di questo, nel campo della teoria di informazione l'entropia è sinonimo di casualità. Se ne deriva che a maggiore casualità corrisponde una maggiore entropia e viceversa una casualità minore comporta una minore entropia.

A livello matematico è possibile indicare il contenuto informativo che deriva dall'osservazione di un certo evento casuale X (il messaggio), la cui probabilità di verificarsi è p(x) attraverso la seguente formula:

$$I(x) = -Log_b p(x) \tag{3.4}$$

Utilizzando come base una costante positiva b per garantire generalità alla formula del contenuto informativo di un messaggio.

La funzione I(x) che rappresenta l'informazione derivante dall'accadimento dell'evento casuale X soddisfa alcune importanti proprietà:

1) I(Ω)=0 → dato Ω lo spazio degli eventi possibili o evento certo, l'osservazione di Ω non fornisce alcuna informazione, dato che la probabilità che tale evento accada è pari ad 1.
2) Dato un evento raro il contenuto informativo di tale informazione è molto elevato dato che l'evento ha probabilità che tende a 0 di realizzarsi.
3) Se $A \subset B \rightarrow I(A) \geq I(B)$ → dato che A è contenuto in B allora A è sicuramente meno probabile o al massimo tanto probabile quanto B se i due eventi coincidono, per tale motivo il contenuto informativo di A è sicuramente maggiore o uguale al contenuto informativo di B.

Normalmente nella teoria dell'informazione, dato che l'unità di misura fondamentale è il bit, che è espressione del codice binario, la base b del logaritmo utilizzata nella formula è normalmente 2 (come si vedrà successivamente nel caso dell'entropia di Rényi (3.11)). L'unità di misura del risultato I(x) e di conseguenza dell'entropia informativa dipenderà dalla base del logaritmo utilizzata. La scelta del logaritmo viene giustificata da Shannon sia per le sue caratteristiche matematiche che per il suo utilizzo estensivo e consolidato nel campo delle misurazioni.

Per giungere alla formula finale dell'entropia di Shannon (3.5), che verrà poi ripresa in seguito nel paragrafo 3.4 è necessario valutare in modo aggregato il contenuto informativo di più eventi casuali generati da una certa sorgente, sviluppando la (3.4) in forma aggregata e media. Partendo dal concetto che una sorgente casuale genera diversi eventi, si può interpretare la stessa come una variabile casuale X che può assumere i valori $x_i$con i=1, ..., N, ognuno con la probabilità rispettiva $p(x_i)$. Si comprende quindi che l'informazione attesa da una certa sorgente casuale, applicando i concetti fondamentali della misura statistica del valore atteso si può indicare come:

$$H(X) = E\big(I(X)\big) = E(-Log_b p(x))$$

Da questa formulazione derivata dalla (3.4), tenendo conto che E(X) nel caso di un variabile casuale X discreta si definisce come nella espressione (1.3), si ottiene la seguente espressione di base dell'entropia di Shannon:

$$H(X) = -k \sum_{i=1}^{N} p(xi) Log_e\, p(xi) \tag{3.5}$$

$x_i$ rappresenta l'evento i-esimo con i=1,…, N con probabilità $p_i$ di realizzarsi, k è una costante maggiore di 0 che ha la semplice funzione di modulare l'unità di misura dell'entropia. Di norma come base b del logaritmo si utilizza il numero e, utilizzando quindi il logaritmo naturale Log. Attraverso l'utilizzo del logaritmo naturale si ottiene una misura in termini di nat, unità di misura dell'informazione introdotta da Shannon.

Nel caso continuo, indicando con p(x) la densità di probabilità connessa alla variabile casuale X continua, la formula del caso discreto diventa la seguente, mantenendo interpretazione e caratteristiche della (3.5) e differenziandosi per l'uso dell'integrale al posto della sommatoria:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) Log\; p(x)\; dx \tag{3.6}$$

## 3.3 PROPRIETÀ FONDAMENTALI DELL' ENTROPIA NELLA TEORIA DELL'INFORMAZIONE

L'entropia (indicata con la lettera H) in quanto tale secondo Yager [8], Shannon [16] e Rényi [10] deve soddisfare alcune caratteristiche per poter essere definita tale:

1) Simmetria: il valore dell'entropia H non dipende dall'indicizzazione i di $p_i$ ;
2) Espandibilità: se si aggiunge nella distribuzione di probabilità di una variabile casuale un nuovo evento J tale che $p_j = 0$, l'entropia associata a tale distribuzione non cambia;
3) Continuità: il valore risultante dell'entropia di una certa distribuzione di probabilità deve essere continuo rispetto alle probabilità $p_i$ degli eventi. Non si possono quindi presentare dei punti di discontinuità;
4) Il valore massimo dell'entropia (pari ad 1) si ha quando in una distribuzione tutti gli eventi sono equiprobabili, cioè quando $p_i = 1/\mathrm{N}$ per ogni i dati N eventi. L'entropia a livello interpretativo infatti è una misura di incertezza collegata ad una certa distribuzione di probabilità e il caso di massima incertezza nel risultato si ha quando tutti gli eventi sono equiprobabili. Una distribuzione più concentrata verso determinati eventi invece presenta una entropia e quindi incertezza minore;
5) Monotonia: dato per assunto che tutti gli eventi sono equiprobabili tra loro, tanto è più grande N, con N il numero degli eventi possibili, tanto più il valore dell'entropia è elevato. Di conseguenza maggiore è il numero di eventi equiprobabili e più aumenta l'incertezza ricollegabile alla distribuzione di probabilità;
6) L'entropia H assume il suo valore minimo quando vi è un unico evento $x_1$ che assume probabilità $p_1$=1. Questo perché in questo caso si ha la minima incertezza possibile, dato che il risultato è certo e la distribuzione di probabilità è degenere in un unico valore;
7) Additività: L'entropia di una distribuzione di probabilità costruita dalla somma di due distribuzioni di probabilità di variabili casuali fra loro indipendenti è la somma delle entropie individuali delle singole distribuzioni. Se le variabili casuali non sono fra loro indipendenti l'entropia sarà pari alla somma delle entropie condizionate delle variabili casuali come verrà descritto nel paragrafo 4.1.

## 3.4 MISURE DI ENTROPIA PIÙ UTILIZZATE IN FINANZA

Nel tempo sono state sviluppate diverse misure di entropia ed ognuna differisce per proprietà, caratteristiche e chiave di lettura, anche se generalmente le sette proprietà fondamentali indicate nel paragrafo 3.3 vengono rispettate dalle varie misure. La chiave di lettura comune di tutte le misure di entropia risiede nella capacità di misurare l'incertezza o l'indeterminatezza di una data distribuzione di probabilità. Questo è un concetto molto importante in finanza, visto che l'incertezza o il grado di disordine possono essere viste come una possibile misura di rischio alternativa rispetto agli strumenti statistici tradizionali come la varianza.

### 3.4.1 ENTROPIA DI SHANNON

Questo modello non lineare è stato sviluppato da Shannon [16], come precedentemente osservato, nella branca della teoria dell'informazione per trattare i sistemi più semplici e solo successivamente è stato esportato in finanza da diversi autori [1], [2].

Data la distribuzione di probabilità di una variabile casuale X che assumiamo discreta: $p_i$ =p(X=i) con i=1, ..., N, l'entropia di Shannon si definisce nel modo seguente:

$$S(X) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \operatorname{Log} p_i \tag{3.7}$$

con 0 Log0 = 0 (come indicato in [1],[2],[4]), $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, $p_i \geq 0$ e $p_i \leq 1$ ; Log corrisponde al logaritmo naturale.

A livello interpretativo è importante osservare come la costruzione della misura S(X) permetta di ottenere un numero positivo. Essendo infatti pi un numero compreso tra 0 e 1, il logaritmo di pi assumerà un valore negativo, raggiungendo il valore massimo di 0 quando pi è pari ad 1. Per tale motivo il segno meno anteposto alla sommatoria permette di ottenere un valore di entropia positivo. Da questa indicazione si può intuire l'utilizzo dell'entropia di Shannon come misura di incertezza di una distribuzione di una variabile casuale. Se la distribuzione di probabilità collassa in un unico valore, ciò significa che il rendimento di un'attività è certo, in questo caso si avrà quindi il livello minimo di

incertezza con l'entropia che assume un valore pari a 0: S(X)=0. Il valore massimo dell'entropia si ha invece nel caso di una distribuzione uniforme dove tutti gli eventi sono equiprobabili, concettualmente associata al massimo livello di incertezza del rendimento. L'entropia di Shannon può quindi essere interpretata come una misura di incertezza del rendimento di un titolo o di un portafoglio e maggiore è il valore assunto da S(X), maggiore è l'incertezza del rendimento. Secondo Philippatos e Wilson [15] è quindi possibile leggere l'entropia di Shannon anche come una misura di dispersione, similmente alla varianza come si vedrà nel capitolo inerente alla teoria del portafoglio creato introducendo come misura di rischio l'entropia.

La misura dell'entropia di Shannon è definibile anche nel caso di una variabile casuale X continua, in questo caso data f(x) la funzione di densità di probabilità, l'entropia di Shannon nel continuo diventa:

$$S(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{Log}\,f(x)\,dx \tag{3.8}$$

L'interpretazione della misura e le sue caratteristiche nel caso continuo sono le stesse rispetto al caso discreto.

### 3.4.2 ENTROPIA DI TSALLIS

Misura sviluppata da Costantino Tsallis [9] come generalizzazione dell'entropia di Gibbs e di conseguenza dell'entropia di Shannon (3.3), (3.5) e viene espressa nella sua formulazione originale come segue:

$$S_q = k\frac{1 - \sum_{i=1}^{w} {p_i}^q}{q-1} \tag{3.9}$$

con $q \in R$ e viene chiamato indice entropico, $k > 0$, la costante fisica di Boltzmann e w il numero di microstati o componenti del sistema. Tale misura permette rispetto all'entropia di Shannon di gestire i sistemi fisici più complessi.

Una proprietà importante di questa misura è che quando $q \to 1$, la misura $S_q$ tende a coincidere con La misura dell'entropia di Gibbs e di conseguenza con la misura di entropia di Shannon (3.3), (3.5):

$$S = -k \sum_i p_i \operatorname{Log} p_i \ .$$

Con riferimento alla (3.9), se q>0 in $p_i = \frac{1}{W}$ per ogni i la funzione $S_q$ assume il suo valore massimo mentre se q<0 quando $p_i = \frac{1}{W}$ per ogni i, la funzione assume il suo valore di minimo. Grazie a questa considerazione per derivare una misura di entropia è necessario restringere il dominio di q ai soli numeri reali positivi, così facendo l'entropia assumerà il suo valore di massimo quando $p_i = \frac{1}{W} \ \forall \ i$, nel rispetto della proprietà numero quattro indicata nel paragrafo 3.3.

Sono quindi necessarie delle modifiche rispetto alla formulazione originale per poterla definire come una misura di entropia e fare in modo che possa essere applicata in finanza come misura di incertezza [4]. A seguito di un cambio notazione da q ad α, restringendo come sopra indicato il dominio dell'indice α, indicando la misura dell'entropia di Tsallis di ordine α come $H_\alpha$ , includendo nella stessa definizione la proprietà che interviene nel caso di α=1 ed Inoltre rispetto a w, numero di microstati nel sistema è preferibile indicare N come numero di valori che può assumere una data variabile aleatoria X. Infine non viene considerata la costante fisica di Boltzmann che viene quindi posta pari ad 1. A seguito di queste modifiche l'entropia di Tsallis di ordine α di una variabile casuale discreta X con $p_i$ =p(X=i) con i=1, ..., N si definisce come:

$$H_\alpha = \begin{cases} \frac{1}{\alpha - 1}(1 - \sum_{i=1}^{N} {p_i}^{\alpha}) & se\ \alpha \neq 1 \\ -\sum_{i=1}^{N} p_i \ \operatorname{Log}(p_i) & se\ \alpha = 1 \end{cases} \qquad (3.10)$$

con $\alpha \in R^+$.

Questa misura di entropia ha la stessa interpretazione rispetto all'entropia di Shannon (3.7) ed è stata sviluppata nel campo della teoria dell'informazione, con alcune applicazioni anche in biologia.

### 3.4.3 ENTROPIA DI RÉNYI

L'entropia di Rényi è stata introdotta da Alfrèd Rényi [10] nella branca della teoria dell'informazione ed è stata elaborata come una generalizzazione dell'entropia di Shannon e come possibile alternativa per misurare l'entropia di una distribuzione di probabilità. Come tutte le misure di entropia misura il grado di incertezza di una distribuzione di probabilità e data una variabile casuale X con $p_i = p(X = i)$ con i=1, ..., N, L'entropia di Rényi di ordine α si indica nel modo seguente [3]:

$$H_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} Log_2 \sum_{i=1}^{N} {p_i}^{\alpha} \qquad (3.11)$$

con $\alpha \geq 0$.

Quando il parametro $\alpha$ tende a 0, la misura dell'entropia di Rényi $H_\alpha$ tende a prescindere dalla probabilità degli eventi e dipendere dalla sola numerosità dei valori che può assumere la variabile casuale X. Infatti se $\alpha \to 0$ si avrà:

$$Log_2(\sum_{i=1}^{N} {p_i}^{0}) = Log_2(N)$$

che indica che nel caso in cui α sia pari a 0, la misura dell'entropia coincide con il logaritmo in base 2 di N, con N il numero di possibili stati di $p_i$ .

Se invece $\alpha \to 1$ la misura dell'entropia va a coincidere con l'entropia di Shannon (3.7).

Quando $\alpha \to +\infty$ la misura di entropia tende ad essere determinata unicamente dalla probabilità dell'evento $x_i$ più probabile. Infatti se $\alpha \to +\infty$ la misura diventa la seguente:

$$-Logmax_i p_i$$

che indica che nel caso in cui α tende ad ∞, la misura dell'entropia coincide con il logaritmo in base due della probabilità dell'evento più probabile.

L'entropia di Rényi di ordine α nel caso di una variabile casuale X continua invece si indica come segue:

$$H_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\, ln \int_0^\infty p^\alpha\,(x)dx \tag{3.12}$$

L'interpretazione del parametro α è la stessa del caso discreto.

dato $\alpha > 0\ e\ costante$.

### 3.4.4 ENTROPIA RELATIVA O KULLBACK CROSS-ENTROPY

Questo tipo di misura di entropia è stata sviluppata da S. Kullback e R.A. Leibler [11] come generalizzazione dell'entropia di Shannon (3.5), (3.6). Si tratta di una misura con caratteristiche differenti rispetto a quelle introdotte fino ad ora, non rispetta infatti le proprietà tipiche delle misure di entropia viste in precedenza. Questa formulazione di entropia valuta una certa distribuzione di probabilità P in relazione ad un'altra distribuzione di probabilità Q. La distribuzione di probabilità Q viene quindi presa come punto di riferimento per valutare la distribuzione di probabilità oggetto di analisi. Gli autori [11] dopo aver generalizzato ed espresso in termini relativi il concetto di informazione rispetto alla nozione introdotta da Shannon riassunta nel paragrafo 3.2 sviluppano la misura (3.13). In particolare il concetto di informazione viene indicata dai due autori come:

$$I(1,2) = log \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \tag{3.13}$$

dove $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono rispettivamente le funzioni di densità di probabilità associate alle distribuzioni P e Q.

Normalmente viene preso come punto di riferimento una distribuzione Q di tipo uniforme. In questo modo si riesce a valutare la distanza tra la distribuzione P e la distribuzione con il massimo grado di incertezza. Più la distribuzione P tende ad avvicinarsi alla uniforme, tanto più i diversi eventi sono equiprobabili fra loro e la misura di entropia (3.14), (3.15) tende al suo livello minimo. Nel caso di una variabile casuale X discreta con distribuzione di probabilità P tale che $p_i = p(X = i)$ con i=1, ..., N e una distribuzione alternativa Q della stessa variabile casuale discreta X, (determinata come benchmark) con $q_i = p(X = i)$ con i=1, ..., N, l'entropia relativa si indica come [4]:

$$D(P:Q) = \sum_{i=1}^{N} pi\, Log \frac{pi}{qi} \tag{3.14}$$

Tale misura gode delle due seguenti proprietà:

- D(P:P)=0;
- Se $P \neq Q\ allora\ D(P:Q) \neq 0$;
- Il valore massimo della misura si osserva quando $p_i = 1$ per un unico valore di i mentre è pari a 0 per tutti gli altri valori di i mentre $q_i$ è pari ad $\frac{1}{N}$ per ogni i;
- Se $q_i \leq p_i \ \forall\ i\ con\ i = 1, \dots, N$, allora la misura $D(P:Q)$ sarà $\geq 0$ mentre se $q_i \geq p_i \ \forall\ i\ con\ i = 1, \dots, N$ allora $D(P:Q)$ sarà $\leq 0$. Questo risultato si ottiene considerando che il logaritmo di numeri compresi tra 0 ed 1 estremi esclusi è un numero negativo, mentre il logaritmo di numeri maggiori di 1 è un numero positivo.

Date le premesse è quindi possibile offrire un'interpretazione di questa misura opposta rispetto alle misure tradizionali di entropia, in quanto se la distribuzione di riferimento Q, come di solito accade, è la distribuzione uniforme, allora tanto più la misura derivante dalla (3.14) è bassa e tanto più la distribuzione di probabilità oggetto di analisi è caratterizzata da maggiore incertezza (e quindi entropia) e viceversa. Questo come vedremo nel paragrafo 3.5.2 influirà nella formulazione del principio della minima entropia.

È possibile definire tale misura, mantenendo la stessa interpretazione del caso discreto anche nel caso in cui X sia una variabile casuale continua [3]:

$$D(P:Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) Log \frac{p(x)}{q(x)} dx \tag{3.15}$$

p(x) e q(x) sono le funzioni di densità di probabilità della distribuzione P e della distribuzione Q rispettivamente.

### 3.4.5 ENTROPIA RELATIVA DI TSALLIS

Evoluzione dell'entropia classica di Tsallis (3.9), applicata al caso di valutazione dell'entropia di una variabile casuale X continua. Tsallis ha ripreso il concetto della Kullback cross-entropy (3.14), (3.15) modificando la misura tradizionale dell'entropia di Tsallis. Tale misura è stata introdotta con l'intento

di generalizzare sia l'entropia di Tsallis che l'entropia Kullback cross-entropy e si formula nel modo seguente [4]:

$$T_q(P:P_0) = \int_{\Sigma} p(x) \frac{\left[\frac{p(x)}{p_0(x)}\right]^{q-1} - 1}{q-1} dx \tag{3.16}$$

Con q >0 e $P_0$ la distribuzione di riferimento, p(x) e $p_0$(x) sono le funzioni di densità di probabilità della distribuzione P e $P_0$ rispettivamente.

### 3.4.6 ENTROPIA DI YAGER

L'entropia di Yager [8] misura il grado di incertezza di una distribuzione di probabilità e può essere interpretata sia come l'entropia relativa di Tsallis (3.16) sia come la Kullback cross entropy (3.14), (3.15) come una misura della distanza fra una distribuzione e la distribuzione uniforme. Sviluppata in termini di pesi $w_i$, l'entropia di Yager misura quindi la distanza tra la distribuzione dei pesi oggetto di analisi $w_i$, con i=1,…, N e una distribuzione equipesata con $w_i = \frac{1}{N}\ \forall\ i$. Il valore della misura sarà tanto più elevato quanto più i pesi oggetto di analisi si avvicinano a tale condizione. In questo caso infatti si ha il caso di massima incertezza e dispersione. Se $w_i = \frac{1}{N}$ infatti la differenza fra wi e $\frac{1}{N}$ sarebbe pari a 0 e la sommatoria si ridurrebbe ad una somma di zeri, ottenendo il massimo valore della misura. Viceversa maggiore è la distanza dei pesi rispetto ad una distribuzione equipesata degli stessi e minore sarà il valore della misura. L'entropia di Yager di ordine z si indica come [7]:

$$Q = -\sum_{i=1}^{N} \left(\left|w_i - \frac{1}{N}\right|^z\right)^{\frac{1}{z}} \tag{3.17}$$

con z una costante $\geq 1\ e\ \sum w_i = 1$. La costante z rappresenta un opportuno parametro di scala.

Questa misura raggiunge il suo valore minimo quando la distribuzione di probabilità collassa in un unico valore $x_1$ con $p_1 = 1$, indicando il caso di massima certezza.

Un caso particolare si ha quando z=1, in questo caso la (3.17) diventa la seguente:

$$-\sum_{i=1}^{N}\left|w_i-\frac{1}{N}\right| \tag{3.18}$$

Riducendosi quindi ad una somma di tutti i valori assoluti della distanza tra i pesi $w_i$ della distribuzione oggetto di analisi e i pesi nel caso di una distribuzione uniforme $\frac{1}{N}$.

Dalla (3.18) inoltre si deriva che più z è elevato e al limite tende a $+\infty$, tanto più come dimostrato da Yager la misura tenderà al valore $-(Max_i[p_i]-\frac{1}{N})$.

### 3.4.7 MINIMAX DISPARITY MODEL

Questo modello sviluppato da Wang e Parkan nel 2005 [12] con l'obiettivo di ottenere un vettore di pesi $w_i$. Può essere interpretato come una misura di entropia relativa, secondo Yu, Lee e Chiou [7]. La formula seguente consente infatti di minimizzare la distanza massima fra i vari pesi associati ai vari stati. La situazione in cui si ha la minima distanza massima (senza considerare gli eventuali vincoli) è il caso in cui $w_i=\frac{1}{N}\ \forall i\ con\ i=1,\dots,N$. Tale situazione indica quindi il caso in cui l'entropia è massima, di conseguenza il minimax disparity model consente di ottenere dei pesi vicini alla situazione di massima entropia. La formulazione è la seguente:

$$Min\,\{Max|w_i-w_{i+1}|\}\quad con\ i=1,\dots,N-1. \tag{3.19}$$

dato $\sum wi=1\ e\ 0\le w_i\le 1$.

Viene poi introdotto come vincolo nel modello la seguente misura:

$$\alpha=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(N-i)w_i \tag{3.20}$$

Con α che indica la misura di orness, i cui dettagli sono illustrati insieme ad un approfondimento sul modello in appendice.

## 3.5 PRINCIPI RELATIVI ALL'ENTROPIA

In questo paragrafo verranno illustrati due principi spesso utilizzati in finanza ed economia per l'applicazione delle misure di entropia nella risoluzione di alcuni problemi [3], [4]. In particolare nel presente lavoro verrà applicato il principio illustrato nel paragrafo 3.3.1 nella selezione del portafoglio.

### 3.5.1 PRINCIPIO DELLA MASSIMA ENTROPIA

Come deriva dal nome stesso, il principio consiste nella massimizzazione dell'entropia. In questo modo si riesce ad ottenere la distribuzione con il grado di incertezza maggiore o equivalentemente più dispersa e meno concentrata. Tale principio si può applicare normalmente nel caso dell'entropia di Shannon (3.7) ma può essere estesa ai casi dell'entropia di Tsallis (3.9), dell'entropia di Rényi (3.11) e dell'entropia di Yager (3.17). In queste misure infatti ad un valore maggiore dell'entropia corrisponde un valore maggiore dell'incertezza della distribuzione di probabilità. Il problema è quindi risolvibile tramite l'ottimizzazione delle formule (3.7), (3.9), (3.11), (3.17).

Il principio verrà utilizzato in alcuni modelli proposti nel paragrafo 4.2.

### 3.5.2 PRINCIPIO DELLA MINIMA ENTROPIA

Questo principio viene applicato per la formulazione dell'entropia Kullback cross entropy (3.13) in quanto questa misura indica che tanto più una distribuzione P tende ad una distribuzione di riferimento Q (normalmente viene utilizzata la distribuzione uniforme) e tanto più il valore misurato sarà basso. Quindi dato che l'obiettivo è avvicinarsi alla distribuzione con il massimo livello di entropia, allora sarà necessario minimizzare le misure (3.14), (3.15) per ottenere la distribuzione più vicina possibile a quella di riferimento Q uniforme. Analogamente al caso precedente è sufficiente procedere alla minimizzazione della (3.14) o (3.15) per applicare il principio.

***Riferimenti Capitolo 3***


*[1] Entropy Measures for Assessing Volatile Markets. M. Sheraz, S. Dedu, V.Preda. Procedia Economics and Finance Vol 22 (2015).*

*[2] Entropy: a new measure of stock market volatility?. S.R.Bentes, R.Menezes. J. Phys.: Conf. Ser. 394 (2012)*

*[3] On the Review ad Application of Entropy in Finance. A. Sulthan, G.S.David Sam Jayakumar. IJBIT / Volume 10 / Issue 1 / October 2016 – March 2017.*

*[4] Applications of Entropy in Finance: A Review . R. Zhou, R. Cai, G. Tong. Entropy, 15 (2013).*

*[5] Indeterminancy of portfolio selection. M.R. Simonelli. European Journal of Operational Research, 163 (2005).*

*[6] Dizionario online Treccani (http://www.treccani.it/vocabolario/entropia).*

*[7] Diversified portfolios with different entropy measures. J. Yu, W. Lee, W.P.Chiou. Applied Mathematics and Computation, 241 (2014).*

*[8] Measures of Entropy and Fuzziness Related to Aggregation Operators (1995), R.R.Yager. Information Sciences 82, (1995).*

*[9] Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics (1987), C. Tsallis. Journal of Statistical Physics, Vol. 52, Nos. 1/2 (1988)*

*[10] On Measures of Entropy and Information, A. Rènyi. University of California Press, Berkeley and Los Angeles (1961)*

*[11] On information and Sufficiency, S. Kullback, R. Leibler. The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 22, No. 1 (1951).*

*[12] A minimax disparity approach for obtaining OWA operator weights. Y. Wang, C. Parkan. Information Sciences, 175 (2005).*

*[13] Two new models for determining OWA operator weights (2006), Y. Wang, Y. Luo, X. Liu. Computers & Industrial Engineering, 52 (2007).*

*[14] A linear programming model for determining ordered weighted averaging operator weights with maximal Yager's entropy (2009), J.Wu, B. Sun, C. Liang, S. Yang. Computers & Industrial Engineering, 57 (2009).*

*[15] Entropy, market risk, and the selection of efficient portfolios. G.C.Philippatos, C.J. Wilson. Applied Economics, 4 (1972).*

*[16] A Mathematical Theory of Communication. C. E. Shannon. The Bell System Technical Journal, Vol. 27 (1948).*

*[17] Entropy (information theory). https://en.wikipedia.org/wiki/Entropy_(information_theory).*

*[18] Kullback–Leibler divergence.*

*https://en.wikipedia.org/wiki/Kullback%E2%80%93Leibler_divergence.*

*[19] Entropy (statistical thermodynamics).*

*https://en.wikipedia.org/wiki/Entropy_(statistical_thermodynamics)*

*[20] Rényi entropy. https://en.wikipedia.org/wiki/R%C3%A9nyi_entropy*

*[21] Entropy. https://en.wikipedia.org/wiki/Entropy*

# 4 - REVIEW DELLA LETTERATURA SULLA COSTRUZIONE DEL PORTAFOGLIO INCLUDENDO MISURE DI ENTROPIA

In questo capitolo si illustreranno i principali modelli di portafoglio che si basano sull'entropia del portafoglio elaborati in letteratura.

## 4.1 PRIMO MODELLO

Il primi autori che hanno applicato il concetto di entropia nella selezione di un portafoglio di titoli sono stati G. C. Philippatos e J. Wilson [7]. L'idea di utilizzare una nuova misura di rischio o incertezza rispetto alla varianza deriva dalla volontà di sorpassare alcuni limiti insiti nel modello media-varianza di Markowitz (1952) [8], che rappresenta uno standard sia teorico che operativo nell'attività di portfolio selection.

Philippatos e Wilson sono partiti dai limiti del modello tradizionale media-varianza, esponendo nel loro articolo un modello alternativo. I due autori hanno intuito che l'utilizzo dell'entropia in sostituzione alla varianza come indicatore di rischio potesse essere proficuo nella costruzione della frontiera efficiente, date due caratteristiche fondamentali della misura dell'entropia che la varianza non possiede. Come prima osservazione l'entropia è una misura di incertezza più generale della varianza poiché essa può essere calcolata senza formulare particolari ipotesi di tipo distributivo, a differenza del modello media-varianza che richiede una distribuzione unimodale e simmetrica. Nel caso di rendimenti non distribuiti secondo una distribuzione normale, l'approccio tradizionale richiede comunque di ipotizzare una distribuzione normale e di conseguenza questa approssimazione può portare a commettere errori dovuti al mancato rispetto degli assunti sottostanti al modello. Per quanto riguarda la maggiore generalità dell'entropia si osserva che questa può essere calcolata, a differenza della varianza, sia per "metric data" (dati numerici/quantitativi) che per "non metric data" (attributi o caratteristiche qualitative).

Dopo aver osservato i pregi dell'entropia come misura alternativa di rischio da utilizzare nella selezione di portafoglio, gli autori ne dimostrano l'applicabilità al problema considerato e successivamente sviluppano un modello di portafoglio media-entropia. Come misura di entropia viene utilizzata

l'entropia di Shannon, già discussa nel paragrafo 3.4.1. Secondo i due autori è necessario rispettare due condizioni:

1) Poter individuare nell'insieme dei possibili stati del mondo (rappresentato da tutti i possibili rendimenti) tutti gli eventi tra loro non coincidenti nel quale può essere partizionato l'insieme.

2) Poter assegnare a tutti gli eventi individuati un valore tra 0 ed 1 che indica la loro probabilità.

L'approccio proposto dagli autori si sviluppa nel modo seguente:

Se le due condizioni vengono rispettate è possibile sostituire l'entropia alla varianza come misura di rischio intesa come dispersione della distribuzione dei rendimenti.

Si prende come misura di base dell'entropia, l'entropia di Shannon (3.7) e si utilizza il logaritmo in base 2 come segue:

$$H = -\sum_{i=1}^{N} p_i \, Log_2 p_i \tag{4.1}$$

Gli autori ipotizzano la presenza di due titoli, titolo 1 e titolo 2, definendo rispettivamente i rendimenti del titolo 1 $R_{1i}$ con i=1, …, N con probabilità $p_i$ con i=1, …, N e i rendimenti del titolo 2 $R_{2j}$ con j=1,…, M con probabilità $p_j$ con j=1, …, M. Philippatos e Wilson definiscono poi l'entropia congiunta allo scopo di costruire la frontiera efficiente composta dai diversi portafogli contenenti il titolo 1 e il titolo 2 in diverse proporzioni. L'entropia congiunta è l'entropia calcolata sui rendimenti congiunti $R_1$ e $R_2$ e si definisce nel seguente modo:

$$H(R_1, R_2) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} p(R_{1i}, R_{2j}) log_2 \left[p(R_{1i}, R_{2j})\right] \tag{4.2}$$

Con $R_{1i}$ il rendimento i-esimo del titolo 1 con probabilità $p_i$ e $R_{2j}$ il rendimento j-esimo del titolo 2 con probabilità $p_j$. $p(R_{1i}, R_{2j})$ indica invece la probabilità di osservare congiuntamente per il titolo 1 il rendimento i-esimo e per il titolo 2 il rendimento j-esimo.

Gli autori proseguono poi indicando il caso particolare e semplificato in cui i rendimenti dei due titoli considerati siano indipendenti. Questa situazione può essere assimilata al caso in cui nell'approccio tradizionale il coefficiente di correlazione tra i rendimenti dei due titoli che compongono il portafoglio

sia pari a 0, come illustrato nel paragrafo 1.5.1. In questo caso infatti la formula (4.2) si semplifica e diventa la seguente:

$$H(R_1, R_2) = H(R_1) + H(R_2). \tag{4.3}$$

Indicando che nel caso di rendimenti indipendenti fra loro, l'entropia congiunta è la somma delle due entropie individuali.

Inoltre in analogia all'approccio di portafoglio di Markowitz dove la varianza del portafoglio dipende dalla varianza e dalle covarianze dei rendimenti dei titoli fra loro, dato che generalmente i titoli non sono fra loro indipendenti ma positivamente o negativamente correlati, anche nel considerare l'entropia complessiva del portafoglio è necessario considerare sia l'entropia individuale dei rendimenti che l'entropia condizionale tra questi. L' entropia congiunta di due rendimenti nel caso in cui questi non siano indipendenti fra loro corrisponde a:

$$H(R_1, R_2) = H(R_1) + H(R_2|R_1),$$

oppure in modo equivalente:

$$H(R_1, R_2) = H(R_2) + H(R_1|R_2) \tag{4.4}$$

dove l'entropia condizionale tra due rendimenti è definita come segue:

$$H(R_2|R_1) = -\sum_{j}^{M}\sum_{i}^{N} p(R_{1j}, R_{2i}) log_2\left[p(R_{2i}|R_{1j})\right] \tag{4.5}$$

con p($R_{2i}|R_{1j}$) che corrisponde alla probabilità che il rendimento del titolo 2 sia il rendimento i-esimo dato che il rendimento del titolo 1 è il j-esimo.

Nel caso di un portafoglio composto da 2 titoli come misura di rischio si utilizza l'entropia indicata nella (4.4) nella formulazione dell'entropia di Shannon. Si costruisce quindi la frontiera efficiente attraverso la minimizzazione dell'entropia dei rendimenti dato il rendimento atteso dei titoli. Oppure analogamente al modello tradizionale di Markowitz è possibile seguire la via alternativa massimizzando i rendimenti dato un certo livello di entropia.

Gli autori indicano poi una formulazione generalizzata dell'entropia congiunta definendola come l'entropia complessiva del portafoglio Hp. L'entropia complessiva, sviluppando lo stesso ragionamento relativo all'entropia congiunta di due rendimenti, si definisce come la somma delle entropie condizionali di N rendimenti dei titoli:

$$Hp = H(R_1, \dots, R_N) = H(R_1) + H(R_2|R_1) + H(R_3|R_1, R_2) + \cdots + H(R_N|R_1, \dots, R_{N-1}) \qquad (4.6)$$

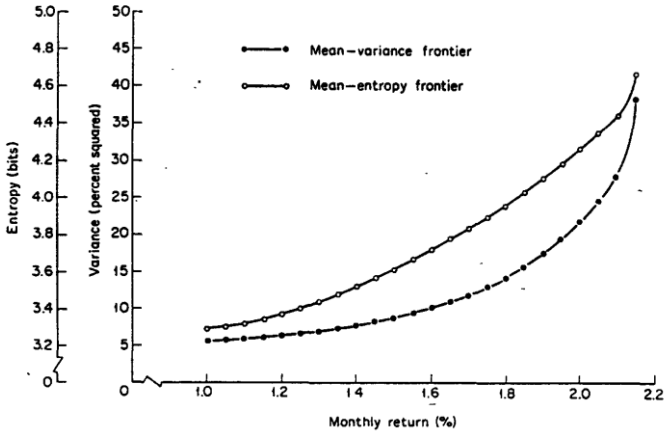
Gli autori costruiscono poi la frontiera media-entropia nel caso generale di N titoli per derivare i portafogli efficienti secondo tale approccio minimizzando l'entropia dato il livello di rendimento atteso E(R). Gli autori tramite questa procedura ottengono una frontiera efficiente. Infine viene mostrato empiricamente come la frontiera ottenuta attraverso un approccio media-entropia fornisca risultati accettabili, compatibilmente all'approccio standard, con tutti i vantaggi di una misura di rischio più generale rispetto alla varianza.

I vantaggi principali, come enunciato dagli autori sono:

1) La possibilità di utilizzare il modello con qualsiasi distribuzione dei rendimenti degli asset, senza dover ipotizzare la normalità dei rendimenti.
2) La maggior generalità della misura, data la possibilità di analizzare sia "metric" che "non-metric data" intendendo come non metric data tutti gli attributi dei titoli non numerici come settore, codice identificativo o altri elementi di natura qualitativa. Possibilità solo teorizzata che però non è stata ulteriormente sviluppata in seguito dagli autori o da altri studiosi nell'ambito della teoria del portafoglio.

L'approccio invece ha come principali svantaggi la difficoltà di dover calcolare sia probabilità individuali che congiunte e condizionate dei rendimenti, rendendo la metodologia per il calcolo della frontiera efficiente media-entropia, complicato e laborioso. Infatti gli autori auspicano uno sviluppo futuro, volto a semplificare e rendere maggiormente operativo il modello proposto. Inoltre all'epoca essendo il primo modello di portafoglio proposto basato sull'entropia come misura di incertezza, gli autori hanno sottolineato l'esoticità della misura e la necessità di inserirla con maggior vigore nella teoria economico-finanziaria prima del suo generale utilizzo.

Nonostante questi limiti, la novità del modello ha portato in seguito alla ricerca di una metodologia più fluida ed operativa nella costruzione di una frontiera efficiente che preveda l'utilizzo dell'entropia.




*Fonte: [7]*

## 4.2 PROPOSTE DI MODELLI ALTERNATIVI

In seguito, diversi autori hanno proposto modelli alternativi nei quali è presente a diverso titolo l'entropia. Tale misura viene inserita nei modelli proposti principalmente in tre diversi modi:

1) Come alternativa alla varianza in un modello media-entropia come già sperimentato da Philippatos e Wilson.
2) Ottimizzazione multipla di media-varianza o media- varianza-asimmetria e una misura di entropia.
3) Al modello classico media-varianza o media-varianza-asimmetria viene aggiunto un vincolo relativo all'entropia.

I diversi autori hanno inoltre puntato ad una procedura che non richiedesse la stima di entropie condizionali o congiunte. Questo accorgimento viene adottato allo scopo di semplificare l'implementazione pratica del modello, come già auspicato da Philippatos e Wilson nel loro celebre articolo.

La letteratura più recente ha optato principalmente, in accordo con il primo modello proposto nel paragrafo 4.1, di utilizzare come misura dell'entropia l'entropia di Shannon (3.7). Solo recentemente sono stati proposti alcuni modelli alternativi che utilizzano misure di entropia alternative rispetto all'entropia di Shannon.

Supporto ulteriore all'utilizzo dell'entropia per la costruzione di un portafoglio diversificato è il crescente utilizzo delle misure di entropia post costruzione del portafoglio come vero e proprio indicatore di diversificazione del portafoglio [1].

### 4.2.1 PROPOSTE DI MODELLI ALTERNATIVI UTILIZZANDO L'ENTROPIA DI SHANNON

Yu, Lee e Chiou [2] riportano in un loro articolo due modelli che si basano sull'entropia di Shannon. Questa misura viene riadattata ai fini della portfolio selection rispetto alla formulazione originale. Tale adattamento è possibile sostituendo il termine $w_i$ alla probabilità $p_i$, ragionando quindi in termini di pesi dei diversi titoli nel portafoglio invece che di probabilità dei rendimenti dei titoli. Così facendo la misura indica direttamente la dispersione dei pesi $w_i$ del portafoglio. Nel modello di Philippatos e Wilson [7] veniva minimizzata l'entropia dei rendimenti del portafoglio allo scopo di minimizzare il rischio del portafoglio. Nei modelli alternativi proposti da Ke e Zhang, da Zheng [2], da Samanta e Roy [3], da Jana [5] e da Bera e Park [6] la prassi è quella di massimizzare l'entropia del portafoglio, allo scopo di ottenere dei pesi $w_i$ più vicini possibile alla situazione di portafoglio equipesato. Tale situazione come precedentemente indicato corrisponde infatti alla situazione di massima incertezza e punta ad ottenere un portafoglio ben diversificato, evitando concentrazioni in determinati titoli o situazioni in cui un titolo vengo inserito nel portafoglio solo per una percentuale trascurabile. L'entropia di Shannon viene di conseguenza riadattata nel modo seguente:

$$H = -\sum_{i=1}^{N} w_i \mathrm{Log}(w_i) \tag{4.7}$$

$posto\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, con\ \ i = 1, \dots, N.$

Seguendo tale logica, la procedura per la selezione di portafoglio proposta da Ke e Zhang [2] per costruire un portafoglio diversificato rappresenta una variante dell'approccio classico media-varianza noto in letteratura. Gli autori infatti propongono un modello simile all'approccio originale di Markowitz volto a minimizzare la varianza del portafoglio dato il valore del rendimento dello stesso; gli autori però introducono una modifica alla varianza obiettivo da minimizzare, introducendo l'entropia di Shannon. In sintesi i passaggi per la costruzione sono i seguenti:

$$min_w\ w' \sum w + \sum_{i=1}^{N} w_i \log(w_i)$$

$$\text{s.t} \begin{cases} w'\mu = E\ \ con\ E\ un\ dato\ rendimento\ atteso \\ w'1 = 1 \end{cases}$$

con $\boldsymbol{w} = (w_1 \quad \dots \quad w_N)'$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1 \quad \cdots \quad \mu_N)'$ con $\mu_i$ il rendimento atteso del titolo i, ∑ la matrice di varianza- covarianza, E rendimento atteso desiderato dal portafoglio.

Gli autori propongono di minimizzare la varianza-covarianza $w' \sum w + \sum_{i=1}^{n} w_i \log(w_i)$ modificata con l'aggiunta della misura di entropia $+\sum_{i=1}^{n} w_i \log(w_i)$. Poiché l'entropia di Shannon (3.7) è stata inserita con il segno positivo, la minimizzazione di tale quantità equivale alla massimizzazione dell' equazione (3.7), considerando inoltre che come nell'approccio tradizionale la varianza, rappresentata nel primo addendo della funzione obiettivo $w' \sum w$ viene contemporaneamente minimizzata. Gli autori fanno inoltre notare che l'entropia di Shannon, includendo per sua natura dalle probabilità $p_i$ alle quali vengono sostituiti i pesi dei titoli $w_i$, non permette la vendita allo scoperto dei titoli e quindi l'utilizzo di pesi negativi.

Anche Anil k.Bera e Sung y. Park [6] propongono la costruzione di un portafoglio diversificato che punti a colmare il problema della eccessiva concentrazione di portafoglio ottenuta attraverso il portafoglio di Markowitz e le scarse performance "out of sample" che ne derivano, anche a causa degli errori di stima dei primi due momenti, citati nel capitolo 2.

Introducendo nel modello di portafoglio l'entropia di Shannon e sostituendo i pesi dei titoli nel portafoglio alle probabilità della formulazione (3.7), gli autori tentano di risolvere il problema della scarsa diversificazione ottenuta attraverso il modello standard di portafoglio. L'entropia in tale modello ha la funzione di correttore; allo stesso modo ad esempio di vincoli che limitano il peso massimo possibile di un singolo titolo o il peso minimo di un singolo titolo nel portafoglio. Infatti gli autori dimostrano che massimizzando l'entropia di Shannon i pesi dei titoli tendono a distribuirsi come una distribuzione di tipo uniforme. Propongono quindi il seguente modello:

$$Max - \sum_{i=1}^{N} w_i \operatorname{Log}(w_i)$$

$$s.t \begin{cases} E(R_P) = \sum_{i=1}^{N} w_i \, E(R_i) = E \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \end{cases}$$

Seguendo tale procedura di selezione si mira ad ottenere la massima diversificazione possibile.

Come nel modello proposto da Ke e Zhang sovraesposto, anche in questo caso gli autori indicano che data la natura dell'entropia, è necessario porre il vincolo di positività dei pesi $w_i$.

Inoltre dato che il modello proposto tiene conto della dispersione dei pesi ma non del rischio inteso come nel modello tradizionale del portafoglio, il modello alternativo proposto come sviluppo più avanzato prevede la seguente formulazione:

$$Max\ H = -\sum_{i=1}^{N} w_i \,\mathrm{Log}(w_i)$$

$$s.t \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\ \sum_{i=1}^{N} E(R_i)\, w_i \geq E \ \ con\ i = 1, \dots n \\ \sigma_P = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} (w_j\, w_k \sigma_{jk}) \ \leq \sigma_0 \\ w_i \geq 0 \end{cases}$$

dove $\sigma_0$ rappresenta un dato valore della deviazione standard

In pratica in questo modello alternativo, gli autori oltre alla massimizzazione dell'entropia, includono due vincoli, uno relativo al rendimento atteso, che deve essere superiore ad un certo livello ed uno relativo alla deviazione standard del rendimento del portafoglio, che deve essere minore di un dato livello. Dato che i vincoli relativi alla deviazione standard e al rendimento atteso sono delle disuguaglianze e il vincolo relativo alla deviazione standard è non lineare, il primo problema del modello è la difficoltà risolutiva. Infatti la soluzione viene ricavata agli autori per via grafica e numerica. Inoltre essendo presente la varianza, come nel modello tradizionale gli errori di stima inficiano significativamente i risultati in termini di pesi, non risolvendo tale problema del modello standard media-varianza.

Jun-Lin Lin [4] propone invece di utilizzare l'entropia come vincolo da implementare nel modello di selezione di portafoglio di Markowitz. L'imposizione di un vincolo entropico ha come obiettivo principale quello di limitare la tendenza del portafoglio a concentrarsi in un set ristretto di asset, rispondere alle scarse performance "out of sample" riscontrate in letteratura nel modello media-varianza e ridurre altresì l'effetto degli inevitabili errori di stima dei momenti. Nel suo lavoro l'autore studia la relazione fra i vari vincoli proposti in letteratura con lo scopo di permettere una maggiore diversificazione del portafoglio e di migliorarne le performance. Tali vincoli operano restringendo la

regione dei portafogli possibili. In particolare analizza i lower e upper bound che hanno come scopo quello di limitare rispettivamente la massima concentrazione in termini di peso in un unico titolo e quello di garantire un peso minimo ai diversi titoli nel portafoglio. Di particolare interesse per il presente lavoro è invece il vincolo sull'entropia che consiste nel porre un livello minimo di entropia, allo scopo di garantire un grado maggiore di distribuzione dei pesi fra i vari titoli. Infatti maggiore è l'entropia del portafoglio e maggiore sarà la dispersione dei pesi dei titoli, evitando concentrazioni eccessive in alcuni determinati asset. Secondo l'autore, vi sono ricerche empiriche che dimostrano che l'imposizione di tale tipologia di vincoli migliori la performance dei portafogli "out of sample". Il problema di selezione diventa quindi il seguente, imponendo in aggiunta al classico modello media-varianza un vincolo relativo all'entropia di Shannon nella forma (3.7):

$$min_w \; w' \sum w$$

$$s.t \begin{cases} -\sum_{i=1}^{N} w_i \log(w_i) \geq L_E \\ w'\mu = E \\ \sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \\ 0 \leq w_i \leq 1 \end{cases}$$

Dove $L_E$ indica il limite inferiore desiderato dell'entropia ed ha lo scopo di evitare un livello di entropia del portafoglio troppo basso.

Jun-Lin Lin nel confrontare l'azione dei diversi vincoli nel restringere la regione dei portafogli possibili indica una classifica in base alla capacità di limitare il set di portafogli possibili dove dal vincolo più forte al più debole si trova in ordine: il vincolo inferiore sui pesi, il vincolo superiore sui pesi ed infine il vincolo inferiore sull'entropia del portafoglio che viene classificato come limitazione più debole.

Nel 2004 Bablu Samanta Tapan e Kumar Roy [3] sviluppano un modello di portafoglio minimizzando la varianza, massimizzando il rendimento atteso e massimizzando l'entropia di Shannon del portafoglio. Come risultato osservano che in un portafoglio composto da tre titoli, inserendo la massimizzazione dell'entropia del portafoglio, il peso dei titoli sottopesati aumenta mentre il peso dei titoli sovrapesati diminuisce con un piccolo sacrificio in termini di riduzione di rendimento atteso ed aumento di varianza del portafoglio.

In modo simile nel 2007 T.K.Roy e S.K Mazumder [9]sviluppano un modello di portafoglio che mira a minimizzare la varianza, massimizzare il rendimento atteso, massimizzare l'asimmetria e massimizzare

l'entropia di Shannon del portafoglio. L'idea degli autori consiste nell' aggiungere l'ottimizzazione dell'entropia del portafoglio al tradizionale modello media-varianza-asimmetria. Nella ricerca viene preferito il modello media-varianza-asimmetria rispetto al modello basilare media-varianza, considerando che gli investitori preferiscono un'asimmetria dei rendimenti positiva a parità di condizioni. Concettualmente questa condizione indica che la distribuzione dei rendimenti è preferibile quando è sbilanciata verso rendimenti positivi maggiori, a parità di altre condizioni. Inoltre viene inserita l'asimmetria allo scopo di rispondere alle critiche relative alla necessità di inserire nell'analisi anche i momenti superiori al secondo. L'asimmetria nel modello proposto dagli autori viene massimizzata (data la preferenza verso un'asimmetria positiva rispetto ad una negativa). Viene definito il momento centrale terzo:

$$\gamma_{ijk} = E\left[\left(R_i - E(R_i)\right)\left(R_j - E\left(R_j\right)\right)\left(R_k - E(R_k)\right)\right] con\ i,j,k = 1,\dots,N \tag{4.8}$$

Dato il momento centrale terzo $\gamma_{ijk}$, l'asimmetria si calcola attraverso la seguente formulazione:

$$S = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \gamma_{ijk}\, w_i\, w_j\, w_k \tag{4.9}$$

Il modello proposto dagli autori risulta quindi il seguente:

$$Max\ E(Rp) = \sum_{i=1}^{N} E(R_i) w_i$$

$$Max\ H = -\sum_{i=1}^{N} w_i \log(w_i)$$

$$Max\ S = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \gamma_{\ ijk} w_i\, w_j\, w_k$$

$$Min\ \sigma_p^2 = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} (w_j\, w_k \sigma_{jk})$$

$$\text{s.t} \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} wi = 1 \\ wi \geq 0 \end{cases}$$

Anche in questo modello si pone come vincolo la positività dei pesi dato che viene inserita una misura di entropia e di conseguenza i pesi devono essere non negativi.

### 4.2.2 PROPOSTE DI MODELLI ALTERNATIVI UTILIZZANDO ALTRE MISURE DI ENTROPIA

Yu, Lee e Chiou [2] hanno proposto un modello alternativo rispetto ai precedenti basato sul minimax disparity model descritto nel paragrafo 3.4.7. Tale versione di misura entropica permette un approccio molto differente rispetto ai precedenti, molto più simili all'approccio classico di Markowitz, rispetto al quale si propongono come una modifica. L'approccio basato sul minimax disparity model consente di minimizzare la distanza massima tra i vari pesi dei titoli nel portafoglio. Tale accorgimento permette di distribuire i pesi degli N asset a disposizione nel portafoglio, optando per una diversificazione molto ampia ed evitando particolari concentrazioni in determinati titoli. Concettualmente tale approccio permette di avvicinarsi al portafoglio equipesato puntando, in accordo al principio della massima entropia, a massimizzare la dispersione dei pesi $w_i$ dei titoli. Gli autori riprendono il minimax disparity model (3.19), (3.20):

$Min\ \{Max|w_i - w_{i+1}|\} \quad con\ i = 1, \dots, N-1.$

Dati come vincoli del modello $\sum w_i = 1\ e\ 0 \leq w_i \leq 1.$

Gli autori però semplificano ulteriormente il modello in due modi:

1) Non considerano il livello di orness.
2) Propongono una versione lineare del modello allo scopo di facilitare l'ottimizzazione. I passaggi per giungere alla versione linearizzata sono illustrati in appendice D.

Mantenendo l'obiettivo di minimizzare la distanza massima tra i pesi e chiamando tale distanza δ, Il modello proposto diventa quindi il seguente:

Min δ con $\delta = Max|w_i - w_{i+1}|$

$$s.t \begin{cases} w_{\mathrm{i}} - w_{\mathrm{i+1}} - \delta \leq 0 \quad \mathrm{con\ i} = 1, \dots, \mathrm{N}-1 \\ w_{\mathrm{i}} - w_{\mathrm{i+1}} + \delta \geq 0\ \mathrm{con\ i} = 1, \dots, \mathrm{N}-1 \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\ w_{\mathrm{i}} \geq 0 \end{cases}$$

L'interpretazione del modello è la stessa rispetto al modello originale ma la forma risulta più semplice e facilita l'ottimizzazione attraverso le tecniche di programmazione lineare.

Yu, Lee e Chiou [2] propongono inoltre un'altra alternativa di portafoglio costruito attraverso l'utilizzo dell'entropia di Yager, descritta nel paragrafo 3.4.6. Riprendendo la formulazione (3.17) con tutte le sue caratteristiche descritte in precedenza:

$$Q = -\sum_{i=1}^{N} (|w_{\mathrm{i}} - \frac{1}{N}|^{z})^{\frac{1}{z}}$$

Con z una costante maggiore o uguale ad uno.

Gli autori propongono un modello di portafoglio diversificato utilizzando tale formulazione di entropia per sfruttare la caratteristica del modello che permette di ottenere pesi $w_{\mathrm{i}}$ tendenti al portafoglio equipesato.

Per ottenere un modello di costruzione di portafogli più semplice gli autori propongono di considerare il caso in cui la costante z sia uguale ad 1. Infatti se z=1 allora la formula dell'entropia di Yager diventa la formulazione lineare (3.18) riportata di seguito:

$$-\sum_{i=1}^{N} |w_{\mathrm{i}} - \frac{1}{N}|$$

Prendendo come punto di riferimento la formulazione lineare, gli autori riformulano il problema dedicando una particolare notazione agli scarti fra il peso del titolo nel portafoglio e $\frac{1}{N}$. I passi da seguire sono i seguenti:

dati $ei^{+}$ ed $ei^{-}$ rispettivamente le deviazioni in eccesso ed in difetto del peso del singolo titolo nel portafoglio ($w_{\mathrm{i}}$) rispetto a 1/N

$ei^{+}$= $w_{\mathrm{i}}$-1/N se la differenza è > 0

$ei^{-}$= $w_{\mathrm{i}}$-1/N se la differenza è < 0

$$Min \sum_{i=1}^{n} (ei^{+} + ei^{-})$$

$$\text{s.t}\begin{cases} w_i - \frac{1}{n} - ei^+ + ei^- = 0 \\ ei^+ \geq 0 \\ ei^- \leq 0 \\ \sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \; con \; i = 1, \dots, N \\ w_i \in [0,1] \end{cases}$$

con il vincolo $w_i - \frac{1}{n} - ei^+ + ei^- = 0$ che consente di definire ei$^+$ ed ei$^-$ come scarti fra il peso wi e $\frac{1}{N}$.

L'algoritmo presentato equivale a massimizzare l'entropia di Yager (3.18) dato che $\sum_{i=1}^{n}(ei^+ + ei^-)$ rappresenta una formulazione equivalente a $-\sum_{i=1}^{N}|w_\text{i} - \frac{1}{N}|$ senza però presentare davanti il segno negativo.

La particolarità di questi due modelli consiste nell' ottimizzare unicamente l'entropia per ottenere direttamente dei pesi vicini al portafoglio equipesato, senza considerare il rendimento atteso o altre misure di rischio o asimmetria.

Anil k.Bera e Sung y. Park [6] propongono infine un modello, chiamato dagli autori approccio generale, basato sul principio della minimizzazione dell'entropia indicato nel paragrafo 3.3.2. Tale modello si basa sulla minimizzazione della Kullback cross entropy (3.14), sostituendo alle probabilità i pesi:

$$Min\ _w CE(w|q) = \sum_{i=1}^{N} w_i \, Log \frac{w_i}{q_i}$$

dove $w_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$;

con $w_i$ la distribuzione dei pesi dei titoli nel portafoglio e $q_\text{i}$ la distribuzione di riferimento o benchmark dei pesi (nel caso in esame una distribuzione equipesata) dove $q_i = \frac{1}{N}$;

Imponendo come vincolo un livello minimo nella funzione dell'utilità attesa $EU(w, R, \lambda) \geq \tau$, dove R indica il rendimento, $\lambda$ è un parametro che indica l'avversione al rischio dell'investitore e $\tau$ è un valore che indica la "forza" con cui gli investitori hanno fiducia nei valori derivanti dalla funzione di utilità attesa. Per maggiori dettagli sul modello si rimanda al lavoro degli autori [6].

Gli autori comparando le performance dei portafogli costruiti rispettivamente attraverso il modello media-varianza ed attraverso la Kullback cross entropy indicano che le performance del portafoglio basato sulla misura di entropia ha ottenuto migliori performance "out of sample".

***Riferimenti Capitolo 4***


*[1] Applications of Entropy in Finance: A Review. R. Zhou, R. Cai, G. Tong. Entropy, 15 (2013).*

*[2] Diversified portfolios with different entropy measures. J. Yu, W. Lee, W.P.Chiou. Applied Mathematics and Computation, 241 (2014).*

*[3] Multi-objective Portfolio Optimization Model. B. Samanta, T. K. Roy. Tamsui. Oxford Journal of Mathematical Sciences, 21 (1) (2005).*

*[4] On the Diversity Constraints for Portfolio Optimization. J. Lin. Entropy, 15 (2013)*

*[5] Multi-objective Mean-variance-skewness model for Portfolio Optimization. P. Jana. AMO - Advanced Modeling and Optimization, Vol. 9, No. 1 (2007).*

*[6] Optimal Portfolio Diversification Using Maximum Entropy Principle. A.K. Bera, S.Y. Park. Econometric Reviews. Taylor & Francis Journals, vol. 27(4-6) (2008).*

*[7] Entropy, market risk, and the selection of efficient portfolios. G.C.Philippatos, C.J. Wilson. Applied Economics, 4 (1972).*

*[8] Portfolio selection. H. Markowitz. The Journal of Finance, Vol. 7 No. 1 (1952).*

*[9] Multi-objective Mean-variance-skewness model for Portfolio Optimization. P. Jana, T.K.Roy and S.K. Mazumder. AMO - Advanced Modeling and Optimization, Volume 9, Number 1 (2007).*

# 5 - ANALISI E CONFRONTI

In questo capitolo verrà proposta un'applicazione di alcuni modelli presentati nei capitoli precedenti. In particolare verrà messo a confronto il modello tradizionale di Markowitz con due modelli competitor a cui verranno applicate come misure di rischio l'entropia di Rényi (3.11) e quella di Shannon (3.7). Tutti i dettagli e i risultati non inseriti nel capitolo, ai fini di una esposizione più agevole, sono contenuti nell'appendice del lavoro.

## 5.1 STRUTTURA DELL'ESPERIMENTO

In questo paragrafo si propone una descrizione delle analisi empiriche svolte. L'obiettivo principale del lavoro consiste nel confrontare due modelli alternativi media-entropia, che verranno descritti in seguito nel dettaglio, con il modello tradizionale di Markowitz media-varianza, che è stato descritto nel paragrafo 1.5. Si ritiene importante sottolineare che il confronto fra diverse misure di entropia, implementate nella selezione del portafoglio, rappresenta un elemento di novità del presente lavoro rispetto alla letteratura in tema.

L'analisi è iniziata scegliendo l'indice Eurostoxx50 con l'obiettivo di selezionare un portafoglio composto dai titoli inseriti nell'indice. È stata privilegiata la scelta di un indice europeo ben noto e seguito dagli operatori finanziari. Dei 50 titoli componenti l'indice ne sono stati utilizzati 47. Tale scrematura si spiega con il fatto che per alcuni titoli i dati erano solo parzialmente disponibili nel periodo considerato. Per maggiori dettagli relativi al paniere di titoli completo e la relativa numerazione si rimanda in appendice. Si osserva che, non essendo oggetto di analisi l'andamento dell'indice specifico ma i portafogli composti attraverso un qualsiasi paniere di titoli, l'esclusione di 3 asset finanziari non incide sui risultati dell'esperimento svolto. Come input dei modelli sono stati utilizzati i prezzi di chiusura delle azioni forniti da Bloomberg. Il periodo di riferimento inizia il 23/05/2001 e termina il 20/12/2017. In particolare, allo scopo di effettuare delle valutazioni critiche relative alla performance dei titoli, il periodo di riferimento è stato suddiviso tra sottoperiodi in sample e sottoperiodi out of sample. I sottoperiodi in sample costituiscono i sottoperiodi i cui dati vengono utilizzati come input per la costruzione dei portafogli e della frontiera efficiente derivante dai modelli, i sottoperiodi out of sample permettono invece di verificare le performance dei portafogli costruiti nel sottoperiodo in sample precedente. La suddivisione dei periodi nel dettaglio è stata effettuata nel modo seguente, utilizzando sottoperiodi di 6 mesi per la costruzione del portafoglio e di 3 mesi per la verifica delle performance, salvo l'ultimo periodo out of sample che parte dal 09/11/2017 e termina il 20/12/2017 a seguito della disponibilità dei dati:

1 periodo: Stima 23/05/2001-23/11/2001, verifica 26/11/2001-26/02/2002

2 periodo: Stima 27/02/2002-27/08/2002, verifica 28/08/2002-28/11/2002

3 periodo: Stima 29/11/2002-29/05/2003, verifica 30/05/2003-01/09/2003

4 periodo: Stima 02/09/2003-02/03/2004, verifica 03/03/2004-03/06/2004

5 periodo: Stima 04/06/2004-06/12/2004, verifica 07/12/2004-07/03/2005

6 periodo: Stima 08/03/2005-08/09/2005, verifica 09/09/2005-09/12/2005

7 periodo: Stima 12/12/2005-12/06/2006, verifica 13/06/2006-13/09/2006

8 periodo: Stima 14/09/2006-14/03/2007, verifica 15/03/2007-15/06/2007

9 periodo: Stima 18/06/2007-18/12/2007, verifica 19/12/2007-19/03/2008

10 periodo: Stima 20/03/2008-22/09/2008, verifica 23/09/2008-23/12/2008

11 periodo: Stima 29/12/2008-29/06/2009, verifica 30/06/2009-30/09/2009

12 periodo: Stima 01/10/2009-01/04/2010, verifica 06/04/2010-06/07/2010

13 periodo: Stima 07/07/2010-07/01/2011, verifica 10/01/2011-11/04/2011

14 periodo: Stima 12/04/2011-12/10/2011, verifica 13/10/2011-13/01/2012

15 periodo: Stima 16/01/2012-16/07/2012, verifica 17/07/2012-17/10/2012

16 periodo: Stima 18/10/2012-18/04/2013, verifica 19/04/2013-19/07/2013

17 periodo: Stima 22/07/2013-22/01/2014, verifica 23/01/2014-23/04/2014

18 periodo: Stima 24/04/2014-24/10/2014, verifica 27/10/2014-27/01/2015

19 periodo: Stima 28/01/2015-28/07/2015, verifica 29/07/2015-29/10/2015

20 periodo: Stima 30/10/2015-02/05/2016, verifica 03/05/2016-03/08/2016

21 periodo: Stima 04/08/2016-06/02/2017, verifica 07/02/2017-08/05/2017

22 periodo: Stima 09/05/2017-08/11/2017, verifica 09/11/2017-20/12/2017

Per l'esperimento è stato utilizzato il software "Matlab" versione "R2018a". È importante sottolineare che la notazione utilizzata nel paragrafo differisce leggermente rispetto a quella presentata finora allo scopo di permettere la comprensione dei codici utilizzati nell'esperimento, inclusi nell'appendice F del testo, che permettono una visione integrale dei calcoli effettuati.

La procedura seguita nella costruzione delle frontiere efficienti e dei portafogli è la seguente ed è stata ripetuta allo stesso modo per tutti i 22 sottoperiodi individuati:

- Come primo passo comune a tutti i modelli, sono stati calcolati i rendimenti giornalieri di tutti i titoli considerati nell'analisi empirica. Per fare ciò sono stati importati in Matlab i prezzi di chiusura giornalieri dei titoli relativi al sottoperiodo in sample considerato. Precedentemente

i dati sono stati ordinati in un file Excel e importati in Matlab attraverso l'apposita procedura di importazione presente nel software. È stata così definita periodo per periodo la variabile denominata "prezzi".

- Si procede poi al calcolo dei rendimenti logaritmici attraverso l'uso della formula (1.2), andando a definire la variabile denominata "rend". Sono stati privilegiati i rendimenti logaritmici rispetto ai rendimenti semplici in quanto l'analisi si svolge su periodi temporali successivi.
- Il passo successivo consiste nel calcolo dei rendimenti medi dei titoli attraverso la funzione "mean", andando così a definire la variabile denominata r che corrisponde al vettore delle medie, calcolate come indicato nella formula (1.8).
- È stata poi calcolata attraverso la funzione "cov" di Matlab la matrice di varianza-covarianza dei rendimenti definendo la variabile v.
- Una volta eseguite queste operazioni, la parte rimanente dei codici utilizzati si differenziano in base al modello. I modelli utilizzati di cui propongo l'analisi sono i seguenti:

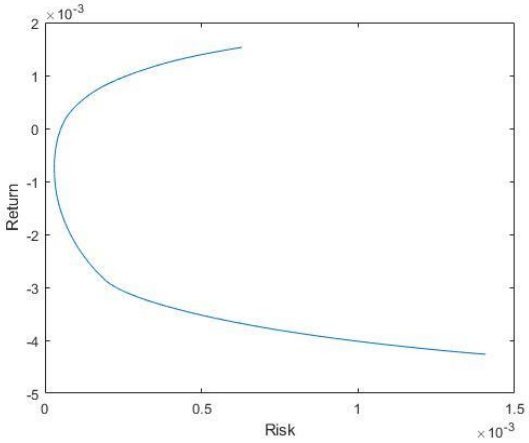
1. Modello di Markowitz con restrizioni relative alla vendita allo scoperto dei titoli: per giungere alla frontiera di Markowitz, per ogni livello fissato di rendimento del portafoglio, denominato rp, è stata minimizzata la varianza del portafoglio, denominata vp. La procedura inizia dal livello di rp denominato pg0 che corrisponde al livello minimo di rendimento giornaliero medio registrato da un singolo titolo del campione nel periodo considerato. Nel primo passaggio è stata aggiunta a pg0 una quantità denominata step0 = 1/200000, nei passaggi successivi è stata aggiunta iterativamente la quantità 1/200000 al livello di rendimento fissato nel passaggio precedente fino a giungere al livello denominato pg1 che corrisponde al massimo rendimento giornaliero medio registrato da un singolo titolo nel campione durante il periodo considerato. Per la minimizzazione vincolata della varianza è stata utilizzata la funzione "Quadprog"[2] presente in Matlab, particolarmente indicata nella soluzione del problema in analisi. Nello specifico è stata utilizzata la forma x = quadprog(H,f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0) dove il comando quadprog permette di ottenere come output il vettore x che minimizza la quantità $\frac{1}{2}\, x'Hx + f'x$ dove:

   - H deve essere una matrice definita positiva per poter ottenere un valore di minimo finito. il valore di H fissato nel lavoro è H = v.
   - I parametri della funzione quadprog Aeq e beq permettono di rappresentare il sistema dei vincoli. Infatti il programma imposta il seguente vincolo Aeq*x = beq dove con Aeq viene indicata la matrice dei coefficienti del sistema lineare dei vincoli, mentre con beq si indica il vettore dei termini noti. Tali vincoli sono stati utilizzati per imporre che la somma dei pesi del portafoglio sia pari ad 1. Tali vincoli hanno inoltre la funzione di far comprendere al programma che la minimizzazione deve avvenire per un dato livello di rendimento.
   - Il parametro lb permette di rappresentare il limite inferiore di x tale che lb ≤ x. Tale vincolo è stato utilizzato per imporre la non negatività dei pesi.

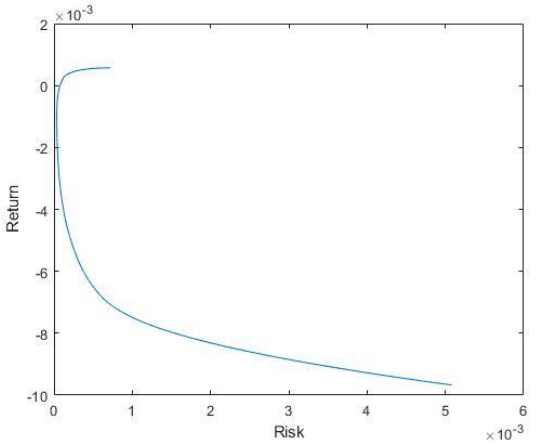
   Il modello permette di ottenere come output:

- I vettori x dei pesi che rappresentano i diversi portafogli individuati attraverso la procedura per ogni valore di rp. È stata salvata per ogni periodo la variabile “xport_pro” che contiene una matrice composta da più vettori colonna, ciascun vettore colonna è associato ad un dato portafoglio che rappresenta un punto nella frontiera efficiente.
- Il rendimento rp effettivo di ogni portafoglio individuato attraverso l’ottimizzazione. È stata salvata su Excel per ogni periodo la variabile “rplot_pro” che contiene un vettore riga con i rendimenti in ordine crescente di tutti i portafogli individuati dalla procedura di calcolo.
- La varianza vp di ogni portafoglio. È stata salvata per ogni periodo la variabile “vplot_pro” che contiene un vettore riga con le varianze in ordine crescente di tutti i portafogli individuati dalla procedura di calcolo.
- Il grafico della frontiera individuata periodo per periodo, dove nell’asse delle ascisse si rappresenta la misura di rischio, nel caso in esame costituita dalla varianza del portafoglio vp, nell’asse delle ordinate si rappresenta il rendimento medio del portafoglio rp.

Si riportano come esempio le frontiere efficienti ottenute con il modello di Markowitz per i primi due periodi, rimandando in appendice A per una visione completa degli altri grafici.




*Frontiera periodo 1*



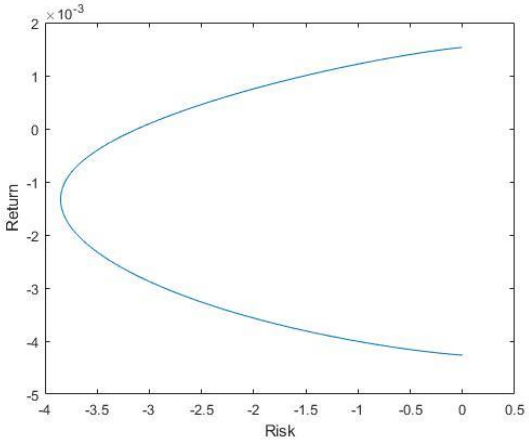

*Frontiera periodo 2*

La scelta di utilizzare il modello di Markowitz con vincoli sulle vendite allo scoperto consente la confrontabilità diretta dei 3 modelli. Le misure di entropia per loro natura, come illustrato nel capitolo dedicato, richiedono dei pesi non negativi per poter essere implementate. Per tale motivo è stata posta come restrizione la non negatività dei pesi anche nel modello di Markowitz.

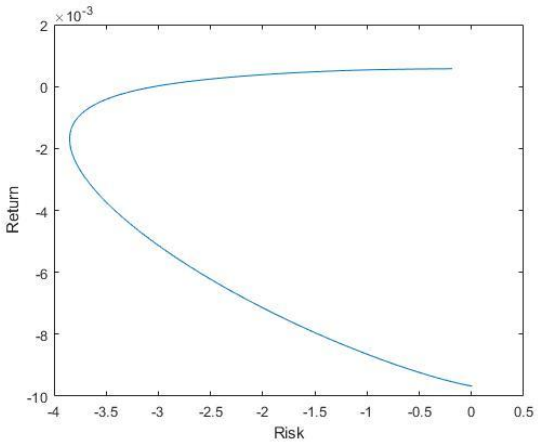
2. Modello media-entropia di Shannon: la procedura di costruzione dei portafogli è stata eseguita in modo analogo al modello di Markowitz, nel presente modello però per ogni livello di rendimento del portafoglio rp fissato è stata effettuata la minimizzazione della quantità $H = x'v\,x + x'\log(x)$, come proposto dagli autori Ke e Zhang [4]. Per la procedura di minimizzazione è stata utilizzata la funzione di Matlab "fmincon"[3] che permette di individuare un minimo vincolato di una funzione non lineare di più variabili. In particolare la sintassi della funzione è x = mincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon) dove:

   -Il parametro fun rappresenta la funzione da minimizzare. Nell'analisi svolta è stata posta pari ad H.
   -Il punto x0 rappresenta il punto iniziale della procedura di minimizzazione scelto come `x0 = ones(col,1)/col,` con col che indica il numero di colonne (corrispondente al numero complessivo di titoli) e `ones(col,1)/` un vettore colonna formato da elementi pari a 1.
   -Aeq e beq sono rispettivamente, una matrice ed un vettore necessari per l'impostazione del sistema dei vincoli e sono gli stessi del modello di Markowitz sopracitato.
   - lb rappresenta il limite inferiore ed è stato impostato in modo analogo al modello di Markowitz sopracitato.
   Il modello 2) permette di ottenere un ulteriore output rispetto al modello di Markowitz che consiste nella misura di rischio basata sull'entropia indicata con la variabile "ent" dove `ent=x'*v*x+x'*log(x)`. È stata salvata per ogni periodo la variabile "risk_pro" che contiene un vettore riga delle misure di rischio del portafoglio in ordine crescente.

Si riportano inoltre a titolo di esempio le frontiere relative ai primi due periodi.




*Frontiera relativa al periodo 1*




*Frontiera relativa al periodo 2*

3. Modello media-entropia di Rényi: tale modello rappresenta una semplice variante originale del modello 2). La procedura di minimizzazione utilizzata e i vincoli impostati sono gli stessi del modello media-entropia di Shannon; l'elemento che rappresenta una novità è la funzione obiettivo utilizzata. In particolare la funzione obiettivo è $\mathrm{H} = \mathrm{x'v\,x} - \mathrm{c}\ \log_2(\mathrm{id'}x.^{a})$

   con a=0.5, in particolare tale parametro è stato scelto pari a 0.5 perché più il parametro tende a 0 e più la misura di entropia permette di ottenere un vettore di pesi x vicino al vettore di pesi equipesato. Se il parametro tende ad 1 la misura di entropia di Rényi tende all'entropia di Shannon. È stata effettuata quindi una scelta di compromesso ponendo il parametro pari a 0.5.

   $c = \frac{1}{1-a}$;

   $id$ indica il vettore in cui tutti gli elementi sono pari a 1;

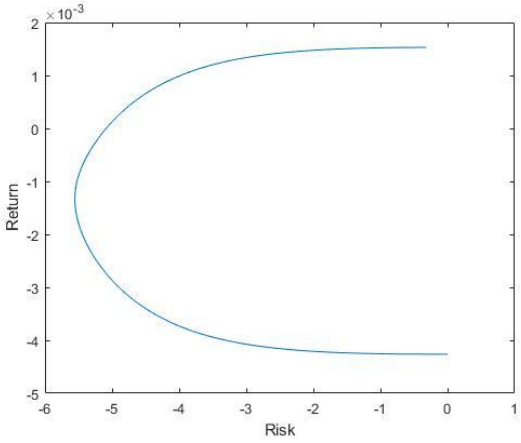
   $\mathrm{x.^{a}}$ : il punto che segue il vettore indica in Matlab che l'operazione di elevamento a potenza è stata effettuata elemento per elemento.

   Il modello utilizzato, allo scopo di ottenere una maggiore confrontabilità e coerenza fra i modelli 2) e 3) è stato ricavato da una modifica del modello 2) inserendo invece dell'entropia di Shannon, l'entropia di Rényi. Si sottolinea inoltre come sia necessario massimizzare la misura di entropia di Rényi del portafoglio per portare ad una auspicabile maggiore diversificazione del portafoglio come da prassi (vedi introduzione paragrafo 4.2.1). Matlab attraverso la funzione utilizzata opera minimizzando la funzione obiettivo, per tale motivo è stato anteposto all'entropia di Rényi il segno negativo.

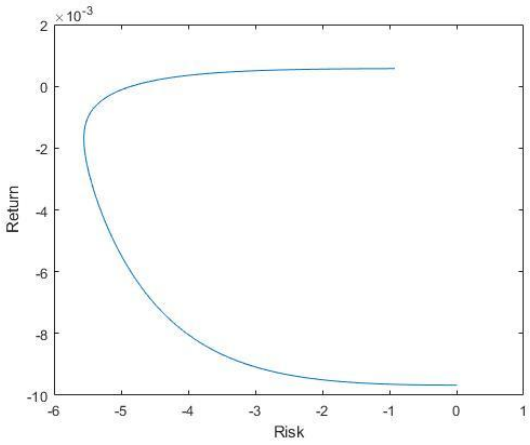
   Come il modello 2), il modello 3) permette di ottenere un ulteriore output rispetto al modello di Markowitz che consiste nella misura di rischio basata sull'entropia indicata con la variabile

"ent" con `ent=x'*v*x-c*log2(id'*x.^a)`. È stata salvata per ogni periodo la variabile "risk_pro" che contiene un vettore riga delle misure di rischio del portafoglio in ordine crescente.

Si riportano inoltre a titolo di esempio le frontiere relative ai primi due periodi.




*Frontiera periodo 1*




*Frontiera periodo 2*

Sono state applicate nei modelli 2) e 3) le misure di Shannon e di Rényi come misure di entropia in quanto queste rappresentano due misure dell'entropia diffuse ed utilizzate in finanza ed economia.

Sono poi state calcolate le performance out of sample dei modelli periodo per periodo. Come input per il calcolo delle performance sono stati utilizzati i prezzi di chiusura riferiti ai sottoperiodi out of sample. Quindi sono stati calcolati il rendimento e la varianza di 5 portafogli campione per ogni periodo considerato. Per il calcolo del rendimento e della varianza out of sample dei portafogli è stato utilizzato il codice Matlab presente nell'appendice F del lavoro.

Per ogni periodo considerato sono stati selezionati 5 livelli di rendimenti attesi obiettivo. La scelta dei livelli obiettivo è stata effettuata scegliendo 5 rendimenti attesi desiderati crescenti, facendo in modo

che tale livello di rendimento si riferisse sempre alla parte efficiente delle frontiere dei modelli ricavate nei passaggi precedenti. I livelli desiderati di rendimento sono riportati nella prima riga della tabella delle performance (di cui sotto si riporta un esempio con funzioni esplicative) con la rubrica "rendimento obiettivo".

| Rendimento obiettivo | 0.000200 | 0.000500 | 0.001000 | 0,001200 | 0.001400 |
|---|---|---|---|---|---|
| IN SAMPLE | | | | | |
| rendimento | 0.000201 | 0.000501 | 0.001001 | 0.001201 | 0.001401 |
| Rischio (varianza) | 0.000067 | 0.000112 | 0.000264 | 0.000365 | 0.000506 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| rendimento | 0.000351 | 0.000271 | 0.000477 | 0.000596 | 0.000849 |
| Rischio (Varianza) | 0.000060 | 0.00011 | 0.000261 | 0.000353 | 0.000472 |
| Indicatore performance IN SAMPLE | 0.024436 | 0.047210 | 0.061559 | 0.062831 | 0.062233 |
| Indicatore performance OUT OF SAMPLE | 0.045205 | 0.025655 | 0.029546 | 0.031710 | 0.039055 |

*Tabella delle performance esemplificativa relativa al primo periodo e riguardante il modello di Markowitz*

Per ogni livello di rendimento obiettivo selezionato è stato individuato il portafoglio corrispondente derivato dall'applicazione di ognuno dei tre modelli. Per ogni periodo si riportano i portafogli selezionati corrispondenti ai relativi rendimenti obiettivo in apposite tabelle. Ogni titolo viene indicato con un numero che corrisponde alla sigla del titolo stesso e per ogni titolo viene riportato il peso del medesimo nel portafoglio corrispondente. Al termine del paragrafo si riportano a titolo di esempio le tabelle relative al primo periodo, rinviando all'appendice B del testo per una visione integrale delle tabelle coi pesi e delle corrispondenze tra numeri e sigle dei titoli. La motivazione principale di tale metodo di selezione dei portafogli campione è stata la necessità di garantire dei portafogli che coprissero diversi punti della parte efficiente della frontiera e che in termini di rendimento obiettivo fossero sufficientemente distanziati l'uno dall'altro. Inoltre lo scrivente ritiene che tale metodo, basato sulla scelta di alcuni rendimenti obiettivo, sia aderente alla pratica finanziaria. Ai clienti di un'istituzione finanziaria vengono infatti normalmente proposti differenti rendimenti obiettivo e in base al livello desiderato dal cliente viene offerto il portafoglio associato, tenendo conto che ad un rendimento crescente è associato anche un rischio crescente. La seconda riga delle tabelle denominata "rendimento" offre il rendimento atteso calcolato da Matlab per il portafoglio considerato. Le differenze tra il rendimento atteso calcolato da Matlab e il rendimento atteso obiettivo, che consiste in un'approssimazione del rendimento effettivamente calcolato, si ritengono comunque minime. Pertanto i valori dei rendimenti utilizzati sono quelli calcolati da Matlab, per garantire una maggiore precisione nei calcoli delle performance.

Operativamente per ottenere le performance out of sample sono stati considerati i pesi relativi ai 5 portafogli selezionati, uno ad uno per ogni modello, e i prezzi dei titoli relativi al sottoperiodo out of sample. Questa procedura è stata ripetuta per ogni periodo. Come output dell'operazione di verifica delle performance si è ottenuto il rendimento out of sample e la varianza out of sample dei portafogli campione, riportati nelle tabelle delle performance.

Per agevolare il confronto delle performance fra modelli diversi è stato utilizzato l'indice di Sharpe*. Tale indice si ottiene rapportando l'eccesso di rendimento rispetto al tasso risk free del portafoglio alla sua deviazione standard. Il tasso risk free giornaliero ipotizzato è pari a 0.

$$Indice\ di\ Sharpe = \frac{R_p - rf}{\sigma_p}$$

con rf che indica il tasso risk free;

$R_p$ il rendimento medio del portafoglio;

$\sigma_p$ la deviazione standard del portafoglio.

L'utilizzo dell'indice di Sharpe, rispetto ad un indice di tipo $\frac{media-rf}{entropia}$ che sarebbe in linea generale più coerente con l'impostazione del lavoro e con le critiche mosse alla varianza come misura di rischio, si motiva considerando due fattori:

1) Le misure di rischio che includono l'entropia utilizzate nel lavoro portano a misure negative, mentre la varianza è per costruzione sempre non negativa. È possibile quindi attraverso il rapporto $\frac{media-rf}{entropia}$ effettuare un confronto in termini positivi e dare un'idea del rendimento per unità di rischio. Tale critica è però facilmente affrontabile utilizzando un indice $\frac{media-rf}{-entropia}$.
2) Nella pratica finanziaria gli operatori analizzano le performance attraverso l'utilizzo dei classici indicatori di performance, tra cui l'indice di Sharpe. Per tale motivo l'analisi delle performance è stata effettuata attraverso tale indicatore, aderendo alla prassi prevalente.

L'indice di Sharpe viene riportato nelle tabelle delle performance con la denominazione "Indicatore performance IN SAMPLE" e "indicatore performance OUT OF SAMPLE", utilizzando rispettivamente rendimento e varianza dei portafogli calcolati in sample ed out of sample.

*Tabelle dei pesi relative ai portafogli selezionati per effettuare le analisi out of sample*

Periodo 1

Modello di Markowitz

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0002 | 0.0005 | 0.001 | 0.0012 | 0.0014 |
| 1 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

**Per maggiori dettagli vedi [1].*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 3 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 4 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 5 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 6 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 7 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 9 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 11 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 12 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 13 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 17 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 18 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 19 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 20 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 21 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 22 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 23 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 24 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 25 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 26 | 0.163 | 0.036 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 27 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 28 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 29 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 30 | 0.058 | 0.072 | 0.017 | 0.000 | 0.000 |
| 31 | 0.194 | 0.309 | 0.590 | 0.719 | 0.889 |
| 32 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 33 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 34 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 35 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 36 | 0.213 | 0.274 | 0.296 | 0.281 | 0.111 |
| 37 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 38 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 39 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 40 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 42 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 43 | 0.250 | 0.248 | 0.096 | 0.000 | 0.000 |
| 44 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 45 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 46 | 0.119 | 0.061 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 47 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Modello media-entropia di Shannon

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0002 | 0.0005 | 0.001 | 0.0012 | 0.0014 |
| 1 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.050 | 0.046 | 0.032 | 0.022 | 0.011 |
| 3 | 0.032 | 0.027 | 0.016 | 0.010 | 0.004 |
| 4 | 0.007 | 0.005 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 5 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 6 | 0.011 | 0.007 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 7 | 0.004 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.010 | 0.007 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 9 | 0.027 | 0.023 | 0.012 | 0.007 | 0.003 |
| 10 | 0.014 | 0.010 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 11 | 0.025 | 0.021 | 0.011 | 0.006 | 0.002 |
| 12 | 0.010 | 0.006 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 13 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.007 | 0.004 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 15 | 0.005 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.019 | 0.014 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 17 | 0.010 | 0.007 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 18 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 19 | 0.044 | 0.040 | 0.026 | 0.018 | 0.008 |
| 20 | 0.018 | 0.013 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 21 | 0.015 | 0.011 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 22 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 23 | 0.010 | 0.007 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 24 | 0.014 | 0.010 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 25 | 0.011 | 0.007 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 26 | 0.020 | 0.016 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 27 | 0.004 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 28 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 29 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 30 | 0.042 | 0.038 | 0.024 | 0.017 | 0.007 |
| 31 | 0.328 | 0.453 | 0.694 | 0.802 | 0.917 |
| 32 | 0.037 | 0.032 | 0.019 | 0.013 | 0.005 |
| 33 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 34 | 0.007 | 0.005 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 35 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 36 | 0.070 | 0.070 | 0.055 | 0.043 | 0.024 |
| 37 | 0.010 | 0.007 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 38 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 39 | 0.034 | 0.029 | 0.017 | 0.011 | 0.004 |
| 40 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 42 | 0.009 | 0.006 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 43 | 0.040 | 0.035 | 0.022 | 0.015 | 0.006 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 44 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 45 | 0.014 | 0.010 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 46 | 0.024 | 0.019 | 0.009 | 0.006 | 0.002 |
| 47 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Modello media-entropia di Rényi

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0002 | 0.0005 | 0.001 | 0.0012 | 0.00014 |
| 1 | 0.004 | 0.003 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 2 | 0.029 | 0.024 | 0.013 | 0.008 | 0.003 |
| 3 | 0.021 | 0.017 | 0.009 | 0.006 | 0.002 |
| 4 | 0.010 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 5 | 0.005 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 6 | 0.011 | 0.009 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 7 | 0.008 | 0.006 | 0.003 | 0.002 | 0.001 |
| 8 | 0.011 | 0.008 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 9 | 0.019 | 0.015 | 0.008 | 0.005 | 0.002 |
| 10 | 0.013 | 0.010 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 11 | 0.018 | 0.014 | 0.008 | 0.005 | 0.002 |
| 12 | 0.011 | 0.008 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 13 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 14 | 0.009 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 15 | 0.008 | 0.006 | 0.003 | 0.002 | 0.001 |
| 16 | 0.015 | 0.012 | 0.006 | 0.004 | 0.002 |
| 17 | 0.011 | 0.008 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 18 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 19 | 0.026 | 0.021 | 0.012 | 0.007 | 0.003 |
| 20 | 0.015 | 0.011 | 0.006 | 0.004 | 0.001 |
| 21 | 0.014 | 0.011 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 22 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 23 | 0.011 | 0.008 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 24 | 0.013 | 0.010 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 25 | 0.011 | 0.009 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 26 | 0.016 | 0.012 | 0.007 | 0.004 | 0.002 |
| 27 | 0.007 | 0.005 | 0.003 | 0.002 | 0.001 |
| 28 | 0.004 | 0.003 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 29 | 0.004 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 30 | 0.026 | 0.021 | 0.011 | 0.007 | 0.003 |
| 31 | 0.428 | 0.552 | 0.766 | 0.853 | 0.942 |
| 32 | 0.023 | 0.019 | 0.010 | 0.006 | 0.003 |
| 33 | 0.004 | 0.003 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 34 | 0.009 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 35 | 0.005 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 36 | 0.039 | 0.032 | 0.018 | 0.012 | 0.005 |
| 37 | 0.011 | 0.008 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 38 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.001 |
| 39 | 0.022 | 0.018 | 0.009 | 0.006 | 0.002 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 40 | 0.006 | 0.005 | 0.002 | 0.001 | 0.001 |
| 41 | 0.005 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 42 | 0.011 | 0.008 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 43 | 0.025 | 0.020 | 0.011 | 0.007 | 0.003 |
| 44 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.001 |
| 45 | 0.013 | 0.010 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 46 | 0.017 | 0.014 | 0.007 | 0.004 | 0.002 |
| 47 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |

## 5.2 ANALISI DELLE PERFORMANCE DEI MODELLI

In questo paragrafo vengono proposti i risultati dell'analisi empirica svolta. Periodo per periodo sono quindi esposti in forma tabellare gli output che descrivono le performance dei modelli e si propongono i seguenti confronti:

1) Comparazione fra il modello di Markowitz e i modelli media-entropia.
2) Comparazione tra i due modelli media-entropia

La comparazione avviene in un primo passo valutando le performance dei modelli in sample e out of sample attraverso l'indicatore di performance che, come in precedenza affermato, consiste nell'indice di Sharpe. Si prosegue poi confrontando i rendimenti puri out of sample ottenuti dai rispettivi modelli.

In conclusione del paragrafo si propone una sintesi dei risultati ottenuti nei confronti effettuati.

1 periodo

Modello di Markowitz

| Rendimento obiettivo | 0.000200 | 0.000500 | 0.001000 | 0,001200 | 0.001400 |
|---|---|---|---|---|---|
| IN SAMPLE | | | | | |
| rendimento | 0.000201 | 0.000501 | 0.001001 | 0.001201 | 0.001401 |
| Rischio (varianza) | 0.000067 | 0.000112 | 0.000264 | 0.000365 | 0.000506 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| rendimento | 0.000351 | 0.000271 | 0.000477 | 0.000596 | 0.000849 |
| Rischio (Varianza) | 0.000060 | 0.000111 | 0.000261 | 0.000353 | 0.000472 |
| Indicatore performance IN SAMPLE | 0.024436 | 0.047210 | 0.061559 | 0.062831 | 0.062233 |
| Indicatore performance OUT OF SAMPLE | 0.045205 | 0.025655 | 0.029546 | 0.031710 | 0.039055 |

Modello media-entropia di Shannon

| Rendimento obiettivo | 0.000200 | 0.000500 | 0.001000 | 0.001200 | 0.001400 |
|---|---|---|---|---|---|
| IN SAMPLE | | | | | |
| rendimento | 0.000201 | 0.000501 | 0.001001 | 0.001201 | 0.001401 |
| Rischio | -2.865390 | -2.430276 | -1.504990 | -1.043486 | -0.492715 |
| varianza | 0.000157 | 0.000209 | 0.000355 | 0.000440 | 0.000543 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| rendimento | 0.000465 | 0.000585 | 0.000779 | 0.000858 | 0.000945 |
| Rischio (varianza) | 0.000083 | 0.000134 | 0.000286 | 0.000376 | 0.000488 |
| Indicatore performance IN SAMPLE | 0.016028 | 0.034626 | 0.053078 | 0.057258 | 0.060074 |
| Indicatore performance OUT OF SAMPLE | 0.050877 | 0.050479 | 0.046000 | 0.044200 | 0.042792 |

Modello media-entropia di Rényi

| Rendimento obiettivo | 0.000200 | 0.000500 | 0.001000 | 0.001200 | 0.001400 |
|---|---|---|---|---|---|
| IN SAMPLE | | | | | |
| rendimento | 0.000201 | 0.000501 | 0.001001 | 0.001201 | 0.001401 |
| rischio | -4.943653 | -4.674337 | -3.978455 | -3.503275 | -2.651811 |
| varianza | 0.000196 | 0.000259 | 0.000408 | 0.000483 | 0.000567 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| rendimento | 0.000421 | 0.000555 | 0.000778 | 0.000867 | 0.000956 |
| Rischio (Varianza) | 0.000119 | 0.000182 | 0.000339 | 0.000419 | 0.000511 |
| Indicatore performance IN SAMPLE | 0.014349 | 0.031113 | 0.049555 | 0.054631 | 0.058790 |
| Indicatore performance OUT OF SAMPLE | 0.038613 | 0.041112 | 0.042287 | 0.042350 | 0.042310 |

Considerando l'indicatore di performance in sample si nota come il modello di Markowitz performi meglio rispetto ad entrambi i modelli che considerano l'entropia del portafoglio, mentre in un confronto diretto fra le due entropie il modello media-entropia di Shannon ottiene performance migliori del modello media-entropia di Rényi.

Analizzando invece le performance out of sample si nota come in generale i modelli che includono l'entropia performino meglio rispetto al modello tradizionale di Markowitz, tranne nel caso del

portafoglio corrispondente ad un rendimento obiettivo fissato a 0.0002, che rappresenta il più basso livello fissato, dove il modello media-entropia di Rényi ottiene risultati peggiori rispetto al modello di Markowitz.

A livello di rendimenti puri out of sample il modello media-entropia superano il modello di Markowitz in tutti i livelli di rendimento obiettivo. Il modello media-entropia di Shannon supera il rendimento del modello media-entropia di Rényi nei primi tre livelli di rendimento obiettivo.

2 periodo

Modello di Markowitz

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.000100 | 0.000150 | 0.000200 | 0,000300 | 0.000500 |
| rendimento | 0.000103 | 0.000153 | 0.000203 | 0.000303 | 0.000503 |
| Rischio (varianza) | 0.000092 | 0.000100 | 0.000110 | 0.000137 | 0.000348 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| rendimento | - 0.000387 | -0.000387 | -0.000375 | -0.000407 | -0.000658 |
| Rischio (varianza) | 0.000127 | 0.000137 | 0.000151 | 0.000180 | 0.000507 |
| Indicatore performance IN SAMPLE | 0.010746 | 0.015273 | 0.019349 | 0.025823 | 0.026955 |
| Indicatore performance OUT OF SAMPLE | -0.034330 | -0.033010 | -0.030490 | -0.030330 | -0.029230 |

Modello media-entropia di Shannon

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.0001 | 0.00015 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0005 |
| rendimento | 0.000103 | 0.000153 | 0.000203 | 0.000303 | 0.000503 |
| rischio | -2.840531 | -2.72948 | -2.604519 | -2.301846 | -1.308245 |
| varianza | 0.000209 | 0.000214 | 0.000245 | 0.000274 | 0.000409 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| rendimento | -0.001298 | -0.001270 | -0.001240 | -0.001175 | -0.001148 |
| Rischio (varianza) | 0.000348 | 0.000361 | 0.000377 | 0.000425 | 0.000734 |
| Indicatore performance IN SAMPLE | 0.007141 | 0.010459 | 0.012965 | 0.018303 | 0.024860 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Indicatore performance OUT OF SAMPLE | -0.069540 | -0.066830 | -0.063870 | -0.056950 | -0.042390 |

Modello media-entropia di Rényi

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.000100 | 0.000150 | 0.000200 | 0.000300 | 0.000500 |
| rendimento | 0.000103 | 0.000153 | 0.000203 | 0.000303 | 0.000503 |
| rischio | -4.678427 | -4.579841 | -4.467337 | -4.184149 | -3.006596 |
| varianza | 0.000263 | 0.000278 | 0.000296 | 0.000342 | 0.000539 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| rendimento | -0.001244 | -0.001244 | -0.001251 | -0.001292 | -0.001704 |
| Rischio (varianza) | 0.000431 | 0.000463 | 0.000503 | 0.000617 | 0.001201 |
| Indicatore performance IN SAMPLE | 0.0162327 | 0.016686 | 0.017207 | 0.018509 | 0.023217 |
| Indicatore performance OUT OF SAMPLE | -0.059881 | -0.057840 | -0.05580 | -0.052030 | -0.049170 |

Considerando le performance in sample dei modelli si può osservare come il portafoglio ottenuto attraverso il modello di Markowitz in generale performi meglio dei modelli basati sull'entropia. Si evidenzia però come il modello di Markowitz sovraperformi sempre il modello media-entropia di Shannon, il modello di Rényi invece supera le performance del modello di Markowitz per i livelli di rendimento obiettivo 0.0001 e 0.00015 che rappresentano i livelli più bassi fissati per il rendimento obiettivo.

Andando ad osservare le performance out of sample dei modelli e confrontandole si osserva inizialmente come il modello di Markowitz superi sempre i modelli che tengono conto dell'entropia del portafoglio. Notando che i rendimenti out of sample di tutti i modelli sono negativi, si può quindi affermare che il modello di Markowitz in questo periodo abbia ottenuto dei rendimenti meno negativi rispetto ai modelli competitor. In particolare, se si confrontano invece le performance out of sample dei due modelli che includono l'entropia si può osservare come il modello media-entropia di Rényi superi sempre il modello media-entropia di Shannon, tranne nel caso di un portafoglio costruito con un rendimento obiettivo fissato a 0.0005, che indica il rendimento obiettivo più alto desiderato nel periodo.

A livello di rendimenti puri out of sample il modello di Markowitz supera i rendimenti offerti dai modelli media-entropia. Il modello media-entropia di Shannon prevale sul modello media-entropia di Rényi superandolo nei 3 portafogli corrispondenti ai 3 livelli di rendimento obiettivo più elevati.

3 periodo

Modello di Markowitz

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.000500 | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 | 0.002500 |
| rendimento | 0.000502 | 0.001002 | 0.001502 | 0.002002 | 0.002502 |
| rischio | 0.000032 | 0.000047 | 0.000103 | 0.000347 | 0.001104 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| rendimento | 0.000761 | 0.000582 | 0.000804 | 0.001413 | 0.002050 |
| Rischio (varianza) | 0.000021 | 0.000030 | 0.000044 | 0.000094 | 0.000227 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.088716731 | 0.145007 | 0.147472 | 0.107414 | 0.075294 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.16507 | 0.106096 | 0.120821 | 0.145318 | 0.135994 |

Modello media-entropia di Shannon

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.000500 | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 | 0.002500 |
| rendimento | 0.000502 | 0.001002 | 0.001502 | 0.002002 | 0.002502 |
| rischio | -3.454147 | -3.100314 | -2.600321 | -1.890839 | -0.746020 |
| varianza | 0.000125 | 0.000159 | 0.000249 | 0.000473 | 0.001147 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| rendimento | 0.001608 | 0.001525 | 0.001549 | 0.001702 | 0.002006 |
| Rischio (varianza) | 0.000040 | 0.000048 | 0.000066 | 0.000107 | 0.000236 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.044958 | 0.079452 | 0.095177 | 0.092015 | 0.073892 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.253006 | 0.218541 | 0.189311 | 0.164414 | 0.130431 |

Modello media-entropia di Rényi

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.000500 | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 | 0.002500 |
| rendimento | 0.000502 | 0.001002 | 0.001502 | 0.002002 | 0.002502 |
| rischio | -5.275942 | -5.030817 | -4.671064 | -4.096278 | -2.780160 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| varianza | 0.000150 | 0.000245 | 0.000453 | 0.000819 | 0.001392 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| rendimento | 0.001770 | 0.001771 | 0.001831 | 0.001924 | 0.002034 |
| rischio | 0.000045 | 0.000064 | 0.000104 | 0.000177 | 0.000294 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.040950 | 0.064025 | 0.070597 | 0.069941 | 0.067074 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.262407 | 0.221255 | 0.179268 | 0.144558 | 0.118593 |

Analizzando le performance in sample dei tre modelli, si osserva come il modello di Markowitz superi tutti e due i competitor. Un confronto tra le performance dei due modelli di entropia permette di osservare come il modello media-entropia di Shannon sia sempre superiore a quello media-entropia di Rényi nel periodo considerato.

Passando all'analisi delle performance out of sample, si può notare come il modello di Markowitz perda quasi sempre con i modelli media-entropia. In particolare, nel caso di portafoglio caratterizzato da un rendimento obiettivo fissato a 0.002, che rappresenta il secondo più elevato tra i rendimenti obiettivo fissati, il modello di Markowitz sovraperforma leggermente il modello media-entropia di Rényi, ma non il modello media-entropia di Shannon. Nel caso di un portafoglio caratterizzato da un rendimento obiettivo dello 0.0025, il più elevato del periodo, il modello di Markowitz supera sia il modello media-entropia di Rényi che il modello media-entropia di Shannon.

A livello di rendimenti puri out of sample, i modelli media-entropia superano il modello di Markowitz. Il modello media-entropia di Rényi supera per ogni livello di rendimento obiettivo i rendimenti out of sample del modello di Shannon.

4 periodo

Modello di Markowitz

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 | 0.002500 | 0.003000 |
| rendimento | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 | 0.002500 | 0.003000 |
| rischio | 7.240247E-06 | 0.000014 | 0.000040 | 0.000093 | 0.000217 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| rendimento | 0.000121 | -0.000271 | -0.000837 | -0.001499 | -0.001756 |
| Rischio (varianza) | 0.000011 | 0.000021 | 0.000057 | 0.000129 | 0.000293 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.371785 | 0.387540 | 0.314067 | 0.258577 | 0.203459 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.035787 | -0.059180 | -0.110350 | -0.131960 | -0.102550 |

Modello media-entropia di Shannon

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 | 0.002500 | 0.003000 |
| rendimento | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 | 0.002500 | 0.003000 |
| rischio | -3.845797 | -3.608607 | -2.993082 | -2.016247 | -0.554500 |
| varianza | 0.000030 | 0.000043 | 0.000072 | 0.000127 | 0.000236 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| rendimento | -0.000390 | -0.000710 | -0.001095 | -0.001470 | -0.001803 |
| Rischio (varianza) | 0.000035 | 0.000054 | 0.000095 | 0.000173 | 0.000318 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.182346 | 0.227348 | 0.235551 | 0.221022 | 0.195046 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | -0.065530 | -0.095790 | -0.112180 | -0.111530 | -0.101010 |

Modello media-entropia di Rényi

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 | 0.002500 | 0.003000 |
| rendimento | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 | 0.002500 | 0.003000 |
| rischio | -5.551411 | -5.391078 | -5.029254 | -4.403450 | -2.781096 |
| varianza | 0.000030 | 0.000044 | 0.000080 | 0.000147 | 0.000249 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| rendimento | -0.000391 | -0.000724 | -0.001083 | -0.001435 | -0.001784 |
| Rischio (varianza) | 0.0000355 | 0.000057 | 0.000109 | 0.000200 | 0.000334 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.182255 | 0.223954 | 0.222347 | 0.205666 | 0.189999 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | -0.065620 | -0.095270 | -0.103490 | -0.101430 | -0.097650 |

In sample, il modello di Markowitz supera tutti i modelli media-entropia. Fra il modello di Shannon e il modello media-entropia di Rényi, il modello di Shannon supera sempre leggermente le performance del modello media-entropia di Rényi.

Out of sample, le performance dei modelli sono negative per tutti i modelli per tutti i livelli di rendimento considerati, ad eccezione del modello di Markowitz che nel caso del portafoglio con il livello di rendimento obiettivo più basso registra un rendimento positivo. Di conseguenza, per tale livello di rendimento obiettivo (0.001) il modello di Markowitz supera le performance dei competitor. Anche nel caso del portafoglio corrispondente ad un rendimento obiettivo fissato a 0.0015, il modello di Markowitz supera le performance degli altri modelli che invece registrano performance equivalenti fra loro. Per i portafogli con valori più elevati di rendimento obiettivo il modello media-entropia di Rényi supera sia il modello di Markowitz che il modello media-entropia di Shannon, mentre il modello media-entropia di Shannon si attesta comunque sempre superiore rispetto al modello di Markowitz.

A livello di rendimenti puri out of sample il modello di Markowitz supera i modelli media-entropia per 4 valori di rendimento obiettivo. Il modello media-entropia di Rényi registra rendimenti leggermente meno negativi rispetto al modello media-entropia di Shannon nel caso dei primi 3 livelli di rendimento obiettivo più elevati.

5 Periodo

Modello di Markowitz

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.000500 | 0.00100 | 0.001200 | 0.001500 | 0.001600 |
| Rendimento | 0.000500 | 0.001000 | 0.001200 | 0.001500 | 0.001600 |
| Rischio (varianza) | 6.585114E-06 | 9.024899E-06 | 0.000013 | 0.000050 | 0.000079 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.001096 | 0.001074 | 0.000931 | 0.000714 | 0.000921 |
| Rischio (varianza) | 5.760384E-06 | 6.479692E-06 | 8.865456E-06 | 0.000024 | 0.000039 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.195202 | 0.333178 | 0.326765 | 0.211488 | 0.179854 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.456707 | 0.422273 | 0.312797 | 0.144776 | 0.146211 |

Modello media-entropia di Shannon

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0,000500 | 0.001000 | 0.001200 | 0.001500 | 0.001600 |
| rendimento | 0.000500 | 0.001000 | 0.001200 | 0.001500 | 0.001600 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| rischio | -3.842461 | -3.462024 | -3.063390 | -1.852945 | -0.976686 |
| varianza | 0.0000169839086971 | 0.000020653038083 | 0.00002655460320551 | 0.00005946962432012 | 0.00008548393341807 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| rendimento | 0.000863 | 0.000577 | 0.000433 | 0.000359 | 0.000757 |
| Rischio (varianza) | 8.601588e-06 | 8.855342e-06 | 0.000010 | 0.0000241 | 0.000040 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.121548 | 0.220245 | 0.233047 | 0.194630 | 0.173152 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.294294 | 0.193947 | 0.132739 | 0.073173 | 0.119020 |

Modello media-entropia di Rényi

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.000500 | 0.001000 | 0.001200 | 0.001500 | 0.001600 |
| Rendimento | 0.000500 | 0.001000 | 0.001200 | 0.001500 | 0.001600 |
| Rischio | -5.548959 | -5.256326 | -4.940832 | -3.868025 | -2.841256 |
| Varianza | 0.000016 | 0.000022 | 0.0000322 | 0.000068 | 0.000092 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.000863 | 0.000575 | 0.000530 | 0.000876 | 0.001163 |
| Rischio (varianza) | 8.595431e-06 | 9.308353e-06 | 0.000012 | 0.000033 | 0.000050 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.121518 | 0.209944 | 0.211577 | 0.181202 | 0.166148 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.294508 | 0.188633 | 0.148642 | 0.152109 | 0.163974 |

In sample, il modello di Markowitz supera tutti i competitor, il modello media-entropia di Shannon supera il modello media-entropia di Rényi per tutti i valori di rendimento obiettivo.

Out of sample, il modello di Markowitz sovraperforma sempre il modello media-entropia di Shannon mentre sottoperforma il modello media-entropia di Rényi nel caso dei due rendimenti obiettivo più alti del periodo (0.0015 e 0.0016). Il modello media-entropia di Rényi viene battuto dal modello di Shannon solo nel caso del portafoglio con un rendimento obiettivo pari a 0.001, il secondo rendimento obiettivo più basso.

A livello di rendimenti puri, out of sample il modello di Markowitz supera i modelli media-entropia. Il modello media-entropia di Shannon viene superato in tutti i livelli di rendimenti obiettivo, mentre il modello media-entropia di Rényi in 3 livelli. Il modello media-entropia di Rényi presenta sempre rendimenti puri superiori al modello media-entropia di Shannon.

6 Periodo

Modello di Markowitz

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.001000 | 0.001500 | 0.001600 | 0.001800 | 0.002000 |
| rendimento | 0.001001 | 0.001501 | 0.001601 | 0.001801 | 0.002001 |
| rischio | 6.573013E-06 | 0.000020 | 0.000027 | 0.000048 | 0.000084 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| rendimento | 0.000777 | 0.000068 | 0.000010 | -0.000105 | -0.000104 |
| rischio | 0.000018 | 0.000046 | 0.000057 | 0.000091 | 0.000145 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.390711 | 0.330680 | 0.306202 | 0.258520 | 0.218072 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.182210 | 0.010057 | 0.001351 | -0.011010 | -0.008680 |

Modello media-entropia di Shannon

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.001000 | 0.001500 | 0.001600 | 0.001800 | 0.002000 |
| rendimento | 0.001001 | 0.001501 | 0.001601 | 0.001801 | 0.002001 |
| rischio | -3.649611 | -2.654336 | -2.354320 | -1.624950 | -0.594552 |
| varianza | 0.000013 | 0.000029 | 0.000036 | 0.000054 | 0.000087 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| rendimento | 0.000809 | 0.000419 | 0.000320 | 0.000103 | -0.000181 |
| Rischio (varianza) | 0.000027 | 0.000054 | 0.000065 | 0.000097 | 0.000159 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.277466 | 0.276843 | 0.266455 | 0.243003 | 0.213939 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.153330 | 0.056960 | 0.039705 | 0.010500 | -0.014330 |

Modello media-entropia di Rényi

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.001000 | 0.001500 | 0.001600 | 0.001800 | 0.002000 |
| rendimento | 0.001001 | 0.001501 | 0.001601 | 0.001801 | 0.002001 |
| rischio | -5.419819 | -4.798600 | -4.592963 | -4.000484 | -2.619989 |
| varianza | 0.000013 | 0.000034 | 0.000043 | 0.000067 | 0.000102 |

| OUT OF SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| rendimento | 0.000769 | 0.000302 | 0.000192 | -0.000041 | -0.000293 |
| Rischio (varianza) | 0.000028 | 0.000070 | 0.000087 | 0.000130 | 0.000191 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.273801 | 0.255306 | 0.243248 | 0.219572 | 0.198022 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.143228 | 0.035984 | 0.020576 | -0.003650 | -0.021260 |

In sample, il modello di Markowitz sovraperforma sempre i due modelli competitor. Il modello media-entropia di Shannon supera sempre il modello media-entropia di Rényi.

Considerando invece le performance out of sample, il modello di Markowitz batte il modello media-entropia di Shannon nei portafogli caratterizzati dai rendimenti obiettivo estremi del periodo (0,001 e 0,002), mentre negli altri livelli indicati viene sovraperformato da quello media-entropia di Shannon. Il modello di Markowitz confrontato con il modello media-entropia di Rènyi sovraperforma nel caso dei portafogli caratterizzati dai due rendimenti obiettivo più bassi (0.001 e 0.0015) e nel caso del portafoglio col rendimento obiettivo più alto del periodo (0.002). Il modello media-entropia di Shannon supera sempre le performance del modello media-entropia di Rényi.

A livello di rendimento puro, out of sample i modelli media-entropia si attestano superiori rispetto al modello di Markowitz. In particolare il modello media-entropia di Shannon supera il modello di Markowitz in 4 livelli di rendimento obiettivo fissati, mentre il modello media-entropia di Rényi supera il modello di Markowitz in 3 livelli. Il modello media-entropia di Shannon offre un rendimento puro superiore rispetto al modello media-entropia di Rényi.

Periodo 7

Modello di Markowitz

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.000500 | 0.000800 | 0.001000 | 0.001200 | 0.001400 |
| Rendimento | 0.000500 | 0.000800 | 0.001000 | 0.001200 | 0.001400 |
| Rischio (varianza) | 8.396936E-06 | 0.0000112 | 0.000015 | 0.000026 | 0.000062 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| rendimento | 0.001238 | 0.001465 | 0.001628 | 0.001792 | 0.001693 |
| Rischio (varianza) | 0.000022 | 0.000027 | 0.000032 | 0.000038 | 0.000073 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.172874 | 0.238318 | 0.253339 | 0.232341 | 0.176566 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.259876 | 0.280295 | 0.286453 | 0.287671 | 0.196926 |

Modello media-entropia di Shannon

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.000500 | 0.000800 | 0.001000 | 0.001200 | 0.001400 |
| rendimento | 0.000500 | 0.000800 | 0.001000 | 0.001200 | 0.001400 |
| rischio | -3.793637 | -3.518010 | -3.136476 | -2.473265 | -1.268283 |
| varianza | 0.000018 | 0.000021 | 0.000027 | 0.000039 | 0.000047 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| rendimento | 0.000976 | 0.001224 | 0.001377 | 0.001482 | 0.001416 |
| Rischio (varianza) | 0.0000317 | 0.000036 | 0.000043 | 0.000057 | 0.000108 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.115708 | 0.171799 | 0.192441 | 0.191538 | 0.202997 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.173358 | 0.202524 | 0.208939 | 0.196180 | 0.136046 |

Modello media-entropia di Rényi

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.000500 | 0.000800 | 0.001000 | 0.001200 | 0.001400 |
| rendimento | 0.000500 | 0.000800 | 0.001000 | 0.001200 | 0.001400 |
| rischio | -5.512438 | -5.298527 | -5.002922 | -4.488914 | -3.325530 |
| varianza | 0.000018 | 0.000022 | 0.000032 | 0.000057 | 0.000119 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| rendimento | 0.000977 | 0.001206 | 0.001300 | 0.001311 | 0.001228 |
| Rischio (varianza) | 0.000031 | 0.000037 | 0.000051 | 0.000088 | 0.000180 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.115472 | 0.167930 | 0.175826 | 0.158583 | 0.127909 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.173203 | 0.196280 | 0.181551 | 0.139639 | 0.091552 |

In sample, il modello di Markowitz supera sempre le performance del modello media-entropia di Rènyi e sovraperforma il modello media-entropia di Shannon per tutti i portafogli con i livelli scelti come rendimento obiettivo tranne che nel caso del portafoglio caratterizzato dal livello più alto di rendimento desiderato (0.0014). inoltre il modello media-entropia di Shannon sovraperforma sempre il modello media-entropia di Rényi.

Out of the sample, il modello di Markowitz supera sempre i modelli competitor. Facendo un confronto fra le performance dei due modelli media-entropia, il modello media-entropia di Shannon supera sempre il modello media-entropia di Rényi nel periodo considerato.

A livello di rendimenti puri out of sample il modello di Markowitz supera i modelli media-entropia. Il modello media-entropia di Shannon offre rendimenti out of sample superiori rispetto al modello media-entropia di Rényi.

Periodo 8

Modello di Markowitz

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 | 0.002500 | 0.003000 |
| Rendimento | 0.001001 | 0.001501 | 0.002001 | 0.002501 | 0.003001 |
| Rischio (varianza) | 4.801005E-06 | 7.682939E-06 | 0.000018 | 0.000054 | 0.000137 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.001111 | 0.001139 | 0.001231 | 0.001077 | 0.000698 |
| Rischio (varianza) | 0.000010 | 0.000012 | 0.000028 | 0.000083 | 0.000208 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.457065 | 0.541697 | 0.461611 | 0.340374 | 0.255808 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.347914 | 0.317768 | 0.229016 | 0.118192 | 0.048355 |

Modello media-entropia di Shannon

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 | 0.002500 | 0.005000 |
| Rendimento | 0.001001 | 0.001501 | 0.002001 | 0.002501 | 0.003001 |
| Rischio | -3.826325 | -3.545299 | -3.022353 | -2.295883 | -1.347292 |
| Varianza | 0.000013 | 0.000020 | 0.000043 | 0.000089 | 0.000168 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.001239 | 0.001155 | 0.000989 | 0.000754 | 0.000453 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rischio (varianza) | 0.000017 | 0.000026 | 0.000058 | 0.000124 | 0.000233 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.275750 | 0.332798 | 0.305174 | 0.264135 | 0.231460 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.300420 | 0.223830 | 0.129475 | 0.067661 | 0.029676 |

Modello media-entropia di Rényi

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 | 0.002500 | 0.003000 |
| rendimento | 0.001001 | 0.001501 | 0.002001 | 0.002501 | 0.003001 |
| rischio | -5.537996 | -5.367774 | -5.077623 | -4.642194 | -3.896697 |
| varianza | 0.000013 | 0.000023 | 0.000054 | 0.000108 | 0.000186 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| rendimento | 0.001236 | 0.001087 | 0.000856 | 0.000602 | 0.000336 |
| Rischio (varianza) | 0.000017 | 0.000031 | 0.000074 | 0.000149 | 0.000257 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.275003 | 0.308548 | 0.271402 | 0.240442 | 0.219969 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.298844 | 0.193934 | 0.099482 | 0.049331 | 0.020995 |

In sample, il modello di Markowitz supera sempre le performance dei due modelli competitor. In un confronto tra i modelli media-entropia il modello media-entropia di Shannon supera sempre il modello media-entropia di Rényi

Out of sample, si verifica una situazione simile rispetto all'analisi in sample, infatti anche in questo caso nel periodo il modello di Markowitz supera sempre le performance degli altri due modelli e valutando un confronto tra i modelli media-entropia, il modello media-entropia di Shannon supera sempre il modello media-entropia di Rényi.

A livello di rendimento puro out of sample, il modello di Markowitz supera i modelli media-entropia. In particolare il modello media-entropia di Shannon viene superato nel caso dei 3 livelli più elevati di rendimento obiettivo fissati, mentre il modello media-entropia di Rényi viene superato in 4 livelli. Il modello media-entropia di Shannon si attesta sempre superiore rispetto al modello media-entropia di Rényi.

Periodo 9

Modello di Markowitz

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.000500 | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 | 0.002500 |
| Rendimento | 0.000501 | 0.001001 | 0.001501 | 0.002001 | 0.002501 |
| Rischio (varianza) | 0.000013 | 0.000021 | 0.000039 | 0.000076 | 0.000220 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | -0.002635 | -0.002788 | -0.002679 | -0.002462 | -0.001358 |
| Rischio (varianza) | 0.000049 | 0.000052 | 0.000059 | 0.000087 | 0.000180 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.138915 | 0.215742 | 0.240034 | 0.228781 | 0.168621 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | -0.372680 | -0.383070 | -0.347130 | -0.262850 | -0.100950 |

Modello media-entropia di Shannon

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.000500 | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 | 0.002500 |
| Rendimento | 0.000501 | 0.001001 | 0.001501 | 0.002001 | 0.002501 |
| Rischio | -3.601318 | -3.204703 | -2.623487 | -1.822845 | -0.577646 |
| Varianza | 0.000025 | 0.000036 | 0.000060 | 0.000108 | 0.000241 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | -0.002583 | -0.002512 | -0.002336 | -0.002021 | -0.001330 |
| Rischio (varianza) | 0.000066 | 0.000069 | 0.000080 | 0.000106 | 0.000199 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.099820 | 0.166764 | 0.193397 | 0.192233 | 0.161109 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | -0.315960 | -0.301820 | -0.260990 | -0.195680 | -0.094080 |

Modello media-entropia di Rényi

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.000500 | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 | 0.002500 |
| Rendimento | 0.000501 | 0.001001 | 0.001501 | 0.002001 | 0.002501 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rischio | -5.386903 | -5.138087 | -4.758386 | -4.128659 | -2.427101 |
| Varianza | 0.000026 | 0.000044 | 0.000088 | 0.000171 | 0.000319 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| rendimento | -0.002498 | -0.002294 | -0.001981 | -0.001584 | -0.001101 |
| Rischio (varianza) | 0.000065 | 0.000072 | 0.000099 | 0.000160 | 0.000281 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.097394 | 0.149378 | 0.159641 | 0.152731 | 0.140018 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | -0.307740 | -0.268650 | -0.198250 | -0.125010 | -0.065680 |

In sample, il modello di Markowitz supera i modelli rivali e il modello media-entropia di Shannon supera il modello media-entropia di Rènyi.

Out of sample, le performance sono negative per tutti i modelli. I modelli media-entropia però registrano rendimenti meno negativi del modello di Markowitz. In particolare il modello media-entropia di Rényi registra sempre performance meno negative rispetto al modello media-entropia di Shannon.

A livello di rendimenti puri out of sample, i modelli media-entropia superano il modello di Markowitz. Il modello media-entropia di Rényi presenta rendimenti meno negativi rispetto al modello media-entropia di Shannon.

Periodo 10

Modello di Markowitz

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| IN SAMPLE | | | | | |
| Rendimento obiettivo | 0.000100 | 0.000500 | 0.000800 | 0.001000 | 0.001200 |
| Rendimento | 0.000103 | 0.0005038 | 0.000803 | 0.001003 | 0.001203 |
| Rischio | 0.000030 | 0.000047 | 0.000076 | 0.000118 | 0.000205 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | -0.006026 | -0.006645 | -0.007589 | -0.007590 | -0.006222 |
| Rischio | 0.000230 | 0.000367 | 0.000627 | 0.001005 | 0.001825 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.018853 | 0.073198 | 0.091668 | 0.092247 | 0.084044 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | -0.396823 | -0.346470 | -0.302880 | -0.239310 | -0.145640 |

Modello media-entropia di Shannon

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.000100 | 0.000500 | 0.000800 | 0.001000 | 0.001200 |
| Rendimento | 0.000103 | 0.000503 | 0.000803 | 0.001003 | 0.001203 |
| Rischio | -3.342585 | -2.738558 | -2.082410 | -1.49110 | -0.592503 |
| Varianza | 0.000063 | 0.000077 | 0.000101 | 0.000134 | 0.000208 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | -0.005970 | -0.006719 | -0.007231 | -0.007354 | -0.006666 |
| Rischio (varianza) | 0.000360 | 0.000525 | 0.000793 | 0.001114 | 0.001741 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.012986 | 0.057389 | 0.079710 | 0.086512 | 0.083395 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | -0.314603 | -0.293090 | -0.256700 | -0.220260 | -0.159760 |

Modello media-entropia di Rényi

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.000100 | 0.000500 | 0.000800 | 0.001000 | 0.001200 |
| Rendimento | 0.000103 | 0.000503 | 0.000803 | 0.001003 | 0.001203 |
| Rischio | -5.208425 | -4.795515 | -4.284385 | -3.716310 | -2.445104 |
| Varianza | 0.000064 | 0.000090 | 0.000132 | 0.000175 | 0.000234 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | -0.005990 | -0.006313 | -0.006357 | -0.006293 | -0.006147 |
| Rischio (varianza) | 0.000406 | 0.000681 | 0.001064 | 0.001435 | 0.001923 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.012933 | 0.052931 | 0.069726 | 0.075673 | 0.078645 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | -0.297185 | -0.241910 | -0.194810 | -0.166120 | -0.140170 |

In sample, il modello di Markowitz sovraperforma sempre i modelli competitor. Il modello media-entropia di Shannon supera le performance del modello media-entropia di Rényi per tutti i portafogli caratterizzati dai diversi livelli di rendimento obiettivo.

Out of sample, è necessario osservare che tutti i modelli conducono a performance negative. Il modello media-entropia di Shannon registra rendimenti meno negativi del modello di Markowitz per tutti i portafogli caratterizzati dai diversi livelli di rendimento obiettivo fissati per la costruzione, tranne nel

caso del portafoglio caratterizzato dal rendimento obiettivo più alto (pari a 0.0012). Il modello media-entropia di Rényi registra sempre performance meno negative rispetto al modello media-entropia di Shannon.

A livello di rendimenti puri out of sample, il modelli media-entropia si presentano superiori rispetto al modello di Markowitz. In particolare il modello media-entropia di Shannon supera il modello di Markowitz in 4 livelli di rendimento obiettivo, invece il modello media-entropia di Rényi supera sempre il modello di Markowitz. In un confronto tra modelli media-entropia, il modello media-entropia di Rényi presenta rendimenti meno negativi rispetto al modello media-entropia di Shannon, tranne nel caso del portafoglio corrispondente al primo ed ultimo livello di rendimento obiettivo considerato (0.0001 e 0.0012).

Periodo 11

Modello di Markowitz

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.000500 | 0.001000 | 0.002000 | 0.003000 | 0.004000 |
| Rendimento | 0.000502 | 0.001002 | 0.002002 | 0.003002 | 0.004002 |
| Rischio (varianza) | 0.000027 | 0.000033 | 0.000069 | 0.000155 | 0.000307 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.002051 | 0.002113 | 0.002372 | 0.002688 | 0.003081 |
| Rischio (varianza) | 0.000028 | 0.000028 | 0.000033 | 0.000050 | 0.000083 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.095597 | 0.173315 | 0.239444 | 0.241055 | 0.228125 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.384221 | 0.394069 | 0.409613 | 0.377740 | 0.336509 |

Modello media-entropia di Shannon

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.000500 | 0.001000 | 0.002000 | 0.003000 | 0.004000 |
| Rendimento | 0.000502 | 0.001002 | 0.002002 | 0.003002 | 0.004002 |
| Rischio | -3.846083 | -3.779307 | -3.444624 | -2.885844 | -2.100576 |
| Varianza | 0.000115 | 0.000124 | 0.000157 | 0.000227 | 0.000371 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.002824 | 0.002885 | 0.003012 | 0.003119 | 0.003185 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rischio (varianza) | 0.000044 | 0.000042 | 0.000044 | 0.000059 | 0.000097 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.0468142 | 0.090045 | 0.159802 | 0.199008 | 0.207562 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.421460 | 0.440124 | 0.449731 | 0.402783 | 0.322738 |

Modello media-entropia di Rényi

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.000500 | 0.001000 | 0.002000 | 0.003000 | 0.004000 |
| Rendimento | 0.000502 | 0.001002 | 0.002002 | 0.003002 | 0.004002 |
| Rischio | -5.551664 | -5.506707 | -5.301839 | -4.965340 | -4.427971 |
| Varianza | 0.000115 | 0.000122 | 0.000152 | 0.000253 | 0.000488 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.002824 | 0.002885 | 0.002977 | 0.003024 | 0.003041 |
| Rischio (varianza) | 0.000044 | 0.000042 | 0.000045 | 0.000068 | 0.000122 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.046826 | 0.090625 | 0.162243 | 0.188545 | 0.181134 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.421587 | 0.441206 | 0.440026 | 0.364818 | 0.274970 |

In sample, il modello di Markowitz supera sempre i competitor.Il modello media-entropia di Rényi supera leggermente il modello media-entropia di Shannon nel caso dei portafogli caratterizzati dai primi tre livelli di rendimento obiettivo dal basso (0.0005,0.001 e 0.002).

Out of sample, il modello media-entropia di Shannon sovraperforma il modello di Markowitz per tutti i portafogli caratterizzati dai livelli di rendimento obiettivo fissati nella costruzione del portafoglio, ad eccezione per il portafoglio con il livello più alto di rendimento obiettivo (pari a 0.004) dove sottoperforma. Il modello media-entropia di Rényi supera il modello di Markowitz in tutti i portafogli caratterizzati dai livelli fissati per la costruzione della frontiera tranne per i portafogli con i due livelli più alti di rendimento obiettivo (0.003 e 0.004), nei quali registra performance peggiori. In un confronto tra i due modelli media-entropia si evidenzia come il modello media-entropia di Rényi superi le performance del modello media-entropia di Shannon nei portafogli caratterizzati dai livelli di rendimento più bassi (0.0005 e 0.001) mentre altrove il modello media-entropia di Shannon registra risultati migliori.

A livello di rendimenti puri out of sample, i modelli media-entropia si presentano superiori al modello di Markowitz. In particolare mentre il modello media-entropia di Shannon supera sempre i rendimenti

del modello di Markowitz, il modello di Rényi li supera in 4 livelli di rendimento obiettivo. Il modello media-entropia di shannon dimostra rendimenti superiori rispetto al modello media-entropia di Rényi.

Periodo 12

Modello di Markowitz

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.001500 | 0.002000 | 0.002500 | 0.003000 | 0.003100 |
| Rendimento | 0.001504 | 0.002004 | 0.002504 | 0.003004 | 0.003104 |
| Rischio (varianza) | 0.000011 | 0.000017 | 0.000038 | 0.000080 | 0.000098 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | -5.391415e-05 | 0.000656 | 0.001142 | 0.001323 | 0.001078 |
| Rischio (varianza) | 0.000039 | 0.000038 | 0.000070 | 0.000123 | 0.000138 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.438611 | 0.484146 | 0.405792 | 0.335209 | 0.313078 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | -0.008607 | 0.106035 | 0.136428 | 0.119154 | 0.091689 |

Modello media-entropia di Shannon

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.001500 | 0.002000 | 0.002500 | 0.003000 | 0.003100 |
| Rendimento | 0.001504 | 0.002004 | 0.002504 | 0.003004 | 0.003104 |
| Rischio | -3.476209 | -3.137751 | -2.278281 | -1.227429 | -0.922928 |
| Varianza | 0.000031 | 0.000034 | 0.000053 | 0.000092 | 0.000107 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.000105 | 0.000523 | 0.000853 | 0.000954 | 0.000877 |
| Rischio (varianza) | 0.000067 | 0.000066 | 0.000081 | 0.000125 | 0.000141 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.266231 | 0.338906 | 0.343839 | 0.313008 | 0.299725 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.012855 | 0.064127 | 0.094364 | 0.085098 | 0.073728 |

Modello media-entropia di Rényi

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.001500 | 0.002000 | 0.002500 | 0.003000 | 0.003100 |
| Rendimento | 0.001504 | 0.002004 | 0.002504 | 0.003004 | 0.003104 |
| Rischio | -5.310059 | -4.993323 | -4.476753 | -3.382213 | -2.909959 |
| Varianza | 0.000029 | 0.000036 | 0.000060 | 0.000121 | 0.000143 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.000032 | 0.000312 | 0.000476 | 0.000502 | 0.000482 |
| Rischio (varianza) | 0.000061 | 0.000061 | 0.000085 | 0.000159 | 0.000187 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.275254 | 0.330958 | 0.321284 | 0.272518 | 0.258780 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.004156 | 0.039805 | 0.051638 | 0.039718 | 0.035218 |

In sample, il modello di Markowitz supera tutti i competitor. Il modello media-entropia di Shannon supera il modello media-entropia di Rényi per i portafogli caratterizzati da tutti i livelli di rendiemnto obiettivo, tranne nel portafoglio con un livello di rendimento obiettivo pari a 0.0015 (il più basso del periodo), dove viene superato.

Out of sample, si può osservare che il modello media-entropia di Shannon supera sempre il modello media-entropia di Rényi. Entrambi i modelli media-entropia superano il modello di Markowitz nel caso del portafoglio caratterizzato dal livello di rendimento obiettivo più basso (0.0015) mentre per gli altri livelli di rendimento obiettivo vengono invece superati.

A livello di rendimenti puri out of sample, il modello di Markowitz supera i modelli media-entropia in 4 livelli di rendimento obiettivo, tranne il livello più basso desiderato (0.0015). Il modello media-entropia di Shannon supera il modello media-entropia di Rényi.

Periodo 13

Modello di Markowitz

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.001500 | 0.002000 | 0.002500 | 0.003000 | 0.003500 |
| Rendimento | 0.001501 | 0.002001 | 0.002501 | 0.003001 | 0.003501 |
| Rischio (varianza) | 0.000016 | 0.000032 | 0.000065 | 0.000124 | 0.000237 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.000391 | 0.000145 | -0.000292 | -0.000649 | -0.000896 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rischio (varianza) | 0.000019 | 0.000029 | 0.000058 | 0.000121 | 0.000261 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.364257 | 0.351397 | 0.310210 | 0.269527 | 0.227450 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.089657 | 0.026750 | -0.038130 | -0.058930 | -0.055470 |

Modello media-entropia di Shannon

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.001500 | 0.002000 | 0.002500 | 0.003000 | 0.003500 |
| Rendimento | 0.001501 | 0.002001 | 0.002501 | 0.003001 | 0.003501 |
| Rischio | -3.626193 | -3.271199 | -2.774127 | -2.132130 | -1.310419 |
| Varianza | 0.000043 | 0.000067 | 0.000111 | 0.000182 | 0.000286 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.000386 | 0.000199 | 4.922296E-06 | -0.000199 | -0.000419 |
| Rischio (varianza) | 0.000045 | 0.000077 | 0.000130 | 0.000212 | 0.000330 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.227702 | 0.243702 | 0.236883 | 0.222303 | 0.206692 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.057177 | 0.022672 | 0.000430 | -0.013690 | -0.023090 |

Modello media-entropia di Rényi

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.001500 | 0.002000 | 0.002500 | 0.003000 | 0.003100 |
| Rendimento | 0.001504 | 0.002004 | 0.002504 | 0.003004 | 0.003104 |
| Rischio | -5.310059 | -4.993323 | -4.476753 | -3.382213 | -2.909959 |
| Varianza | 0.000029 | 0.000036 | 0.000060 | 0.000121 | 0.000143 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.000032 | 0.000312 | 0.000476 | 0.000502 | 0.000482 |
| Rischio (varianza) | 0.000061 | 0.000061 | 0.000085 | 0.000159 | 0.000187 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.275254 | 0.330958 | 0.321284 | 0.272518 | 0.258780 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.004156 | 0.039805 | 0.051638 | 0.039718 | 0.035218 |

In sample, il modello media-entropia di Rényi supera sempre il modello media-entropia di Shannon mentre supera il modello Markowitz in tutti i portafogli corrispondenti a tutti i livelli di rendimento obiettivo fissati tranne nei due portafogli corrispondenti ai due livelli più bassi (0.0015 e 0.002). Il modello di Markowitz supera sempre il modello media-entropia di Shannon.

Out of sample, il modello media-entropia Rényi offre sempre rendimenti positivi e batte il modello media-entropia di Shannon e il modello di Markowitz per tutti i livelli di rendimento obiettivo fissati nella costruzione dei portafogli tranne nel caso del portafoglio associato al rendimento obiettivo più basso (0.0015), dove viene superato. Il modello media-entropia di Shannon sovraperforma il modello di Markowitz per tutti i livelli obiettivo tranne il più basso (0.0015).

A livello di rendimento puro out of sample, i modelli media-entropia superano il modello di Markowitz. Il modello media-entropia di Rényi supera in 4 livelli il modello media-entropia di Shannon.

Periodo 14

Modello di Markowitz

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.000050 | 0.000100 | 0.000200 | 0.000300 | 0.000500 |
| Rendimento | 0.0000534 | 0.000103 | 0.000203 | 0.000303 | 0.000503 |
| Rischio (varianza) | 0.000026 | 0.000027 | 0.000030 | 0.000035 | 0.000048 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.000986 | 0.000973 | 0.000977 | 0.000984 | 0.000810 |
| Rischio (varianza) | 0.000038 | 0.000039 | 0.000042 | 0.0000477 | 0.000060 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.010479 | 0.019783 | 0.036753 | 0.051159 | 0.072024 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.158136 | 0.153941 | 0.149104 | 0.142454 | 0.104594 |

Modello media-entropia di Shannon

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.000050 | 0.000100 | 0.000200 | 0.000300 | 0.000500 |
| Rendimento | 0.000053 | 0.000103 | 0.000203 | 0.000303 | 0.000503 |
| Rischio | -2.911331 | -2.848630 | -2.712154 | -2.5582610 | -2.177104 |
| Varianza | 0.000081 | 0.000083 | 0.000088 | 0.000094 | 0.000108 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.000739 | 0.000721 | 0.000686 | 0.000646 | 0.000553 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rischio (varianza) | 0.000088 | 0.000091 | 0.000096 | 0.000103 | 0.000123 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.005938 | 0.011330 | 0.021643 | 0.031279 | 0.048423 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.078438 | 0.075591 | 0.069809 | 0.063581 | 0.049913 |

Modello media-entropia di Rényi

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.000050 | 0.000100 | 0.000200 | 0.000300 | 0.000500 |
| Rendimento | 0.000053 | 0.000103 | 0.000203 | 0.000303 | 0.000503 |
| Rischio | -4.816861 | -4.763048 | -4.643358 | -4.504036 | -4.138320 |
| Varianza | 0.000081 | 0.000083 | 0.000088 | 0.000094 | 0.000112 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.000691 | 0.000672 | 0.000631 | 0.000587 | 0.000488 |
| Rischio (varianza) | 0.000094 | 0.000097 | 0.000102 | 0.000108 | 0.000124 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.005923 | 0.011316 | 0.021620 | 0.031183 | 0.047376 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.071038 | 0.068211 | 0.062408 | 0.056416 | 0.043703 |

In sample, il modello di Markowitz supera entrambi i competitor. Il modello media-entropia di Shannon supera in tutti i livelli stabiliti le performance del modello media-entropia di Rényi.

Out of sample, il modello di Markowitz supera in tutti i livelli i modelli media-entropia e il modello media-entropia di Shannon a sua volta supera sempre la controparte con l'entropia di Rényi, salvo nel portafoglio corrispondente al livello di rendimento obiettivo più alto del periodo (0.0005).

A livello di rendimento puro out of sample, il modello di Markowitz supera i modelli media-entropia. Il modello media-entropia di Shannon si dimostra superiore al modello di Rényi.

Periodo 15

Modello di Markowitz

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 | 0.002200 | 0.002500 |
| Rendimento | 0.001001 | 0.001501 | 0.002001 | 0.002201 | 0.002501 |
| Rischio (varianza) | 0.000010 | 0.000015 | 0.000029 | 0.000041 | 0.000083 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.001692 | 0.001486 | 0.001215 | 0.001072 | 0.000507 |
| Rischio (varianza) | 0.000020 | 0.000028 | 0.000049 | 0.000067 | 0.0001507 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.307089 | 0.379138 | 0.371310 | 0.342156 | 0.273740 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.375948 | 0.280402 | 0.172111 | 0.130911 | 0.041360 |

Modello media-entropia di Shannon

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 | 0.002200 | 0.002500 |
| Rendimento | 0.001001 | 0.001501 | 0.002001 | 0.002201 | 0.002501 |
| Rischio | -3.513443 | -2.982116 | -2.120338 | -1.656716 | -0.760590 |
| varianza | 0.000035 | 0.000034 | 0.000049 | 0.000062 | 0.000096 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| rendimento | 0.001640 | 0.001272 | 0.000849 | 0.000660 | 0.000342 |
| rischio | 0.000044 | 0.000051 | 0.000083 | 0.000111 | 0.000178 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.168577 | 0.254041 | 0.285579 | 0.278143 | 0.254855 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.244604 | 0.177804 | 0.092902 | 0.062699 | 0.025616 |

Modello media-entropia di Rényi

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 | 0.002200 | 0.002500 |
| Rendimento | 0.001001 | 0.001501 | 0.002001 | 0.002201 | 0.002501 |
| Rischio | -5.313538 | -4.966890 | -4.382605 | -4.012092 | -3.006437 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Varianza | 0.000033 | 0.000040 | 0.000064 | 0.000079 | 0.000107 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.001608 | 0.001194 | 0.000748 | 0.000565 | 0.000287 |
| Rischio (varianza) | 0.000047 | 0.000068 | 0.000118 | 0.000148 | 0.000203 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.171971 | 0.235096 | 0.249566 | 0.247581 | 0.241402 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.233544 | 0.144238 | 0.068712 | 0.046493 | 0.020153 |

In sample, il modello di Markowitz supera sempre le performance dei modelli competitor. Il modello media-entropia di Shannon supera i risultati in termini di performance del modello media-entropia di Rényi nei portafogli corrispondenti a tutti i livelli di rendimento obiettivo, salvo nel caso del rendimento desiderato più basso del periodo (0.001).

Out of sample, il modello di Markowitz supera sempre le performance del medello media-entropia di Shannon, il quale a sua volta supera sempre le performance del modello media-entropia di Rényi.

A livello di rendimento puro out of sample, il modello di Markowitz supera i modelli media-entropia. Il modello media-entropia di Shannon si dimostra superiore al modello di Rényi.

Periodo 16

Modello di Markowitz

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| IN SAMPLE | | | | | |
| Rendimento obiettivo | 0.001500 | 0.002000 | 0.002500 | 0.003000 | 0.003500 |
| Rendimento | 0.001504 | 0.002004 | 0.002504 | 0.003004 | 0.003504 |
| Rischio (varianza) | 0.000013 | 0.000030 | 0.000065 | 0.000129 | 0.000230 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.000083 | 0.000095 | 0.000161 | 0.000332 | 0.000506 |
| Rischio (varianza) | 0.000020 | 0.000031 | 0.000057 | 0.000111 | 0.000208 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.407137 | 0.365563 | 0.308492 | 0.263752 | 0.230769 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.018314 | 0.016882 | 0.021216 | 0.031577 | 0.035115 |

Modello media-entropia di Shannon

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.001500 | 0.002000 | 0.002500 | 0.003000 | 0.003500 |
| Rendimento | 0.001504 | 0.002004 | 0.002504 | 0.003004 | 0.003504 |
| Rischio | -3.457832 | -3.001534 | -2.413309 | -1.690904 | -0.791286 |
| Varianza | 0.000039 | 0.000060 | 0.000100 | 0.000161 | 0.000248 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.000335 | 0.000371 | 0.000394 | 0.000405 | 0.000402 |
| Rischio (varianza) | 0.000036 | 0.000055 | 0.000091 | 0.000146 | 0.000224 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.240817 | 0.257961 | 0.250394 | 0.236416 | 0.222251 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.055723 | 0.050020 | 0.041309 | 0.033470 | 0.026903 |

Modello media-entropia di Rényi

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.001500 | 0.002000 | 0.002500 | 0.003000 | 0.003500 |
| Rendimento | 0.001504 | 0.002004 | 0.002504 | 0.003004 | 0.003504 |
| Rischio | -5.321954 | -5.075130 | -4.733650 | -4.225903 | -3.270990 |
| Varianza | 0.000043 | 0.000070 | 0.000115 | 0.000178 | 0.000259 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.000307 | 0.000329 | 0.000347 | 0.000362 | 0.000376 |
| Rischio (varianza) | 0.000038 | 0.000061 | 0.000101 | 0.000158 | 0.000231 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.228817 | 0.238186 | 0.232705 | 0.224726 | 0.217369 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.049620 | 0.041993 | 0.034505 | 0.028858 | 0.024721 |

In sample, il modello di Markowitz supera entrambi i competitor. Il modello media-entropia di Shannon supera in tutti i livelli stabiliti le performance del modello media-entropia di Rényi.

Out of sample, Il modello media-entropia di Shannon supera il modello di Markowitz in termini di performance per tutti i livelli di rendimento obiettivo fissati nella costruzione dei portafogli tranne nel portafoglio con rendimento obiettivo più alto (0.0035), nel quale Il modello di Markowitz supera il modello media-entropia di Shannon. Il modello media-entropia di Rényi supera sempre il modello di Markowitz, salvo per i due portafogli con rendimento obiettivo più elevati (0.003 e 0.0035). Il modello

media-entropia di Shannon sovraperforma per ogni livello di rendimento obiettivo il modello media-entropia di Rényi.

A livello di rendimenti puri out of sample, il modelli media-entropia superano il modello di Markowitz. Entrambe le versioni media-entropia superano infatti i rendimenti del modello media-varianza in 4 livelli di rendimento obiettivo fissati. Il modello media-entropia di Shannon offre rendimenti superiori rispetto al modello media-entropia di Rényi.

Periodo 17

Modello di Markowitz

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 | 0.002200 | 0.002500 |
| rendimento | 0.001001 | 0.001501 | 0.002001 | 0.002201 | 0.002501 |
| Rischio (varianza) | 6.106448E-06 | 8.708256E-06 | 0.000016 | 0.000023 | 0.000046 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.000265 | 0.000453 | 0.000598 | 0.000699 | 0.001111 |
| Rischio (varianza) | 9.457777e-06 | 0.000015 | 0.000027 | 0.000031 | 0.000044 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.405245 | 0.508785 | 0.493477 | 0.450035 | 0.366372 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.086437 | 0.116093 | 0.114310 | 0.125074 | 0.165770 |

Modello media-entropia di Shannon

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 | 0.002200 | 0.002500 |
| Rendimento | 0.001001 | 0.001501 | 0.002001 | 0.002201 | 0.002501 |
| Rischio | -3.847039 | -3.755074 | -3.381042 | -3.138691 | -2.639384 |
| Varianza | 0.000019 | 0.000022 | 0.000036 | 0.000049 | 0.000083 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.000454 | 0.000781 | 0.001208 | 0.001418 | 0.001809 |
| Rischio (varianza) | 0.000781 | 0.000024 | 0.000036 | 0.000048 | 0.000080 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.227743 | 0.318693 | 0.330925 | 0.313722 | 0.273979 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.016273 | 0.158520 | 0.199205 | 0.204466 | 0.202008 |

Modello media-entropia di Rényi

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 | 0.002200 | 0.002500 |
| Rendimento | 0.001001 | 0.001501 | 0.002001 | 0.002201 | 0.002501 |
| Rischio | -5.552345 | -5.4863877 | -5.216040 | -5.029986 | -4.594895 |
| Varianza | 0.000019 | 0.000022 | 0.000043 | 0.0000627 | 0.000117 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.000455 | 0.000799 | 0.001324 | 0.001610 | 0.002154 |
| Rischio (varianza) | 0.000021 | 0.000024 | 0.000042 | 0.000061 | 0.000117 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.227715 | 0.315923 | 0.305174 | 0.277796 | 0.230864 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.099231 | 0.161973 | 0.203351 | 0.205175 | 0.198558 |

In sample, il modello di Markowitz supera entrambi i competitor. Il modello media-entropia di Shannon supera in tutti i livelli stabiliti le performance del modello media-entropia di Rényi.

Out of sample, a livello di performance il modello media-entropia di Rényi supera sempre il modello di Markowitz e il modello media-entropia di Shannon supera sempre il modello di Markowitz tranne nel portafoglio con rendimento obiettivo più basso pari a 0.001 dove il modello di Markowitz performa meglio. Il modello media-entropia di Rényi performa sempre meglio del modello media-entropia di Shannon nel periodo considerato, tranne nel caso del portafoglio con rendimento obiettivo più elevato (pari a 0.0025), dove le performance sono leggermente inferiori.

A livello di rendimenti puri out of sample, i modelli media-entropia superano il modello di Markowitz. Il modello media-entropia di Rényi supera il modello media-entropia di Shannon.

Periodo 18

Modello di Markowitz

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.000500 | 0.000800 | 0.001000 | 0.001200 | 0.001400 |
| Rendimento | 0.000502 | 0.000802 | 0.001002 | 0.001202 | 0.001402 |
| Rischio (varianza) | 6.238146E-06 | 8.247405E-06 | 8.247405E-06 | 0.000015 | 0.000025 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.000916 | 0.000734 | 0.000541 | -0.000189 | -0.000359 |
| Rischio (varianza) | 0.000018 | 0.000021 | 0.000029 | 0.000057 | 0.000070 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.201121 | 0.279378 | 0.349020 | 0.304243 | 0.276641 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.211818 | 0.158194 | 0.100284 | -0.025050 | -0.042780 |

Modello media-entropia di Shannon

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.000500 | 0.000800 | 0.001000 | 0.001200 | 0.001400 |
| Rendimento | 0.000502 | 0.000802 | 0.001002 | 0.001202 | 0.001402 |
| Rischio | -3.551808 | -3.194995 | -2.844167 | -2.356746 | -1.618076 |
| Varianza | 0.000014 | 0.000017 | 0.000020 | 0.000023 | 0.000028 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.000645 | 0.000501 | 0.000344 | 0.000103 | -0.000298 |
| Rischio (varianza) | 0.000037 | 0.000040 | 0.000045 | 0.000055 | 0.000077 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.130028 | 0.191651 | 0.223448 | 0.249127 | 0.263259 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.105906 | 0.078723 | 0.050875 | 0.013887 | -0.033880 |

Modello media-entropia di Rényi

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.000500 | 0.000800 | 0.001000 | 0.001200 | 0.001400 |
| Rendimento | 0.000502 | 0.000802 | 0.001002 | 0.001202 | 0.001402 |
| Rischio | -5.335335 | -5.065913 | -4.786810 | -4.357933 | -3.5256555 |
| Varianza | 0.000014 | 0.000016 | 0.000018 | 0.000022 | 0.000031 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.000583 | 0.000340 | 0.000114 | -0.000155 | -0.000419 |
| Rischio (varianza) | 0.000037 | 0.000041 | 0.000049 | 0.000062 | 0.000080 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.131681 | 0.198997 | 0.232401 | 0.251218 | 0.247957 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.095931 | 0.052683 | 0.016285 | -0.019730 | -0.046780 |

In sample, il modello di Markowitz supera i due competitor per tutti i livelli di rendimento obiettivo selezionati. Il modello media-entropia di Rényi supera il modello media-entropia di Shannon nei portafogli corrispondenti a tutti i livelli di rendimento obiettivo, tranne il più elevato (0.0014).

Out of sample, il modello di Markowitz supera le performance del modello media-entropia di Shannon in tutti i diversi livelli di rendimento obiettivo, tranne nel caso dei portafogli corrispondenti ai due rendimenti desiderati più elevati (0.0012 e 0.0014), dove il modello media-entropia di Shannon ottiene performance migliori. In tale situazione il modello di Shannon ottiene rispettivamente nel portafoglio corrispondente al livello di rendimento obiettivo pari a 0.0012 un rendimento positivo, mentre per il portafoglio corrispondente a tale livello il modello di Markowitz offre un rendimento negativo. Nel portafoglio corrispondente al rendimento obiettivo di 0.0014 il modello media-entropia di Shannon ottiene invece una performance meno negativa rispetto al modello di Markowitz. Il modello di Markowitz supera sempre le performance del modello media-entropia di Rényi, tale modello infatti solo nel caso del portafoglio corrispondente al rendimento obiettivo di 0.0012 ottiene una performance meno negativa. Il modello media-entropia di Shannon supera sempre le performance del modello con media-entropia di Rényi.

A livello di rendimento puro out of sample, il modello di Markowitz supera i modelli media-entropia. In particolare supera il modello media-entropia di Shannon in 3 portafogli campione, mentre supera il modello media-entropia di Rényi per 4 livelli di rendimento obiettivo. Il modello media-entropia di Shannon supera il modello media-entropia di Rényi.

Periodo 19

Modello di Markowitz

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.001200 | 0.001500 | 0.002000 | 0.002200 | 0.002500 |
| Rendimento | 0.001204 | 0.001504 | 0.002004 | 0.002204 | 0.002504 |
| Rischio (varianza) | 0.000014 | 0.000015 | 0.000027 | 0.000038 | 0.000098 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | -0.000894 | -0.000937 | -0.000973 | -0.000911 | -0.001068 |
| Rischio (varianza) | 0.000027 | 0.000034 | 0.000058 | 0.000088 | 0.000187 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.318528 | 0.383322 | 0.383913 | 0.353955 | 0.252887 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | -0.170621 | -0.158670 | -0.127500 | -0.096720 | -0.078150 |

Modello media-entropia di Shannon

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.001200 | 0.001500 | 0.002000 | 0.002200 | 0.002500 |
| Rendimento | 0.001204 | 0.001504 | 0.002004 | 0.002204 | 0.002504 |
| Rischio | -3.840536 | -3.687880 | -3.019470 | -2.594466 | -1.743944 |
| Varianza | 0.000034 | 0.000036 | 0.000054 | 0.000075 | 0.000138 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | -0.001033 | -0.000949 | -0.000894 | -0.000902 | -0.000935 |
| Rischio (varianza) | 0.000079 | 0.000083 | 0.000109 | 0.000137 | 0.000220 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.204357 | 0.249956 | 0.271508 | 0.253843 | 0.212462 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | -0.116111 | -0.104080 | -0.085410 | -0.077010 | -0.063050 |

Modello media-entropia di Rényi

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 | 0.002200 | 0.002500 |
| Rendimento | 0.001001 | 0.001501 | 0.002001 | 0.002201 | 0.002501 |
| Rischio | -5.552345 | -5.486387 | -5.216040 | -5.029986 | -4.594895 |
| Varianza | 0.000019 | 0.000022 | 0.000043 | 0.000062 | 0.000117 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.000455 | 0.000799 | 0.001324 | 0.001610 | 0.002154 |
| Rischio (varianza) | 0.000021 | 0.000024 | 0.000042 | 0.000061 | 0.000117 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.227715 | 0.315923 | 0.305174 | 0.277796 | 0.230864 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.099231 | 0.161973 | 0.203351 | 0.205175 | 0.198558 |

In sample, il modello di Markowitz supera tutti i competitor. Il modello media-entropia di Rényi supera per tutti i livelli di rendimento obiettivo fissati il modello media-entropia di Shannon.

Out of sample, il modello di Markowitz viene superato dai modelli media-entropia per tutti i portafogli selezionati. L'entropia di Shannon consente di ottenere rendimenti meno negativi del modello di Markowitz mentre l'entropia di Rényi consente di ottenere rendimenti positivi per tutti i portafogli selezionati, superando così le performance degli altri due modelli considerati.

A livello di rendimenti puri out of sample, i modelli media-entropia superano il modello di Markowitz. In particolare il modello media-entropia di Rényi registra sempre rendimenti out of sample superiori rispetto al modello di Markowitz, mentre il modello media-entropia di Shannon supera il modello di markowitz in 4 livelli di rendimento obiettivo. Il modello media-entropia di Rényi offre sempre rendimenti positivi e supera il modello media-entropia di Shannon.

Periodo 20

Modello di Markowitz

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.000500 | 0.000800 | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 |
| Rendimento | 0.000505 | 0.000800 | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rischio (varianza) | 0.000020 | 0.000025 | 0.000031 | 0.000063 | 0.000134 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.000495 | 0.000690 | 0.000882 | 0.001392 | 0.002171 |
| Rischio (varianza) | 0.000035 | 0.000038 | 0.000040 | 0.000055 | 0.000094 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.111198 | 0.158510 | 0.176923 | 0.187707 | 0.172371 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.082998 | 0.111630 | 0.139412 | 0.187197 | 0.223877 |

Modello media-entropia di Shannon

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.000500 | 0.000800 | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 |
| Rendimento | 0.000500 | 0.000800 | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 |
| Rischio | -3.613652 | -3.386806 | -3.19386 | -2.569010 | -1.727489 |
| Varianza | 0.000074 | 0.000082 | 0.000090 | 0.000124 | 0.000187 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | -0.000274 | 0.000086 | 0.000372 | 0.001230 | 0.002270 |
| Rischio (varianza) | 0.000055 | 0.000061 | 0.000067 | 0.000092 | 0.000133 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.057986 | 0.088192 | 0.105250 | 0.134552 | 0.145988 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | -0.036900 | 0.011051 | 0.045399 | 0.128071 | 0.196437 |

Modello media-entropia di Rényi

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.000500 | 0.000800 | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 |
| Rendimento | 0.000505 | 0.000800 | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 |
| Rischio | -5.391315 | -5.255056 | -5.141816 | -4.767453 | -4.169756 |
| Varianza | 0.000075 | 0.000085 | 0.000096 | 0.000140 | 0.000211 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | -0.000117 | 0.000363 | 0.000720 | 0.001668 | 0.002662 |
| Rischio (varianza) | 0.000057 | 0.000062 | 0.000068 | 0.000094 | 0.000135 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.058055 | 0.086395 | 0.101779 | 0.126562 | 0.137509 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | -0.015569 | 0.045974 | 0.086825 | 0.171616 | 0.228299 |

In sample, il modello di Markowitz supera le performance dei modelli competitor. Il modello media-entropia di Shannon sovraperforma per tutti i livelli di rendimento scelti il modello media-entropia di Rényi, salvo che nel portafoglio corrispondente al livello più basso di rendimento obiettivo (0.0005) dove prevale il modello media-entropia di Rényi.

Out of sample, il modello di Markowitz supera le performance dei due modelli competitor che registrano inoltre dei rendimenti negativi per il livello più basso di rendimento scelto nella costruzione del portafoglio. Solo nel caso del portafoglio associato al rendimento obiettivo più alto del periodo (0.002) il modello con media-entropia di Rényi supera leggermente i risultati del modello di Markowitz.

A livello di rendimenti puri out of sample, il modello di Markowitz supera i modelli media-entropia. In particolare il modello di Markowitz supera il modello media-entropia di Shannon in 4 livelli mentre supera il modello media-entropia di Rényi in 3 livelli di rendimento obiettivo. Il modello media-entropia di Rényi offre sempre rendimenti superiori rispetto al modello media-entropia di Shannon.

Periodo 21

Modello di Markowitz

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 | 0.002500 | 0.003000 |
| Rendimento | 0.001004 | 0.0015042 | 0.002004 | 0.002504 | 0.003004 |
| Rischio (varianza) | 8.453965E-06 | 0.000013 | 0.000024 | 0.000056 | 0.000130 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.001306 | 0.001207 | 0.001203 | 0.001522 | 0.001824 |
| Rischio (varianza) | 9.038701e-06 | 0.000014 | 0.000027 | 0.000061 | 0.000153 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.345535 | 0.417198 | 0.404464 | 0.33379 | 0.262659 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.434724 | 0.313509 | 0.231528 | 0.194578 | 0.147019 |

Modello media-entropia di Shannon

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 | 0.002500 | 0.003000 |
| Rendimento | 0.001004 | 0.001504 | 0.002004 | 0.002504 | 0.003004 |
| Rischio | -3.849922 | -3.712236 | -3.282380 | -2.538754 | -1.2957303 |
| varianza | 0.000023 | 0.000033 | 0.000052 | 0.0000923 | 0.000200 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.001151 | 0.001116 | 0.001122 | 0.001156 | 0.001182 |
| Rischio (varianza) | 0.000012 | 0.000021 | 0.000042 | 0.000089 | 0.000226 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.205971 | 0.261837 | 0.276846 | 0.260201 | 0.212050 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.332169 | 0.239253 | 0.171773 | 0.121989 | 0.078493 |

Modello media-entropia di Rényi

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.001000 | 0.001500 | 0.002000 | 0.002500 | 0.003000 |
| Rendimento | 0.001004 | 0.001504 | 0.002004 | 0.002504 | 0.003004 |
| Rischio | -5.554419 | -5.458603 | -5.173615 | -4.643292 | -3.348362 |
| Varianza | 0.000023 | 0.000033 | 0.000058 | 0.000135 | 0.000404 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.001151 | 0.001125 | 0.001131 | 0.001061 | 0.000661 |
| Rischio (varianza) | 0.000012 | 0.000022 | 0.000054 | 0.000142 | 0.000393 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.205975 | 0.260476 | 0.261338 | 0.214844 | 0.149372 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.332173 | 0.236192 | 0.153433 | 0.088810 | 0.033348 |

In sample, il modello di Markowitz supera entrambi i competitor. Il modello medi-entropia di Shannon supera in tutti i livelli stabiliti le performance del modello media-entropia di Rényi tranne nel caso in cui il rendimento obiettivo viene fissato pari a 0.001 (il più basso del periodo), in tale circostanza le performance di portafogli derivanti dai due modelli media-entropia si equivalgono.

Out of sample, le performance del modello di Markowitz superano le performance dei modelli media-entropia. In un confronto fra i due modelli media-entropia si può osservare come l'entropia di Shannon consenta nel periodo performance migliori rispetto a quella di Rényi per tutti i portafogli, salvo in

quello corrispondente al rendimento obiettivo più basso (pari a 0.001), dove i modelli forniscono risultati equivalenti.

A livello di rendimento puro out of sample, il modello di Markowitz supera i modelli media-entropia. Il modello media-entropia di Shannon si dimostra superiore al modello di Rényi.

Periodo 22

Modello di Markowitz

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.003000 | 0.000500 | 0.001000 | 0.001200 | 0.001500 |
| Rendimento | 0.000301 | 0.000501 | 0.001001 | 0.001201 | 0.001501 |
| Rischio (varianza) | 0.000004 | 5.3773016E-06 | 7.536449E-06 | 0.000009 | 0.000021 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 3.658478e-06 | 0.000128 | 0.000403 | 0.000438 | 0.001100 |
| Rischio (varianza) | 6.548328e-06 | 6.887748e-06 | 0.000010 | 0.000011 | 0.000026 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.134849 | 0.216175 | 0.364734 | 0.384110 | 0.327445 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.001429 | 0.049110 | 0.125430 | 0.127619 | 0.214275 |

Modello media-entropia di Shannon

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.000300 | 0.000500 | 0.001000 | 0.001200 | 0.001500 |
| rendimento | 0.000301 | 0.000501 | 0.001001 | 0.001201 | 0.001501 |
| rischio | -3.843829 | -3.778813 | -3.278978 | -2.909416 | -2.022230 |
| varianza | 0.000011 | 0.000012 | 0.000017 | 0.000020 | 0.000030 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| rendimento | 0.000335 | 0.000429 | 0.000738 | 0.000882 | 0.001120 |
| rischio | 6.744984e-06 | 7.185798e-06 | 0.000011 | 0.000015 | 0.000025 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.087519 | 0.139303 | 0.242516 | 0.267822 | 0.271088 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.129009 | 0.160213 | 0.217958 | 0.227463 | 0.220291 |

Modello media-entropia di Rényi

| IN SAMPLE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendimento obiettivo | 0.000300 | 0.000500 | 0.001000 | 0.001200 | 0.001500 |
| Rendimento | 0.000301 | 0.000501 | 0.001001 | 0.001201 | 0.001501 |
| Rischio (varianza) | -5.550028 | -5.503265 | -5.137474 | -4.843353 | -3.965325 |
| Varianza | 0.000011 | 0.000012 | 0.000018 | 0.000023 | 0.000041 |
| OUT OF SAMPLE | | | | | |
| Rendimento | 0.000336 | 0.000437 | 0.000766 | 0.000934 | 0.001339 |
| Rischio (varianza) | 6.756831e-06 | 7.335782e-06 | 0.000013 | 0.000018 | 0.000034 |
| Indicatori performance IN SAMPLE | 0.087559 | 0.139803 | 0.234498 | 0.248494 | 0.233421 |
| Indicatori performance OUT OF SAMPLE | 0.129261 | 0.161553 | 0.211996 | 0.219152 | 0.227072 |

In sample, il modello di Markowitz supera entrambi i competitor. Il modello media-entropia di Shannon supera in tutti i livelli stabiliti le performance del modello media-entropia di Rényi, tranne nel caso in cui il rendimento obiettivo viene fissato pari a 0.0003 (il più basso del periodo), in tale circostanza le performance del modello media-entropia di Rényi superano leggermente le performance del modello media-entropia di Shannon.

Out of sample, i modelli media-entropia superano le performance del modello di Markowitz per ogni portafoglio con diverso livello fissato di rendimento obiettivo. Le performance dei due modelli media-entropia sono sostanzialmente equivalenti fra loro.

A livello di rendimenti puri out of sample, i modelli media-entropia superano il modello di Markowitz. In particolare il modello media-entropia di Rényi supera il modello media-entropia di Shannon.

Analizzando e confrontando gli indicatori di performance su 22 periodi si può osservare che:

1) In sample, il modello di Markowitz afferma la sua superiorità in termini di performance misurate attraverso l'indice di Sharpe.

2) Out of sample, i modelli media-entropia superano le performance del modello di Markowitz in 12 periodi mentre vengono superati dal modello di Markowitz in 10 periodi. Si può quindi affermare che i modelli media-entropia nel caso analizzato risultano sostanzialmente equivalenti rispetto al modello di Markowitz. Nel confronto fra le misure di entropia si osserva che il modello media-entropia di Shannon supera il modello che include l'entropia di Rényi in

12 periodi su 22, con un periodo in cui i due modelli offrono risultati equivalenti, mentre l'entropia di Rényi supera l'entropia di Shannon in 9 periodi. Si denota quindi che il modello media-entropia di Shannon rispetto al modello media-entropia di Rényi nella selezione del portafoglio nel periodo analizzato performa meglio in più periodi, ma non in modo tale da poter giustificare la superiorità di un modello rispetto ad un altro.

3) Nei 5 periodi in cui il modello di Markowitz offre out of sample rendimenti negativi si nota la superiorità dei modelli basati sull'entropia. Tali modelli permettono di ottenere performance out of sample meno negative rispetto al modello di Markowitz o addirittura di offrire performance positive. Infatti su 5 periodi in cui le performance dei modelli sono negative 4 volte i modelli basati sull'entropia sovraperformano il modello di Markowitz. In tali situazioni il modello media-entropia di Rényi riesce a condurre sempre a performance migliori rispetto al modello media-entropia di Shannon.

4) Confrontando invece i rendimenti puri out of sample, si osserva che su 22 periodi considerati i modelli media-entropia superano il modello di Markowitz in 11 periodi, confermando la sostanziale equivalenza dei modelli anche in termini di rendimento puro out of sample. Non si registrano inoltre in termini di rendimento puro sostanziali differenze tra il modello media-entropia di Shannon e il modello media-entropia di Rényi. Il modello media-entropia di Shannon supera infatti il rendimento out of sample del modello media-entropia di Rényi in 12 periodi, mentre viene superato da questo in 10 periodi.

5) Considerando la composizione dei portafogli costruiti attraverso i tre diversi modelli utilizzati nell'analisi (le tabelle sono in appendice B), si possono ricavare alcune informazioni e tendenze di carattere generale. Nella costruzione dei portafogli effettuata viene considerato il terzo decimale corrispondente allo 0.1% come soglia minima dei pesi di un titolo nel portafoglio che in caso contrario non viene considerato selezionato. Il primo aspetto da considerare riguarda un confronto sul numero dei titoli (a prescindere dalla grandezza della percentuale con cui sono presenti nel portafoglio) che i modelli portano ad inserire nel portafoglio. Su 47 titoli utilizzati nell'analisi è possibile, osservando la composizione dei portafogli, notare che i modelli che introducono il maggior numero di titoli in ordine crescente sono rispettivamente il modello di Markowitz con vincolo di non negatività che risulta il modello che esclude dalla selezione il maggior numero di titoli, il modello media-entropia di Shannon che consente di ampliare il numero di titoli presenti nel portafoglio rispetto al modello di Markowitz e il modello media-entropia di Rényi che tende ad includere il numero maggiore di titoli nel portafoglio.

6) Per ogni modello è stata calcolata per ogni periodo la media del numero di titoli contenuti nei 5 portafogli campione selezionati (a prescindere dalla consistenza percentuale, con una soglia minima del 0.1% per considerare il titolo presente nel portafoglio). Eseguendo una media di tutti i periodi si ottiene la conferma empirica dell'affermazione precedente riguardante la numerosità dei titoli inclusi nel portafoglio dai diversi modelli utilizzati. Al primo posto, con il maggior numero di titoli selezionati ed una media di 45.47 titoli su 47 totali, considerando tutti i periodi, si piazza il modello media-entropia di Rényi. Al secondo posto si piazza invece il

modello media-entropia di Shannon con una media di 38.14 titoli su 47 totali inseriti nei portafogli nei diversi periodi, all'ultimo posto si piazza il modello di Markowitz che in media fornisce come output dei portafogli contenenti il minor numero di titoli tra i tre competitor considerati (con una media di 16.2 titoli nei portafogli in tutti i periodi considerati). Come conseguenza i modelli media-entropia potenzialmente comportano maggiori costi di transazione e di gestione dei portafogli, selezionando dei portafogli con un numero di titoli maggiori rispetto al modello di Markowitz.

7) Considerando la media con cui un singolo titolo è presente in percentuale nel portafoglio per i diversi modelli si osserva come in media nel modello di Markowitz un titolo ha il peso del 12%, mentre i pesi medi dei titoli presenti nei portafogli costruiti con i modelli che considerano l'entropia del portafoglio sono più bassi. In particolare per il modello media-entropia di Shannon e media-entropia di Rényi i pesi medi di un titolo nel portafoglio sono rispettivamente del 3,3% e 3,6%.

***Riferimenti capitolo 5***

*[1] Teorie di portafoglio e analisi degli investimenti. E. J. Elton, M. J. Gruber, S. J. Brown, W. N. Goetzmann. Apogeo (2007).*

*[2] quadprog. https://www.mathworks.com/help/optim/ug/quadprog.html*

*[3] fmincon. https://www.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html*

*[4] Diversified portfolios with different entropy measures. J. Yu, W. Lee, W.P.Chiou. Applied Mathematics and Computation, 241 (2014).*

CONCLUSIONI

Alla luce dei risultati ottenuti dalle analisi non si può affermare la superiorità del paradigma media-entropia rispetto al paradigma media-varianza. A livello di performance pura e corretta per il rischio i modelli media-entropia proposti si dimostrano sostanzialmente equivalenti ai modelli media varianza. Come però indicato anche da diversi autori [1],[2],[3],[4],[5] tali misure permettono di ridurre la concentrazione del portafoglio, selezionando portafogli distribuiti su un numero maggiore di titoli. Questo fatto ha come aspetto positivo quello di portare ad una diversificazione più vicina a quella "intuitiva" come indicato nel paragrafo 1.4, che consiste nell'aumentare il numero di titoli inseriti nel portafoglio. L'aspetto negativo consiste nel comporre portafogli che essendo molto frazionati comportano costi di transazione e gestione maggiori rispetto al modello di Markowitz. Inoltre elemento di debolezza che deve essere considerato è il fatto che tali modelli, vincolando le vendite allo scoperto, potenzialmente impediscono all'investitore di cogliere opportunità nel caso di ribassi dei titoli. Si ritiene che comunque la strada di integrare il modello di Markowitz e implementare una misura di entropia del portafoglio nei modelli possa essere proficua, cercando di limitare e ridurre i limiti della varianza e puntando ad una maggiore diversificazione dei portafogli.

Riferimenti

*[1] Multi-objective Portfolio Optimization Model. B. Samanta, T. K. Roy. Tamsui. Oxford Journal of Mathematical Sciences, 21 (1) (2005).*

*[2] On the Diversity Constraints for Portfolio Optimization. J. Lin. Entropy, 15 (2013)*

*[3] Multi-objective Mean-variance-skewness model for Portfolio Optimization. P. Jana. AMO - Advanced Modeling and Optimization, Vol. 9, No. 1 (2007).*

*[4] Optimal Portfolio Diversification Using Maximum Entropy Principle. A.K. Bera, S.Y. Park. Econometric Reviews. Taylor & Francis Journals, vol. 27(4-6) (2008).*

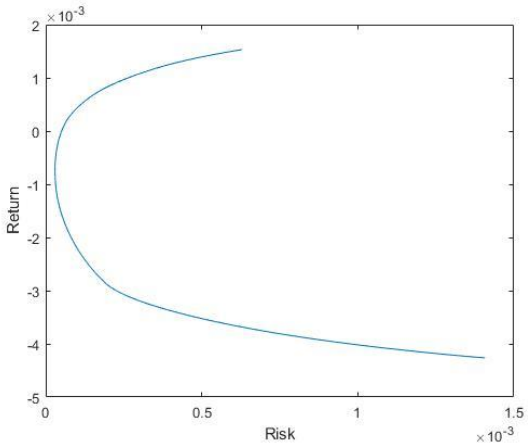
[5] *Multi-objective Mean-variance-skewness model for Portfolio Optimization. P. Jana, T.K.Roy and S.K. Mazumder. AMO - Advanced Modeling and Optimization, Volume 9, Number 1 (2007).*

# APPENDICE A – FRONTIERE

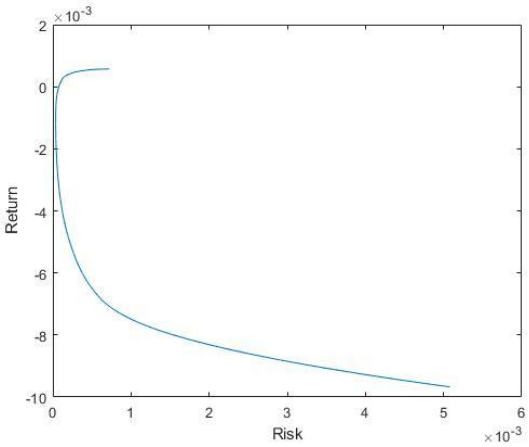
Per ogni modello utilizzato nell'analisi vengono riportate le frontiere ottenute come output per ogni periodo considerato.

1) Modello di Markowitz

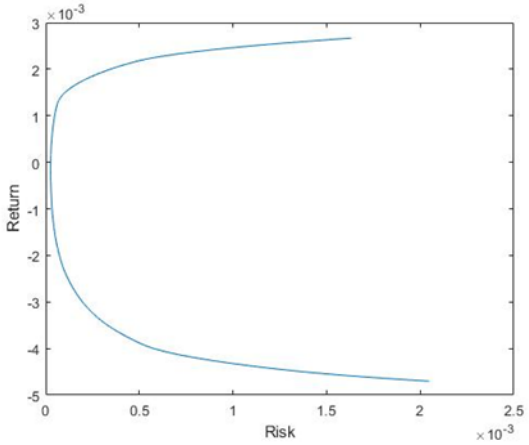
1



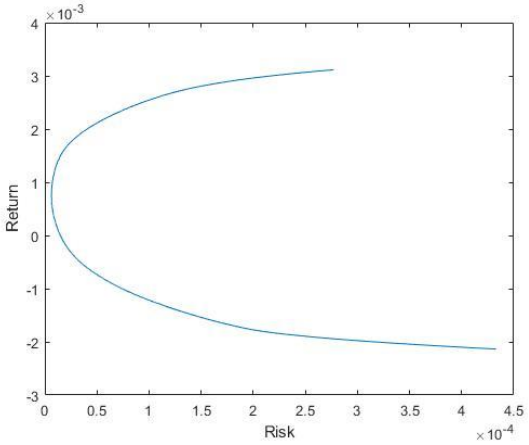

2



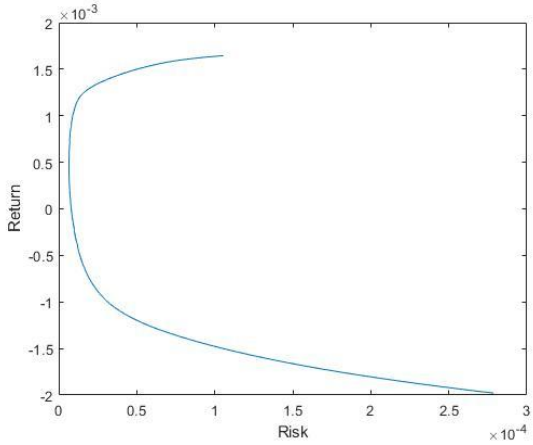

3



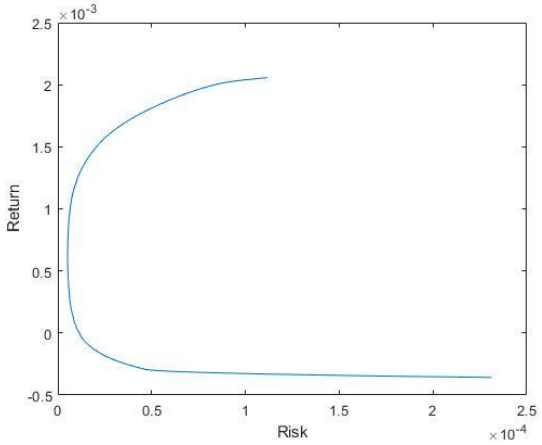

4



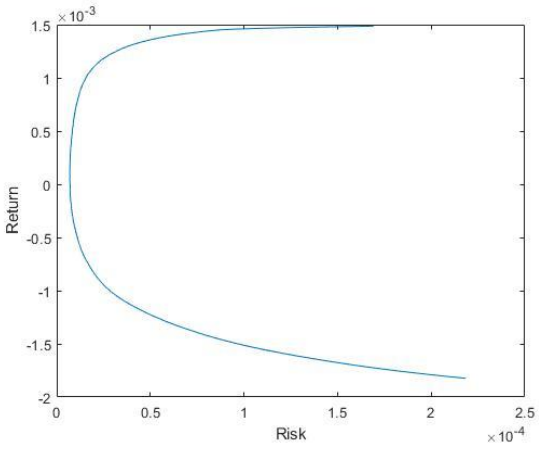

5



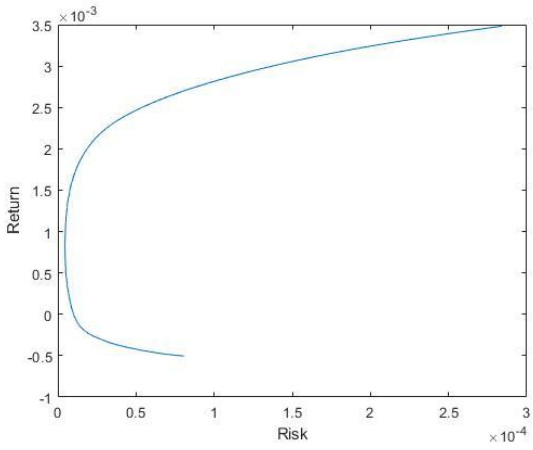

6



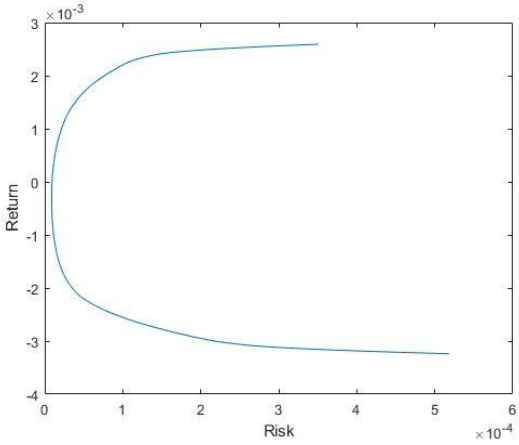
7


×10^-3
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
Return
0
0.5
1
1.5
2
2.5
Risk
×10^-4

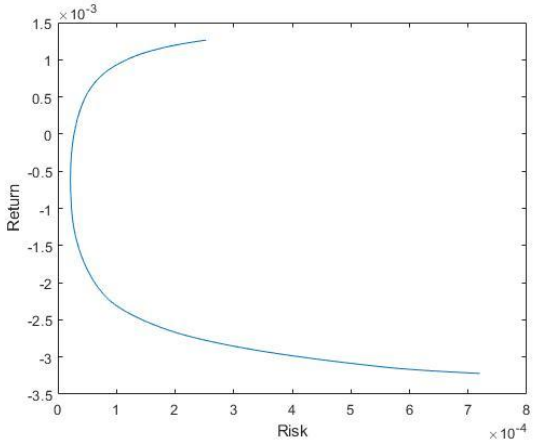
8


×10^-3
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
Return
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
Risk
×10^-4

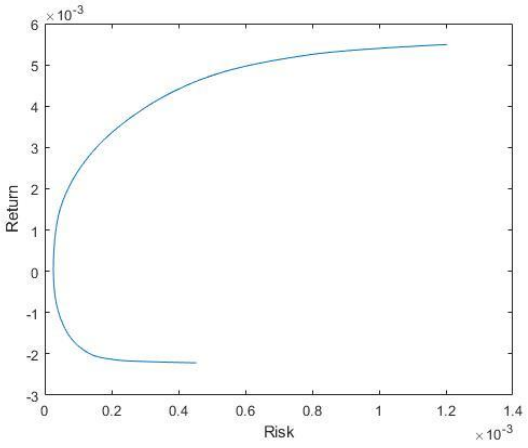
9


×10^-3
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
Return
0
1
2
3
4
5
6
Risk
×10^-4

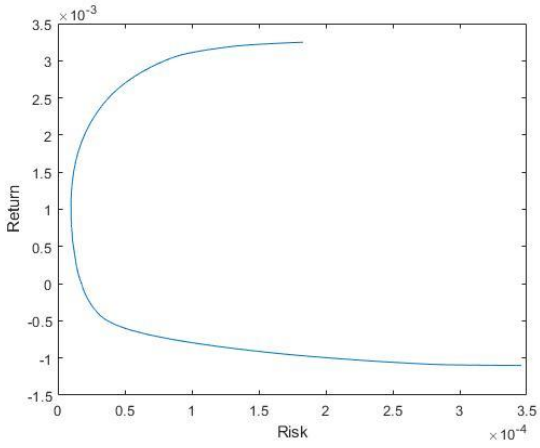
10


×10^-3
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
Return
0
1
2
3
4
5
6
7
8
Risk
×10^-4

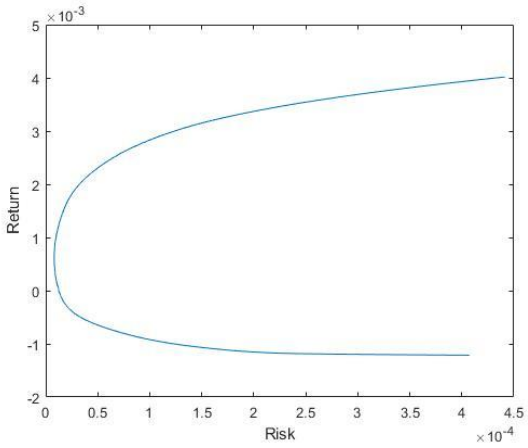
11


×10^-3
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
Return
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
Risk
×10^-3

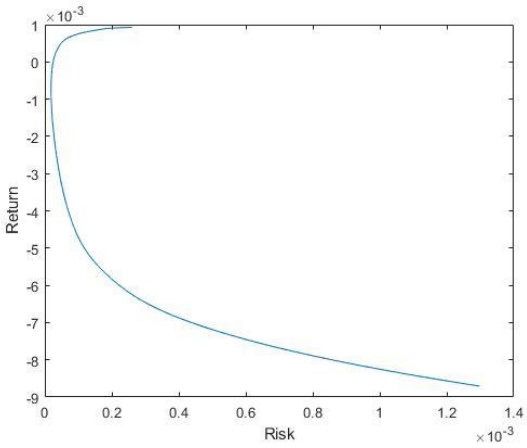
12


×10^-3
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
Return
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
Risk
×10^-4

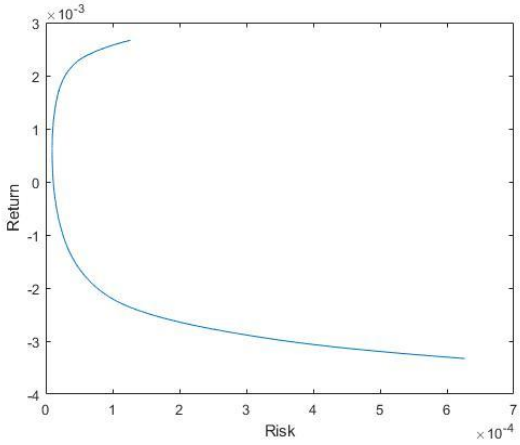
13



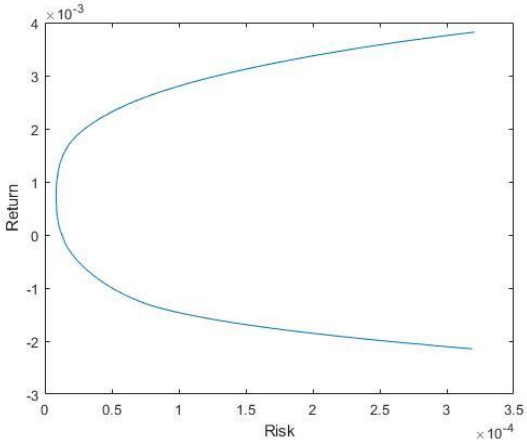

14



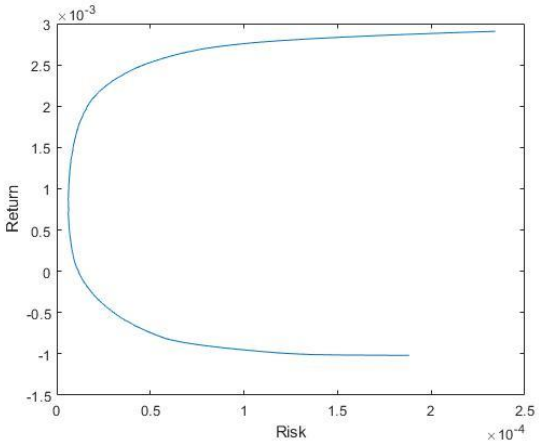

15



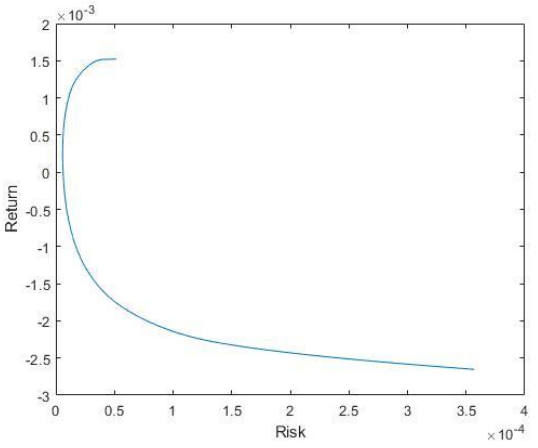

16



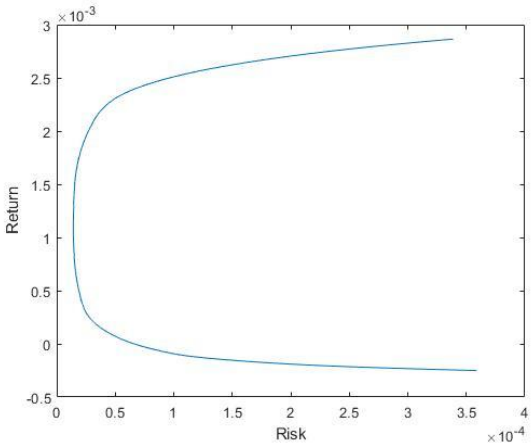

17



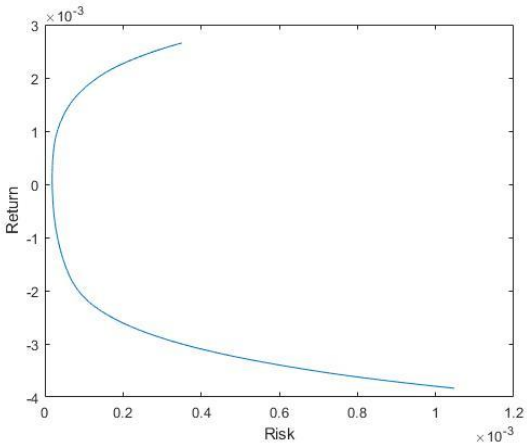

18



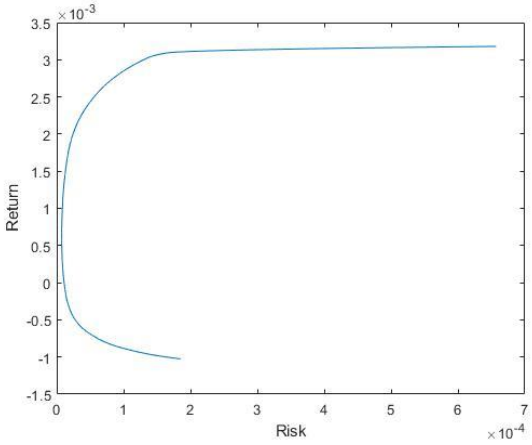
19



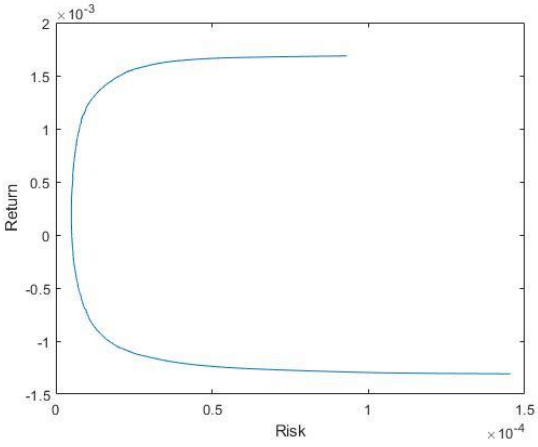

20




21

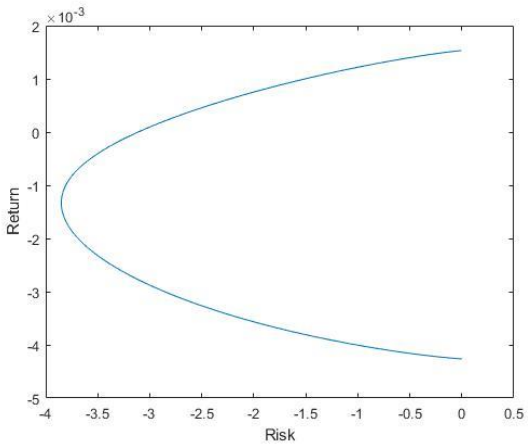



22

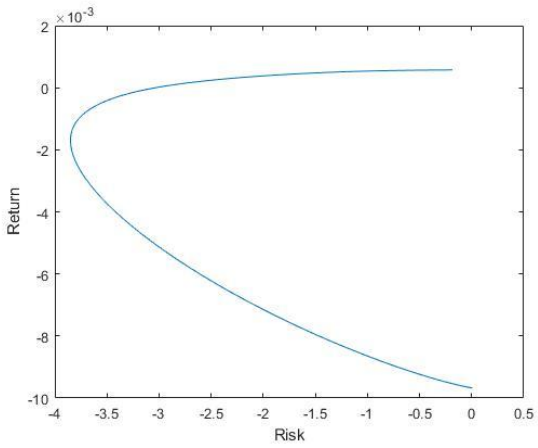



2) Modello media-entropia di Shannon

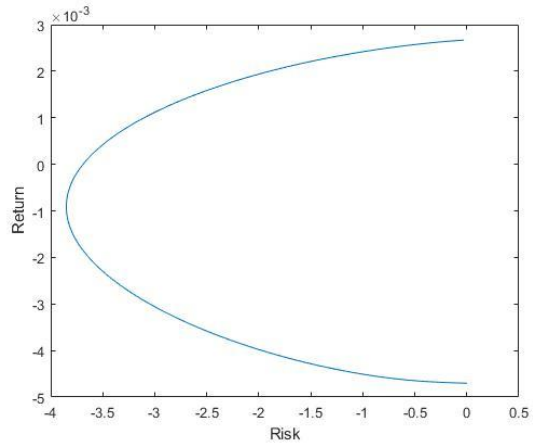
1



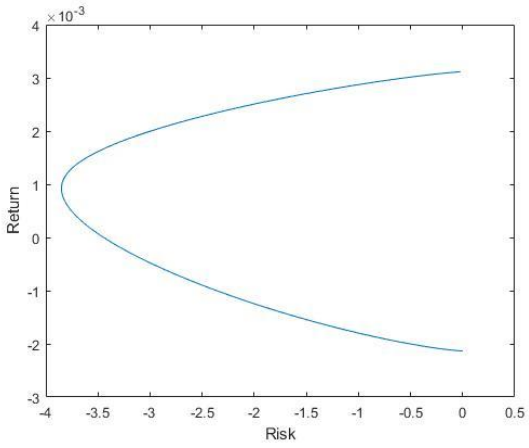

2



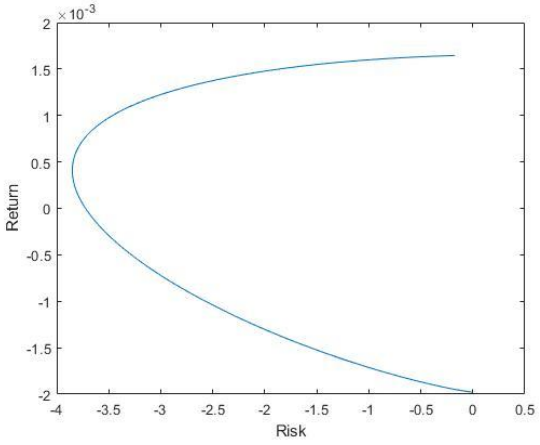
3


×10^-3
Return
Risk

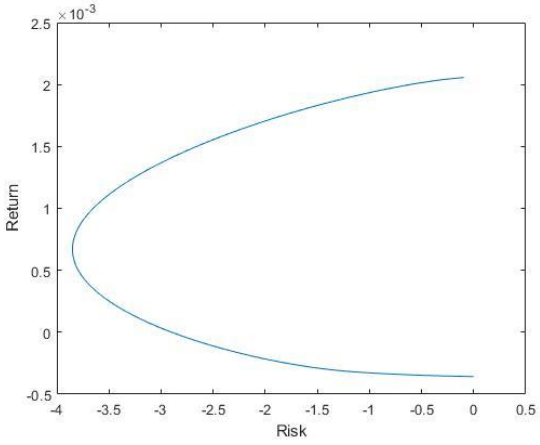
4


×10^-3
Return
Risk

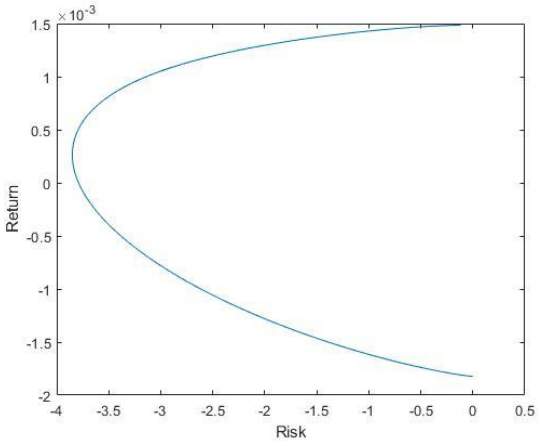
5


×10^-3
Return
Risk

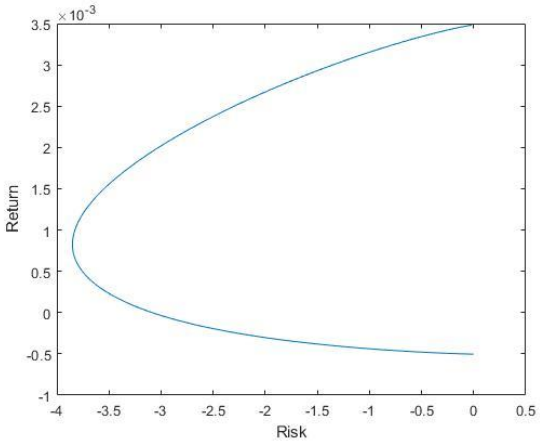
6


×10^-3
Return
Risk

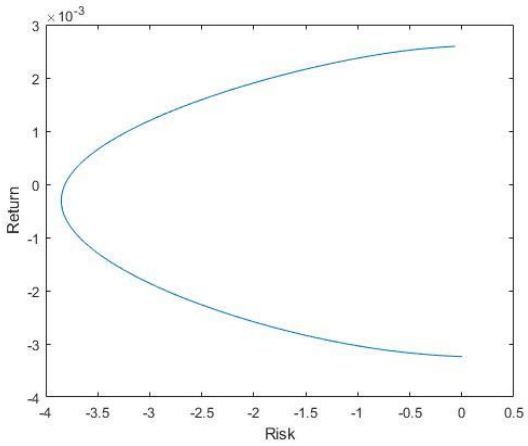
7


×10^-3
Return
Risk

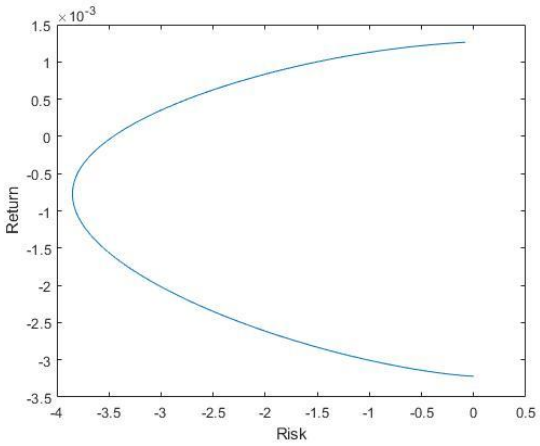
8


×10^-3
Return
Risk

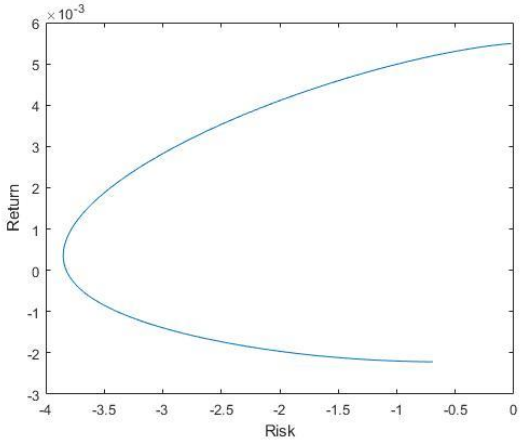
9



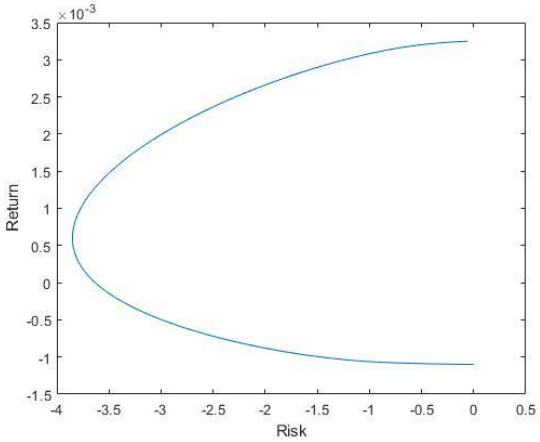

10



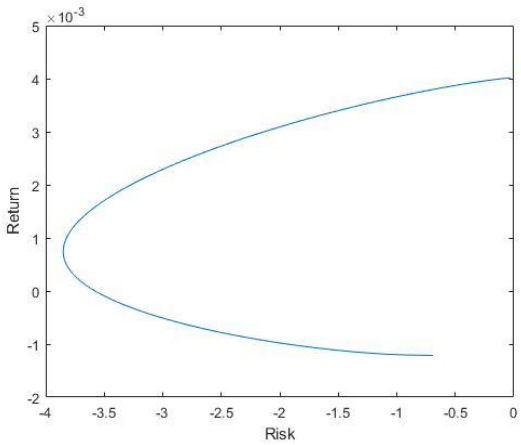

11



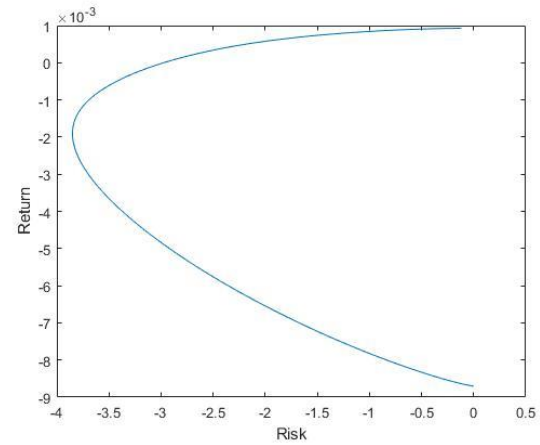

12



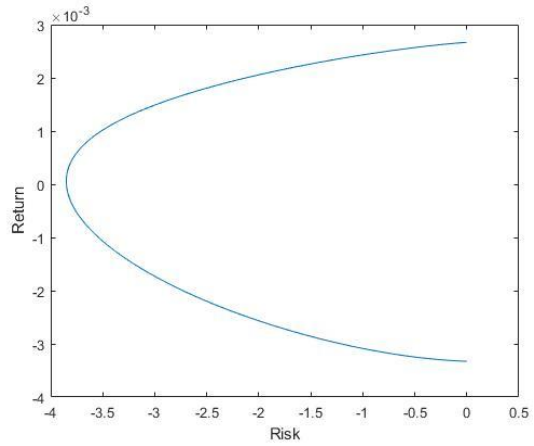

13



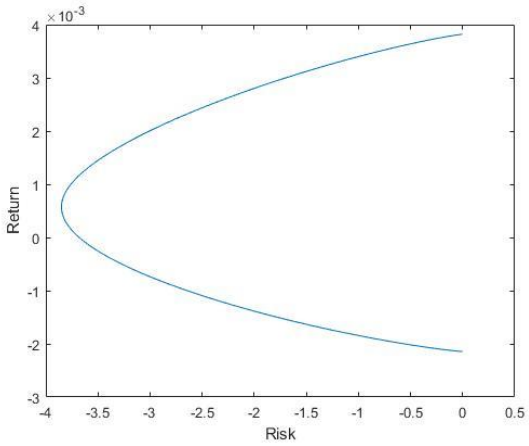

14



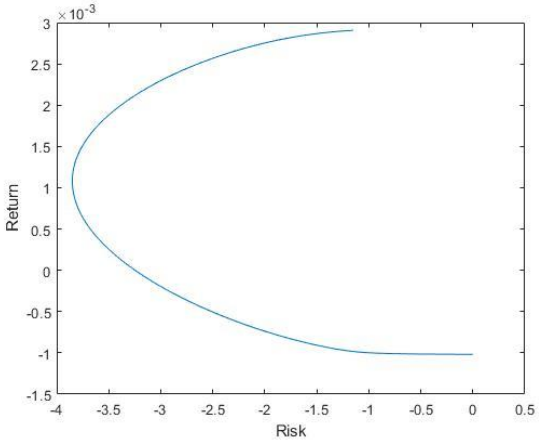
15



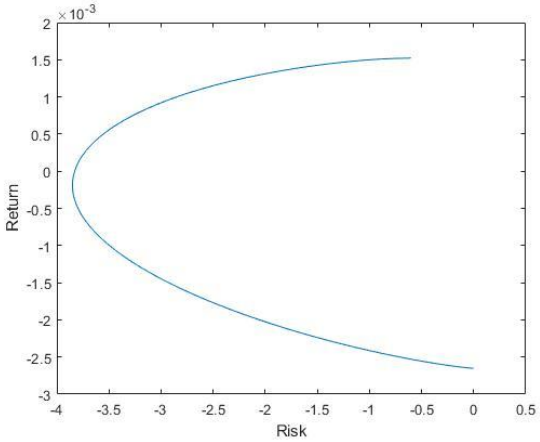

16



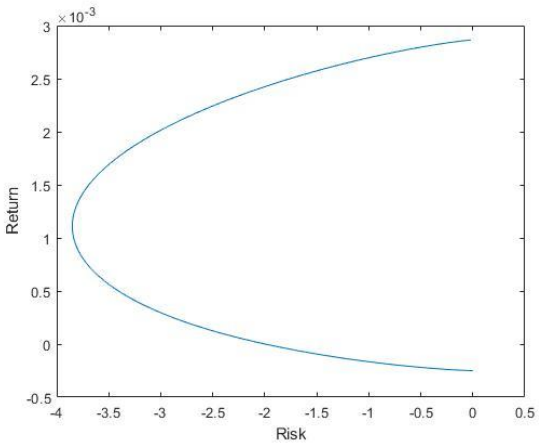

17



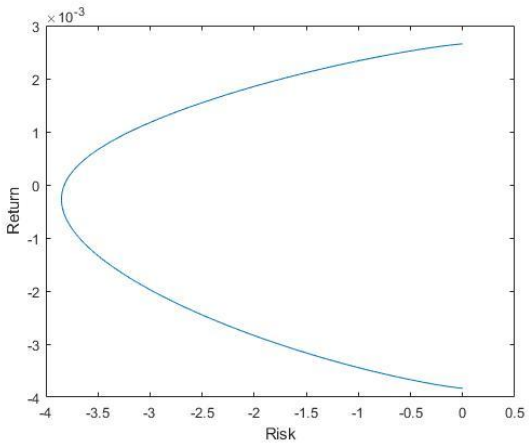

18



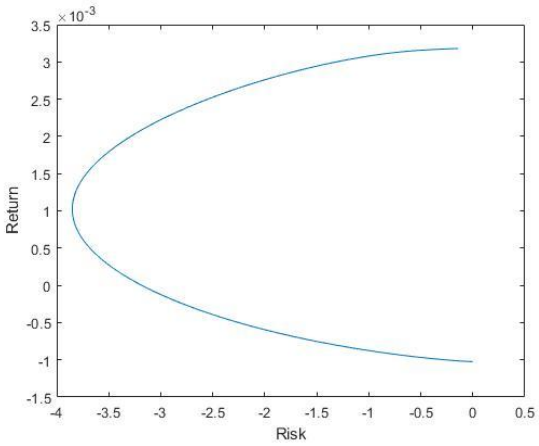

19



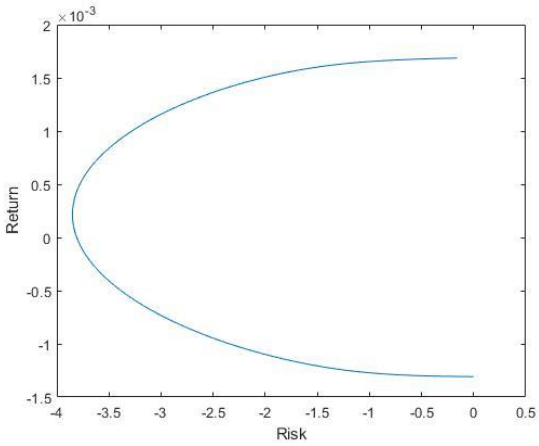

20



21

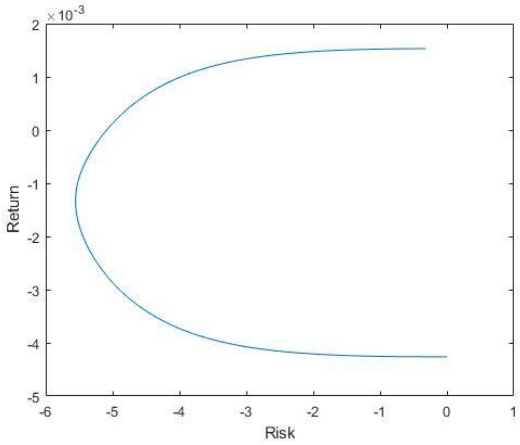



22

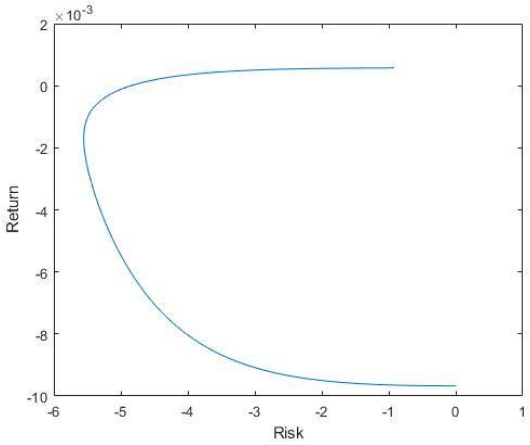



3) Modello media-entropia di Rényi

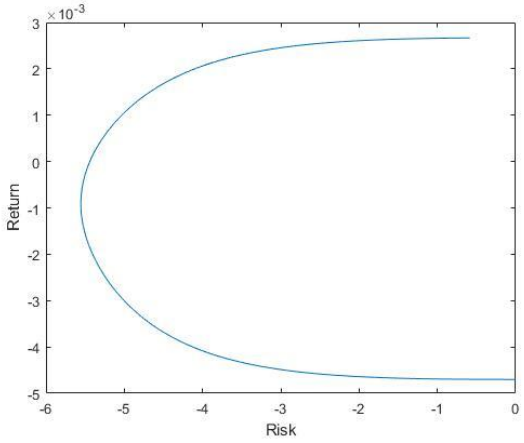
1



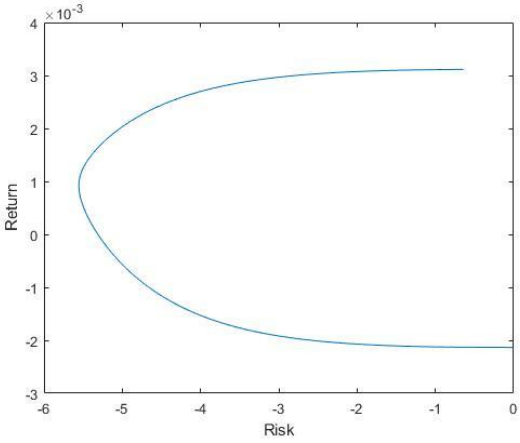

2



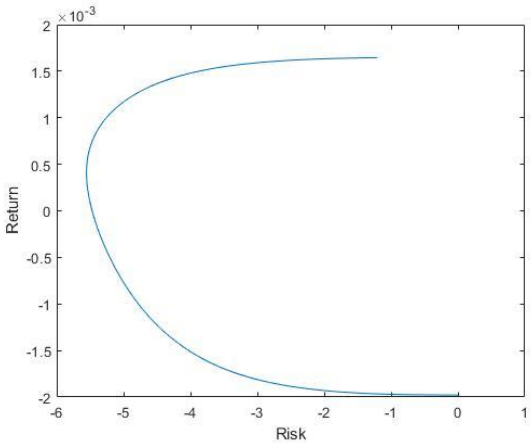

3



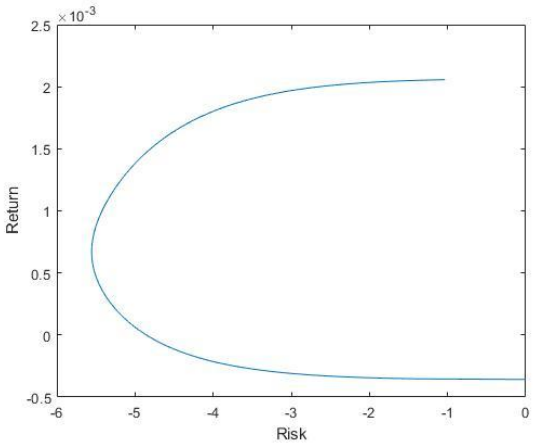

4



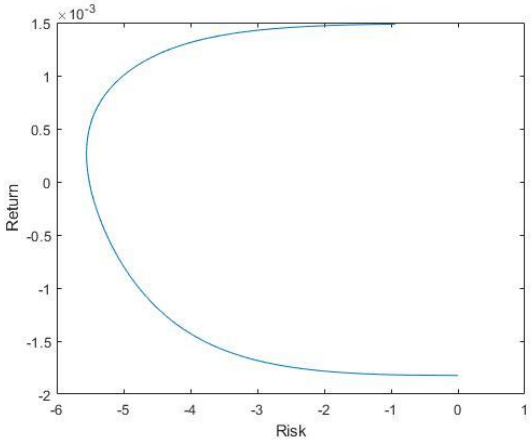
5


×10^-3
Return
Risk

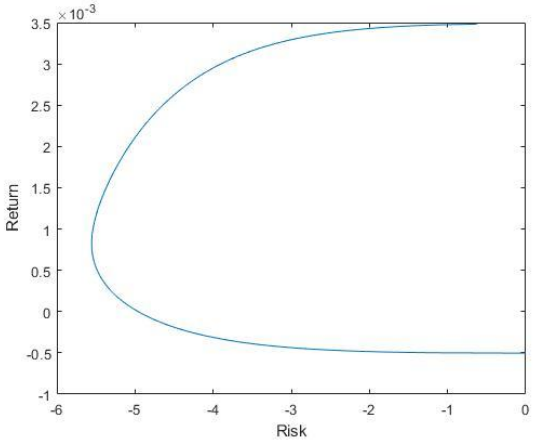
6


×10^-3
Return
Risk

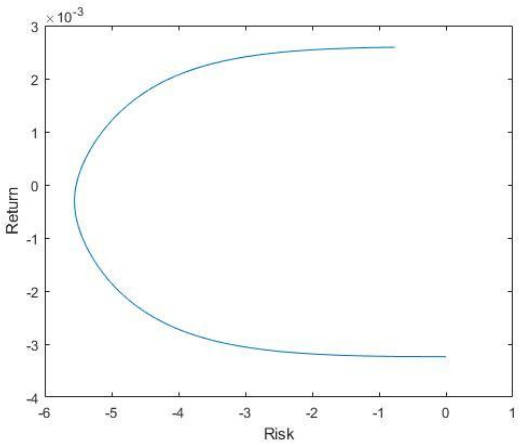
7


×10^-3
Return
Risk

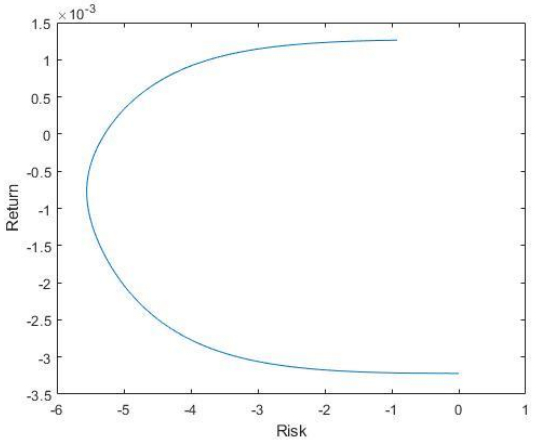
8


×10^-3
Return
Risk

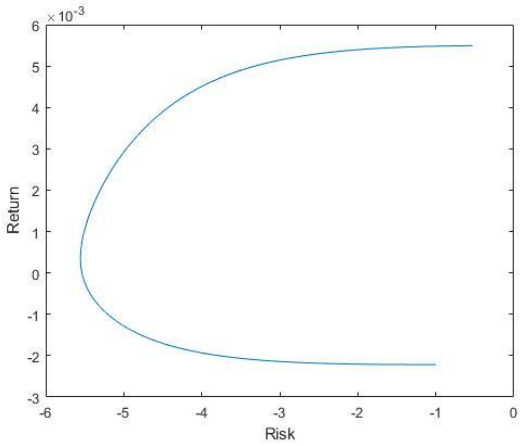
9


×10^-3
Return
Risk

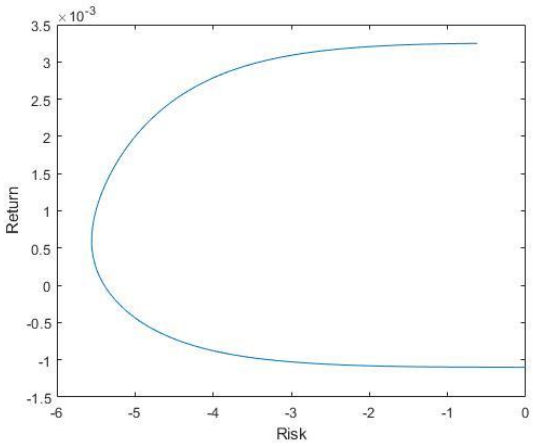
10


×10^-3
Return
Risk

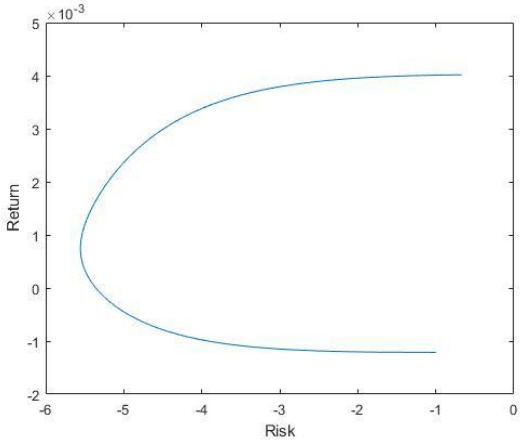
11



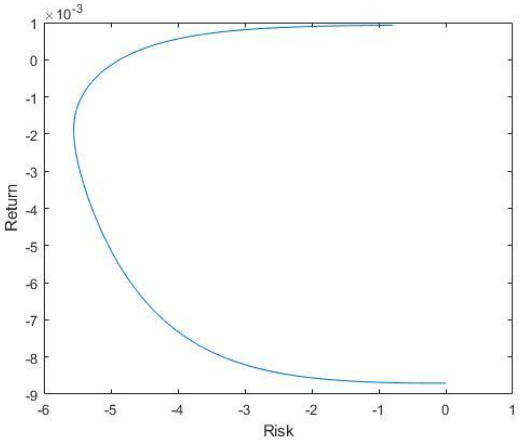

12



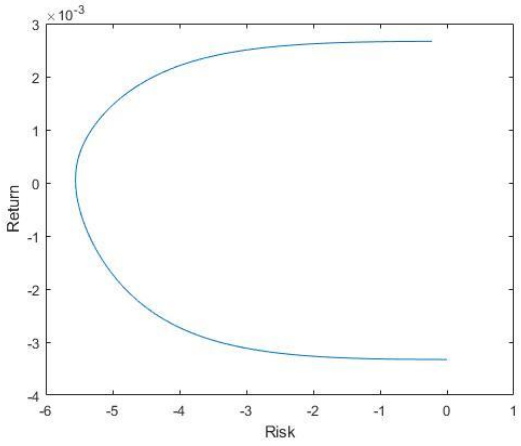

13



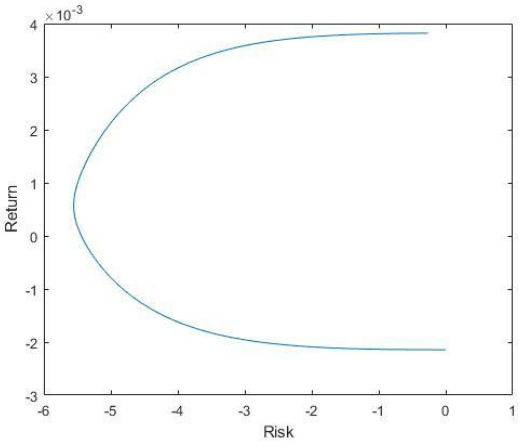

14



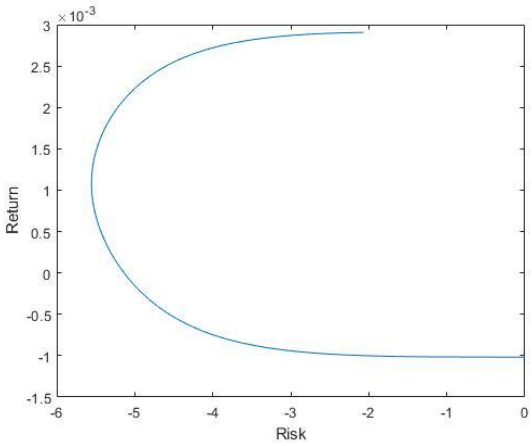

15



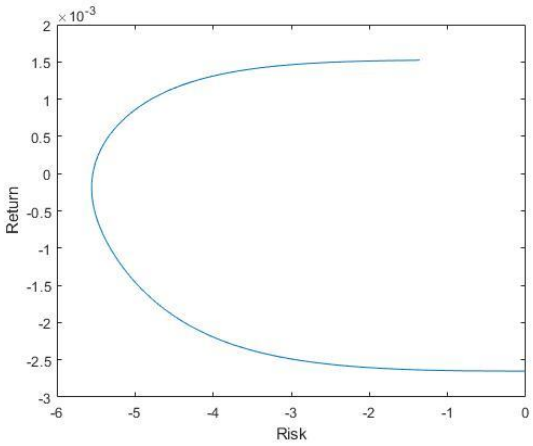

16



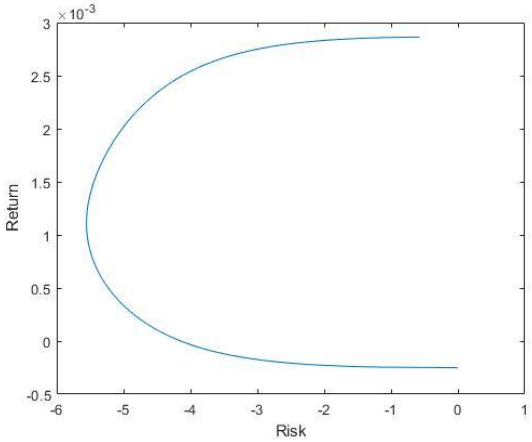
17



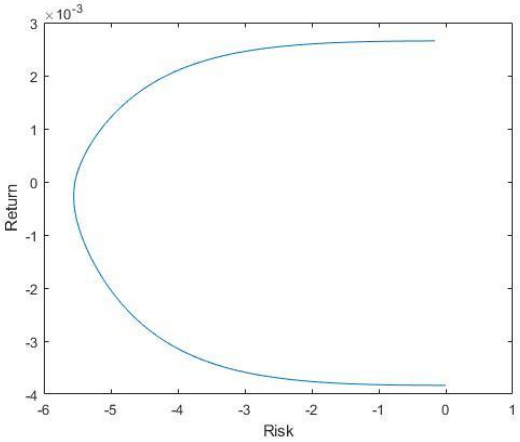

18



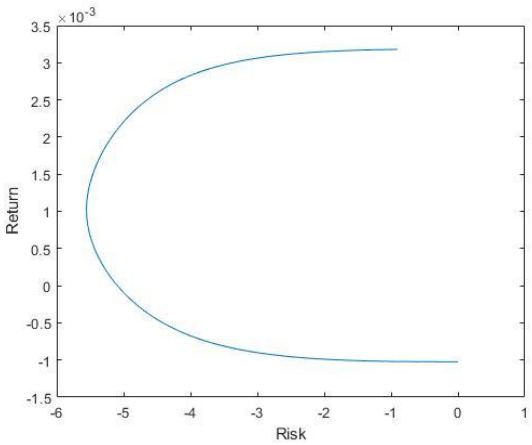

19



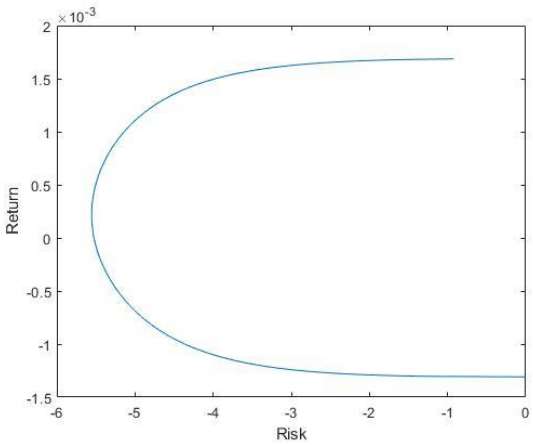

20




21




22



# APPENDICE B – COMPOSIZIONE PORTAFOGLI

Seguono le composizioni dei portafogli campione costruiti attraverso i dati dei periodi in sample e selezionati per effettuare le analisi out of sample.

**Modello di Markowitz**

Periodo 1

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0002 | 0.0005 | 0.001 | 0.0012 | 0.0014 |
| 1 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 3 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 4 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 5 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 6 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 7 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 9 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 11 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 12 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 13 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 17 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 18 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 19 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 20 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 21 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 22 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 23 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 24 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 25 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 26 | 0.163 | 0.036 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 27 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 28 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 29 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 30 | 0.058 | 0.072 | 0.017 | 0.000 | 0.000 |
| 31 | 0.194 | 0.309 | 0.590 | 0.719 | 0.889 |
| 32 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 33 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 34 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 35 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 36 | 0.213 | 0.274 | 0.296 | 0.281 | 0.111 |
| 37 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 38 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 39 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 40 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 42 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 43 | 0.250 | 0.248 | 0.096 | 0.000 | 0.000 |
| 44 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 45 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 46 | 0.119 | 0.061 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 47 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Periodo 2

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0001 | 0.00015 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0005 |
| 1 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.142 | 0.154 | 0.170 | 0.208 | 0.429 |
| 3 | 0.067 | 0.083 | 0.108 | 0.123 | 0.000 |
| 4 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 5 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 6 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 7 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 9 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.051 | 0.034 | 0.007 | 0.000 | 0.000 |
| 11 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 12 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 13 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 17 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 18 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 19 | 0.312 | 0.330 | 0.353 | 0.395 | 0.189 |
| 20 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 21 | 0.247 | 0.255 | 0.262 | 0.251 | 0.000 |
| 22 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 23 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 24 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 25 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 0.007 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 27 | 0.025 | 0.017 | 0.004 | 0.000 | 0.000 |
| 28 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 29 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 30 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 31 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 32 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 33 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 34 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 35 | 0.009 | 0.006 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 36 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 37 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 38 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 39 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 40 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.010 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 42 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 43 | 0.123 | 0.113 | 0.094 | 0.000 | 0.000 |
| 44 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 45 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 46 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 47 | 0.002 | 0.003 | 0.000 | 0.023 | 0.383 |

Periodo 3

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0005 | 0.001 | 0.0015 | 0.002 | 0.0025 |
| 1 | 0.007 | 0.006 | 0.049 | 0.132 | 0.050 |
| 2 | 0.024 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 3 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 4 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 5 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 6 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 7 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 9 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 11 | 0.005 | 0.012 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 12 | 0.030 | 0.007 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 13 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.084 | 0.058 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 17 | 0.013 | 0.053 | 0.061 | 0.000 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 0.005 | 0.003 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 19 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 20 | 0.244 | 0.318 | 0.309 | 0.172 | 0.000 |
| 21 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 22 | 0.005 | 0.003 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 23 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 24 | 0.035 | 0.057 | 0.124 | 0.240 | 0.107 |
| 25 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 26 | 0.288 | 0.339 | 0.217 | 0.000 | 0.000 |
| 27 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 28 | 0.007 | 0.006 | 0.049 | 0.132 | 0.050 |
| 29 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 30 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 31 | 0.026 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 32 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 33 | 0.049 | 0.068 | 0.160 | 0.317 | 0.794 |
| 34 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 35 | 0.034 | 0.003 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 36 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 37 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 38 | 0.022 | 0.016 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 39 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 40 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 42 | 0.012 | 0.018 | 0.032 | 0.007 | 0.000 |
| 43 | 0.050 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 44 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 45 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 46 | 0.058 | 0.030 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 47 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Periodo 4

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.001 | 0.0015 | 0.002 | 0.0025 | 0.003 |
| 1 | 0.008 | 0.007 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.071 | 0.074 | 0.035 | 0.000 | 0.000 |
| 3 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 4 | 0.003 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 5 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 6 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 7 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 9 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0.096 | 0.017 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 11 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 12 | 0.051 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 13 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.009 | 0.086 | 0.182 | 0.265 | 0.123 |
| 16 | 0.055 | 0.078 | 0.037 | 0.000 | 0.000 |
| 17 | 0.002 | 0.007 | 0.042 | 0.074 | 0.000 |
| 18 | 0.020 | 0.011 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 19 | 0.028 | 0.033 | 0.028 | 0.002 | 0.000 |
| 20 | 0.084 | 0.095 | 0.076 | 0.000 | 0.000 |
| 21 | 0.123 | 0.123 | 0.055 | 0.000 | 0.000 |
| 22 | 0.020 | 0.011 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 23 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 24 | 0.053 | 0.059 | 0.071 | 0.060 | 0.000 |
| 25 | 0.003 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 26 | 0.036 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 27 | 0.064 | 0.081 | 0.075 | 0.039 | 0.000 |
| 28 | 0.008 | 0.007 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 29 | 0.003 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 30 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 31 | 0.010 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 32 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 33 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 34 | 0.022 | 0.038 | 0.056 | 0.077 | 0.000 |
| 35 | 0.006 | 0.013 | 0.013 | 0.001 | 0.000 |
| 36 | 0.003 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 37 | 0.028 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 38 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 39 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 40 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.024 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 42 | 0.024 | 0.048 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 43 | 0.093 | 0.105 | 0.047 | 0.000 | 0.000 |
| 44 | 0.007 | 0.106 | 0.283 | 0.482 | 0.877 |
| 45 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 46 | 0.034 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 47 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Periodo 5

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0005 | 0.001 | 0.0012 | 0.0015 | 0.0016 |
| 1 | 0.046 | 0.063 | 0.060 | 0.000 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.045 | 0.083 | 0.098 | 0.091 | 0.119 |
| 3 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 4 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 5 | 0.007 | 0.006 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 6 | 0.002 | 0.057 | 0.142 | 0.537 | 0.769 |
| 7 | 0.004 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.001 | 0.024 | 0.104 | 0.059 | 0.000 |
| 9 | 0.020 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.012 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 11 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 12 | 0.067 | 0.117 | 0.120 | 0.000 | 0.000 |
| 13 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.024 | 0.119 | 0.156 | 0.062 | 0.000 |
| 17 | 0.004 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 18 | 0.003 | 0.011 | 0.018 | 0.028 | 0.000 |
| 19 | 0.009 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 20 | 0.057 | 0.022 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 21 | 0.010 | 0.011 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 22 | 0.003 | 0.011 | 0.018 | 0.028 | 0.000 |
| 23 | 0.072 | 0.021 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 24 | 0.029 | 0.031 | 0.023 | 0.000 | 0.000 |
| 25 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 26 | 0.137 | 0.154 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 27 | 0.053 | 0.062 | 0.064 | 0.000 | 0.000 |
| 28 | 0.046 | 0.063 | 0.060 | 0.000 | 0.000 |
| 29 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 30 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 31 | 0.046 | 0.056 | 0.077 | 0.000 | 0.000 |
| 32 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 33 | 0.002 | 0.008 | 0.025 | 0.147 | 0.112 |
| 34 | 0.056 | 0.003 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 35 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 36 | 0.022 | 0.005 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 37 | 0.020 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 38 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 39 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 40 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.056 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 42 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 43 | 0.041 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 44 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 45 | 0.038 | 0.003 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 46 | 0.050 | 0.041 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 47 | 0.007 | 0.023 | 0.032 | 0.047 | 0.000 |

Periodo 6

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.001 | 0.0015 | 0.0016 | 0.0018 | 0.002 |
| 1 | 0.008 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.009 | 0.078 | 0.109 | 0.174 | 0.221 |
| 3 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 4 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 5 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 6 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 7 | 0.042 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.041 | 0.085 | 0.068 | 0.005 | 0.000 |
| 9 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.011 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 11 | 0.007 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 12 | 0.061 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 13 | 0.004 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.013 | 0.034 | 0.030 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.088 | 0.313 | 0.392 | 0.566 | 0.777 |
| 17 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 18 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 19 | 0.035 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 20 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 21 | 0.068 | 0.128 | 0.128 | 0.127 | 0.000 |
| 22 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 23 | 0.020 | 0.036 | 0.017 | 0.000 | 0.000 |
| 24 | 0.037 | 0.043 | 0.040 | 0.015 | 0.000 |
| 25 | 0.013 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 26 | 0.139 | 0.158 | 0.143 | 0.095 | 0.000 |
| 27 | 0.016 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 28 | 0.008 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 29 | 0.027 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 30 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 31 | 0.041 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 32 | 0.004 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 33 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 34 | 0.029 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 35 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 36 | 0.041 | 0.065 | 0.057 | 0.018 | 0.000 |
| 37 | 0.006 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 38 | 0.008 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 39 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 40 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.058 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 42 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 43 | 0.098 | 0.019 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 44 | 0.005 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 0.022 | 0.035 | 0.013 | 0.000 | 0.000 |
| 46 | 0.012 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 47 | 0.009 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Periodo 7

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0005 | 0.0008 | 0.001 | 0.0012 | 0.0014 |
| 1 | 0.009 | 0.008 | 0.011 | 0.001 | 0.000 |
| 2 | 0.003 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 3 | 0.006 | 0.005 | 0.003 | 0.000 | 0.000 |
| 4 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 5 | 0.023 | 0.007 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 6 | 0.046 | 0.033 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 7 | 0.017 | 0.005 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.007 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 9 | 0.003 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.016 | 0.017 | 0.013 | 0.003 | 0.000 |
| 11 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 12 | 0.023 | 0.023 | 0.010 | 0.000 | 0.000 |
| 13 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.009 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.024 | 0.015 | 0.003 | 0.000 | 0.000 |
| 17 | 0.020 | 0.039 | 0.057 | 0.073 | 0.000 |
| 18 | 0.004 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 19 | 0.013 | 0.025 | 0.018 | 0.002 | 0.000 |
| 20 | 0.132 | 0.128 | 0.064 | 0.000 | 0.000 |
| 21 | 0.052 | 0.024 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 22 | 0.004 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 23 | 0.012 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 24 | 0.050 | 0.066 | 0.086 | 0.108 | 0.080 |
| 25 | 0.011 | 0.031 | 0.065 | 0.195 | 0.487 |
| 26 | 0.110 | 0.139 | 0.164 | 0.185 | 0.079 |
| 27 | 0.037 | 0.076 | 0.109 | 0.099 | 0.000 |
| 28 | 0.009 | 0.008 | 0.011 | 0.001 | 0.000 |
| 29 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 30 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 31 | 0.033 | 0.055 | 0.090 | 0.183 | 0.354 |
| 32 | 0.045 | 0.064 | 0.069 | 0.058 | 0.000 |
| 33 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 34 | 0.036 | 0.037 | 0.033 | 0.001 | 0.000 |
| 35 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 36 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 37 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 38 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 39 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 40 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.058 | 0.070 | 0.073 | 0.041 | 0.000 |
| 42 | 0.012 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 43 | 0.076 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 44 | 0.027 | 0.047 | 0.071 | 0.036 | 0.000 |
| 45 | 0.015 | 0.034 | 0.040 | 0.010 | 0.000 |
| 46 | 0.041 | 0.030 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 47 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Periodo 8

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.001 | 0.0015 | 0.002 | 0.0025 | 0.003 |
| 1 | 0.018 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.006 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 3 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 4 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 5 | 0.001 | 0.002 | 0.005 | 0.000 | 0.000 |
| 6 | 0.009 | 0.022 | 0.007 | 0.000 | 0.000 |
| 7 | 0.004 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 9 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.009 | 0.005 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 11 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 12 | 0.015 | 0.004 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 13 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.010 | 0.017 | 0.014 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.027 | 0.092 | 0.177 | 0.244 | 0.259 |
| 17 | 0.030 | 0.039 | 0.035 | 0.000 | 0.000 |
| 18 | 0.008 | 0.009 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 19 | 0.021 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 20 | 0.110 | 0.098 | 0.005 | 0.000 | 0.000 |
| 21 | 0.003 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 22 | 0.008 | 0.009 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 23 | 0.005 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 24 | 0.071 | 0.085 | 0.090 | 0.040 | 0.000 |
| 25 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 26 | 0.044 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 27 | 0.058 | 0.027 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 28 | 0.018 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 29 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 30 | 0.010 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 31 | 0.049 | 0.063 | 0.093 | 0.080 | 0.003 |
| 32 | 0.043 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 33 | 0.036 | 0.094 | 0.156 | 0.141 | 0.048 |
| 34 | 0.078 | 0.065 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 35 | 0.011 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 36 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 37 | 0.003 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 38 | 0.006 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 39 | 0.001 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 40 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.037 | 0.025 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 42 | 0.029 | 0.074 | 0.093 | 0.001 | 0.000 |
| 43 | 0.115 | 0.113 | 0.036 | 0.000 | 0.000 |
| 44 | 0.011 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 45 | 0.021 | 0.062 | 0.156 | 0.400 | 0.690 |
| 46 | 0.059 | 0.082 | 0.128 | 0.094 | 0.000 |
| 47 | 0.004 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Periodo 9

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0005 | 0.001 | 0.0015 | 0.002 | 0.0025 |
| 1 | 0.044 | 0.039 | 0.007 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.017 | 0.004 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 3 | 0.000 | 0.021 | 0.046 | 0.036 | 0.000 |
| 4 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 5 | 0.079 | 0.106 | 0.134 | 0.162 | 0.000 |
| 6 | 0.000 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 7 | 0.030 | 0.022 | 0.012 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 9 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.005 | 0.003 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 11 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 12 | 0.025 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 13 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 17 | 0.030 | 0.014 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 18 | 0.049 | 0.064 | 0.074 | 0.026 | 0.000 |
| 19 | 0.049 | 0.012 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 20 | 0.063 | 0.046 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 22 | 0.049 | 0.064 | 0.074 | 0.026 | 0.000 |
| 23 | 0.022 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 24 | 0.014 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 25 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 26 | 0.058 | 0.016 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 27 | 0.006 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 28 | 0.044 | 0.039 | 0.007 | 0.000 | 0.000 |
| 29 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 30 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 31 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 32 | 0.031 | 0.057 | 0.035 | 0.000 | 0.000 |
| 33 | 0.028 | 0.044 | 0.059 | 0.038 | 0.000 |
| 34 | 0.005 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 35 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 36 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 37 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 38 | 0.033 | 0.026 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 39 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 40 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.020 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 42 | 0.077 | 0.145 | 0.231 | 0.368 | 0.232 |
| 43 | 0.106 | 0.120 | 0.107 | 0.029 | 0.000 |
| 44 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 45 | 0.068 | 0.109 | 0.192 | 0.316 | 0.768 |
| 46 | 0.040 | 0.044 | 0.018 | 0.000 | 0.000 |
| 47 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Periodo 10

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0001 | 0.0005 | 0.0008 | 0.001 | 0.0012 |
| 1 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 3 | 0.086 | 0.041 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 4 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 5 | 0.067 | 0.091 | 0.080 | 0.013 | 0.000 |
| 6 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 7 | 0.172 | 0.222 | 0.259 | 0.265 | 0.150 |
| 8 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 9 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.025 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 11 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 12 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 17 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 18 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 19 | 0.025 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 20 | 0.030 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 21 | 0.051 | 0.056 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 22 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 23 | 0.102 | 0.101 | 0.008 | 0.000 | 0.000 |
| 24 | 0.090 | 0.095 | 0.082 | 0.005 | 0.000 |
| 25 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 26 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 27 | 0.017 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 28 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 29 | 0.007 | 0.074 | 0.137 | 0.118 | 0.000 |
| 30 | 0.006 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 31 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 32 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 33 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 34 | 0.027 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 35 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 36 | 0.016 | 0.007 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 37 | 0.009 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 38 | 0.116 | 0.179 | 0.284 | 0.449 | 0.821 |
| 39 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 40 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.004 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 42 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 43 | 0.033 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 44 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 45 | 0.079 | 0.125 | 0.150 | 0.150 | 0.029 |
| 46 | 0.028 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 47 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Periodo 11

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0005 | 0.001 | 0.002 | 0.003 | 0.004 |
| 1 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 3 | 0.029 | 0.018 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 4 | 0.006 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0.029 | 0.031 | 0.031 | 0.033 | 0.022 |
| 6 | 0.004 | 0.006 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 7 | 0.026 | 0.022 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.018 | 0.033 | 0.036 | 0.002 | 0.000 |
| 9 | 0.033 | 0.036 | 0.025 | 0.005 | 0.000 |
| 10 | 0.003 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 11 | 0.001 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 12 | 0.017 | 0.007 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 13 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.001 | 0.009 | 0.050 | 0.096 | 0.152 |
| 16 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 17 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 18 | 0.026 | 0.006 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 19 | 0.078 | 0.090 | 0.091 | 0.071 | 0.001 |
| 20 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 21 | 0.069 | 0.068 | 0.030 | 0.000 | 0.000 |
| 22 | 0.026 | 0.006 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 23 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 24 | 0.085 | 0.082 | 0.078 | 0.057 | 0.000 |
| 25 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 26 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 27 | 0.007 | 0.008 | 0.015 | 0.026 | 0.036 |
| 28 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 29 | 0.002 | 0.020 | 0.051 | 0.071 | 0.097 |
| 30 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 31 | 0.051 | 0.060 | 0.088 | 0.117 | 0.112 |
| 32 | 0.021 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 33 | 0.021 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 34 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 35 | 0.001 | 0.003 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 36 | 0.050 | 0.066 | 0.061 | 0.038 | 0.000 |
| 37 | 0.000 | 0.000 | 0.042 | 0.129 | 0.166 |
| 38 | 0.056 | 0.079 | 0.094 | 0.078 | 0.002 |
| 39 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 40 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.046 | 0.052 | 0.040 | 0.011 | 0.000 |
| 42 | 0.209 | 0.191 | 0.114 | 0.000 | 0.000 |
| 43 | 0.056 | 0.051 | 0.003 | 0.000 | 0.000 |
| 44 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 45 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 46 | 0.022 | 0.050 | 0.151 | 0.267 | 0.412 |
| 47 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Periodo 12

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0015 | 0.002 | 0.0025 | 0.03 | 0.0031 |
| 1 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.009 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 3 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 4 | 0.006 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 5 | 0.012 | 0.005 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 6 | 0.015 | 0.070 | 0.080 | 0.018 | 0.000 |
| 7 | 0.010 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 9 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 11 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 12 | 0.022 | 0.007 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 13 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 17 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 18 | 0.005 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 19 | 0.182 | 0.219 | 0.195 | 0.000 | 0.000 |
| 20 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 21 | 0.015 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 22 | 0.005 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 23 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 24 | 0.157 | 0.242 | 0.373 | 0.574 | 0.665 |
| 25 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 26 | 0.141 | 0.080 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 27 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 28 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 29 | 0.001 | 0.009 | 0.025 | 0.013 | 0.000 |
| 30 | 0.089 | 0.003 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 31 | 0.047 | 0.029 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 32 | 0.007 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 33 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 34 | 0.042 | 0.082 | 0.131 | 0.221 | 0.228 |
| 35 | 0.047 | 0.076 | 0.116 | 0.173 | 0.106 |
| 36 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 37 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 38 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 39 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 40 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.028 | 0.034 | 0.022 | 0.000 | 0.000 |
| 42 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 43 | 0.091 | 0.078 | 0.013 | 0.000 | 0.000 |
| 44 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 46 | 0.061 | 0.061 | 0.044 | 0.000 | 0.000 |
| 47 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Periodo 13

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0015 | 0.002 | 0.0025 | 0.003 | 0.0035 |
| 1 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 3 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 4 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 5 | 0.057 | 0.038 | 0.003 | 0.000 | 0.000 |
| 6 | 0.005 | 0.017 | 0.022 | 0.001 | 0.000 |
| 7 | 0.087 | 0.063 | 0.003 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 9 | 0.029 | 0.045 | 0.061 | 0.031 | 0.000 |
| 10 | 0.026 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 11 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 12 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 13 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 17 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 18 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 19 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 20 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 21 | 0.137 | 0.091 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 22 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 23 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 24 | 0.089 | 0.044 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 25 | 0.000 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 26 | 0.097 | 0.124 | 0.124 | 0.007 | 0.000 |
| 27 | 0.061 | 0.078 | 0.089 | 0.080 | 0.000 |
| 28 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 29 | 0.070 | 0.136 | 0.202 | 0.244 | 0.165 |
| 30 | 0.045 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 31 | 0.090 | 0.088 | 0.063 | 0.000 | 0.000 |
| 32 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 33 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 34 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 35 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 36 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 37 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 38 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 39 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 40 | 0.001 | 0.000 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.079 | 0.114 | 0.155 | 0.180 | 0.118 |
| 42 | 0.011 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 43 | 0.012 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 44 | 0.006 | 0.003 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 45 | 0.067 | 0.158 | 0.274 | 0.458 | 0.716 |
| 46 | 0.024 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 47 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Periodo 14

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.00005 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0005 |
| 1 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.053 | 0.055 | 0.059 | 0.062 | 0.067 |
| 3 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 4 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 5 | 0.007 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 6 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 7 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 9 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.141 | 0.137 | 0.125 | 0.111 | 0.043 |
| 11 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 12 | 0.026 | 0.025 | 0.020 | 0.014 | 0.000 |
| 13 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 17 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 18 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 19 | 0.062 | 0.073 | 0.098 | 0.124 | 0.167 |
| 20 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 21 | 0.048 | 0.046 | 0.038 | 0.029 | 0.000 |
| 22 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 23 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 24 | 0.065 | 0.063 | 0.061 | 0.058 | 0.032 |
| 25 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 26 | 0.001 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 27 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 28 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 29 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 30 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 31 | 0.160 | 0.166 | 0.180 | 0.195 | 0.250 |
| 32 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 33 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 34 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 35 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 36 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 37 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 38 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 39 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 40 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.039 | 0.034 | 0.022 | 0.008 | 0.000 |
| 42 | 0.029 | 0.024 | 0.016 | 0.005 | 0.000 |
| 43 | 0.306 | 0.316 | 0.340 | 0.365 | 0.405 |
| 44 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 45 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 46 | 0.056 | 0.052 | 0.041 | 0.029 | 0.000 |
| 47 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.034 |

Periodo 15

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.001 | 0.0015 | 0.002 | 0.0022 | 0.0025 |
| 1 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.032 | 0.044 | 0.023 | 0.001 | 0.000 |
| 3 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 4 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 5 | 0.056 | 0.091 | 0.125 | 0.130 | 0.023 |
| 6 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 7 | 0.007 | 0.006 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.015 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 9 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 11 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 12 | 0.009 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 13 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 17 | 0.002 | 0.011 | 0.027 | 0.012 | 0.000 |
| 18 | 0.037 | 0.005 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 19 | 0.139 | 0.245 | 0.411 | 0.515 | 0.815 |
| 20 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 0.078 | 0.061 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 22 | 0.037 | 0.005 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 23 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 24 | 0.129 | 0.149 | 0.087 | 0.003 | 0.000 |
| 25 | 0.007 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 26 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 27 | 0.019 | 0.016 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 28 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 29 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 30 | 0.001 | 0.004 | 0.010 | 0.006 | 0.000 |
| 31 | 0.045 | 0.059 | 0.089 | 0.099 | 0.029 |
| 32 | 0.035 | 0.004 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 33 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 34 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 35 | 0.005 | 0.033 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 36 | 0.035 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 37 | 0.013 | 0.011 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 38 | 0.024 | 0.030 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 39 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 40 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.026 | 0.030 | 0.009 | 0.000 | 0.000 |
| 42 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 43 | 0.093 | 0.021 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 44 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 45 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 46 | 0.138 | 0.166 | 0.216 | 0.233 | 0.133 |
| 47 | 0.007 | 0.003 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Periodo 16

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0015 | 0.002 | 0.0025 | 0.003 | 0.0035 |
| 1 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.049 | 0.069 | 0.061 | 0.000 | 0.000 |
| 3 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 4 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 5 | 0.048 | 0.074 | 0.101 | 0.131 | 0.111 |
| 6 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 7 | 0.001 | 0.008 | 0.013 | 0.007 | 0.000 |
| 8 | 0.004 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 9 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.007 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 11 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 12 | 0.077 | 0.084 | 0.076 | 0.028 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 17 | 0.009 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 18 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 19 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 20 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 21 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 22 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 23 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 24 | 0.022 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 25 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 26 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 27 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 28 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 29 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 30 | 0.083 | 0.134 | 0.161 | 0.119 | 0.000 |
| 31 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 32 | 0.031 | 0.015 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 33 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 34 | 0.069 | 0.067 | 0.059 | 0.002 | 0.000 |
| 35 | 0.049 | 0.013 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 36 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 37 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 38 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 39 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 40 | 0.030 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.066 | 0.093 | 0.113 | 0.101 | 0.054 |
| 42 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 43 | 0.240 | 0.148 | 0.003 | 0.000 | 0.000 |
| 44 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 45 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 46 | 0.100 | 0.043 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 47 | 0.108 | 0.251 | 0.412 | 0.613 | 0.835 |

Periodo 17

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.001 | 0.0015 | 0.002 | 0.0022 | 0.0025 |
| 1 | 0.008 | 0.019 | 0.03 | 0.025 | 0.032 |
| 2 | 0.000 | 0.000 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 3 | 0.000 | 0.000 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 4 | 0.001 | 0.000 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0.036 | 0.013 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 6 | 0.000 | 0.000 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 7 | 0.000 | 0.000 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.000 | 0.000 | 0.02 | 0.066 | 0.001 |
| 9 | 0.009 | 0.002 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.035 | 0.000 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 11 | 0.000 | 0.001 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 12 | 0.021 | 0.026 | 0.02 | 0.002 | 0.000 |
| 13 | 0.000 | 0.000 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.000 | 0.004 | 0.00 | 0.007 | 0.001 |
| 15 | 0.015 | 0.001 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.000 | 0.000 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 17 | 0.002 | 0.032 | 0.07 | 0.089 | 0.106 |
| 18 | 0.023 | 0.046 | 0.07 | 0.091 | 0.128 |
| 19 | 0.015 | 0.000 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 20 | 0.041 | 0.065 | 0.10 | 0.147 | 0.224 |
| 21 | 0.034 | 0.000 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 22 | 0.023 | 0.046 | 0.07 | 0.091 | 0.128 |
| 23 | 0.063 | 0.030 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 24 | 0.107 | 0.132 | 0.13 | 0.074 | 0.000 |
| 25 | 0.000 | 0.022 | 0.07 | 0.098 | 0.145 |
| 26 | 0.082 | 0.044 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 27 | 0.011 | 0.042 | 0.08 | 0.099 | 0.121 |
| 28 | 0.008 | 0.019 | 0.03 | 0.025 | 0.032 |
| 29 | 0.000 | 0.000 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 30 | 0.000 | 0.000 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 31 | 0.072 | 0.057 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 32 | 0.018 | 0.000 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 33 | 0.008 | 0.016 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 34 | 0.067 | 0.120 | 0.16 | 0.152 | 0.083 |
| 35 | 0.003 | 0.041 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 36 | 0.000 | 0.000 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 37 | 0.051 | 0.088 | 0.09 | 0.002 | 0.000 |
| 38 | 0.069 | 0.022 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 39 | 0.000 | 0.000 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 40 | 0.005 | 0.008 | 0.00 | 0.001 | 0.000 |
| 41 | 0.021 | 0.001 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 42 | 0.000 | 0.000 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 43 | 0.095 | 0.031 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 44 | 0.000 | 0.001 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 45 | 0.000 | 0.027 | 0.05 | 0.029 | 0.000 |
| 46 | 0.053 | 0.042 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 47 | 0.000 | 0.000 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |

Periodo 18

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0005 | 0.0008 | 0.001 | 0.0012 | 0.0014 |
| 1 | 0.007 | 0.007 | 0.006 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 3 | 0.002 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 4 | 0.010 | 0.025 | 0.008 | 0.000 | 0.000 |
| 5 | 0.028 | 0.034 | 0.040 | 0.051 | 0.053 |
| 6 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 7 | 0.001 | 0.032 | 0.056 | 0.033 | 0.014 |
| 8 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 9 | 0.020 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.029 | 0.020 | 0.003 | 0.000 | 0.000 |
| 11 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 12 | 0.006 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 13 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 17 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 18 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 19 | 0.024 | 0.046 | 0.059 | 0.098 | 0.109 |
| 20 | 0.021 | 0.010 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 21 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 22 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 23 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 24 | 0.080 | 0.083 | 0.082 | 0.000 | 0.000 |
| 25 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 26 | 0.126 | 0.147 | 0.156 | 0.080 | 0.031 |
| 27 | 0.027 | 0.016 | 0.008 | 0.000 | 0.000 |
| 28 | 0.007 | 0.007 | 0.006 | 0.000 | 0.000 |
| 29 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 30 | 0.019 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 31 | 0.045 | 0.033 | 0.016 | 0.000 | 0.000 |
| 32 | 0.035 | 0.005 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 33 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 34 | 0.075 | 0.048 | 0.022 | 0.000 | 0.000 |
| 35 | 0.029 | 0.015 | 0.003 | 0.000 | 0.000 |
| 36 | 0.086 | 0.149 | 0.209 | 0.327 | 0.362 |
| 37 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 38 | 0.058 | 0.015 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 39 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 40 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.033 | 0.025 | 0.012 | 0.000 | 0.000 |
| 42 | 0.007 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 43 | 0.074 | 0.106 | 0.121 | 0.093 | 0.070 |
| 44 | 0.007 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 46 | 0.126 | 0.161 | 0.193 | 0.317 | 0.361 |
| 47 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Periodo 19

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0012 | 0.0015 | 0.002 | 0.0022 | 0.0025 |
| 1 | 0.002 | 0.006 | 0.045 | 0.064 | 0.066 |
| 2 | 0.002 | 0.004 | 0.064 | 0.084 | 0.000 |
| 3 | 0.018 | 0.005 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 4 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 5 | 0.051 | 0.061 | 0.032 | 0.000 | 0.000 |
| 6 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 7 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.018 | 0.065 | 0.045 | 0.005 | 0.000 |
| 9 | 0.005 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.003 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 11 | 0.005 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 12 | 0.047 | 0.058 | 0.096 | 0.113 | 0.021 |
| 13 | 0.016 | 0.019 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.000 | 0.000 | 0.032 | 0.037 | 0.000 |
| 16 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 17 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 18 | 0.001 | 0.000 | 0.005 | 0.004 | 0.000 |
| 19 | 0.009 | 0.008 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 20 | 0.009 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 21 | 0.023 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 22 | 0.001 | 0.000 | 0.005 | 0.004 | 0.000 |
| 23 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 24 | 0.085 | 0.103 | 0.155 | 0.175 | 0.140 |
| 25 | 0.009 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 26 | 0.030 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 27 | 0.087 | 0.102 | 0.154 | 0.180 | 0.215 |
| 28 | 0.002 | 0.006 | 0.045 | 0.064 | 0.066 |
| 29 | 0.001 | 0.000 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 30 | 0.050 | 0.004 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 31 | 0.075 | 0.101 | 0.021 | 0.000 | 0.000 |
| 32 | 0.016 | 0.035 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 33 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 34 | 0.022 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 35 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 36 | 0.011 | 0.004 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 37 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 38 | 0.065 | 0.110 | 0.025 | 0.000 | 0.000 |
| 39 | 0.004 | 0.007 | 0.003 | 0.000 | 0.000 |
| 40 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.066 | 0.059 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 42 | 0.046 | 0.007 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 43 | 0.075 | 0.060 | 0.016 | 0.000 | 0.000 |
| 44 | 0.026 | 0.019 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 45 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 46 | 0.090 | 0.097 | 0.092 | 0.047 | 0.000 |
| 47 | 0.010 | 0.043 | 0.159 | 0.221 | 0.492 |

Periodo 20

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0005 | 0.0008 | 0.001 | 0.0015 | 0.002 |
| 1 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.106 | 0.166 | 0.222 | 0.369 | 0.580 |
| 3 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 4 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 5 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 6 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 7 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 9 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.033 | 0.074 | 0.100 | 0.140 | 0.147 |
| 11 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 12 | 0.054 | 0.042 | 0.027 | 0.000 | 0.000 |
| 13 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.020 | 0.025 | 0.014 | 0.000 | 0.000 |
| 17 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 18 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 19 | 0.034 | 0.003 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 20 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 21 | 0.022 | 0.018 | 0.005 | 0.000 | 0.000 |
| 22 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 23 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 24 | 0.057 | 0.055 | 0.048 | 0.006 | 0.000 |
| 25 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 26 | 0.167 | 0.138 | 0.105 | 0.000 | 0.000 |
| 27 | 0.011 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 28 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 29 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 30 | 0.005 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 31 | 0.031 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 32 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 33 | 0.004 | 0.008 | 0.010 | 0.015 | 0.007 |
| 34 | 0.085 | 0.089 | 0.090 | 0.074 | 0.000 |
| 35 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 36 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 37 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 38 | 0.006 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 39 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 40 | 0.046 | 0.038 | 0.016 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.087 | 0.087 | 0.085 | 0.071 | 0.003 |
| 42 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 43 | 0.101 | 0.121 | 0.139 | 0.186 | 0.216 |
| 44 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 45 | 0.001 | 0.005 | 0.014 | 0.028 | 0.031 |
| 46 | 0.119 | 0.126 | 0.125 | 0.110 | 0.017 |
| 47 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Periodo 21

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.001 | 0.0015 | 0.002 | 0.0025 | 0.003 |
| 1 | 0.018 | 0.026 | 0.022 | 0.010 | 0.000 |
| 2 | 0.039 | 0.027 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 3 | 0.047 | 0.070 | 0.026 | 0.000 | 0.000 |
| 4 | 0.012 | 0.046 | 0.068 | 0.041 | 0.000 |
| 5 | 0.068 | 0.062 | 0.008 | 0.000 | 0.000 |
| 6 | 0.097 | 0.138 | 0.135 | 0.015 | 0.000 |
| 7 | 0.018 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.004 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 9 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 11 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 12 | 0.049 | 0.057 | 0.056 | 0.018 | 0.000 |
| 13 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.001 | 0.001 | 0.045 | 0.166 | 0.287 |
| 16 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 17 | 0.005 | 0.049 | 0.059 | 0.000 | 0.000 |
| 18 | 0.034 | 0.016 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 19 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 20 | 0.017 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 22 | 0.034 | 0.016 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 23 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 24 | 0.060 | 0.044 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 25 | 0.001 | 0.002 | 0.016 | 0.024 | 0.037 |
| 26 | 0.021 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 27 | 0.042 | 0.053 | 0.078 | 0.111 | 0.133 |
| 28 | 0.018 | 0.026 | 0.022 | 0.010 | 0.000 |
| 29 | 0.035 | 0.070 | 0.120 | 0.133 | 0.000 |
| 30 | 0.020 | 0.013 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 31 | 0.051 | 0.010 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 32 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 33 | 0.027 | 0.004 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 34 | 0.036 | 0.057 | 0.126 | 0.157 | 0.006 |
| 35 | 0.005 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 36 | 0.039 | 0.028 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 37 | 0.032 | 0.074 | 0.154 | 0.312 | 0.537 |
| 38 | 0.003 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 39 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 40 | 0.000 | 0.000 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 41 | 0.059 | 0.069 | 0.050 | 0.000 | 0.000 |
| 42 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 43 | 0.031 | 0.004 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 44 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 45 | 0.004 | 0.008 | 0.006 | 0.000 | 0.000 |
| 46 | 0.053 | 0.017 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 47 | 0.011 | 0.012 | 0.003 | 0.000 | 0.000 |

Periodo 22

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0003 | 0.0005 | 0.001 | 0.0012 | 0.0015 |
| 1 | 0.018 | 0.015 | 0.003 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.005 | 0.004 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 3 | 0.001 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 4 | 0.031 | 0.043 | 0.092 | 0.100 | 0.025 |
| 5 | 0.038 | 0.048 | 0.082 | 0.090 | 0.103 |
| 6 | 0.003 | 0.005 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 7 | 0.012 | 0.011 | 0.003 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.025 | 0.019 | 0.006 | 0.000 | 0.000 |
| 9 | 0.039 | 0.018 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.029 | 0.038 | 0.047 | 0.002 | 0.000 |
| 11 | 0.001 | 0.003 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 12 | 0.036 | 0.030 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 0.002 | 0.004 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.003 | 0.010 | 0.004 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.001 | 0.003 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 17 | 0.022 | 0.040 | 0.092 | 0.131 | 0.268 |
| 18 | 0.026 | 0.018 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 19 | 0.033 | 0.013 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 20 | 0.057 | 0.070 | 0.105 | 0.120 | 0.140 |
| 21 | 0.029 | 0.013 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 22 | 0.026 | 0.018 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 23 | 0.005 | 0.007 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 24 | 0.055 | 0.045 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 25 | 0.005 | 0.006 | 0.003 | 0.000 | 0.000 |
| 26 | 0.011 | 0.011 | 0.003 | 0.000 | 0.000 |
| 27 | 0.078 | 0.082 | 0.094 | 0.066 | 0.000 |
| 28 | 0.018 | 0.015 | 0.003 | 0.000 | 0.000 |
| 29 | 0.000 | 0.002 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 30 | 0.002 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 31 | 0.029 | 0.013 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 32 | 0.002 | 0.005 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 33 | 0.038 | 0.017 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 34 | 0.052 | 0.049 | 0.047 | 0.065 | 0.136 |
| 35 | 0.029 | 0.043 | 0.097 | 0.157 | 0.283 |
| 36 | 0.005 | 0.009 | 0.003 | 0.000 | 0.000 |
| 37 | 0.001 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 38 | 0.001 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 39 | 0.000 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 40 | 0.001 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.040 | 0.042 | 0.047 | 0.028 | 0.000 |
| 42 | 0.004 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 43 | 0.131 | 0.147 | 0.182 | 0.172 | 0.005 |
| 44 | 0.002 | 0.005 | 0.013 | 0.029 | 0.034 |
| 45 | 0.016 | 0.026 | 0.042 | 0.037 | 0.003 |
| 46 | 0.038 | 0.033 | 0.003 | 0.000 | 0.000 |
| 47 | 0.002 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |

**Modello media-entropia di Shannon**

Periodo 1

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0002 | 0.0005 | 0.001 | 0.0012 | 0.0014 |
| 1 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.050 | 0.046 | 0.032 | 0.022 | 0.011 |
| 3 | 0.032 | 0.027 | 0.016 | 0.010 | 0.004 |
| 4 | 0.007 | 0.005 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 6 | 0.011 | 0.007 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 7 | 0.004 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.010 | 0.007 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 9 | 0.027 | 0.023 | 0.012 | 0.007 | 0.003 |
| 10 | 0.014 | 0.010 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 11 | 0.025 | 0.021 | 0.011 | 0.006 | 0.002 |
| 12 | 0.010 | 0.006 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 13 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.007 | 0.004 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 15 | 0.005 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.019 | 0.014 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 17 | 0.010 | 0.007 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 18 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 19 | 0.044 | 0.040 | 0.026 | 0.018 | 0.008 |
| 20 | 0.018 | 0.013 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 21 | 0.015 | 0.011 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 22 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 23 | 0.010 | 0.007 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 24 | 0.014 | 0.010 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 25 | 0.011 | 0.007 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 26 | 0.020 | 0.016 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 27 | 0.004 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 28 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 29 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 30 | 0.042 | 0.038 | 0.024 | 0.017 | 0.007 |
| 31 | 0.328 | 0.453 | 0.694 | 0.802 | 0.917 |
| 32 | 0.037 | 0.032 | 0.019 | 0.013 | 0.005 |
| 33 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 34 | 0.007 | 0.005 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 35 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 36 | 0.070 | 0.070 | 0.055 | 0.043 | 0.024 |
| 37 | 0.010 | 0.007 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 38 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 39 | 0.034 | 0.029 | 0.017 | 0.011 | 0.004 |
| 40 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 42 | 0.009 | 0.006 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 43 | 0.040 | 0.035 | 0.022 | 0.015 | 0.006 |
| 44 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 45 | 0.014 | 0.010 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 46 | 0.024 | 0.019 | 0.009 | 0.006 | 0.002 |
| 47 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Periodo 2

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0001 | 0.00015 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0005 |
| 1 | 0.038 | 0.036 | 0.033 | 0.025 | 0.002 |
| 2 | 0.139 | 0.155 | 0.172 | 0.211 | 0.307 |
| 3 | 0.109 | 0.117 | 0.126 | 0.141 | 0.123 |
| 4 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 5 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 6 | 0.027 | 0.024 | 0.021 | 0.014 | 0.001 |
| 7 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 9 | 0.014 | 0.011 | 0.009 | 0.005 | 0.000 |
| 10 | 0.039 | 0.037 | 0.034 | 0.026 | 0.003 |
| 11 | 0.016 | 0.014 | 0.011 | 0.006 | 0.000 |
| 12 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 13 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.053 | 0.052 | 0.051 | 0.043 | 0.008 |
| 15 | 0.024 | 0.021 | 0.018 | 0.012 | 0.000 |
| 16 | 0.008 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 17 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 18 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 19 | 0.092 | 0.096 | 0.100 | 0.105 | 0.063 |
| 20 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 21 | 0.050 | 0.048 | 0.046 | 0.038 | 0.006 |
| 22 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 23 | 0.007 | 0.005 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 24 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 25 | 0.023 | 0.021 | 0.018 | 0.011 | 0.000 |
| 26 | 0.010 | 0.008 | 0.006 | 0.003 | 0.000 |
| 27 | 0.007 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 28 | 0.038 | 0.036 | 0.033 | 0.025 | 0.002 |
| 29 | 0.005 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 30 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 31 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 32 | 0.038 | 0.036 | 0.033 | 0.025 | 0.002 |
| 33 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 34 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 35 | 0.036 | 0.034 | 0.030 | 0.022 | 0.002 |
| 36 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 37 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 38 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 39 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 40 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.003 | 0.002 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 42 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 43 | 0.018 | 0.015 | 0.012 | 0.007 | 0.000 |
| 44 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 0.028 | 0.026 | 0.023 | 0.015 | 0.001 |
| 46 | 0.008 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 47 | 0.157 | 0.177 | 0.199 | 0.256 | 0.478 |

Periodo 3

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0005 | 0.001 | 0.0015 | 0.002 | 0.0025 |
| 1 | 0.065 | 0.085 | 0.100 | 0.098 | 0.042 |
| 2 | 0.013 | 0.009 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 3 | 0.016 | 0.011 | 0.006 | 0.002 | 0.000 |
| 4 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 5 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 6 | 0.015 | 0.010 | 0.005 | 0.001 | 0.000 |
| 7 | 0.004 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.014 | 0.009 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 9 | 0.008 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.013 | 0.008 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 11 | 0.025 | 0.021 | 0.014 | 0.005 | 0.000 |
| 12 | 0.015 | 0.010 | 0.005 | 0.001 | 0.000 |
| 13 | 0.006 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.005 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.017 | 0.013 | 0.007 | 0.002 | 0.000 |
| 16 | 0.022 | 0.017 | 0.011 | 0.004 | 0.000 |
| 17 | 0.043 | 0.045 | 0.042 | 0.028 | 0.004 |
| 18 | 0.028 | 0.024 | 0.017 | 0.008 | 0.000 |
| 19 | 0.011 | 0.006 | 0.003 | 0.000 | 0.000 |
| 20 | 0.049 | 0.056 | 0.056 | 0.043 | 0.009 |
| 21 | 0.018 | 0.013 | 0.007 | 0.002 | 0.000 |
| 22 | 0.028 | 0.024 | 0.017 | 0.008 | 0.000 |
| 23 | 0.014 | 0.009 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 24 | 0.074 | 0.100 | 0.126 | 0.138 | 0.079 |
| 25 | 0.015 | 0.010 | 0.005 | 0.001 | 0.000 |
| 26 | 0.038 | 0.039 | 0.033 | 0.020 | 0.002 |
| 27 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 28 | 0.065 | 0.085 | 0.100 | 0.098 | 0.042 |
| 29 | 0.015 | 0.010 | 0.005 | 0.001 | 0.000 |
| 30 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 31 | 0.009 | 0.005 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 32 | 0.011 | 0.006 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 33 | 0.112 | 0.183 | 0.294 | 0.475 | 0.817 |
| 34 | 0.006 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 35 | 0.016 | 0.011 | 0.006 | 0.002 | 0.000 |
| 36 | 0.011 | 0.007 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 37 | 0.034 | 0.033 | 0.026 | 0.014 | 0.001 |
| 38 | 0.022 | 0.017 | 0.011 | 0.004 | 0.000 |
| 39 | 0.029 | 0.026 | 0.019 | 0.009 | 0.000 |
| 40 | 0.007 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.008 | 0.004 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 42 | 0.041 | 0.043 | 0.039 | 0.025 | 0.003 |
| 43 | 0.009 | 0.005 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 44 | 0.021 | 0.016 | 0.010 | 0.003 | 0.000 |
| 45 | 0.005 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 46 | 0.010 | 0.006 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 47 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Periodo 4

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.001 | 0.0015 | 0.002 | 0.0025 | 0.003 |
| 1 | 0.020 | 0.010 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 2 | 0.022 | 0.022 | 0.015 | 0.007 | 0.001 |
| 3 | 0.020 | 0.010 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 4 | 0.023 | 0.033 | 0.032 | 0.021 | 0.004 |
| 5 | 0.023 | 0.032 | 0.031 | 0.020 | 0.004 |
| 6 | 0.019 | 0.007 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 7 | 0.022 | 0.019 | 0.012 | 0.005 | 0.000 |
| 8 | 0.020 | 0.011 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 9 | 0.018 | 0.005 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.021 | 0.016 | 0.009 | 0.003 | 0.000 |
| 11 | 0.022 | 0.020 | 0.013 | 0.005 | 0.000 |
| 12 | 0.019 | 0.006 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 13 | 0.022 | 0.023 | 0.017 | 0.008 | 0.001 |
| 14 | 0.020 | 0.009 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 15 | 0.024 | 0.048 | 0.065 | 0.061 | 0.023 |
| 16 | 0.023 | 0.029 | 0.026 | 0.016 | 0.003 |
| 17 | 0.024 | 0.044 | 0.055 | 0.047 | 0.016 |
| 18 | 0.022 | 0.026 | 0.021 | 0.011 | 0.001 |
| 19 | 0.022 | 0.026 | 0.022 | 0.012 | 0.002 |
| 20 | 0.021 | 0.018 | 0.011 | 0.004 | 0.000 |
| 21 | 0.022 | 0.023 | 0.016 | 0.008 | 0.001 |
| 22 | 0.022 | 0.026 | 0.021 | 0.011 | 0.001 |
| 23 | 0.020 | 0.011 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 24 | 0.022 | 0.020 | 0.013 | 0.006 | 0.001 |
| 25 | 0.023 | 0.029 | 0.025 | 0.015 | 0.002 |
| 26 | 0.020 | 0.009 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 27 | 0.021 | 0.018 | 0.011 | 0.004 | 0.000 |
| 28 | 0.020 | 0.010 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 29 | 0.022 | 0.020 | 0.012 | 0.005 | 0.001 |
| 30 | 0.020 | 0.010 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 31 | 0.015 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 32 | 0.021 | 0.014 | 0.007 | 0.002 | 0.000 |
| 33 | 0.019 | 0.008 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 34 | 0.024 | 0.043 | 0.052 | 0.044 | 0.013 |
| 35 | 0.024 | 0.044 | 0.055 | 0.047 | 0.015 |
| 36 | 0.022 | 0.020 | 0.013 | 0.005 | 0.000 |
| 37 | 0.021 | 0.013 | 0.006 | 0.002 | 0.000 |
| 38 | 0.022 | 0.026 | 0.020 | 0.011 | 0.001 |
| 39 | 0.023 | 0.030 | 0.027 | 0.016 | 0.003 |
| 40 | 0.021 | 0.017 | 0.009 | 0.003 | 0.000 |
| 41 | 0.021 | 0.015 | 0.008 | 0.003 | 0.000 |
| 42 | 0.021 | 0.016 | 0.009 | 0.003 | 0.000 |
| 43 | 0.021 | 0.016 | 0.009 | 0.003 | 0.000 |
| 44 | 0.027 | 0.109 | 0.297 | 0.566 | 0.903 |
| 45 | 0.017 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 46 | 0.020 | 0.011 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 47 | 0.023 | 0.028 | 0.025 | 0.014 | 0.002 |

Periodo 5

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0005 | 0.001 | 0.0012 | 0.0015 | 0.0016 |
| 1 | 0.023 | 0.028 | 0.023 | 0.004 | 0.000 |
| 2 | 0.026 | 0.071 | 0.110 | 0.199 | 0.171 |
| 3 | 0.020 | 0.007 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 4 | 0.023 | 0.028 | 0.024 | 0.004 | 0.000 |
| 5 | 0.017 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 6 | 0.026 | 0.084 | 0.147 | 0.414 | 0.701 |
| 7 | 0.021 | 0.012 | 0.006 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.024 | 0.039 | 0.041 | 0.016 | 0.001 |
| 9 | 0.018 | 0.003 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.019 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 11 | 0.021 | 0.011 | 0.005 | 0.000 | 0.000 |
| 12 | 0.023 | 0.030 | 0.026 | 0.005 | 0.000 |
| 13 | 0.021 | 0.013 | 0.007 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.018 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.020 | 0.009 | 0.004 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.024 | 0.039 | 0.040 | 0.015 | 0.001 |
| 17 | 0.019 | 0.006 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 18 | 0.025 | 0.062 | 0.087 | 0.109 | 0.053 |
| 19 | 0.020 | 0.006 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 20 | 0.020 | 0.009 | 0.004 | 0.000 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 0.022 | 0.016 | 0.009 | 0.000 | 0.000 |
| 22 | 0.025 | 0.062 | 0.087 | 0.109 | 0.053 |
| 23 | 0.021 | 0.014 | 0.007 | 0.000 | 0.000 |
| 24 | 0.023 | 0.030 | 0.026 | 0.005 | 0.000 |
| 25 | 0.021 | 0.013 | 0.006 | 0.000 | 0.000 |
| 26 | 0.022 | 0.022 | 0.015 | 0.001 | 0.000 |
| 27 | 0.023 | 0.031 | 0.028 | 0.006 | 0.000 |
| 28 | 0.023 | 0.028 | 0.023 | 0.004 | 0.000 |
| 29 | 0.018 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 30 | 0.021 | 0.011 | 0.005 | 0.000 | 0.000 |
| 31 | 0.023 | 0.033 | 0.030 | 0.007 | 0.000 |
| 32 | 0.016 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 33 | 0.025 | 0.052 | 0.065 | 0.051 | 0.012 |
| 34 | 0.017 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 35 | 0.014 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 36 | 0.022 | 0.015 | 0.008 | 0.000 | 0.000 |
| 37 | 0.020 | 0.009 | 0.003 | 0.000 | 0.000 |
| 38 | 0.021 | 0.011 | 0.005 | 0.000 | 0.000 |
| 39 | 0.021 | 0.015 | 0.008 | 0.000 | 0.000 |
| 40 | 0.022 | 0.016 | 0.009 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.019 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 42 | 0.024 | 0.036 | 0.036 | 0.011 | 0.001 |
| 43 | 0.017 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 44 | 0.023 | 0.027 | 0.022 | 0.003 | 0.000 |
| 45 | 0.021 | 0.011 | 0.005 | 0.000 | 0.000 |
| 46 | 0.022 | 0.021 | 0.014 | 0.001 | 0.000 |
| 47 | 0.024 | 0.046 | 0.054 | 0.032 | 0.005 |

Periodo 6

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.001 | 0.0015 | 0.0016 | 0.0018 | 0.002 |
| 1 | 0.016 | 0.006 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 2 | 0.067 | 0.164 | 0.180 | 0.197 | 0.139 |
| 3 | 0.010 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 4 | 0.016 | 0.005 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 5 | 0.012 | 0.003 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 6 | 0.010 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 7 | 0.019 | 0.008 | 0.006 | 0.002 | 0.000 |
| 8 | 0.030 | 0.024 | 0.021 | 0.012 | 0.001 |
| 9 | 0.018 | 0.007 | 0.005 | 0.002 | 0.000 |
| 10 | 0.031 | 0.026 | 0.022 | 0.013 | 0.002 |
| 11 | 0.015 | 0.005 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 12 | 0.019 | 0.008 | 0.006 | 0.002 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 0.020 | 0.009 | 0.007 | 0.003 | 0.000 |
| 14 | 0.031 | 0.025 | 0.022 | 0.012 | 0.001 |
| 15 | 0.014 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 16 | 0.091 | 0.340 | 0.412 | 0.583 | 0.834 |
| 17 | 0.014 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 18 | 0.006 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 19 | 0.023 | 0.012 | 0.010 | 0.004 | 0.000 |
| 20 | 0.009 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 21 | 0.038 | 0.044 | 0.040 | 0.028 | 0.006 |
| 22 | 0.006 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 23 | 0.037 | 0.041 | 0.037 | 0.025 | 0.005 |
| 24 | 0.029 | 0.022 | 0.019 | 0.010 | 0.001 |
| 25 | 0.017 | 0.006 | 0.005 | 0.002 | 0.000 |
| 26 | 0.030 | 0.025 | 0.021 | 0.012 | 0.001 |
| 27 | 0.010 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 28 | 0.016 | 0.006 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 29 | 0.032 | 0.029 | 0.026 | 0.015 | 0.002 |
| 30 | 0.006 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 31 | 0.018 | 0.007 | 0.005 | 0.002 | 0.000 |
| 32 | 0.016 | 0.005 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 33 | 0.014 | 0.004 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 34 | 0.011 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 35 | 0.005 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 36 | 0.035 | 0.035 | 0.032 | 0.020 | 0.003 |
| 37 | 0.031 | 0.026 | 0.022 | 0.013 | 0.002 |
| 38 | 0.023 | 0.013 | 0.010 | 0.004 | 0.000 |
| 39 | 0.012 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 40 | 0.009 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.012 | 0.003 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 42 | 0.009 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 43 | 0.020 | 0.009 | 0.007 | 0.003 | 0.000 |
| 44 | 0.016 | 0.006 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 45 | 0.026 | 0.018 | 0.015 | 0.007 | 0.001 |
| 46 | 0.018 | 0.007 | 0.005 | 0.002 | 0.000 |
| 47 | 0.032 | 0.027 | 0.024 | 0.014 | 0.002 |

Periodo 7

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0005 | 0.0008 | 0.001 | 0.0012 | 0.0014 |
| 1 | 0.023 | 0.020 | 0.013 | 0.004 | 0.000 |
| 2 | 0.017 | 0.008 | 0.003 | 0.000 | 0.000 |
| 3 | 0.025 | 0.028 | 0.023 | 0.012 | 0.001 |
| 4 | 0.012 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0.015 | 0.006 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 6 | 0.016 | 0.007 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 7 | 0.017 | 0.008 | 0.003 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.023 | 0.021 | 0.014 | 0.005 | 0.000 |
| 9 | 0.017 | 0.009 | 0.004 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.029 | 0.040 | 0.045 | 0.037 | 0.010 |
| 11 | 0.028 | 0.035 | 0.035 | 0.025 | 0.004 |
| 12 | 0.023 | 0.021 | 0.014 | 0.005 | 0.000 |
| 13 | 0.023 | 0.022 | 0.015 | 0.006 | 0.000 |
| 14 | 0.011 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.018 | 0.011 | 0.005 | 0.001 | 0.000 |
| 16 | 0.027 | 0.031 | 0.029 | 0.018 | 0.002 |
| 17 | 0.029 | 0.040 | 0.044 | 0.036 | 0.010 |
| 18 | 0.012 | 0.003 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 19 | 0.027 | 0.034 | 0.034 | 0.023 | 0.004 |
| 20 | 0.021 | 0.015 | 0.009 | 0.002 | 0.000 |
| 21 | 0.016 | 0.007 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 22 | 0.012 | 0.003 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 23 | 0.016 | 0.007 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 24 | 0.031 | 0.050 | 0.067 | 0.075 | 0.040 |
| 25 | 0.037 | 0.079 | 0.146 | 0.292 | 0.596 |
| 26 | 0.031 | 0.049 | 0.062 | 0.067 | 0.032 |
| 27 | 0.028 | 0.038 | 0.040 | 0.031 | 0.007 |
| 28 | 0.023 | 0.020 | 0.013 | 0.004 | 0.000 |
| 29 | 0.023 | 0.022 | 0.015 | 0.006 | 0.000 |
| 30 | 0.010 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 31 | 0.035 | 0.069 | 0.114 | 0.191 | 0.255 |
| 32 | 0.030 | 0.045 | 0.055 | 0.053 | 0.020 |
| 33 | 0.007 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 34 | 0.023 | 0.019 | 0.013 | 0.004 | 0.000 |
| 35 | 0.016 | 0.007 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 36 | 0.025 | 0.027 | 0.023 | 0.012 | 0.001 |
| 37 | 0.019 | 0.012 | 0.005 | 0.001 | 0.000 |
| 38 | 0.019 | 0.012 | 0.006 | 0.001 | 0.000 |
| 39 | 0.027 | 0.033 | 0.032 | 0.020 | 0.003 |
| 40 | 0.016 | 0.007 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.026 | 0.029 | 0.026 | 0.014 | 0.002 |
| 42 | 0.020 | 0.013 | 0.006 | 0.001 | 0.000 |
| 43 | 0.013 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 44 | 0.029 | 0.041 | 0.047 | 0.041 | 0.012 |
| 45 | 0.025 | 0.026 | 0.021 | 0.010 | 0.001 |
| 46 | 0.018 | 0.011 | 0.005 | 0.001 | 0.000 |
| 47 | 0.012 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |

Periodo 8

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.001 | 0.0015 | 0.002 | 0.0025 | 0.005 |
| 1 | 0.017 | 0.010 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 2 | 0.016 | 0.007 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 3 | 0.020 | 0.014 | 0.008 | 0.004 | 0.001 |
| 4 | 0.024 | 0.027 | 0.023 | 0.017 | 0.008 |
| 5 | 0.024 | 0.026 | 0.022 | 0.015 | 0.007 |
| 6 | 0.026 | 0.034 | 0.034 | 0.027 | 0.016 |
| 7 | 0.021 | 0.017 | 0.012 | 0.007 | 0.003 |
| 8 | 0.017 | 0.009 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 9 | 0.020 | 0.015 | 0.009 | 0.005 | 0.002 |
| 10 | 0.021 | 0.018 | 0.013 | 0.007 | 0.003 |
| 11 | 0.015 | 0.006 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 12 | 0.022 | 0.019 | 0.013 | 0.008 | 0.003 |
| 13 | 0.022 | 0.020 | 0.015 | 0.009 | 0.004 |
| 14 | 0.029 | 0.047 | 0.055 | 0.052 | 0.036 |
| 15 | 0.020 | 0.015 | 0.010 | 0.005 | 0.002 |
| 16 | 0.028 | 0.042 | 0.045 | 0.040 | 0.026 |
| 17 | 0.024 | 0.027 | 0.023 | 0.017 | 0.008 |
| 18 | 0.021 | 0.018 | 0.013 | 0.008 | 0.003 |
| 19 | 0.019 | 0.012 | 0.007 | 0.003 | 0.001 |
| 20 | 0.021 | 0.016 | 0.010 | 0.006 | 0.002 |
| 21 | 0.016 | 0.008 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 22 | 0.021 | 0.018 | 0.013 | 0.008 | 0.003 |
| 23 | 0.016 | 0.007 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 24 | 0.025 | 0.030 | 0.027 | 0.020 | 0.011 |
| 25 | 0.018 | 0.010 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 26 | 0.018 | 0.010 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 27 | 0.017 | 0.008 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 28 | 0.017 | 0.010 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 29 | 0.018 | 0.011 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 30 | 0.017 | 0.009 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 31 | 0.028 | 0.042 | 0.046 | 0.041 | 0.027 |
| 32 | 0.017 | 0.009 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 33 | 0.027 | 0.037 | 0.038 | 0.032 | 0.019 |
| 34 | 0.021 | 0.018 | 0.013 | 0.007 | 0.003 |
| 35 | 0.017 | 0.009 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 36 | 0.015 | 0.006 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 37 | 0.020 | 0.015 | 0.009 | 0.005 | 0.002 |
| 38 | 0.015 | 0.006 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 39 | 0.026 | 0.034 | 0.033 | 0.026 | 0.015 |
| 40 | 0.024 | 0.026 | 0.022 | 0.016 | 0.008 |
| 41 | 0.019 | 0.013 | 0.008 | 0.004 | 0.001 |
| 42 | 0.026 | 0.033 | 0.032 | 0.025 | 0.014 |
| 43 | 0.022 | 0.019 | 0.013 | 0.008 | 0.003 |
| 44 | 0.021 | 0.017 | 0.012 | 0.007 | 0.003 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 0.042 | 0.149 | 0.312 | 0.514 | 0.744 |
| 46 | 0.026 | 0.034 | 0.033 | 0.026 | 0.015 |
| 47 | 0.020 | 0.014 | 0.009 | 0.005 | 0.002 |

Periodo 9

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0005 | 0.001 | 0.0015 | 0.002 | 0.0025 |
| 1 | 0.016 | 0.010 | 0.005 | 0.002 | 0.000 |
| 2 | 0.026 | 0.023 | 0.017 | 0.008 | 0.000 |
| 3 | 0.032 | 0.032 | 0.026 | 0.015 | 0.001 |
| 4 | 0.010 | 0.005 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 5 | 0.053 | 0.073 | 0.083 | 0.075 | 0.016 |
| 6 | 0.031 | 0.030 | 0.025 | 0.014 | 0.001 |
| 7 | 0.032 | 0.031 | 0.026 | 0.015 | 0.001 |
| 8 | 0.009 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 9 | 0.012 | 0.006 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 10 | 0.022 | 0.017 | 0.011 | 0.005 | 0.000 |
| 11 | 0.009 | 0.004 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 12 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 13 | 0.009 | 0.005 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.026 | 0.022 | 0.016 | 0.008 | 0.000 |
| 15 | 0.009 | 0.004 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.013 | 0.007 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 17 | 0.020 | 0.015 | 0.010 | 0.004 | 0.000 |
| 18 | 0.033 | 0.034 | 0.029 | 0.017 | 0.001 |
| 19 | 0.016 | 0.011 | 0.006 | 0.002 | 0.000 |
| 20 | 0.021 | 0.016 | 0.010 | 0.004 | 0.000 |
| 21 | 0.013 | 0.008 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 22 | 0.033 | 0.034 | 0.029 | 0.017 | 0.001 |
| 23 | 0.018 | 0.013 | 0.007 | 0.003 | 0.000 |
| 24 | 0.014 | 0.009 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 25 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 26 | 0.023 | 0.018 | 0.012 | 0.005 | 0.000 |
| 27 | 0.007 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 28 | 0.016 | 0.010 | 0.005 | 0.002 | 0.000 |
| 29 | 0.016 | 0.011 | 0.006 | 0.002 | 0.000 |
| 30 | 0.019 | 0.014 | 0.008 | 0.003 | 0.000 |
| 31 | 0.007 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 32 | 0.027 | 0.024 | 0.018 | 0.009 | 0.000 |
| 33 | 0.033 | 0.033 | 0.028 | 0.016 | 0.001 |
| 34 | 0.015 | 0.009 | 0.005 | 0.001 | 0.000 |
| 35 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 36 | 0.013 | 0.008 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 37 | 0.018 | 0.013 | 0.007 | 0.003 | 0.000 |
| 38 | 0.021 | 0.016 | 0.010 | 0.004 | 0.000 |
| 39 | 0.008 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 40 | 0.030 | 0.030 | 0.024 | 0.013 | 0.000 |
| 41 | 0.009 | 0.004 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 42 | 0.077 | 0.129 | 0.185 | 0.230 | 0.165 |
| 43 | 0.029 | 0.027 | 0.021 | 0.011 | 0.000 |
| 44 | 0.017 | 0.012 | 0.007 | 0.002 | 0.000 |
| 45 | 0.098 | 0.192 | 0.322 | 0.497 | 0.813 |
| 46 | 0.018 | 0.013 | 0.007 | 0.003 | 0.000 |
| 47 | 0.015 | 0.009 | 0.005 | 0.001 | 0.000 |

Periodo 10

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0001 | 0.0005 | 0.0008 | 0.001 | 0.0012 |
| 1 | 0.010 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.016 | 0.009 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 3 | 0.024 | 0.016 | 0.009 | 0.003 | 0.000 |
| 4 | 0.029 | 0.022 | 0.013 | 0.005 | 0.000 |
| 5 | 0.026 | 0.019 | 0.010 | 0.004 | 0.000 |
| 6 | 0.012 | 0.006 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 7 | 0.093 | 0.138 | 0.165 | 0.164 | 0.084 |
| 8 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 9 | 0.010 | 0.005 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.015 | 0.008 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 11 | 0.044 | 0.044 | 0.033 | 0.019 | 0.002 |
| 12 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 13 | 0.021 | 0.014 | 0.007 | 0.002 | 0.000 |
| 14 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.005 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.006 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 17 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 18 | 0.026 | 0.020 | 0.011 | 0.004 | 0.000 |
| 19 | 0.015 | 0.008 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 20 | 0.013 | 0.006 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 21 | 0.015 | 0.008 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 22 | 0.026 | 0.020 | 0.011 | 0.004 | 0.000 |
| 23 | 0.021 | 0.014 | 0.007 | 0.002 | 0.000 |
| 24 | 0.042 | 0.040 | 0.029 | 0.016 | 0.001 |
| 25 | 0.016 | 0.009 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 26 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 27 | 0.011 | 0.005 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 28 | 0.010 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 29 | 0.059 | 0.069 | 0.063 | 0.045 | 0.007 |
| 30 | 0.017 | 0.010 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 31 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 32 | 0.009 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 33 | 0.012 | 0.006 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 34 | 0.005 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 35 | 0.017 | 0.009 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 36 | 0.031 | 0.025 | 0.015 | 0.007 | 0.000 |
| 37 | 0.005 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 38 | 0.142 | 0.268 | 0.412 | 0.561 | 0.842 |
| 39 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 40 | 0.008 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.017 | 0.009 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 42 | 0.005 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 43 | 0.014 | 0.008 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 44 | 0.032 | 0.027 | 0.017 | 0.008 | 0.000 |
| 45 | 0.088 | 0.128 | 0.148 | 0.141 | 0.064 |
| 46 | 0.005 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 47 | 0.012 | 0.006 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |

Periodo 11

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0005 | 0.001 | 0.002 | 0.003 | 0.004 |
| 1 | 0.020 | 0.016 | 0.009 | 0.005 | 0.002 |
| 2 | 0.021 | 0.019 | 0.013 | 0.008 | 0.003 |
| 3 | 0.021 | 0.019 | 0.014 | 0.009 | 0.004 |
| 4 | 0.020 | 0.016 | 0.009 | 0.004 | 0.001 |
| 5 | 0.023 | 0.026 | 0.026 | 0.021 | 0.013 |
| 6 | 0.022 | 0.022 | 0.018 | 0.013 | 0.006 |
| 7 | 0.021 | 0.018 | 0.013 | 0.007 | 0.003 |
| 8 | 0.024 | 0.031 | 0.039 | 0.039 | 0.030 |
| 9 | 0.023 | 0.026 | 0.027 | 0.022 | 0.013 |
| 10 | 0.019 | 0.012 | 0.005 | 0.002 | 0.000 |
| 11 | 0.022 | 0.023 | 0.020 | 0.014 | 0.007 |
| 12 | 0.020 | 0.016 | 0.010 | 0.005 | 0.002 |
| 13 | 0.021 | 0.018 | 0.012 | 0.006 | 0.002 |
| 14 | 0.021 | 0.018 | 0.012 | 0.007 | 0.003 |
| 15 | 0.026 | 0.046 | 0.091 | 0.135 | 0.165 |
| 16 | 0.022 | 0.023 | 0.021 | 0.016 | 0.009 |
| 17 | 0.019 | 0.013 | 0.006 | 0.002 | 0.001 |
| 18 | 0.018 | 0.012 | 0.005 | 0.002 | 0.000 |
| 19 | 0.022 | 0.023 | 0.020 | 0.014 | 0.007 |
| 20 | 0.020 | 0.015 | 0.008 | 0.004 | 0.001 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 0.021 | 0.019 | 0.013 | 0.008 | 0.003 |
| 22 | 0.018 | 0.012 | 0.005 | 0.002 | 0.000 |
| 23 | 0.021 | 0.020 | 0.016 | 0.010 | 0.005 |
| 24 | 0.021 | 0.021 | 0.016 | 0.010 | 0.005 |
| 25 | 0.024 | 0.030 | 0.038 | 0.037 | 0.027 |
| 26 | 0.020 | 0.017 | 0.010 | 0.005 | 0.002 |
| 27 | 0.023 | 0.027 | 0.030 | 0.027 | 0.018 |
| 28 | 0.020 | 0.016 | 0.009 | 0.005 | 0.002 |
| 29 | 0.024 | 0.031 | 0.040 | 0.041 | 0.032 |
| 30 | 0.019 | 0.014 | 0.007 | 0.003 | 0.001 |
| 31 | 0.022 | 0.025 | 0.025 | 0.020 | 0.012 |
| 32 | 0.020 | 0.015 | 0.008 | 0.004 | 0.001 |
| 33 | 0.019 | 0.013 | 0.006 | 0.002 | 0.001 |
| 34 | 0.021 | 0.020 | 0.015 | 0.009 | 0.004 |
| 35 | 0.020 | 0.017 | 0.010 | 0.005 | 0.002 |
| 36 | 0.021 | 0.020 | 0.016 | 0.010 | 0.005 |
| 37 | 0.025 | 0.038 | 0.060 | 0.072 | 0.070 |
| 38 | 0.022 | 0.025 | 0.024 | 0.019 | 0.011 |
| 39 | 0.020 | 0.016 | 0.010 | 0.005 | 0.002 |
| 40 | 0.021 | 0.019 | 0.014 | 0.009 | 0.004 |
| 41 | 0.021 | 0.019 | 0.013 | 0.008 | 0.003 |
| 42 | 0.021 | 0.021 | 0.017 | 0.011 | 0.005 |
| 43 | 0.020 | 0.017 | 0.011 | 0.006 | 0.002 |
| 44 | 0.019 | 0.014 | 0.007 | 0.003 | 0.001 |
| 45 | 0.023 | 0.030 | 0.036 | 0.035 | 0.025 |
| 46 | 0.028 | 0.058 | 0.154 | 0.294 | 0.481 |
| 47 | 0.020 | 0.017 | 0.010 | 0.005 | 0.002 |

Periodo 12

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0015 | 0.002 | 0.0025 | 0.003 | 0.0031 |
| 1 | 0.007 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.016 | 0.010 | 0.005 | 0.000 | 0.000 |
| 3 | 0.031 | 0.028 | 0.019 | 0.005 | 0.002 |
| 4 | 0.013 | 0.008 | 0.003 | 0.000 | 0.000 |
| 5 | 0.040 | 0.041 | 0.033 | 0.012 | 0.005 |
| 6 | 0.035 | 0.033 | 0.024 | 0.007 | 0.003 |
| 7 | 0.013 | 0.008 | 0.003 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 9 | 0.009 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.019 | 0.014 | 0.007 | 0.001 | 0.000 |
| 11 | 0.016 | 0.010 | 0.005 | 0.000 | 0.000 |
| 12 | 0.009 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 0.009 | 0.005 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.011 | 0.006 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.012 | 0.007 | 0.003 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.016 | 0.010 | 0.004 | 0.000 | 0.000 |
| 17 | 0.011 | 0.006 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 18 | 0.014 | 0.008 | 0.003 | 0.000 | 0.000 |
| 19 | 0.037 | 0.036 | 0.027 | 0.008 | 0.003 |
| 20 | 0.009 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 21 | 0.012 | 0.007 | 0.003 | 0.000 | 0.000 |
| 22 | 0.014 | 0.008 | 0.003 | 0.000 | 0.000 |
| 23 | 0.012 | 0.007 | 0.003 | 0.000 | 0.000 |
| 24 | 0.122 | 0.221 | 0.359 | 0.579 | 0.659 |
| 25 | 0.006 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 26 | 0.010 | 0.005 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 27 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 28 | 0.007 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 29 | 0.046 | 0.050 | 0.044 | 0.018 | 0.009 |
| 30 | 0.015 | 0.009 | 0.004 | 0.000 | 0.000 |
| 31 | 0.034 | 0.033 | 0.024 | 0.007 | 0.003 |
| 32 | 0.025 | 0.021 | 0.012 | 0.002 | 0.001 |
| 33 | 0.007 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 34 | 0.100 | 0.163 | 0.234 | 0.287 | 0.274 |
| 35 | 0.063 | 0.082 | 0.088 | 0.057 | 0.037 |
| 36 | 0.026 | 0.022 | 0.014 | 0.003 | 0.001 |
| 37 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 38 | 0.012 | 0.007 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 39 | 0.022 | 0.017 | 0.009 | 0.001 | 0.000 |
| 40 | 0.016 | 0.011 | 0.005 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.027 | 0.022 | 0.014 | 0.003 | 0.001 |
| 42 | 0.005 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 43 | 0.023 | 0.018 | 0.010 | 0.002 | 0.000 |
| 44 | 0.008 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 45 | 0.008 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 46 | 0.026 | 0.022 | 0.013 | 0.003 | 0.001 |
| 47 | 0.015 | 0.010 | 0.004 | 0.000 | 0.000 |

Periodo 13

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0015 | 0.002 | 0.0025 | 0.003 | 0.0035 |
| 1 | 0.006 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.030 | 0.029 | 0.025 | 0.018 | 0.009 |
| 3 | 0.019 | 0.015 | 0.011 | 0.006 | 0.002 |
| 4 | 0.017 | 0.013 | 0.009 | 0.005 | 0.002 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0.018 | 0.013 | 0.009 | 0.005 | 0.002 |
| 6 | 0.042 | 0.050 | 0.052 | 0.045 | 0.030 |
| 7 | 0.027 | 0.025 | 0.021 | 0.014 | 0.007 |
| 8 | 0.008 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 9 | 0.061 | 0.087 | 0.106 | 0.114 | 0.099 |
| 10 | 0.016 | 0.012 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 11 | 0.024 | 0.021 | 0.016 | 0.010 | 0.004 |
| 12 | 0.008 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 13 | 0.012 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 14 | 0.029 | 0.029 | 0.024 | 0.017 | 0.009 |
| 15 | 0.009 | 0.005 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 16 | 0.015 | 0.010 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 17 | 0.015 | 0.010 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 18 | 0.012 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 19 | 0.012 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 20 | 0.014 | 0.009 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 21 | 0.019 | 0.014 | 0.010 | 0.005 | 0.002 |
| 22 | 0.012 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 23 | 0.013 | 0.008 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 24 | 0.022 | 0.018 | 0.013 | 0.008 | 0.003 |
| 25 | 0.033 | 0.034 | 0.030 | 0.023 | 0.012 |
| 26 | 0.024 | 0.021 | 0.016 | 0.010 | 0.004 |
| 27 | 0.028 | 0.027 | 0.023 | 0.016 | 0.008 |
| 28 | 0.006 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 29 | 0.038 | 0.043 | 0.042 | 0.034 | 0.021 |
| 30 | 0.018 | 0.014 | 0.009 | 0.005 | 0.002 |
| 31 | 0.021 | 0.018 | 0.013 | 0.008 | 0.003 |
| 32 | 0.017 | 0.012 | 0.008 | 0.004 | 0.001 |
| 33 | 0.013 | 0.008 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 34 | 0.008 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 35 | 0.015 | 0.010 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 36 | 0.012 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 37 | 0.006 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 38 | 0.014 | 0.009 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 39 | 0.025 | 0.023 | 0.018 | 0.012 | 0.005 |
| 40 | 0.034 | 0.036 | 0.033 | 0.026 | 0.014 |
| 41 | 0.041 | 0.047 | 0.047 | 0.040 | 0.026 |
| 42 | 0.018 | 0.013 | 0.009 | 0.005 | 0.002 |
| 43 | 0.010 | 0.006 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 44 | 0.026 | 0.024 | 0.019 | 0.013 | 0.006 |
| 45 | 0.109 | 0.213 | 0.350 | 0.516 | 0.717 |
| 46 | 0.016 | 0.011 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 47 | 0.011 | 0.007 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |

Periodo 14

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.00005 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0005 |
| 1 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.052 | 0.052 | 0.051 | 0.048 | 0.038 |
| 3 | 0.029 | 0.028 | 0.025 | 0.022 | 0.013 |
| 4 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 5 | 0.003 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 6 | 0.002 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 7 | 0.002 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 8 | 0.005 | 0.005 | 0.003 | 0.002 | 0.001 |
| 9 | 0.005 | 0.004 | 0.003 | 0.002 | 0.000 |
| 10 | 0.050 | 0.049 | 0.048 | 0.046 | 0.035 |
| 11 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 12 | 0.013 | 0.012 | 0.010 | 0.007 | 0.003 |
| 13 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.003 | 0.002 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 17 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 18 | 0.005 | 0.004 | 0.003 | 0.002 | 0.000 |
| 19 | 0.084 | 0.085 | 0.089 | 0.091 | 0.091 |
| 20 | 0.005 | 0.005 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 21 | 0.014 | 0.013 | 0.011 | 0.008 | 0.003 |
| 22 | 0.005 | 0.004 | 0.003 | 0.002 | 0.000 |
| 23 | 0.004 | 0.004 | 0.003 | 0.002 | 0.000 |
| 24 | 0.047 | 0.046 | 0.045 | 0.042 | 0.032 |
| 25 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 26 | 0.013 | 0.012 | 0.010 | 0.007 | 0.003 |
| 27 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 28 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 29 | 0.056 | 0.056 | 0.056 | 0.054 | 0.044 |
| 30 | 0.006 | 0.006 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 31 | 0.159 | 0.169 | 0.190 | 0.217 | 0.294 |
| 32 | 0.017 | 0.015 | 0.013 | 0.010 | 0.005 |
| 33 | 0.003 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 34 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 35 | 0.077 | 0.078 | 0.080 | 0.082 | 0.078 |
| 36 | 0.035 | 0.034 | 0.031 | 0.028 | 0.018 |
| 37 | 0.004 | 0.004 | 0.003 | 0.002 | 0.000 |
| 38 | 0.011 | 0.011 | 0.008 | 0.006 | 0.002 |
| 39 | 0.002 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 40 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.005 | 0.005 | 0.003 | 0.002 | 0.001 |
| 42 | 0.013 | 0.012 | 0.010 | 0.008 | 0.003 |
| 43 | 0.087 | 0.089 | 0.093 | 0.097 | 0.099 |
| 44 | 0.006 | 0.005 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 0.007 | 0.007 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 46 | 0.025 | 0.024 | 0.022 | 0.018 | 0.011 |
| 47 | 0.135 | 0.142 | 0.157 | 0.175 | 0.219 |

Periodo 15

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.001 | 0.0015 | 0.002 | 0.0022 | 0.0025 |
| 1 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.029 | 0.025 | 0.014 | 0.009 | 0.002 |
| 3 | 0.022 | 0.015 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 4 | 0.020 | 0.012 | 0.005 | 0.002 | 0.000 |
| 5 | 0.049 | 0.060 | 0.054 | 0.044 | 0.020 |
| 6 | 0.014 | 0.007 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 7 | 0.025 | 0.019 | 0.009 | 0.005 | 0.001 |
| 8 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 9 | 0.019 | 0.011 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 10 | 0.027 | 0.021 | 0.011 | 0.006 | 0.001 |
| 11 | 0.015 | 0.008 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 12 | 0.012 | 0.005 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 13 | 0.012 | 0.005 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 14 | 0.013 | 0.006 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 15 | 0.016 | 0.009 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 16 | 0.016 | 0.009 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 17 | 0.033 | 0.030 | 0.019 | 0.013 | 0.003 |
| 18 | 0.012 | 0.005 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 19 | 0.109 | 0.249 | 0.492 | 0.620 | 0.847 |
| 20 | 0.003 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 21 | 0.015 | 0.008 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 22 | 0.012 | 0.005 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 23 | 0.009 | 0.003 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 24 | 0.028 | 0.023 | 0.012 | 0.008 | 0.002 |
| 25 | 0.017 | 0.010 | 0.003 | 0.002 | 0.000 |
| 26 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 27 | 0.006 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 28 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 29 | 0.026 | 0.020 | 0.010 | 0.006 | 0.001 |
| 30 | 0.040 | 0.043 | 0.032 | 0.024 | 0.009 |
| 31 | 0.051 | 0.065 | 0.061 | 0.051 | 0.024 |
| 32 | 0.042 | 0.047 | 0.037 | 0.028 | 0.011 |
| 33 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 34 | 0.010 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 35 | 0.052 | 0.067 | 0.064 | 0.054 | 0.027 |
| 36 | 0.021 | 0.014 | 0.006 | 0.003 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 37 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 38 | 0.029 | 0.024 | 0.013 | 0.009 | 0.002 |
| 39 | 0.010 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 40 | 0.007 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.027 | 0.022 | 0.011 | 0.007 | 0.001 |
| 42 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 43 | 0.012 | 0.005 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 44 | 0.006 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 45 | 0.020 | 0.013 | 0.005 | 0.003 | 0.000 |
| 46 | 0.056 | 0.078 | 0.081 | 0.072 | 0.039 |
| 47 | 0.038 | 0.039 | 0.027 | 0.020 | 0.007 |

Periodo 16

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0015 | 0.002 | 0.0025 | 0.003 | 0.00 |
| 1 | 0.006 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 2 | 0.029 | 0.027 | 0.021 | 0.014 | 0.006 |
| 3 | 0.008 | 0.005 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 4 | 0.022 | 0.018 | 0.014 | 0.008 | 0.003 |
| 5 | 0.046 | 0.049 | 0.046 | 0.036 | 0.020 |
| 6 | 0.011 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 7 | 0.029 | 0.026 | 0.021 | 0.014 | 0.006 |
| 8 | 0.023 | 0.019 | 0.014 | 0.009 | 0.003 |
| 9 | 0.018 | 0.014 | 0.010 | 0.006 | 0.002 |
| 10 | 0.022 | 0.018 | 0.013 | 0.008 | 0.003 |
| 11 | 0.018 | 0.014 | 0.009 | 0.005 | 0.002 |
| 12 | 0.025 | 0.022 | 0.016 | 0.010 | 0.004 |
| 13 | 0.018 | 0.014 | 0.010 | 0.005 | 0.002 |
| 14 | 0.015 | 0.011 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 15 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 16 | 0.010 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 17 | 0.021 | 0.017 | 0.012 | 0.007 | 0.003 |
| 18 | 0.005 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 19 | 0.018 | 0.014 | 0.010 | 0.005 | 0.002 |
| 20 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 21 | 0.008 | 0.005 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 22 | 0.005 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 23 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 24 | 0.013 | 0.009 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 25 | 0.035 | 0.034 | 0.029 | 0.021 | 0.010 |
| 26 | 0.012 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 27 | 0.009 | 0.005 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 28 | 0.006 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 29 | 0.017 | 0.013 | 0.009 | 0.005 | 0.001 |
| 30 | 0.032 | 0.031 | 0.026 | 0.018 | 0.008 |
| 31 | 0.012 | 0.008 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 32 | 0.035 | 0.034 | 0.029 | 0.021 | 0.010 |
| 33 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 34 | 0.030 | 0.027 | 0.022 | 0.015 | 0.006 |
| 35 | 0.039 | 0.039 | 0.035 | 0.026 | 0.013 |
| 36 | 0.021 | 0.017 | 0.012 | 0.007 | 0.002 |
| 37 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 38 | 0.017 | 0.013 | 0.009 | 0.005 | 0.001 |
| 39 | 0.015 | 0.010 | 0.007 | 0.003 | 0.001 |
| 40 | 0.012 | 0.008 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 41 | 0.037 | 0.037 | 0.032 | 0.024 | 0.012 |
| 42 | 0.017 | 0.012 | 0.008 | 0.004 | 0.001 |
| 43 | 0.020 | 0.016 | 0.011 | 0.007 | 0.002 |
| 44 | 0.013 | 0.009 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 45 | 0.015 | 0.011 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 46 | 0.020 | 0.016 | 0.011 | 0.007 | 0.002 |
| 47 | 0.187 | 0.333 | 0.499 | 0.677 | 0.869 |

Periodo 17

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.001 | 0.0015 | 0.002 | 0.0022 | 0.0025 |
| 1 | 0.018 | 0.044 | 0.090 | 0.114 | 0.163 |
| 2 | 0.022 | 0.014 | 0.006 | 0.004 | 0.001 |
| 3 | 0.023 | 0.012 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 4 | 0.022 | 0.018 | 0.011 | 0.007 | 0.003 |
| 5 | 0.021 | 0.019 | 0.012 | 0.008 | 0.003 |
| 6 | 0.022 | 0.017 | 0.009 | 0.006 | 0.002 |
| 7 | 0.021 | 0.022 | 0.017 | 0.014 | 0.007 |
| 8 | 0.020 | 0.024 | 0.021 | 0.017 | 0.010 |
| 9 | 0.020 | 0.024 | 0.021 | 0.018 | 0.010 |
| 10 | 0.025 | 0.008 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 11 | 0.020 | 0.024 | 0.021 | 0.018 | 0.011 |
| 12 | 0.020 | 0.026 | 0.025 | 0.022 | 0.014 |
| 13 | 0.021 | 0.020 | 0.014 | 0.010 | 0.005 |
| 14 | 0.020 | 0.028 | 0.031 | 0.030 | 0.022 |
| 15 | 0.022 | 0.016 | 0.009 | 0.006 | 0.002 |
| 16 | 0.021 | 0.020 | 0.014 | 0.011 | 0.005 |
| 17 | 0.020 | 0.031 | 0.037 | 0.037 | 0.031 |
| 18 | 0.019 | 0.038 | 0.063 | 0.072 | 0.083 |
| 19 | 0.025 | 0.007 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 20 | 0.018 | 0.044 | 0.089 | 0.114 | 0.162 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 0.022 | 0.014 | 0.006 | 0.004 | 0.001 |
| 22 | 0.019 | 0.038 | 0.063 | 0.072 | 0.083 |
| 23 | 0.022 | 0.017 | 0.009 | 0.006 | 0.002 |
| 24 | 0.021 | 0.021 | 0.015 | 0.011 | 0.005 |
| 25 | 0.019 | 0.039 | 0.064 | 0.075 | 0.087 |
| 26 | 0.022 | 0.016 | 0.008 | 0.005 | 0.002 |
| 27 | 0.019 | 0.034 | 0.048 | 0.051 | 0.050 |
| 28 | 0.018 | 0.044 | 0.090 | 0.114 | 0.163 |
| 29 | 0.023 | 0.012 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 30 | 0.022 | 0.015 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 31 | 0.022 | 0.016 | 0.008 | 0.005 | 0.002 |
| 32 | 0.023 | 0.011 | 0.003 | 0.002 | 0.000 |
| 33 | 0.021 | 0.020 | 0.015 | 0.011 | 0.005 |
| 34 | 0.021 | 0.023 | 0.020 | 0.017 | 0.009 |
| 35 | 0.021 | 0.020 | 0.013 | 0.010 | 0.004 |
| 36 | 0.025 | 0.008 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 37 | 0.021 | 0.020 | 0.014 | 0.010 | 0.005 |
| 38 | 0.022 | 0.017 | 0.009 | 0.006 | 0.002 |
| 39 | 0.021 | 0.020 | 0.013 | 0.010 | 0.004 |
| 40 | 0.020 | 0.026 | 0.025 | 0.022 | 0.014 |
| 41 | 0.023 | 0.013 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 42 | 0.022 | 0.014 | 0.006 | 0.004 | 0.001 |
| 43 | 0.024 | 0.009 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 44 | 0.021 | 0.021 | 0.015 | 0.011 | 0.005 |
| 45 | 0.020 | 0.024 | 0.022 | 0.019 | 0.011 |
| 46 | 0.022 | 0.014 | 0.006 | 0.004 | 0.001 |
| 47 | 0.021 | 0.019 | 0.013 | 0.009 | 0.004 |

Periodo 18

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0005 | 0.0008 | 0.001 | 0.0012 | 0.0014 |
| 1 | 0.013 | 0.007 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 2 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 3 | 0.041 | 0.047 | 0.046 | 0.038 | 0.017 |
| 4 | 0.020 | 0.014 | 0.009 | 0.004 | 0.000 |
| 5 | 0.049 | 0.063 | 0.069 | 0.068 | 0.043 |
| 6 | 0.006 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 7 | 0.031 | 0.030 | 0.025 | 0.016 | 0.004 |
| 8 | 0.016 | 0.010 | 0.006 | 0.002 | 0.000 |
| 9 | 0.007 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.034 | 0.034 | 0.030 | 0.020 | 0.006 |
| 11 | 0.012 | 0.007 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 12 | 0.005 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 0.033 | 0.032 | 0.028 | 0.019 | 0.005 |
| 14 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.006 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 17 | 0.005 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 18 | 0.013 | 0.008 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 19 | 0.063 | 0.094 | 0.120 | 0.149 | 0.160 |
| 20 | 0.011 | 0.006 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 21 | 0.007 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 22 | 0.013 | 0.008 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 23 | 0.032 | 0.031 | 0.026 | 0.017 | 0.004 |
| 24 | 0.021 | 0.016 | 0.011 | 0.005 | 0.001 |
| 25 | 0.010 | 0.005 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 26 | 0.034 | 0.034 | 0.030 | 0.021 | 0.006 |
| 27 | 0.027 | 0.024 | 0.019 | 0.011 | 0.002 |
| 28 | 0.013 | 0.007 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 29 | 0.029 | 0.026 | 0.021 | 0.012 | 0.003 |
| 30 | 0.011 | 0.005 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 31 | 0.019 | 0.014 | 0.009 | 0.004 | 0.000 |
| 32 | 0.031 | 0.029 | 0.024 | 0.015 | 0.004 |
| 33 | 0.038 | 0.042 | 0.040 | 0.031 | 0.012 |
| 34 | 0.012 | 0.006 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 35 | 0.036 | 0.038 | 0.035 | 0.026 | 0.009 |
| 36 | 0.072 | 0.118 | 0.165 | 0.232 | 0.336 |
| 37 | 0.013 | 0.007 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 38 | 0.011 | 0.005 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 39 | 0.008 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 40 | 0.006 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.017 | 0.012 | 0.007 | 0.003 | 0.000 |
| 42 | 0.013 | 0.008 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 43 | 0.045 | 0.054 | 0.057 | 0.051 | 0.027 |
| 44 | 0.015 | 0.009 | 0.005 | 0.002 | 0.000 |
| 45 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 46 | 0.073 | 0.121 | 0.171 | 0.243 | 0.363 |
| 47 | 0.015 | 0.009 | 0.005 | 0.002 | 0.000 |

Periodo 19

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0012 | 0.0015 | 0.002 | 0.0022 | 0.0025 |
| 1 | 0.027 | 0.047 | 0.080 | 0.087 | 0.078 |
| 2 | 0.025 | 0.034 | 0.040 | 0.036 | 0.022 |
| 3 | 0.021 | 0.017 | 0.008 | 0.005 | 0.001 |
| 4 | 0.020 | 0.013 | 0.005 | 0.002 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0.019 | 0.012 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 6 | 0.022 | 0.021 | 0.013 | 0.009 | 0.003 |
| 7 | 0.021 | 0.017 | 0.008 | 0.005 | 0.001 |
| 8 | 0.023 | 0.026 | 0.022 | 0.017 | 0.008 |
| 9 | 0.018 | 0.010 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 10 | 0.019 | 0.013 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 11 | 0.019 | 0.013 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 12 | 0.024 | 0.033 | 0.037 | 0.032 | 0.020 |
| 13 | 0.021 | 0.019 | 0.010 | 0.006 | 0.002 |
| 14 | 0.022 | 0.020 | 0.011 | 0.007 | 0.002 |
| 15 | 0.024 | 0.028 | 0.025 | 0.020 | 0.010 |
| 16 | 0.021 | 0.019 | 0.010 | 0.006 | 0.002 |
| 17 | 0.018 | 0.010 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 18 | 0.023 | 0.028 | 0.025 | 0.019 | 0.009 |
| 19 | 0.022 | 0.021 | 0.013 | 0.009 | 0.003 |
| 20 | 0.019 | 0.011 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 21 | 0.018 | 0.009 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 22 | 0.023 | 0.028 | 0.025 | 0.019 | 0.009 |
| 23 | 0.018 | 0.009 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 24 | 0.026 | 0.041 | 0.060 | 0.061 | 0.048 |
| 25 | 0.021 | 0.018 | 0.009 | 0.005 | 0.001 |
| 26 | 0.018 | 0.010 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 27 | 0.026 | 0.042 | 0.063 | 0.064 | 0.051 |
| 28 | 0.027 | 0.047 | 0.080 | 0.087 | 0.079 |
| 29 | 0.024 | 0.032 | 0.035 | 0.030 | 0.018 |
| 30 | 0.018 | 0.009 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 31 | 0.021 | 0.018 | 0.009 | 0.005 | 0.002 |
| 32 | 0.023 | 0.025 | 0.018 | 0.013 | 0.005 |
| 33 | 0.016 | 0.006 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 34 | 0.017 | 0.007 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 35 | 0.023 | 0.025 | 0.018 | 0.013 | 0.006 |
| 36 | 0.021 | 0.019 | 0.010 | 0.006 | 0.002 |
| 37 | 0.018 | 0.010 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 38 | 0.022 | 0.022 | 0.015 | 0.010 | 0.004 |
| 39 | 0.023 | 0.028 | 0.024 | 0.019 | 0.009 |
| 40 | 0.017 | 0.008 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 41 | 0.019 | 0.013 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 42 | 0.018 | 0.010 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 43 | 0.021 | 0.016 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 44 | 0.021 | 0.020 | 0.011 | 0.007 | 0.002 |
| 45 | 0.019 | 0.012 | 0.003 | 0.002 | 0.000 |
| 46 | 0.023 | 0.026 | 0.021 | 0.016 | 0.007 |
| 47 | 0.030 | 0.076 | 0.247 | 0.361 | 0.589 |

Periodo 20

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0005 | 0.0008 | 0.001 | 0.0015 | 0.002 |
| 1 | 0.005 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.104 | 0.174 | 0.232 | 0.412 | 0.632 |
| 3 | 0.015 | 0.011 | 0.009 | 0.004 | 0.001 |
| 4 | 0.024 | 0.023 | 0.021 | 0.014 | 0.007 |
| 5 | 0.027 | 0.026 | 0.025 | 0.018 | 0.010 |
| 6 | 0.020 | 0.017 | 0.014 | 0.008 | 0.004 |
| 7 | 0.019 | 0.016 | 0.014 | 0.008 | 0.003 |
| 8 | 0.005 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 9 | 0.016 | 0.013 | 0.010 | 0.006 | 0.002 |
| 10 | 0.040 | 0.045 | 0.047 | 0.044 | 0.033 |
| 11 | 0.009 | 0.006 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 12 | 0.017 | 0.013 | 0.011 | 0.006 | 0.002 |
| 13 | 0.016 | 0.012 | 0.010 | 0.005 | 0.002 |
| 14 | 0.013 | 0.009 | 0.007 | 0.003 | 0.001 |
| 15 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.030 | 0.031 | 0.030 | 0.024 | 0.014 |
| 17 | 0.021 | 0.018 | 0.016 | 0.010 | 0.005 |
| 18 | 0.022 | 0.020 | 0.018 | 0.012 | 0.005 |
| 19 | 0.025 | 0.023 | 0.021 | 0.015 | 0.008 |
| 20 | 0.015 | 0.011 | 0.009 | 0.004 | 0.001 |
| 21 | 0.014 | 0.011 | 0.008 | 0.004 | 0.001 |
| 22 | 0.022 | 0.020 | 0.018 | 0.012 | 0.005 |
| 23 | 0.020 | 0.017 | 0.015 | 0.009 | 0.004 |
| 24 | 0.024 | 0.022 | 0.020 | 0.013 | 0.007 |
| 25 | 0.010 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 26 | 0.016 | 0.013 | 0.010 | 0.005 | 0.002 |
| 27 | 0.008 | 0.005 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 28 | 0.005 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 29 | 0.022 | 0.020 | 0.018 | 0.011 | 0.005 |
| 30 | 0.028 | 0.028 | 0.026 | 0.020 | 0.011 |
| 31 | 0.008 | 0.005 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 32 | 0.025 | 0.023 | 0.022 | 0.015 | 0.008 |
| 33 | 0.040 | 0.045 | 0.046 | 0.044 | 0.032 |
| 34 | 0.025 | 0.023 | 0.021 | 0.015 | 0.008 |
| 35 | 0.006 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 36 | 0.008 | 0.005 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 37 | 0.008 | 0.005 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 38 | 0.028 | 0.027 | 0.025 | 0.019 | 0.010 |
| 39 | 0.012 | 0.009 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 40 | 0.039 | 0.044 | 0.046 | 0.043 | 0.031 |
| 41 | 0.023 | 0.020 | 0.018 | 0.012 | 0.006 |
| 42 | 0.006 | 0.003 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 43 | 0.038 | 0.042 | 0.043 | 0.040 | 0.028 |
| 44 | 0.011 | 0.007 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 0.055 | 0.070 | 0.079 | 0.092 | 0.085 |
| 46 | 0.027 | 0.027 | 0.025 | 0.019 | 0.010 |
| 47 | 0.028 | 0.027 | 0.026 | 0.020 | 0.011 |

Periodo 21

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.001 | 0.0015 | 0.002 | 0.0025 | 0.003 |
| 1 | 0.021 | 0.023 | 0.019 | 0.010 | 0.001 |
| 2 | 0.021 | 0.017 | 0.010 | 0.004 | 0.000 |
| 3 | 0.021 | 0.020 | 0.014 | 0.007 | 0.000 |
| 4 | 0.021 | 0.031 | 0.035 | 0.028 | 0.006 |
| 5 | 0.021 | 0.021 | 0.016 | 0.008 | 0.001 |
| 6 | 0.021 | 0.029 | 0.029 | 0.021 | 0.004 |
| 7 | 0.021 | 0.018 | 0.012 | 0.005 | 0.000 |
| 8 | 0.021 | 0.027 | 0.026 | 0.018 | 0.003 |
| 9 | 0.021 | 0.019 | 0.013 | 0.005 | 0.000 |
| 10 | 0.022 | 0.009 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 11 | 0.021 | 0.036 | 0.046 | 0.043 | 0.014 |
| 12 | 0.021 | 0.022 | 0.017 | 0.009 | 0.001 |
| 13 | 0.021 | 0.020 | 0.014 | 0.006 | 0.000 |
| 14 | 0.021 | 0.021 | 0.016 | 0.008 | 0.001 |
| 15 | 0.020 | 0.063 | 0.147 | 0.279 | 0.518 |
| 16 | 0.022 | 0.010 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 17 | 0.021 | 0.025 | 0.022 | 0.013 | 0.002 |
| 18 | 0.021 | 0.015 | 0.008 | 0.002 | 0.000 |
| 19 | 0.022 | 0.007 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 20 | 0.022 | 0.008 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 21 | 0.021 | 0.014 | 0.007 | 0.002 | 0.000 |
| 22 | 0.021 | 0.015 | 0.008 | 0.002 | 0.000 |
| 23 | 0.021 | 0.017 | 0.010 | 0.004 | 0.000 |
| 24 | 0.021 | 0.015 | 0.008 | 0.003 | 0.000 |
| 25 | 0.021 | 0.042 | 0.062 | 0.070 | 0.037 |
| 26 | 0.022 | 0.009 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 27 | 0.021 | 0.047 | 0.081 | 0.108 | 0.084 |
| 28 | 0.021 | 0.023 | 0.019 | 0.010 | 0.001 |
| 29 | 0.021 | 0.027 | 0.026 | 0.017 | 0.003 |
| 30 | 0.021 | 0.024 | 0.020 | 0.011 | 0.001 |
| 31 | 0.022 | 0.010 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 32 | 0.022 | 0.012 | 0.005 | 0.001 | 0.000 |
| 33 | 0.022 | 0.009 | 0.003 | 0.000 | 0.000 |
| 34 | 0.021 | 0.029 | 0.030 | 0.022 | 0.004 |
| 35 | 0.021 | 0.019 | 0.012 | 0.005 | 0.000 |
| 36 | 0.021 | 0.014 | 0.007 | 0.002 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 37 | 0.020 | 0.059 | 0.125 | 0.215 | 0.314 |
| 38 | 0.021 | 0.015 | 0.008 | 0.003 | 0.000 |
| 39 | 0.021 | 0.018 | 0.011 | 0.004 | 0.000 |
| 40 | 0.021 | 0.028 | 0.027 | 0.018 | 0.003 |
| 41 | 0.021 | 0.018 | 0.012 | 0.005 | 0.000 |
| 42 | 0.022 | 0.013 | 0.006 | 0.001 | 0.000 |
| 43 | 0.022 | 0.009 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 44 | 0.021 | 0.018 | 0.011 | 0.005 | 0.000 |
| 45 | 0.021 | 0.025 | 0.022 | 0.013 | 0.001 |
| 46 | 0.022 | 0.006 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 47 | 0.021 | 0.022 | 0.017 | 0.009 | 0.001 |

Periodo 22

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0003 | 0.0005 | 0.001 | 0.0012 | 0.0015 |
| 1 | 0.021 | 0.018 | 0.008 | 0.004 | 0.000 |
| 2 | 0.021 | 0.019 | 0.010 | 0.005 | 0.000 |
| 3 | 0.021 | 0.019 | 0.011 | 0.006 | 0.001 |
| 4 | 0.024 | 0.032 | 0.049 | 0.051 | 0.033 |
| 5 | 0.024 | 0.032 | 0.050 | 0.052 | 0.035 |
| 6 | 0.022 | 0.023 | 0.017 | 0.012 | 0.002 |
| 7 | 0.021 | 0.019 | 0.009 | 0.005 | 0.000 |
| 8 | 0.019 | 0.014 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 9 | 0.021 | 0.019 | 0.010 | 0.005 | 0.000 |
| 10 | 0.022 | 0.022 | 0.014 | 0.009 | 0.001 |
| 11 | 0.023 | 0.025 | 0.024 | 0.018 | 0.005 |
| 12 | 0.018 | 0.011 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 13 | 0.021 | 0.020 | 0.012 | 0.007 | 0.001 |
| 14 | 0.022 | 0.023 | 0.018 | 0.012 | 0.002 |
| 15 | 0.017 | 0.009 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 16 | 0.023 | 0.028 | 0.031 | 0.027 | 0.010 |
| 17 | 0.026 | 0.040 | 0.099 | 0.136 | 0.220 |
| 18 | 0.019 | 0.014 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 19 | 0.019 | 0.014 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 20 | 0.025 | 0.034 | 0.056 | 0.062 | 0.048 |
| 21 | 0.020 | 0.017 | 0.007 | 0.003 | 0.000 |
| 22 | 0.019 | 0.014 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 23 | 0.020 | 0.015 | 0.005 | 0.002 | 0.000 |
| 24 | 0.018 | 0.012 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 25 | 0.021 | 0.019 | 0.009 | 0.005 | 0.000 |
| 26 | 0.021 | 0.018 | 0.008 | 0.004 | 0.000 |
| 27 | 0.022 | 0.022 | 0.015 | 0.009 | 0.001 |
| 28 | 0.021 | 0.018 | 0.008 | 0.004 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 29 | 0.024 | 0.030 | 0.039 | 0.037 | 0.017 |
| 30 | 0.023 | 0.025 | 0.023 | 0.018 | 0.004 |
| 31 | 0.017 | 0.010 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 32 | 0.021 | 0.018 | 0.008 | 0.004 | 0.000 |
| 33 | 0.019 | 0.014 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 34 | 0.025 | 0.037 | 0.079 | 0.099 | 0.118 |
| 35 | 0.026 | 0.042 | 0.110 | 0.157 | 0.290 |
| 36 | 0.020 | 0.017 | 0.008 | 0.004 | 0.000 |
| 37 | 0.019 | 0.013 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 38 | 0.023 | 0.024 | 0.021 | 0.016 | 0.004 |
| 39 | 0.022 | 0.022 | 0.015 | 0.010 | 0.001 |
| 40 | 0.019 | 0.014 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 41 | 0.022 | 0.024 | 0.019 | 0.014 | 0.003 |
| 42 | 0.017 | 0.009 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 43 | 0.023 | 0.026 | 0.025 | 0.020 | 0.006 |
| 44 | 0.026 | 0.039 | 0.092 | 0.123 | 0.179 |
| 45 | 0.024 | 0.029 | 0.035 | 0.031 | 0.013 |
| 46 | 0.019 | 0.014 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 47 | 0.022 | 0.023 | 0.017 | 0.012 | 0.002 |

**Modello media-entropia di Rényi**

Periodo 1

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0002 | 0.0005 | 0.001 | 0.0012 | 0.00014 |
| 1 | 0.004 | 0.003 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 2 | 0.029 | 0.024 | 0.013 | 0.008 | 0.003 |
| 3 | 0.021 | 0.017 | 0.009 | 0.006 | 0.002 |
| 4 | 0.010 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 5 | 0.005 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 6 | 0.011 | 0.009 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 7 | 0.008 | 0.006 | 0.003 | 0.002 | 0.001 |
| 8 | 0.011 | 0.008 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 9 | 0.019 | 0.015 | 0.008 | 0.005 | 0.002 |
| 10 | 0.013 | 0.010 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 11 | 0.018 | 0.014 | 0.008 | 0.005 | 0.002 |
| 12 | 0.011 | 0.008 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 13 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 14 | 0.009 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 15 | 0.008 | 0.006 | 0.003 | 0.002 | 0.001 |
| 16 | 0.015 | 0.012 | 0.006 | 0.004 | 0.002 |
| 17 | 0.011 | 0.008 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 18 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 0.026 | 0.021 | 0.012 | 0.007 | 0.003 |
| 20 | 0.015 | 0.011 | 0.006 | 0.004 | 0.001 |
| 21 | 0.014 | 0.011 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 22 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 23 | 0.011 | 0.008 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 24 | 0.013 | 0.010 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 25 | 0.011 | 0.009 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 26 | 0.016 | 0.012 | 0.007 | 0.004 | 0.002 |
| 27 | 0.007 | 0.005 | 0.003 | 0.002 | 0.001 |
| 28 | 0.004 | 0.003 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 29 | 0.004 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 30 | 0.026 | 0.021 | 0.011 | 0.007 | 0.003 |
| 31 | 0.428 | 0.552 | 0.766 | 0.853 | 0.942 |
| 32 | 0.023 | 0.019 | 0.010 | 0.006 | 0.003 |
| 33 | 0.004 | 0.003 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 34 | 0.009 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 35 | 0.005 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 36 | 0.039 | 0.032 | 0.018 | 0.012 | 0.005 |
| 37 | 0.011 | 0.008 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 38 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.001 |
| 39 | 0.022 | 0.018 | 0.009 | 0.006 | 0.002 |
| 40 | 0.006 | 0.005 | 0.002 | 0.001 | 0.001 |
| 41 | 0.005 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 42 | 0.011 | 0.008 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 43 | 0.025 | 0.020 | 0.011 | 0.007 | 0.003 |
| 44 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.001 |
| 45 | 0.013 | 0.010 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 46 | 0.017 | 0.014 | 0.007 | 0.004 | 0.002 |
| 47 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |

Periodo 2

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0001 | 0.00015 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0005 |
| 1 | 0.025 | 0.022 | 0.020 | 0.015 | 0.004 |
| 2 | 0.180 | 0.192 | 0.204 | 0.221 | 0.165 |
| 3 | 0.103 | 0.103 | 0.102 | 0.093 | 0.038 |
| 4 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 5 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 6 | 0.018 | 0.016 | 0.014 | 0.010 | 0.002 |
| 7 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 8 | 0.002 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 9 | 0.011 | 0.010 | 0.008 | 0.006 | 0.001 |
| 10 | 0.025 | 0.023 | 0.020 | 0.015 | 0.004 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 0.012 | 0.011 | 0.009 | 0.007 | 0.001 |
| 12 | 0.004 | 0.003 | 0.003 | 0.002 | 0.000 |
| 13 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 14 | 0.035 | 0.032 | 0.030 | 0.023 | 0.006 |
| 15 | 0.016 | 0.015 | 0.013 | 0.009 | 0.002 |
| 16 | 0.008 | 0.007 | 0.006 | 0.004 | 0.001 |
| 17 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 18 | 0.002 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 19 | 0.075 | 0.073 | 0.069 | 0.059 | 0.020 |
| 20 | 0.004 | 0.004 | 0.003 | 0.002 | 0.000 |
| 21 | 0.032 | 0.030 | 0.027 | 0.020 | 0.005 |
| 22 | 0.002 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 23 | 0.007 | 0.006 | 0.006 | 0.004 | 0.001 |
| 24 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 25 | 0.016 | 0.014 | 0.013 | 0.009 | 0.002 |
| 26 | 0.009 | 0.008 | 0.007 | 0.005 | 0.001 |
| 27 | 0.008 | 0.007 | 0.006 | 0.004 | 0.001 |
| 28 | 0.025 | 0.022 | 0.020 | 0.015 | 0.004 |
| 29 | 0.006 | 0.005 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 30 | 0.002 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 31 | 0.004 | 0.003 | 0.003 | 0.002 | 0.000 |
| 32 | 0.025 | 0.022 | 0.020 | 0.015 | 0.004 |
| 33 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 34 | 0.003 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 35 | 0.023 | 0.021 | 0.019 | 0.014 | 0.003 |
| 36 | 0.005 | 0.004 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 37 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 38 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 39 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 40 | 0.003 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 41 | 0.005 | 0.005 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 42 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 43 | 0.013 | 0.012 | 0.010 | 0.007 | 0.002 |
| 44 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 45 | 0.019 | 0.017 | 0.015 | 0.011 | 0.002 |
| 46 | 0.008 | 0.007 | 0.006 | 0.004 | 0.001 |
| 47 | 0.252 | 0.282 | 0.317 | 0.404 | 0.725 |

Periodo 3

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0005 | 0.001 | 0.0015 | 0.002 | 0.0025 |
| 1 | 0.061 | 0.063 | 0.055 | 0.037 | 0.011 |
| 2 | 0.013 | 0.009 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0.015 | 0.011 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 4 | 0.005 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 5 | 0.006 | 0.004 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 6 | 0.014 | 0.010 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 7 | 0.007 | 0.004 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 8 | 0.013 | 0.010 | 0.006 | 0.004 | 0.001 |
| 9 | 0.009 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 10 | 0.013 | 0.009 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 11 | 0.021 | 0.016 | 0.011 | 0.006 | 0.002 |
| 12 | 0.014 | 0.010 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 13 | 0.008 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 14 | 0.007 | 0.005 | 0.003 | 0.002 | 0.000 |
| 15 | 0.016 | 0.012 | 0.008 | 0.004 | 0.001 |
| 16 | 0.019 | 0.014 | 0.010 | 0.005 | 0.001 |
| 17 | 0.035 | 0.031 | 0.023 | 0.014 | 0.004 |
| 18 | 0.023 | 0.018 | 0.013 | 0.007 | 0.002 |
| 19 | 0.011 | 0.008 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 20 | 0.042 | 0.039 | 0.030 | 0.019 | 0.005 |
| 21 | 0.016 | 0.012 | 0.008 | 0.005 | 0.001 |
| 22 | 0.023 | 0.018 | 0.013 | 0.007 | 0.002 |
| 23 | 0.013 | 0.010 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 24 | 0.073 | 0.081 | 0.074 | 0.053 | 0.017 |
| 25 | 0.014 | 0.010 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 26 | 0.031 | 0.027 | 0.020 | 0.012 | 0.003 |
| 27 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 28 | 0.061 | 0.063 | 0.055 | 0.037 | 0.011 |
| 29 | 0.014 | 0.010 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 30 | 0.004 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 31 | 0.010 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 32 | 0.011 | 0.008 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 33 | 0.165 | 0.297 | 0.472 | 0.680 | 0.914 |
| 34 | 0.008 | 0.005 | 0.003 | 0.002 | 0.000 |
| 35 | 0.015 | 0.011 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 36 | 0.012 | 0.008 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 37 | 0.028 | 0.023 | 0.017 | 0.010 | 0.002 |
| 38 | 0.019 | 0.014 | 0.010 | 0.006 | 0.001 |
| 39 | 0.024 | 0.019 | 0.014 | 0.008 | 0.002 |
| 40 | 0.009 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 41 | 0.010 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 42 | 0.034 | 0.030 | 0.022 | 0.013 | 0.003 |
| 43 | 0.010 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 44 | 0.018 | 0.014 | 0.009 | 0.005 | 0.001 |
| 45 | 0.007 | 0.005 | 0.003 | 0.002 | 0.000 |
| 46 | 0.011 | 0.008 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 47 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |

Periodo 4

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.001 | 0.0015 | 0.002 | 0.0025 | 0.003 |
| 1 | 0.020 | 0.011 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 2 | 0.022 | 0.020 | 0.014 | 0.008 | 0.001 |
| 3 | 0.020 | 0.012 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 4 | 0.023 | 0.028 | 0.022 | 0.013 | 0.003 |
| 5 | 0.023 | 0.028 | 0.021 | 0.012 | 0.002 |
| 6 | 0.019 | 0.010 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 7 | 0.022 | 0.018 | 0.012 | 0.007 | 0.001 |
| 8 | 0.020 | 0.012 | 0.008 | 0.004 | 0.001 |
| 9 | 0.018 | 0.008 | 0.005 | 0.002 | 0.000 |
| 10 | 0.021 | 0.016 | 0.010 | 0.006 | 0.001 |
| 11 | 0.022 | 0.019 | 0.013 | 0.007 | 0.001 |
| 12 | 0.019 | 0.009 | 0.005 | 0.003 | 0.000 |
| 13 | 0.022 | 0.021 | 0.015 | 0.008 | 0.002 |
| 14 | 0.020 | 0.011 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 15 | 0.024 | 0.042 | 0.038 | 0.024 | 0.005 |
| 16 | 0.023 | 0.026 | 0.019 | 0.011 | 0.002 |
| 17 | 0.024 | 0.038 | 0.033 | 0.020 | 0.004 |
| 18 | 0.022 | 0.023 | 0.017 | 0.009 | 0.002 |
| 19 | 0.022 | 0.023 | 0.017 | 0.010 | 0.002 |
| 20 | 0.021 | 0.017 | 0.012 | 0.006 | 0.001 |
| 21 | 0.022 | 0.021 | 0.014 | 0.008 | 0.002 |
| 22 | 0.022 | 0.023 | 0.017 | 0.009 | 0.002 |
| 23 | 0.020 | 0.012 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 24 | 0.022 | 0.019 | 0.013 | 0.007 | 0.001 |
| 25 | 0.023 | 0.025 | 0.019 | 0.011 | 0.002 |
| 26 | 0.020 | 0.011 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 27 | 0.021 | 0.017 | 0.012 | 0.006 | 0.001 |
| 28 | 0.020 | 0.011 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 29 | 0.022 | 0.018 | 0.013 | 0.007 | 0.001 |
| 30 | 0.020 | 0.012 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 31 | 0.016 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 32 | 0.021 | 0.014 | 0.009 | 0.005 | 0.001 |
| 33 | 0.019 | 0.010 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 34 | 0.024 | 0.037 | 0.032 | 0.019 | 0.004 |
| 35 | 0.024 | 0.038 | 0.033 | 0.020 | 0.004 |
| 36 | 0.022 | 0.019 | 0.013 | 0.007 | 0.001 |
| 37 | 0.021 | 0.014 | 0.009 | 0.005 | 0.001 |
| 38 | 0.022 | 0.023 | 0.016 | 0.009 | 0.002 |
| 39 | 0.023 | 0.026 | 0.019 | 0.011 | 0.002 |
| 40 | 0.021 | 0.016 | 0.011 | 0.006 | 0.001 |
| 41 | 0.021 | 0.015 | 0.010 | 0.005 | 0.001 |
| 42 | 0.021 | 0.016 | 0.010 | 0.006 | 0.001 |
| 43 | 0.021 | 0.016 | 0.010 | 0.006 | 0.001 |
| 44 | 0.027 | 0.150 | 0.387 | 0.654 | 0.933 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 0.017 | 0.006 | 0.003 | 0.002 | 0.000 |
| 46 | 0.020 | 0.012 | 0.008 | 0.004 | 0.001 |
| 47 | 0.023 | 0.025 | 0.018 | 0.010 | 0.002 |

Periodo 5

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0005 | 0.001 | 0.0012 | 0.0015 | 0.0016 |
| 1 | 0.023 | 0.023 | 0.017 | 0.005 | 0.002 |
| 2 | 0.026 | 0.084 | 0.120 | 0.099 | 0.045 |
| 3 | 0.020 | 0.008 | 0.005 | 0.001 | 0.000 |
| 4 | 0.023 | 0.023 | 0.017 | 0.005 | 0.002 |
| 5 | 0.017 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 6 | 0.026 | 0.122 | 0.248 | 0.657 | 0.872 |
| 7 | 0.021 | 0.012 | 0.007 | 0.002 | 0.001 |
| 8 | 0.024 | 0.034 | 0.028 | 0.010 | 0.003 |
| 9 | 0.018 | 0.005 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 10 | 0.019 | 0.006 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 11 | 0.021 | 0.011 | 0.006 | 0.002 | 0.001 |
| 12 | 0.023 | 0.025 | 0.018 | 0.006 | 0.002 |
| 13 | 0.021 | 0.012 | 0.008 | 0.002 | 0.001 |
| 14 | 0.018 | 0.005 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 15 | 0.020 | 0.009 | 0.006 | 0.001 | 0.000 |
| 16 | 0.024 | 0.033 | 0.028 | 0.010 | 0.003 |
| 17 | 0.019 | 0.007 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 18 | 0.025 | 0.065 | 0.076 | 0.044 | 0.017 |
| 19 | 0.020 | 0.008 | 0.004 | 0.001 | 0.000 |
| 20 | 0.020 | 0.010 | 0.006 | 0.001 | 0.000 |
| 21 | 0.022 | 0.014 | 0.009 | 0.002 | 0.001 |
| 22 | 0.025 | 0.065 | 0.076 | 0.044 | 0.017 |
| 23 | 0.021 | 0.013 | 0.008 | 0.002 | 0.001 |
| 24 | 0.023 | 0.025 | 0.019 | 0.006 | 0.002 |
| 25 | 0.021 | 0.012 | 0.007 | 0.002 | 0.001 |
| 26 | 0.022 | 0.018 | 0.012 | 0.004 | 0.001 |
| 27 | 0.023 | 0.026 | 0.019 | 0.006 | 0.002 |
| 28 | 0.023 | 0.023 | 0.017 | 0.005 | 0.002 |
| 29 | 0.018 | 0.005 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 30 | 0.021 | 0.011 | 0.006 | 0.002 | 0.001 |
| 31 | 0.023 | 0.027 | 0.021 | 0.007 | 0.002 |
| 32 | 0.017 | 0.004 | 0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 33 | 0.025 | 0.049 | 0.049 | 0.022 | 0.008 |
| 34 | 0.017 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 35 | 0.015 | 0.002 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 36 | 0.021 | 0.013 | 0.008 | 0.002 | 0.001 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 37 | 0.020 | 0.009 | 0.005 | 0.001 | 0.000 |
| 38 | 0.021 | 0.010 | 0.006 | 0.002 | 0.000 |
| 39 | 0.021 | 0.013 | 0.008 | 0.002 | 0.001 |
| 40 | 0.022 | 0.014 | 0.009 | 0.003 | 0.001 |
| 41 | 0.019 | 0.006 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 42 | 0.024 | 0.031 | 0.025 | 0.009 | 0.003 |
| 43 | 0.017 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 44 | 0.023 | 0.023 | 0.016 | 0.005 | 0.002 |
| 45 | 0.021 | 0.011 | 0.006 | 0.002 | 0.000 |
| 46 | 0.022 | 0.018 | 0.012 | 0.003 | 0.001 |
| 47 | 0.024 | 0.042 | 0.039 | 0.016 | 0.005 |

Periodo 6

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.001 | 0.0015 | 0.0016 | 0.0018 | 0.002 |
| 1 | 0.016 | 0.008 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 2 | 0.069 | 0.095 | 0.088 | 0.062 | 0.019 |
| 3 | 0.012 | 0.005 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 4 | 0.016 | 0.008 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 5 | 0.013 | 0.006 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 6 | 0.012 | 0.005 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 7 | 0.018 | 0.009 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 8 | 0.027 | 0.016 | 0.013 | 0.008 | 0.002 |
| 9 | 0.017 | 0.009 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 10 | 0.027 | 0.017 | 0.014 | 0.008 | 0.002 |
| 11 | 0.015 | 0.007 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 12 | 0.018 | 0.009 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 13 | 0.019 | 0.010 | 0.008 | 0.004 | 0.001 |
| 14 | 0.027 | 0.017 | 0.014 | 0.008 | 0.002 |
| 15 | 0.014 | 0.007 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 16 | 0.118 | 0.465 | 0.551 | 0.734 | 0.935 |
| 17 | 0.014 | 0.007 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 18 | 0.008 | 0.003 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 19 | 0.021 | 0.011 | 0.009 | 0.005 | 0.001 |
| 20 | 0.011 | 0.004 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 21 | 0.034 | 0.024 | 0.020 | 0.012 | 0.003 |
| 22 | 0.008 | 0.003 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 23 | 0.033 | 0.023 | 0.019 | 0.011 | 0.003 |
| 24 | 0.026 | 0.016 | 0.013 | 0.007 | 0.002 |
| 25 | 0.017 | 0.008 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 26 | 0.027 | 0.016 | 0.014 | 0.008 | 0.002 |
| 27 | 0.012 | 0.005 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 28 | 0.016 | 0.008 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 29 | 0.029 | 0.018 | 0.015 | 0.009 | 0.002 |
| 30 | 0.008 | 0.003 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 31 | 0.017 | 0.008 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 32 | 0.016 | 0.008 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 33 | 0.015 | 0.007 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 34 | 0.012 | 0.005 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 35 | 0.008 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 36 | 0.031 | 0.021 | 0.017 | 0.010 | 0.002 |
| 37 | 0.027 | 0.017 | 0.014 | 0.008 | 0.002 |
| 38 | 0.021 | 0.011 | 0.009 | 0.005 | 0.001 |
| 39 | 0.013 | 0.006 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 40 | 0.011 | 0.004 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 41 | 0.013 | 0.006 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 42 | 0.011 | 0.005 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 43 | 0.019 | 0.010 | 0.008 | 0.004 | 0.001 |
| 44 | 0.016 | 0.008 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 45 | 0.024 | 0.014 | 0.011 | 0.006 | 0.001 |
| 46 | 0.017 | 0.009 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 47 | 0.028 | 0.017 | 0.015 | 0.008 | 0.002 |

Periodo 7

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0005 | 0.0008 | 0.001 | 0.0012 | 0.0014 |
| 1 | 0.022 | 0.017 | 0.012 | 0.006 | 0.002 |
| 2 | 0.016 | 0.009 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 3 | 0.025 | 0.024 | 0.018 | 0.010 | 0.003 |
| 4 | 0.012 | 0.005 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 5 | 0.015 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 6 | 0.016 | 0.008 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 7 | 0.016 | 0.009 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 8 | 0.022 | 0.018 | 0.012 | 0.007 | 0.002 |
| 9 | 0.017 | 0.010 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 10 | 0.029 | 0.036 | 0.032 | 0.021 | 0.007 |
| 11 | 0.028 | 0.031 | 0.025 | 0.016 | 0.005 |
| 12 | 0.022 | 0.018 | 0.012 | 0.007 | 0.002 |
| 13 | 0.023 | 0.019 | 0.013 | 0.007 | 0.002 |
| 14 | 0.011 | 0.005 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 15 | 0.018 | 0.011 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 16 | 0.026 | 0.027 | 0.021 | 0.013 | 0.004 |
| 17 | 0.029 | 0.036 | 0.032 | 0.021 | 0.007 |
| 18 | 0.012 | 0.005 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 19 | 0.027 | 0.030 | 0.024 | 0.015 | 0.005 |
| 20 | 0.020 | 0.014 | 0.009 | 0.005 | 0.001 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 0.015 | 0.008 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 22 | 0.012 | 0.005 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 23 | 0.016 | 0.008 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 24 | 0.032 | 0.050 | 0.052 | 0.039 | 0.014 |
| 25 | 0.040 | 0.115 | 0.246 | 0.467 | 0.798 |
| 26 | 0.032 | 0.047 | 0.048 | 0.035 | 0.012 |
| 27 | 0.028 | 0.034 | 0.029 | 0.018 | 0.006 |
| 28 | 0.022 | 0.017 | 0.012 | 0.006 | 0.002 |
| 29 | 0.023 | 0.019 | 0.013 | 0.007 | 0.002 |
| 30 | 0.011 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 31 | 0.037 | 0.085 | 0.131 | 0.149 | 0.085 |
| 32 | 0.031 | 0.042 | 0.041 | 0.028 | 0.009 |
| 33 | 0.008 | 0.003 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 34 | 0.022 | 0.017 | 0.011 | 0.006 | 0.002 |
| 35 | 0.016 | 0.008 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 36 | 0.025 | 0.023 | 0.017 | 0.010 | 0.003 |
| 37 | 0.018 | 0.011 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 38 | 0.019 | 0.012 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 39 | 0.027 | 0.028 | 0.023 | 0.014 | 0.004 |
| 40 | 0.016 | 0.008 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 41 | 0.026 | 0.025 | 0.019 | 0.011 | 0.003 |
| 42 | 0.019 | 0.012 | 0.008 | 0.004 | 0.001 |
| 43 | 0.013 | 0.006 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 44 | 0.030 | 0.038 | 0.034 | 0.023 | 0.007 |
| 45 | 0.025 | 0.022 | 0.016 | 0.009 | 0.003 |
| 46 | 0.018 | 0.011 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 47 | 0.013 | 0.005 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |

Periodo 8

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.001 | 0.0015 | 0.002 | 0.0025 | 0.003 |
| 1 | 0.018 | 0.012 | 0.008 | 0.005 | 0.003 |
| 2 | 0.016 | 0.010 | 0.007 | 0.004 | 0.002 |
| 3 | 0.020 | 0.015 | 0.010 | 0.007 | 0.003 |
| 4 | 0.024 | 0.023 | 0.018 | 0.012 | 0.006 |
| 5 | 0.024 | 0.022 | 0.017 | 0.012 | 0.006 |
| 6 | 0.026 | 0.028 | 0.023 | 0.016 | 0.008 |
| 7 | 0.021 | 0.017 | 0.012 | 0.008 | 0.004 |
| 8 | 0.018 | 0.012 | 0.008 | 0.005 | 0.002 |
| 9 | 0.020 | 0.015 | 0.011 | 0.007 | 0.003 |
| 10 | 0.021 | 0.017 | 0.013 | 0.008 | 0.004 |
| 11 | 0.016 | 0.010 | 0.007 | 0.004 | 0.002 |
| 12 | 0.021 | 0.018 | 0.013 | 0.009 | 0.004 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 0.022 | 0.019 | 0.014 | 0.009 | 0.005 |
| 14 | 0.029 | 0.037 | 0.033 | 0.024 | 0.012 |
| 15 | 0.020 | 0.015 | 0.011 | 0.007 | 0.004 |
| 16 | 0.028 | 0.033 | 0.028 | 0.020 | 0.010 |
| 17 | 0.024 | 0.023 | 0.018 | 0.012 | 0.006 |
| 18 | 0.021 | 0.017 | 0.013 | 0.008 | 0.004 |
| 19 | 0.019 | 0.014 | 0.010 | 0.006 | 0.003 |
| 20 | 0.020 | 0.016 | 0.012 | 0.008 | 0.004 |
| 21 | 0.017 | 0.011 | 0.007 | 0.005 | 0.002 |
| 22 | 0.021 | 0.017 | 0.013 | 0.008 | 0.004 |
| 23 | 0.017 | 0.010 | 0.007 | 0.004 | 0.002 |
| 24 | 0.025 | 0.025 | 0.020 | 0.013 | 0.007 |
| 25 | 0.018 | 0.012 | 0.008 | 0.005 | 0.003 |
| 26 | 0.018 | 0.012 | 0.008 | 0.005 | 0.003 |
| 27 | 0.017 | 0.011 | 0.008 | 0.005 | 0.002 |
| 28 | 0.018 | 0.012 | 0.008 | 0.005 | 0.003 |
| 29 | 0.019 | 0.013 | 0.009 | 0.006 | 0.003 |
| 30 | 0.017 | 0.011 | 0.008 | 0.005 | 0.002 |
| 31 | 0.028 | 0.034 | 0.029 | 0.020 | 0.011 |
| 32 | 0.017 | 0.011 | 0.008 | 0.005 | 0.002 |
| 33 | 0.027 | 0.030 | 0.025 | 0.017 | 0.009 |
| 34 | 0.021 | 0.017 | 0.013 | 0.008 | 0.004 |
| 35 | 0.018 | 0.012 | 0.008 | 0.005 | 0.002 |
| 36 | 0.015 | 0.009 | 0.006 | 0.004 | 0.002 |
| 37 | 0.020 | 0.015 | 0.011 | 0.007 | 0.003 |
| 38 | 0.016 | 0.010 | 0.007 | 0.004 | 0.002 |
| 39 | 0.026 | 0.027 | 0.022 | 0.015 | 0.008 |
| 40 | 0.024 | 0.022 | 0.017 | 0.012 | 0.006 |
| 41 | 0.019 | 0.014 | 0.010 | 0.007 | 0.003 |
| 42 | 0.025 | 0.027 | 0.022 | 0.015 | 0.008 |
| 43 | 0.021 | 0.018 | 0.013 | 0.009 | 0.004 |
| 44 | 0.021 | 0.017 | 0.012 | 0.008 | 0.004 |
| 45 | 0.045 | 0.190 | 0.382 | 0.586 | 0.795 |
| 46 | 0.026 | 0.027 | 0.022 | 0.015 | 0.008 |
| 47 | 0.020 | 0.015 | 0.011 | 0.007 | 0.003 |

Periodo 9

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0005 | 0.001 | 0.0015 | 0.002 | 0.0025 |
| 1 | 0.015 | 0.011 | 0.007 | 0.004 | 0.00 |
| 2 | 0.023 | 0.019 | 0.013 | 0.007 | 0.00 |
| 3 | 0.027 | 0.023 | 0.017 | 0.009 | 0.00 |
| 4 | 0.012 | 0.008 | 0.005 | 0.003 | 0.00 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0.048 | 0.051 | 0.042 | 0.026 | 0.00 |
| 6 | 0.027 | 0.022 | 0.016 | 0.009 | 0.00 |
| 7 | 0.027 | 0.023 | 0.016 | 0.009 | 0.00 |
| 8 | 0.010 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.00 |
| 9 | 0.013 | 0.009 | 0.006 | 0.003 | 0.00 |
| 10 | 0.020 | 0.015 | 0.010 | 0.005 | 0.00 |
| 11 | 0.011 | 0.007 | 0.005 | 0.002 | 0.00 |
| 12 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.00 |
| 13 | 0.011 | 0.007 | 0.005 | 0.002 | 0.00 |
| 14 | 0.023 | 0.018 | 0.012 | 0.007 | 0.00 |
| 15 | 0.011 | 0.007 | 0.005 | 0.002 | 0.00 |
| 16 | 0.013 | 0.009 | 0.006 | 0.003 | 0.00 |
| 17 | 0.019 | 0.014 | 0.009 | 0.005 | 0.00 |
| 18 | 0.029 | 0.025 | 0.018 | 0.010 | 0.00 |
| 19 | 0.016 | 0.012 | 0.008 | 0.004 | 0.00 |
| 20 | 0.019 | 0.015 | 0.010 | 0.005 | 0.00 |
| 21 | 0.013 | 0.009 | 0.006 | 0.003 | 0.00 |
| 22 | 0.029 | 0.025 | 0.018 | 0.010 | 0.00 |
| 23 | 0.017 | 0.013 | 0.008 | 0.004 | 0.00 |
| 24 | 0.014 | 0.010 | 0.007 | 0.003 | 0.00 |
| 25 | 0.007 | 0.005 | 0.003 | 0.001 | 0.00 |
| 26 | 0.020 | 0.016 | 0.011 | 0.006 | 0.00 |
| 27 | 0.009 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.00 |
| 28 | 0.015 | 0.011 | 0.007 | 0.004 | 0.00 |
| 29 | 0.016 | 0.011 | 0.008 | 0.004 | 0.00 |
| 30 | 0.018 | 0.013 | 0.009 | 0.005 | 0.00 |
| 31 | 0.009 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.00 |
| 32 | 0.023 | 0.019 | 0.013 | 0.007 | 0.00 |
| 33 | 0.028 | 0.024 | 0.017 | 0.010 | 0.00 |
| 34 | 0.015 | 0.011 | 0.007 | 0.004 | 0.00 |
| 35 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.00 |
| 36 | 0.013 | 0.010 | 0.006 | 0.003 | 0.00 |
| 37 | 0.017 | 0.013 | 0.008 | 0.004 | 0.00 |
| 38 | 0.019 | 0.014 | 0.010 | 0.005 | 0.00 |
| 39 | 0.010 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.00 |
| 40 | 0.026 | 0.022 | 0.016 | 0.009 | 0.00 |
| 41 | 0.011 | 0.007 | 0.005 | 0.002 | 0.00 |
| 42 | 0.081 | 0.115 | 0.121 | 0.095 | 0.02 |
| 43 | 0.025 | 0.021 | 0.015 | 0.008 | 0.00 |
| 44 | 0.017 | 0.012 | 0.008 | 0.004 | 0.00 |
| 45 | 0.129 | 0.269 | 0.452 | 0.674 | 0.94 |
| 46 | 0.017 | 0.013 | 0.008 | 0.004 | 0.00 |
| 47 | 0.015 | 0.011 | 0.007 | 0.004 | 0.00 |

Periodo 10

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0001 | 0.0005 | 0.0008 | 0.001 | 0.0012 |
| 1 | 0.011 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 2 | 0.015 | 0.009 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 3 | 0.019 | 0.013 | 0.008 | 0.004 | 0.001 |
| 4 | 0.022 | 0.015 | 0.009 | 0.005 | 0.001 |
| 5 | 0.021 | 0.014 | 0.008 | 0.005 | 0.001 |
| 6 | 0.012 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 7 | 0.087 | 0.093 | 0.074 | 0.050 | 0.015 |
| 8 | 0.006 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 9 | 0.011 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 10 | 0.014 | 0.009 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 11 | 0.034 | 0.025 | 0.016 | 0.009 | 0.002 |
| 12 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 13 | 0.018 | 0.012 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 14 | 0.006 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 15 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 16 | 0.008 | 0.005 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 17 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 18 | 0.021 | 0.014 | 0.009 | 0.005 | 0.001 |
| 19 | 0.014 | 0.009 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 20 | 0.013 | 0.008 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 21 | 0.014 | 0.009 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 22 | 0.021 | 0.014 | 0.009 | 0.005 | 0.001 |
| 23 | 0.018 | 0.012 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 24 | 0.032 | 0.023 | 0.015 | 0.009 | 0.002 |
| 25 | 0.014 | 0.009 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 26 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 27 | 0.012 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 28 | 0.011 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 29 | 0.046 | 0.038 | 0.026 | 0.016 | 0.004 |
| 30 | 0.015 | 0.009 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 31 | 0.005 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 32 | 0.010 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 33 | 0.012 | 0.008 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 34 | 0.008 | 0.005 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 35 | 0.015 | 0.009 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 36 | 0.024 | 0.016 | 0.010 | 0.006 | 0.001 |
| 37 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 38 | 0.207 | 0.414 | 0.615 | 0.769 | 0.939 |
| 39 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 40 | 0.009 | 0.006 | 0.003 | 0.002 | 0.000 |
| 41 | 0.015 | 0.009 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 42 | 0.008 | 0.004 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 43 | 0.014 | 0.008 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 44 | 0.025 | 0.017 | 0.011 | 0.006 | 0.001 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 0.080 | 0.082 | 0.063 | 0.042 | 0.012 |
| 46 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 47 | 0.012 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |

Periodo 11

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0005 | 0.001 | 0.002 | 0.003 | 0.004 |
| 1 | 0.020 | 0.016 | 0.011 | 0.01 | 0.004 |
| 2 | 0.021 | 0.019 | 0.014 | 0.01 | 0.005 |
| 3 | 0.021 | 0.019 | 0.014 | 0.01 | 0.006 |
| 4 | 0.020 | 0.016 | 0.011 | 0.01 | 0.004 |
| 5 | 0.023 | 0.025 | 0.022 | 0.02 | 0.010 |
| 6 | 0.022 | 0.021 | 0.017 | 0.01 | 0.007 |
| 7 | 0.021 | 0.018 | 0.013 | 0.01 | 0.005 |
| 8 | 0.024 | 0.030 | 0.030 | 0.02 | 0.015 |
| 9 | 0.023 | 0.025 | 0.022 | 0.02 | 0.010 |
| 10 | 0.019 | 0.013 | 0.008 | 0.01 | 0.003 |
| 11 | 0.022 | 0.022 | 0.018 | 0.01 | 0.008 |
| 12 | 0.020 | 0.017 | 0.012 | 0.01 | 0.004 |
| 13 | 0.020 | 0.018 | 0.013 | 0.01 | 0.005 |
| 14 | 0.021 | 0.018 | 0.013 | 0.01 | 0.005 |
| 15 | 0.026 | 0.047 | 0.078 | 0.08 | 0.066 |
| 16 | 0.022 | 0.022 | 0.019 | 0.01 | 0.008 |
| 17 | 0.019 | 0.014 | 0.009 | 0.01 | 0.003 |
| 18 | 0.019 | 0.013 | 0.008 | 0.01 | 0.003 |
| 19 | 0.022 | 0.022 | 0.018 | 0.01 | 0.007 |
| 20 | 0.020 | 0.016 | 0.010 | 0.01 | 0.004 |
| 21 | 0.021 | 0.019 | 0.014 | 0.01 | 0.005 |
| 22 | 0.019 | 0.013 | 0.008 | 0.01 | 0.003 |
| 23 | 0.021 | 0.020 | 0.015 | 0.01 | 0.006 |
| 24 | 0.021 | 0.020 | 0.015 | 0.01 | 0.006 |
| 25 | 0.024 | 0.029 | 0.029 | 0.02 | 0.014 |
| 26 | 0.020 | 0.017 | 0.012 | 0.01 | 0.005 |
| 27 | 0.023 | 0.026 | 0.024 | 0.02 | 0.011 |
| 28 | 0.020 | 0.016 | 0.011 | 0.01 | 0.004 |
| 29 | 0.024 | 0.030 | 0.031 | 0.02 | 0.016 |
| 30 | 0.019 | 0.014 | 0.009 | 0.01 | 0.003 |
| 31 | 0.022 | 0.024 | 0.021 | 0.02 | 0.009 |
| 32 | 0.020 | 0.015 | 0.010 | 0.01 | 0.004 |
| 33 | 0.019 | 0.014 | 0.009 | 0.01 | 0.003 |
| 34 | 0.021 | 0.019 | 0.015 | 0.01 | 0.006 |
| 35 | 0.020 | 0.017 | 0.012 | 0.01 | 0.005 |
| 36 | 0.021 | 0.020 | 0.015 | 0.01 | 0.006 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 37 | 0.025 | 0.037 | 0.046 | 0.04 | 0.028 |
| 38 | 0.022 | 0.024 | 0.021 | 0.02 | 0.009 |
| 39 | 0.020 | 0.017 | 0.012 | 0.01 | 0.004 |
| 40 | 0.021 | 0.019 | 0.014 | 0.01 | 0.006 |
| 41 | 0.021 | 0.019 | 0.014 | 0.01 | 0.005 |
| 42 | 0.021 | 0.020 | 0.016 | 0.01 | 0.007 |
| 43 | 0.020 | 0.017 | 0.012 | 0.01 | 0.005 |
| 44 | 0.019 | 0.015 | 0.009 | 0.01 | 0.004 |
| 45 | 0.023 | 0.028 | 0.028 | 0.02 | 0.014 |
| 46 | 0.028 | 0.066 | 0.206 | 0.40 | 0.624 |
| 47 | 0.020 | 0.017 | 0.012 | 0.01 | 0.005 |

Periodo 12

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0015 | 0.002 | 0.0025 | 0.003 | 0.0031 |
| 1 | 0.009 | 0.006 | 0.003 | 0.001 | 0.001 |
| 2 | 0.015 | 0.010 | 0.006 | 0.002 | 0.001 |
| 3 | 0.025 | 0.019 | 0.012 | 0.004 | 0.002 |
| 4 | 0.013 | 0.009 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 5 | 0.032 | 0.026 | 0.017 | 0.006 | 0.003 |
| 6 | 0.028 | 0.022 | 0.014 | 0.005 | 0.003 |
| 7 | 0.013 | 0.009 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 8 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 9 | 0.010 | 0.007 | 0.004 | 0.001 | 0.001 |
| 10 | 0.017 | 0.012 | 0.007 | 0.002 | 0.001 |
| 11 | 0.015 | 0.010 | 0.006 | 0.002 | 0.001 |
| 12 | 0.011 | 0.007 | 0.004 | 0.001 | 0.001 |
| 13 | 0.011 | 0.007 | 0.004 | 0.001 | 0.001 |
| 14 | 0.012 | 0.008 | 0.004 | 0.001 | 0.001 |
| 15 | 0.013 | 0.008 | 0.005 | 0.001 | 0.001 |
| 16 | 0.015 | 0.010 | 0.006 | 0.002 | 0.001 |
| 17 | 0.012 | 0.008 | 0.004 | 0.001 | 0.001 |
| 18 | 0.014 | 0.009 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 19 | 0.029 | 0.023 | 0.015 | 0.005 | 0.003 |
| 20 | 0.010 | 0.007 | 0.004 | 0.001 | 0.001 |
| 21 | 0.013 | 0.009 | 0.005 | 0.001 | 0.001 |
| 22 | 0.014 | 0.009 | 0.005 | 0.002 | 0.001 |
| 23 | 0.013 | 0.008 | 0.005 | 0.001 | 0.001 |
| 24 | 0.160 | 0.312 | 0.519 | 0.802 | 0.874 |
| 25 | 0.009 | 0.006 | 0.003 | 0.001 | 0.001 |
| 26 | 0.011 | 0.007 | 0.004 | 0.001 | 0.001 |
| 27 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 28 | 0.009 | 0.006 | 0.003 | 0.001 | 0.001 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 29 | 0.037 | 0.031 | 0.021 | 0.007 | 0.004 |
| 30 | 0.014 | 0.010 | 0.006 | 0.002 | 0.001 |
| 31 | 0.028 | 0.022 | 0.014 | 0.005 | 0.003 |
| 32 | 0.021 | 0.016 | 0.009 | 0.003 | 0.002 |
| 33 | 0.010 | 0.006 | 0.003 | 0.001 | 0.001 |
| 34 | 0.107 | 0.150 | 0.157 | 0.092 | 0.064 |
| 35 | 0.053 | 0.052 | 0.038 | 0.015 | 0.009 |
| 36 | 0.022 | 0.016 | 0.010 | 0.003 | 0.002 |
| 37 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 38 | 0.012 | 0.008 | 0.005 | 0.001 | 0.001 |
| 39 | 0.019 | 0.014 | 0.008 | 0.003 | 0.002 |
| 40 | 0.015 | 0.011 | 0.006 | 0.002 | 0.001 |
| 41 | 0.022 | 0.017 | 0.010 | 0.003 | 0.002 |
| 42 | 0.008 | 0.005 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 43 | 0.020 | 0.014 | 0.008 | 0.003 | 0.002 |
| 44 | 0.010 | 0.006 | 0.003 | 0.001 | 0.001 |
| 45 | 0.010 | 0.007 | 0.004 | 0.001 | 0.001 |
| 46 | 0.022 | 0.016 | 0.010 | 0.003 | 0.002 |
| 47 | 0.015 | 0.010 | 0.006 | 0.002 | 0.001 |

Periodo 13

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0015 | 0.002 | 0.0025 | 0.003 | 0.0035 |
| 1 | 0.009 | 0.006 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 2 | 0.026 | 0.022 | 0.017 | 0.012 | 0.006 |
| 3 | 0.018 | 0.015 | 0.011 | 0.007 | 0.004 |
| 4 | 0.017 | 0.013 | 0.010 | 0.007 | 0.003 |
| 5 | 0.017 | 0.013 | 0.010 | 0.007 | 0.003 |
| 6 | 0.036 | 0.035 | 0.029 | 0.020 | 0.011 |
| 7 | 0.024 | 0.020 | 0.016 | 0.011 | 0.005 |
| 8 | 0.011 | 0.008 | 0.006 | 0.004 | 0.002 |
| 9 | 0.055 | 0.061 | 0.056 | 0.043 | 0.025 |
| 10 | 0.016 | 0.013 | 0.009 | 0.006 | 0.003 |
| 11 | 0.022 | 0.018 | 0.014 | 0.009 | 0.005 |
| 12 | 0.010 | 0.007 | 0.005 | 0.003 | 0.002 |
| 13 | 0.013 | 0.010 | 0.007 | 0.004 | 0.002 |
| 14 | 0.026 | 0.022 | 0.017 | 0.012 | 0.006 |
| 15 | 0.011 | 0.008 | 0.006 | 0.004 | 0.002 |
| 16 | 0.015 | 0.012 | 0.009 | 0.006 | 0.003 |
| 17 | 0.015 | 0.011 | 0.008 | 0.005 | 0.003 |
| 18 | 0.013 | 0.010 | 0.007 | 0.004 | 0.002 |
| 19 | 0.013 | 0.010 | 0.007 | 0.005 | 0.002 |
| 20 | 0.015 | 0.011 | 0.008 | 0.005 | 0.003 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 0.018 | 0.014 | 0.010 | 0.007 | 0.003 |
| 22 | 0.013 | 0.010 | 0.007 | 0.004 | 0.002 |
| 23 | 0.014 | 0.011 | 0.008 | 0.005 | 0.002 |
| 24 | 0.020 | 0.016 | 0.012 | 0.008 | 0.004 |
| 25 | 0.028 | 0.025 | 0.019 | 0.013 | 0.007 |
| 26 | 0.021 | 0.018 | 0.013 | 0.009 | 0.005 |
| 27 | 0.025 | 0.021 | 0.016 | 0.011 | 0.006 |
| 28 | 0.009 | 0.006 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 29 | 0.033 | 0.030 | 0.024 | 0.017 | 0.009 |
| 30 | 0.017 | 0.014 | 0.010 | 0.007 | 0.003 |
| 31 | 0.020 | 0.016 | 0.012 | 0.008 | 0.004 |
| 32 | 0.017 | 0.013 | 0.010 | 0.006 | 0.003 |
| 33 | 0.014 | 0.010 | 0.007 | 0.005 | 0.002 |
| 34 | 0.011 | 0.008 | 0.005 | 0.004 | 0.002 |
| 35 | 0.015 | 0.012 | 0.008 | 0.006 | 0.003 |
| 36 | 0.013 | 0.010 | 0.007 | 0.005 | 0.002 |
| 37 | 0.009 | 0.006 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 38 | 0.014 | 0.011 | 0.008 | 0.005 | 0.003 |
| 39 | 0.023 | 0.019 | 0.014 | 0.010 | 0.005 |
| 40 | 0.029 | 0.026 | 0.021 | 0.014 | 0.008 |
| 41 | 0.035 | 0.033 | 0.027 | 0.019 | 0.010 |
| 42 | 0.017 | 0.013 | 0.010 | 0.007 | 0.003 |
| 43 | 0.012 | 0.009 | 0.006 | 0.004 | 0.002 |
| 44 | 0.023 | 0.019 | 0.015 | 0.010 | 0.005 |
| 45 | 0.142 | 0.286 | 0.450 | 0.625 | 0.805 |
| 46 | 0.016 | 0.012 | 0.009 | 0.006 | 0.003 |
| 47 | 0.013 | 0.009 | 0.007 | 0.004 | 0.002 |

Periodo 14

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.00005 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0005 |
| 1 | 0.003 | 0.003 | 0.002 | 0.002 | 0.001 |
| 2 | 0.034 | 0.032 | 0.029 | 0.026 | 0.018 |
| 3 | 0.019 | 0.018 | 0.016 | 0.014 | 0.009 |
| 4 | 0.004 | 0.003 | 0.003 | 0.002 | 0.001 |
| 5 | 0.005 | 0.005 | 0.004 | 0.003 | 0.002 |
| 6 | 0.004 | 0.004 | 0.003 | 0.003 | 0.002 |
| 7 | 0.004 | 0.004 | 0.003 | 0.003 | 0.002 |
| 8 | 0.006 | 0.006 | 0.005 | 0.004 | 0.003 |
| 9 | 0.006 | 0.006 | 0.005 | 0.004 | 0.002 |
| 10 | 0.032 | 0.031 | 0.028 | 0.025 | 0.017 |
| 11 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 |
| 12 | 0.010 | 0.010 | 0.008 | 0.007 | 0.005 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.001 | 0.001 |
| 14 | 0.003 | 0.003 | 0.002 | 0.002 | 0.001 |
| 15 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.001 |
| 16 | 0.005 | 0.004 | 0.004 | 0.003 | 0.002 |
| 17 | 0.005 | 0.004 | 0.004 | 0.003 | 0.002 |
| 18 | 0.006 | 0.006 | 0.005 | 0.004 | 0.003 |
| 19 | 0.064 | 0.063 | 0.059 | 0.055 | 0.043 |
| 20 | 0.006 | 0.006 | 0.005 | 0.004 | 0.003 |
| 21 | 0.011 | 0.010 | 0.009 | 0.008 | 0.005 |
| 22 | 0.006 | 0.006 | 0.005 | 0.004 | 0.003 |
| 23 | 0.006 | 0.005 | 0.004 | 0.004 | 0.002 |
| 24 | 0.030 | 0.029 | 0.026 | 0.023 | 0.016 |
| 25 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 26 | 0.010 | 0.010 | 0.008 | 0.007 | 0.005 |
| 27 | 0.002 | 0.002 | 0.002 | 0.001 | 0.001 |
| 28 | 0.003 | 0.003 | 0.002 | 0.002 | 0.001 |
| 29 | 0.037 | 0.036 | 0.032 | 0.029 | 0.021 |
| 30 | 0.007 | 0.006 | 0.005 | 0.005 | 0.003 |
| 31 | 0.264 | 0.283 | 0.326 | 0.375 | 0.499 |
| 32 | 0.012 | 0.011 | 0.010 | 0.008 | 0.006 |
| 33 | 0.005 | 0.005 | 0.004 | 0.003 | 0.002 |
| 34 | 0.002 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.001 |
| 35 | 0.056 | 0.055 | 0.051 | 0.047 | 0.036 |
| 36 | 0.022 | 0.021 | 0.019 | 0.016 | 0.011 |
| 37 | 0.006 | 0.005 | 0.004 | 0.004 | 0.002 |
| 38 | 0.010 | 0.009 | 0.008 | 0.007 | 0.004 |
| 39 | 0.004 | 0.004 | 0.003 | 0.003 | 0.002 |
| 40 | 0.004 | 0.003 | 0.003 | 0.002 | 0.001 |
| 41 | 0.006 | 0.006 | 0.005 | 0.004 | 0.003 |
| 42 | 0.011 | 0.010 | 0.009 | 0.007 | 0.005 |
| 43 | 0.068 | 0.067 | 0.064 | 0.060 | 0.047 |
| 44 | 0.006 | 0.006 | 0.005 | 0.004 | 0.003 |
| 45 | 0.007 | 0.007 | 0.006 | 0.005 | 0.003 |
| 46 | 0.017 | 0.016 | 0.014 | 0.012 | 0.008 |
| 47 | 0.166 | 0.172 | 0.183 | 0.191 | 0.194 |

Periodo 15

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.001 | 0.0015 | 0.002 | 0.0022 | 0.0025 |
| 1 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 2 | 0.025 | 0.019 | 0.011 | 0.008 | 0.003 |
| 3 | 0.019 | 0.013 | 0.008 | 0.005 | 0.002 |
| 4 | 0.018 | 0.012 | 0.007 | 0.005 | 0.002 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0.043 | 0.038 | 0.024 | 0.018 | 0.007 |
| 6 | 0.014 | 0.009 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 7 | 0.022 | 0.016 | 0.009 | 0.006 | 0.002 |
| 8 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 9 | 0.017 | 0.012 | 0.006 | 0.004 | 0.002 |
| 10 | 0.023 | 0.017 | 0.010 | 0.007 | 0.002 |
| 11 | 0.014 | 0.009 | 0.005 | 0.004 | 0.001 |
| 12 | 0.012 | 0.008 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 13 | 0.012 | 0.008 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 14 | 0.013 | 0.008 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 15 | 0.015 | 0.010 | 0.006 | 0.004 | 0.001 |
| 16 | 0.015 | 0.010 | 0.006 | 0.004 | 0.001 |
| 17 | 0.028 | 0.021 | 0.013 | 0.009 | 0.003 |
| 18 | 0.012 | 0.008 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 19 | 0.168 | 0.377 | 0.631 | 0.739 | 0.905 |
| 20 | 0.005 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 21 | 0.015 | 0.010 | 0.005 | 0.004 | 0.001 |
| 22 | 0.012 | 0.008 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 23 | 0.010 | 0.006 | 0.003 | 0.002 | 0.001 |
| 24 | 0.024 | 0.018 | 0.010 | 0.007 | 0.003 |
| 25 | 0.016 | 0.011 | 0.006 | 0.004 | 0.001 |
| 26 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 27 | 0.008 | 0.005 | 0.003 | 0.002 | 0.001 |
| 28 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 29 | 0.022 | 0.016 | 0.009 | 0.006 | 0.002 |
| 30 | 0.034 | 0.028 | 0.017 | 0.012 | 0.004 |
| 31 | 0.045 | 0.040 | 0.026 | 0.019 | 0.007 |
| 32 | 0.036 | 0.030 | 0.019 | 0.013 | 0.005 |
| 33 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 34 | 0.011 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 35 | 0.046 | 0.042 | 0.027 | 0.020 | 0.008 |
| 36 | 0.019 | 0.013 | 0.007 | 0.005 | 0.002 |
| 37 | 0.007 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 38 | 0.025 | 0.018 | 0.011 | 0.007 | 0.003 |
| 39 | 0.011 | 0.007 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 40 | 0.009 | 0.005 | 0.003 | 0.002 | 0.001 |
| 41 | 0.023 | 0.017 | 0.010 | 0.007 | 0.002 |
| 42 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 43 | 0.013 | 0.008 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 44 | 0.008 | 0.005 | 0.003 | 0.002 | 0.001 |
| 45 | 0.018 | 0.012 | 0.007 | 0.005 | 0.002 |
| 46 | 0.051 | 0.049 | 0.033 | 0.025 | 0.010 |
| 47 | 0.032 | 0.026 | 0.016 | 0.011 | 0.004 |

Periodo 16

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0015 | 0.002 | 0.0025 | 0.003 | 0.0035 |
| 1 | 0.010 | 0.007 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 2 | 0.024 | 0.019 | 0.014 | 0.009 | 0.004 |
| 3 | 0.011 | 0.008 | 0.006 | 0.004 | 0.001 |
| 4 | 0.020 | 0.016 | 0.011 | 0.007 | 0.003 |
| 5 | 0.034 | 0.029 | 0.023 | 0.015 | 0.006 |
| 6 | 0.013 | 0.010 | 0.007 | 0.004 | 0.002 |
| 7 | 0.024 | 0.019 | 0.014 | 0.009 | 0.004 |
| 8 | 0.020 | 0.016 | 0.012 | 0.007 | 0.003 |
| 9 | 0.017 | 0.014 | 0.010 | 0.006 | 0.002 |
| 10 | 0.019 | 0.015 | 0.011 | 0.007 | 0.003 |
| 11 | 0.017 | 0.013 | 0.010 | 0.006 | 0.002 |
| 12 | 0.021 | 0.017 | 0.013 | 0.008 | 0.003 |
| 13 | 0.017 | 0.013 | 0.010 | 0.006 | 0.002 |
| 14 | 0.015 | 0.012 | 0.009 | 0.005 | 0.002 |
| 15 | 0.010 | 0.007 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 16 | 0.012 | 0.009 | 0.007 | 0.004 | 0.002 |
| 17 | 0.019 | 0.015 | 0.011 | 0.007 | 0.003 |
| 18 | 0.009 | 0.006 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 19 | 0.017 | 0.014 | 0.010 | 0.006 | 0.002 |
| 20 | 0.008 | 0.006 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 21 | 0.011 | 0.008 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 22 | 0.009 | 0.006 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 23 | 0.010 | 0.008 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 24 | 0.014 | 0.011 | 0.008 | 0.005 | 0.002 |
| 25 | 0.027 | 0.023 | 0.017 | 0.011 | 0.004 |
| 26 | 0.013 | 0.010 | 0.007 | 0.004 | 0.002 |
| 27 | 0.011 | 0.009 | 0.006 | 0.004 | 0.001 |
| 28 | 0.010 | 0.007 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 29 | 0.017 | 0.013 | 0.009 | 0.006 | 0.002 |
| 30 | 0.026 | 0.021 | 0.016 | 0.010 | 0.004 |
| 31 | 0.013 | 0.010 | 0.007 | 0.004 | 0.002 |
| 32 | 0.027 | 0.023 | 0.017 | 0.011 | 0.004 |
| 33 | 0.006 | 0.004 | 0.003 | 0.002 | 0.001 |
| 34 | 0.024 | 0.020 | 0.015 | 0.009 | 0.004 |
| 35 | 0.030 | 0.025 | 0.019 | 0.012 | 0.005 |
| 36 | 0.019 | 0.015 | 0.011 | 0.007 | 0.003 |
| 37 | 0.010 | 0.008 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 38 | 0.016 | 0.013 | 0.009 | 0.006 | 0.002 |
| 39 | 0.015 | 0.012 | 0.008 | 0.005 | 0.002 |
| 40 | 0.013 | 0.010 | 0.007 | 0.004 | 0.002 |
| 41 | 0.028 | 0.024 | 0.018 | 0.012 | 0.005 |
| 42 | 0.016 | 0.013 | 0.009 | 0.006 | 0.002 |
| 43 | 0.018 | 0.014 | 0.011 | 0.007 | 0.003 |
| 44 | 0.014 | 0.011 | 0.008 | 0.005 | 0.002 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 0.016 | 0.012 | 0.009 | 0.005 | 0.002 |
| 46 | 0.018 | 0.014 | 0.010 | 0.006 | 0.003 |
| 47 | 0.231 | 0.390 | 0.555 | 0.723 | 0.892 |

Periodo 17

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.001 | 0.0015 | 0.002 | 0.0022 | 0.0025 |
| 1 | 0.018 | 0.048 | 0.107 | 0.141 | 0.207 |
| 2 | 0.022 | 0.014 | 0.008 | 0.005 | 0.003 |
| 3 | 0.023 | 0.013 | 0.006 | 0.004 | 0.002 |
| 4 | 0.021 | 0.017 | 0.010 | 0.008 | 0.004 |
| 5 | 0.021 | 0.018 | 0.011 | 0.008 | 0.004 |
| 6 | 0.022 | 0.016 | 0.009 | 0.007 | 0.004 |
| 7 | 0.021 | 0.021 | 0.015 | 0.011 | 0.006 |
| 8 | 0.020 | 0.023 | 0.017 | 0.014 | 0.008 |
| 9 | 0.020 | 0.023 | 0.017 | 0.014 | 0.008 |
| 10 | 0.025 | 0.009 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 11 | 0.020 | 0.023 | 0.017 | 0.014 | 0.008 |
| 12 | 0.020 | 0.024 | 0.020 | 0.016 | 0.010 |
| 13 | 0.021 | 0.019 | 0.012 | 0.009 | 0.005 |
| 14 | 0.020 | 0.027 | 0.025 | 0.021 | 0.013 |
| 15 | 0.022 | 0.016 | 0.009 | 0.007 | 0.004 |
| 16 | 0.021 | 0.019 | 0.013 | 0.010 | 0.005 |
| 17 | 0.020 | 0.030 | 0.030 | 0.026 | 0.017 |
| 18 | 0.019 | 0.039 | 0.057 | 0.059 | 0.051 |
| 19 | 0.025 | 0.009 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 20 | 0.018 | 0.048 | 0.106 | 0.139 | 0.201 |
| 21 | 0.022 | 0.014 | 0.008 | 0.005 | 0.003 |
| 22 | 0.019 | 0.039 | 0.057 | 0.059 | 0.051 |
| 23 | 0.022 | 0.017 | 0.010 | 0.007 | 0.004 |
| 24 | 0.021 | 0.020 | 0.013 | 0.010 | 0.006 |
| 25 | 0.019 | 0.039 | 0.060 | 0.063 | 0.055 |
| 26 | 0.022 | 0.016 | 0.009 | 0.006 | 0.003 |
| 27 | 0.019 | 0.034 | 0.040 | 0.037 | 0.027 |
| 28 | 0.018 | 0.048 | 0.107 | 0.141 | 0.207 |
| 29 | 0.023 | 0.013 | 0.006 | 0.005 | 0.002 |
| 30 | 0.022 | 0.015 | 0.008 | 0.006 | 0.003 |
| 31 | 0.022 | 0.015 | 0.009 | 0.006 | 0.003 |
| 32 | 0.023 | 0.012 | 0.006 | 0.004 | 0.002 |
| 33 | 0.021 | 0.020 | 0.013 | 0.010 | 0.005 |
| 34 | 0.020 | 0.022 | 0.017 | 0.013 | 0.007 |
| 35 | 0.021 | 0.019 | 0.012 | 0.009 | 0.005 |
| 36 | 0.025 | 0.009 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 37 | 0.021 | 0.019 | 0.012 | 0.009 | 0.005 |
| 38 | 0.022 | 0.017 | 0.010 | 0.007 | 0.004 |
| 39 | 0.021 | 0.019 | 0.012 | 0.009 | 0.005 |
| 40 | 0.020 | 0.024 | 0.020 | 0.016 | 0.010 |
| 41 | 0.023 | 0.014 | 0.007 | 0.005 | 0.003 |
| 42 | 0.022 | 0.014 | 0.008 | 0.005 | 0.003 |
| 43 | 0.024 | 0.010 | 0.005 | 0.003 | 0.002 |
| 44 | 0.021 | 0.020 | 0.013 | 0.010 | 0.006 |
| 45 | 0.020 | 0.023 | 0.018 | 0.014 | 0.008 |
| 46 | 0.022 | 0.014 | 0.008 | 0.006 | 0.003 |
| 47 | 0.021 | 0.019 | 0.012 | 0.009 | 0.005 |

Periodo 18

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0005 | 0.0008 | 0.001 | 0.0012 | 0.0014 |
| 1 | 0.013 | 0.008 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 2 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| 3 | 0.037 | 0.035 | 0.028 | 0.019 | 0.008 |
| 4 | 0.018 | 0.012 | 0.009 | 0.005 | 0.002 |
| 5 | 0.047 | 0.050 | 0.045 | 0.033 | 0.014 |
| 6 | 0.008 | 0.004 | 0.003 | 0.002 | 0.001 |
| 7 | 0.027 | 0.022 | 0.016 | 0.010 | 0.004 |
| 8 | 0.015 | 0.010 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 9 | 0.008 | 0.005 | 0.003 | 0.002 | 0.001 |
| 10 | 0.029 | 0.025 | 0.019 | 0.012 | 0.005 |
| 11 | 0.012 | 0.008 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 12 | 0.007 | 0.004 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 13 | 0.029 | 0.024 | 0.018 | 0.011 | 0.004 |
| 14 | 0.006 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 15 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 16 | 0.007 | 0.004 | 0.003 | 0.002 | 0.000 |
| 17 | 0.007 | 0.004 | 0.003 | 0.001 | 0.000 |
| 18 | 0.013 | 0.008 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 19 | 0.070 | 0.097 | 0.106 | 0.099 | 0.060 |
| 20 | 0.011 | 0.007 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 21 | 0.008 | 0.005 | 0.003 | 0.002 | 0.001 |
| 22 | 0.013 | 0.008 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 23 | 0.027 | 0.022 | 0.017 | 0.011 | 0.004 |
| 24 | 0.018 | 0.013 | 0.009 | 0.006 | 0.002 |
| 25 | 0.010 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 26 | 0.029 | 0.025 | 0.019 | 0.012 | 0.005 |
| 27 | 0.024 | 0.018 | 0.013 | 0.008 | 0.003 |
| 28 | 0.013 | 0.008 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 29 | 0.025 | 0.019 | 0.014 | 0.009 | 0.003 |
| 30 | 0.011 | 0.007 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 31 | 0.017 | 0.012 | 0.008 | 0.005 | 0.002 |
| 32 | 0.026 | 0.021 | 0.016 | 0.010 | 0.004 |
| 33 | 0.034 | 0.031 | 0.024 | 0.016 | 0.006 |
| 34 | 0.011 | 0.007 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 35 | 0.032 | 0.028 | 0.022 | 0.014 | 0.005 |
| 36 | 0.090 | 0.159 | 0.220 | 0.290 | 0.352 |
| 37 | 0.013 | 0.008 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 38 | 0.011 | 0.007 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 39 | 0.009 | 0.005 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 40 | 0.008 | 0.005 | 0.003 | 0.002 | 0.001 |
| 41 | 0.016 | 0.011 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 42 | 0.013 | 0.008 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 43 | 0.042 | 0.041 | 0.035 | 0.025 | 0.010 |
| 44 | 0.014 | 0.009 | 0.006 | 0.004 | 0.001 |
| 45 | 0.005 | 0.003 | 0.002 | 0.001 | 0.000 |
| 46 | 0.093 | 0.169 | 0.242 | 0.338 | 0.485 |
| 47 | 0.014 | 0.009 | 0.006 | 0.004 | 0.001 |

Periodo 19

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0012 | 0.0015 | 0.002 | 0.0022 | 0.0025 |
| 1 | 0.027 | 0.046 | 0.050 | 0.043 | 0.018 |
| 2 | 0.025 | 0.032 | 0.026 | 0.021 | 0.008 |
| 3 | 0.021 | 0.017 | 0.010 | 0.007 | 0.002 |
| 4 | 0.020 | 0.014 | 0.007 | 0.006 | 0.002 |
| 5 | 0.019 | 0.013 | 0.007 | 0.005 | 0.002 |
| 6 | 0.022 | 0.020 | 0.013 | 0.009 | 0.003 |
| 7 | 0.021 | 0.017 | 0.010 | 0.007 | 0.002 |
| 8 | 0.023 | 0.024 | 0.017 | 0.013 | 0.005 |
| 9 | 0.018 | 0.011 | 0.006 | 0.004 | 0.001 |
| 10 | 0.019 | 0.013 | 0.007 | 0.005 | 0.002 |
| 11 | 0.019 | 0.013 | 0.007 | 0.005 | 0.002 |
| 12 | 0.024 | 0.031 | 0.024 | 0.019 | 0.007 |
| 13 | 0.021 | 0.018 | 0.011 | 0.008 | 0.003 |
| 14 | 0.021 | 0.019 | 0.011 | 0.009 | 0.003 |
| 15 | 0.023 | 0.026 | 0.019 | 0.015 | 0.005 |
| 16 | 0.021 | 0.018 | 0.011 | 0.008 | 0.003 |
| 17 | 0.018 | 0.012 | 0.006 | 0.004 | 0.001 |
| 18 | 0.023 | 0.026 | 0.018 | 0.014 | 0.005 |
| 19 | 0.022 | 0.020 | 0.012 | 0.009 | 0.003 |
| 20 | 0.019 | 0.012 | 0.006 | 0.005 | 0.001 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 0.018 | 0.011 | 0.005 | 0.004 | 0.001 |
| 22 | 0.023 | 0.026 | 0.018 | 0.014 | 0.005 |
| 23 | 0.018 | 0.011 | 0.005 | 0.004 | 0.001 |
| 24 | 0.026 | 0.039 | 0.038 | 0.031 | 0.012 |
| 25 | 0.021 | 0.017 | 0.010 | 0.008 | 0.003 |
| 26 | 0.018 | 0.011 | 0.006 | 0.004 | 0.001 |
| 27 | 0.026 | 0.040 | 0.039 | 0.033 | 0.013 |
| 28 | 0.027 | 0.046 | 0.050 | 0.043 | 0.018 |
| 29 | 0.024 | 0.030 | 0.023 | 0.019 | 0.007 |
| 30 | 0.018 | 0.011 | 0.005 | 0.004 | 0.001 |
| 31 | 0.021 | 0.017 | 0.010 | 0.008 | 0.003 |
| 32 | 0.023 | 0.023 | 0.015 | 0.012 | 0.004 |
| 33 | 0.016 | 0.008 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 34 | 0.017 | 0.009 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 35 | 0.023 | 0.023 | 0.015 | 0.012 | 0.004 |
| 36 | 0.021 | 0.018 | 0.011 | 0.008 | 0.003 |
| 37 | 0.018 | 0.011 | 0.006 | 0.004 | 0.001 |
| 38 | 0.022 | 0.021 | 0.013 | 0.010 | 0.003 |
| 39 | 0.023 | 0.025 | 0.018 | 0.014 | 0.005 |
| 40 | 0.017 | 0.010 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 41 | 0.019 | 0.014 | 0.007 | 0.005 | 0.002 |
| 42 | 0.018 | 0.011 | 0.006 | 0.004 | 0.001 |
| 43 | 0.020 | 0.016 | 0.009 | 0.007 | 0.002 |
| 44 | 0.021 | 0.018 | 0.011 | 0.008 | 0.003 |
| 45 | 0.019 | 0.013 | 0.007 | 0.005 | 0.002 |
| 46 | 0.023 | 0.024 | 0.016 | 0.013 | 0.004 |
| 47 | 0.031 | 0.099 | 0.365 | 0.501 | 0.818 |

Periodo 20

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0005 | 0.0008 | 0.001 | 0.0015 | 0.002 |
| 1 | 0.007 | 0.006 | 0.005 | 0.003 | 0.002 |
| 2 | 0.147 | 0.244 | 0.317 | 0.513 | 0.719 |
| 3 | 0.015 | 0.012 | 0.011 | 0.007 | 0.004 |
| 4 | 0.022 | 0.019 | 0.017 | 0.012 | 0.007 |
| 5 | 0.024 | 0.021 | 0.019 | 0.014 | 0.008 |
| 6 | 0.018 | 0.016 | 0.014 | 0.010 | 0.005 |
| 7 | 0.018 | 0.015 | 0.014 | 0.009 | 0.005 |
| 8 | 0.008 | 0.006 | 0.005 | 0.003 | 0.002 |
| 9 | 0.016 | 0.013 | 0.012 | 0.008 | 0.004 |
| 10 | 0.035 | 0.034 | 0.032 | 0.024 | 0.014 |
| 11 | 0.011 | 0.009 | 0.008 | 0.005 | 0.003 |
| 12 | 0.016 | 0.014 | 0.012 | 0.008 | 0.005 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 0.015 | 0.013 | 0.011 | 0.008 | 0.004 |
| 14 | 0.013 | 0.011 | 0.009 | 0.006 | 0.003 |
| 15 | 0.005 | 0.004 | 0.003 | 0.002 | 0.001 |
| 16 | 0.027 | 0.024 | 0.022 | 0.016 | 0.009 |
| 17 | 0.019 | 0.017 | 0.015 | 0.010 | 0.006 |
| 18 | 0.020 | 0.018 | 0.016 | 0.011 | 0.006 |
| 19 | 0.022 | 0.020 | 0.018 | 0.012 | 0.007 |
| 20 | 0.015 | 0.012 | 0.011 | 0.007 | 0.004 |
| 21 | 0.015 | 0.012 | 0.011 | 0.007 | 0.004 |
| 22 | 0.020 | 0.018 | 0.016 | 0.011 | 0.006 |
| 23 | 0.018 | 0.016 | 0.014 | 0.010 | 0.005 |
| 24 | 0.021 | 0.019 | 0.017 | 0.012 | 0.007 |
| 25 | 0.011 | 0.009 | 0.008 | 0.005 | 0.003 |
| 26 | 0.016 | 0.013 | 0.012 | 0.008 | 0.004 |
| 27 | 0.010 | 0.008 | 0.007 | 0.005 | 0.002 |
| 28 | 0.007 | 0.006 | 0.005 | 0.003 | 0.002 |
| 29 | 0.020 | 0.018 | 0.016 | 0.011 | 0.006 |
| 30 | 0.025 | 0.022 | 0.020 | 0.015 | 0.008 |
| 31 | 0.010 | 0.008 | 0.007 | 0.005 | 0.002 |
| 32 | 0.022 | 0.020 | 0.018 | 0.013 | 0.007 |
| 33 | 0.035 | 0.033 | 0.031 | 0.024 | 0.014 |
| 34 | 0.022 | 0.020 | 0.018 | 0.012 | 0.007 |
| 35 | 0.009 | 0.007 | 0.006 | 0.004 | 0.002 |
| 36 | 0.010 | 0.008 | 0.007 | 0.005 | 0.002 |
| 37 | 0.010 | 0.008 | 0.007 | 0.005 | 0.002 |
| 38 | 0.024 | 0.022 | 0.020 | 0.014 | 0.008 |
| 39 | 0.013 | 0.011 | 0.009 | 0.006 | 0.003 |
| 40 | 0.034 | 0.033 | 0.031 | 0.023 | 0.014 |
| 41 | 0.021 | 0.018 | 0.016 | 0.011 | 0.006 |
| 42 | 0.008 | 0.006 | 0.006 | 0.004 | 0.002 |
| 43 | 0.033 | 0.032 | 0.030 | 0.022 | 0.013 |
| 44 | 0.012 | 0.010 | 0.008 | 0.006 | 0.003 |
| 45 | 0.050 | 0.053 | 0.052 | 0.043 | 0.028 |
| 46 | 0.024 | 0.022 | 0.020 | 0.014 | 0.008 |
| 47 | 0.025 | 0.022 | 0.020 | 0.014 | 0.008 |

Periodo 21

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.001 | 0.0015 | 0.002 | 0.0025 | 0.003 |
| 1 | 0.021 | 0.022 | 0.016 | 0.009 | 0.002 |
| 2 | 0.021 | 0.016 | 0.011 | 0.006 | 0.001 |
| 3 | 0.021 | 0.019 | 0.013 | 0.007 | 0.002 |
| 4 | 0.021 | 0.029 | 0.026 | 0.016 | 0.004 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0.021 | 0.020 | 0.014 | 0.008 | 0.002 |
| 6 | 0.021 | 0.027 | 0.022 | 0.013 | 0.003 |
| 7 | 0.021 | 0.018 | 0.012 | 0.006 | 0.001 |
| 8 | 0.021 | 0.025 | 0.020 | 0.012 | 0.003 |
| 9 | 0.021 | 0.018 | 0.012 | 0.007 | 0.002 |
| 10 | 0.022 | 0.011 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 11 | 0.021 | 0.034 | 0.034 | 0.023 | 0.006 |
| 12 | 0.021 | 0.021 | 0.015 | 0.008 | 0.002 |
| 13 | 0.021 | 0.019 | 0.013 | 0.007 | 0.002 |
| 14 | 0.021 | 0.020 | 0.014 | 0.008 | 0.002 |
| 15 | 0.020 | 0.075 | 0.200 | 0.407 | 0.762 |
| 16 | 0.022 | 0.011 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 17 | 0.021 | 0.023 | 0.018 | 0.010 | 0.003 |
| 18 | 0.021 | 0.015 | 0.009 | 0.005 | 0.001 |
| 19 | 0.022 | 0.009 | 0.005 | 0.002 | 0.000 |
| 20 | 0.022 | 0.010 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 21 | 0.021 | 0.014 | 0.009 | 0.005 | 0.001 |
| 22 | 0.021 | 0.015 | 0.009 | 0.005 | 0.001 |
| 23 | 0.021 | 0.017 | 0.011 | 0.006 | 0.001 |
| 24 | 0.021 | 0.015 | 0.010 | 0.005 | 0.001 |
| 25 | 0.021 | 0.040 | 0.047 | 0.035 | 0.011 |
| 26 | 0.022 | 0.011 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 27 | 0.021 | 0.048 | 0.067 | 0.058 | 0.020 |
| 28 | 0.021 | 0.022 | 0.016 | 0.009 | 0.002 |
| 29 | 0.021 | 0.025 | 0.020 | 0.012 | 0.003 |
| 30 | 0.021 | 0.022 | 0.016 | 0.009 | 0.002 |
| 31 | 0.022 | 0.011 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 32 | 0.022 | 0.013 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 33 | 0.022 | 0.011 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 34 | 0.021 | 0.027 | 0.023 | 0.014 | 0.004 |
| 35 | 0.021 | 0.018 | 0.012 | 0.006 | 0.002 |
| 36 | 0.021 | 0.015 | 0.009 | 0.005 | 0.001 |
| 37 | 0.020 | 0.066 | 0.139 | 0.193 | 0.132 |
| 38 | 0.021 | 0.015 | 0.010 | 0.005 | 0.001 |
| 39 | 0.021 | 0.017 | 0.011 | 0.006 | 0.001 |
| 40 | 0.021 | 0.026 | 0.021 | 0.012 | 0.003 |
| 41 | 0.021 | 0.018 | 0.012 | 0.006 | 0.001 |
| 42 | 0.022 | 0.013 | 0.008 | 0.004 | 0.001 |
| 43 | 0.022 | 0.011 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 44 | 0.021 | 0.017 | 0.012 | 0.006 | 0.001 |
| 45 | 0.021 | 0.023 | 0.018 | 0.010 | 0.003 |
| 46 | 0.022 | 0.008 | 0.004 | 0.002 | 0.000 |
| 47 | 0.021 | 0.021 | 0.015 | 0.008 | 0.002 |

Periodo 22

| | Peso dei titoli nel portafoglio dato un diverso rendimento obiettivo | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Titolo | 0.0003 | 0.0005 | 0.001 | 0.0012 | 0.0015 |
| 1 | 0.021 | 0.018 | 0.009 | 0.006 | 0.002 |
| 2 | 0.021 | 0.019 | 0.010 | 0.006 | 0.002 |
| 3 | 0.021 | 0.019 | 0.010 | 0.007 | 0.002 |
| 4 | 0.024 | 0.032 | 0.039 | 0.032 | 0.014 |
| 5 | 0.024 | 0.032 | 0.039 | 0.033 | 0.015 |
| 6 | 0.022 | 0.022 | 0.014 | 0.010 | 0.003 |
| 7 | 0.021 | 0.018 | 0.009 | 0.006 | 0.002 |
| 8 | 0.019 | 0.014 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 9 | 0.021 | 0.019 | 0.010 | 0.006 | 0.002 |
| 10 | 0.022 | 0.021 | 0.012 | 0.008 | 0.003 |
| 11 | 0.023 | 0.024 | 0.018 | 0.013 | 0.005 |
| 12 | 0.018 | 0.012 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 13 | 0.021 | 0.020 | 0.011 | 0.007 | 0.002 |
| 14 | 0.022 | 0.022 | 0.014 | 0.010 | 0.003 |
| 15 | 0.017 | 0.011 | 0.003 | 0.002 | 0.001 |
| 16 | 0.023 | 0.027 | 0.024 | 0.018 | 0.007 |
| 17 | 0.026 | 0.043 | 0.118 | 0.158 | 0.187 |
| 18 | 0.019 | 0.015 | 0.006 | 0.004 | 0.001 |
| 19 | 0.019 | 0.014 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 20 | 0.025 | 0.034 | 0.046 | 0.041 | 0.019 |
| 21 | 0.020 | 0.017 | 0.008 | 0.005 | 0.002 |
| 22 | 0.019 | 0.015 | 0.006 | 0.004 | 0.001 |
| 23 | 0.020 | 0.015 | 0.007 | 0.004 | 0.001 |
| 24 | 0.018 | 0.012 | 0.004 | 0.003 | 0.001 |
| 25 | 0.021 | 0.018 | 0.009 | 0.006 | 0.002 |
| 26 | 0.020 | 0.018 | 0.009 | 0.006 | 0.002 |
| 27 | 0.022 | 0.021 | 0.013 | 0.009 | 0.003 |
| 28 | 0.021 | 0.018 | 0.009 | 0.006 | 0.002 |
| 29 | 0.024 | 0.029 | 0.029 | 0.023 | 0.009 |
| 30 | 0.023 | 0.024 | 0.018 | 0.013 | 0.005 |
| 31 | 0.017 | 0.011 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 32 | 0.021 | 0.018 | 0.009 | 0.006 | 0.002 |
| 33 | 0.019 | 0.015 | 0.006 | 0.004 | 0.001 |
| 34 | 0.026 | 0.039 | 0.076 | 0.081 | 0.054 |
| 35 | 0.027 | 0.045 | 0.150 | 0.235 | 0.499 |
| 36 | 0.020 | 0.017 | 0.008 | 0.005 | 0.002 |
| 37 | 0.019 | 0.013 | 0.005 | 0.003 | 0.001 |
| 38 | 0.022 | 0.024 | 0.017 | 0.012 | 0.004 |
| 39 | 0.022 | 0.021 | 0.013 | 0.009 | 0.003 |
| 40 | 0.019 | 0.015 | 0.006 | 0.004 | 0.001 |
| 41 | 0.022 | 0.023 | 0.015 | 0.011 | 0.004 |
| 42 | 0.017 | 0.010 | 0.003 | 0.002 | 0.001 |
| 43 | 0.023 | 0.025 | 0.019 | 0.014 | 0.005 |
| 44 | 0.026 | 0.041 | 0.101 | 0.124 | 0.114 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 0.024 | 0.028 | 0.026 | 0.020 | 0.008 |
| 46 | 0.019 | 0.014 | 0.006 | 0.004 | 0.001 |
| 47 | 0.022 | 0.022 | 0.014 | 0.010 | 0.003 |

## APPENDICE C - SIGLE TITOLI

Titoli inseriti nell'indice Eurostoxx50 utilizzati nell'analisi (sigle)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ad na | 16 | dg fp | 31 | itx sq | 46 | abi bb |
| 2 | ads gy | 17 | dpw gy | 32 | or fp | 47 | air fp |
| 3 | ai fp | 18 | dte gy | 33 | ora fp | | |
| 4 | alv gy | 19 | ei fp | 34 | phia na | | |
| 5 | asml na | 20 | enel im | 35 | saf fp | | |
| 6 | bas gy | 21 | eni im | 36 | san fp | | |
| 7 | bayn gy | 22 | eoan gy | 37 | san sq | | |
| 8 | bbva sq | 23 | fp fp | 38 | sap gy | | |
| 9 | bmw gy | 24 | fre gy | 39 | sgo fp | | |
| 10 | bn fp | 25 | gle fp | 40 | sie gy | | |
| 11 | bnp fp | 26 | ibe sq | 41 | su fp | | |
| 12 | crh id | 27 | inga na | 42 | tef sq | | |
| 13 | cs fp | 28 | isp im | 43 | una na | | |
| 14 | dai gy | 29 | mc fp | 44 | viv fp | | |
| 15 | dbk gy | 30 | muv 2 gy | 45 | vow3 gy | | |

Corrispondenza sigle-società e relativo paese

| | | | |
|---|---|---|---|
| ad na | Koninklijke Ahold Delhaize NV (Netherlands) | itx sq | Industria de Diseno Textil SA (Spain) |
| ads gy | Adidas AG (Germany) | or fp | L'Oreal SA (France) |
| ai fp | Air Liquide SA (France) | ora fp | Orange SA (France) |

| | |
|---|---|
| alv gy | Allianz SE (Germany) |
| asml na | ASML Holding NV (Netherlands) |
| bas gy | BASF SE (Germany) |
| bayn gy | Bayer AG (Germany) |
| bbva sq | Banco Bilbao Vizcaya Argentaria SA (Spain) |
| bmw gy | Bayerische Motoren Werke AG (Germany) |
| bn fp | Danone SA(France) |
| bnp fp | BNP Paribas SA (France) |
| crh id | CRH PLC (Ireland) |
| cs fp | AXA SA (France) |
| dai gy | Daimler AG (Germany) |
| dbk gy | Deutsche Bank AG (Germany) |
| dg fp | Vinci SA (France) |
| dpw gy | Deutsche Post AG (Germany) |
| dte gy | Deutsche Telekom AG (Germany) |
| ei fp | Essilor International Cie Generale d'Optique SA (Germany) |
| enel im | Enel SpA (Italy) |
| eni im | Eni SpA (Italy) |
| eoan gy | E.ON SE(Italy) |
| fp fp | TOTAL SA (France) |
| fre gy | Fresenius SE & Co KGaA (Germany) |
| gle fp | Societe Generale SA (France) |
| ibe sq | Iberdrola SA (Spain) |
| inga na | ING Groep NV (Netherlands) |
| isp im | Intesa Sanpaolo SpA (Italy) |
| mc fp | LVMH Moet Hennessy Louis Vuitton SE (Netherlands) |
| muv 2 gy | Muenchener Rueckversicherungs-Gesellschaft AG in Muenchen (Germany) |
| phia na | Koninklijke Philips NV (Netherlands) |
| saf fp | Safran SA (France) |
| san fp | Sanofi (france) |
| san sq | Banco Santander SA (Spain) |
| sap gy | SAP SE (Germany) |
| sgo fp | Cie de Saint-Gobain (France) |
| sie gy | Siemens AG (Germany) |
| su fp | Schneider Electric SE (France) |
| tef sq | Tèlefonica (Spain) |
| una na | Unilever NV (Netherlands) |
| viv fp | Vivendi SA (France) |
| vow3 gy | Volkswagen AG (Germany) |
| abi bb | Anheuser-Busch InBev SA/NV (Belgium) |
| air fp | Airbus SE (France) |

# APPENDICE D – OWA OPERATOR E MINIMAX DISPARITY MODEL

Un OWA (Ordered Weighted Averaging) OPERATOR è un operatore che permette di definire un vettore di pesi (definiti "OWA operator weights") e ha le seguenti caratteristiche:

Un OWA operator di dimensione N è una funzione $F: R^N \rightarrow R$ con associato un vettore di pesi $\boldsymbol{w} = (w_1 \dots w_{N)}{}^I$ con $\sum_{i=1}^{N} wi = 1$ e $0 \leq w_i \leq 1$ con i=1, …, N.

Inoltre $F(a_{1,\dots,} a_N) = \sum_{i=1}^{N} wi\, b_i$

dove $b_i$ è l'i-esimo elemento $a_i$ più grande. Gli OWA operator sono quindi operatori che riordinano gli elementi in modo non lineare.

Secondo Parkan e Wang [], in virtù delle sue caratteristiche sopracitate, il vettore **w** può essere interpretato come una distribuzione di probabilità con $w_i$ la probabilità dell'i-esimo evento a in ordine di grandezza.

Il Minimax disparity model è un OWA operator che propone di. minimizzare la distanza massima tra i vari pesi dei titoli nel portafoglio.

$$Min\,\{Max|w_i - w_{i+1}|\} \quad con\ i = 1, \dots, N-1.$$

dato $\sum wi = 1\ e\ 0 \leq w_i \leq 1.$

Nel modello viene proposto inoltre l'utilizzo di una misura chiamata orness e definita come:

$$Orness(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(N-1)w_i$$

Tale misura offre un valore nell'intervallo [0,1] e permette di "spiegare" l'aggregazione fra i pesi del vettore. In particolare per comprendere meglio le caratteristiche di tale misura, Parkan e Wang propongono un modello linearizzato:

definendo un parametro $\delta = Max\ |w_i - w_{i+1}|\ con\ i \in (1, \dots, N-1)$,

si ha quindi:

$|w_i - w_{i+1}| \leq \delta\ con\ i \in (1, \dots, N-1)$

oppure in modo equivalente si ha:

$-\delta \leq w_i - w_{i+1} \leq \delta$

che equivale a quanto segue:

$w_i - w_{i+1} - \delta \leq 0\ con\ i \in (1, \dots, N-1)$,

$w_i - w_{i+1} + \delta \geq 0 \; con \; i \in (1, \dots, N-1)$.

In questo modello, in base al valore di orness fissato si ottengono vettori di pesi differenti, in particolare:

- se $orness(\boldsymbol{w}) = 1 \rightarrow \boldsymbol{w} = (1 \quad 0 \quad \dots \quad 0)^I$;
- se $orness(\boldsymbol{w}) = 0 \rightarrow \boldsymbol{w} = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1)^I$;
- se $orness(\boldsymbol{w}) = 0.5 \rightarrow \boldsymbol{w} = \left(\frac{1}{N} \quad \dots \quad \frac{1}{N}\right)^I$.

## APPENDICE E - DATI DEI GRAFICI

R barrato nei grafici indica il rendimento atteso E(R).

I dati utilizzati per i grafici sono contenuti nella seguente tabella e sono relativi agli esempi contenuti nel testo *Teorie di portafoglio e analisi degli investimenti. E. J. Elton, M. J. Gruber, S. J. Brown, W. N. Goetzmann. Apogeo (2007).*

Si rimarca che le lettere che indicano i titoli utilizzate nei grafici non sempre corrispondono alle lettere utilizzate nelle formule indicate nel presente lavoro; lo scopo dei grafici riportati è quello di illustrare e dare un'idea della forma delle frontiere nelle diverse casistiche senza la pretesa di essere fedele alla notazione utilizzata.

| | Rendimento atteso | Standard deviation |
|---|---|---|
| Colonel Motors (C) | 14% | 6% |
| Separated Edison (S) | 8% | 3% |

# APPENDICE F – CODICI MATLAB

Codici utilizzati:

1) MARKOWITZ CON VINCOLO PER LE VENDITE ALLO SCOPERTO

```
clc;
clear all;
close all;


format long g

step0 = 1/200000;

prezzi = xlsread('periodoexcelinsample');


[rig,col] = size(prezzi);

rend = log(prezzi(2:end,:)./prezzi(1:end-1,:)); % rendimenti logaritmici

[rig,col] = size(rend); % rig: numero di rendimenti; col: numero di titoli

rig0 = rig;

r = mean(rend); % vettore dei rendimenti probabilistici;

v = cov(rend); % matrice di covarianza probabilistica;

pg0 = min(r);

pg1 = max(r);


    pg = pg0; % inizializzazione del contatore per il grafico

    while pg <= pg1;


        H = v; % per la funzione obiettivo

        A = zeros(col,col); % per il sistema dei vincoli

        b = zeros(col,1); % per il sistema dei vincoli

        e = ones(col,1);

        Aeq = [r;e']; % per il sistema dei vincoli
```

```
        beq = [pg;1]; % per il sistema dei vincoli

        lb = zeros(col,1); % per il sistema dei vincoli


        x = quadprog(H,[],[],[],Aeq,beq,lb,[],[]); %calcolo del portafoglio

 rp = r*x; % rendimento atteso del portafoglio

vp = x'*v*x; % varianza del rendimento del portafogli

sdp = sqrt(vp); % deviazione standard del rendimento del portafoglio

        if pg == pg0

            xport_pro = x;

            rplot_pro = rp;

            vplot_pro = vp;

        else

            xport_pro = horzcat(xport_pro, x);

            rplot_pro = horzcat(rplot_pro, rp);

            vplot_pro = horzcat(vplot_pro, vp);

        end

        pg = pg + step0;

    end



    figure;

    plot(vplot_pro,rplot_pro)
    xlabel('Risk') ; ylabel('Return');
```

2) FRONTIERA CON ENTROPIA DI SHANNON

```
clc;
clear all;
close all;
```

```
 format long g

 step0 = 1/200000;

prezzi = xlsread('periodoexcelinsample');

[rig,col] = size(prezzi);

rend = log(prezzi(2:end,:)./prezzi(1:end-1,:)); % rendimenti logaritmici

[rig,col] = size(rend); % rig: numero di rendimenti; col: numero di titoli

rig0 = rig;


r = mean(rend); % vettore dei rendimenti probabilistici;
v = cov(rend); % matrice di covarianza probabilistica;

pg0 = min(r);
pg1 = max(r);

H = @(x)x'*v*x+x'*log(x);
x0 = ones(col,1)/col;

pg = pg0; % inizializzazione del contatore per il grafico
while pg <= pg1


    A = zeros(col,col); % per il sistema dei vincoli
    b = zeros(col,1); % per il sistema dei vincoli
    e = ones(col,1);
    Aeq = [r;e']; % per il sistema dei vincoli
    beq = [pg;1]; % per il sistema dei vincoli
    lb = zeros(col,1); % per il sistema dei vincoli

    x = fmincon(H,x0,[],[],Aeq,beq,lb,[],[]); %calcolo del portafoglio con
non negatività

    rp = r*x; % rendimento atteso del portafoglio
    vp = x'*v*x; % varianza del rendimento del portafogli
    sdp = sqrt(vp); % deviazione standard del rendimento del portafoglio
    ent=x'*v*x+x'*log(x);


    if pg == pg0
        xport_pro = x;
        rplot_pro = rp;
        risk_pro = ent ;
        vplot_pro=x'*v*x;

    else
        xport_pro = horzcat(xport_pro, x);
        rplot_pro = horzcat(rplot_pro, rp);
        risk_pro = horzcat(risk_pro, ent);
        vplot_pro= horzcat(vplot_pro, vp);
```

```
    end

    pg = pg + step0;

end

figure
plot(risk_pro,rplot_pro)
xlabel('Risk') ; ylabel('Return');
```

### 3) FRONTIERA CON ENTROPIA DI RÉNYI

```
clc;
clear all;
close all;

 format long g



step0 = 1/200000;


prezzi = xlsread('periodoexcelinsample');
[rig,col] = size(prezzi);
rend = log(prezzi(2:end,:)./prezzi(1:end-1,:)); % rendimenti logaritmici
[rig,col] = size(rend); % rig: numero di rendimenti; col: numero di titoli
rig0 = rig;


r = mean(rend); % vettore dei rendimenti probabilistici;
v = cov(rend); % matrice di covarianza probabilistica;
id=ones(col,1);%matrice unitaria per entropia di tsallis
a=0.5; %valori parametro a entropia
c=(1/(1-a));% per l'entropia di renyi

pg0 = min(r);
pg1 = max(r);

H = @(x)x'*v*x-c*log2(id'*x.^a);
x0 = ones(col,1)/col;



pg = pg0; % inizializzazione del contatore per il grafico
while pg <= pg1

    A = zeros(col,col); % per il sistema dei vincoli
    b = zeros(col,1); % per il sistema dei vincoli
    e = ones(col,1);
```

```
    Aeq = [r;e']; % per il sistema dei vincoli
    beq = [pg;1]; % per il sistema dei vincoli
    lb = zeros(col,1); % per il sistema dei vincoli

    x = fmincon(H,x0,[],[],Aeq,beq,lb,[],[]); %calcolo del portafoglio con
non negatività

    rp = r*x; % rendimento atteso del portafoglio
    vp = x'*v*x; % varianza del rendimento del portafogli
    sdp = sqrt(vp); % deviazione standard del rendimento del portafoglio
    ent=x'*v*x-c*log2(id'*x.^a);%entropia del portafoglio
    if pg == pg0
        xport_pro = x;
        rplot_pro = rp;
        risk_pro = ent ;
        vplot_pro=x'*v*x;
    else
        xport_pro = horzcat(xport_pro, x);
        rplot_pro = horzcat(rplot_pro, rp);
        risk_pro = horzcat(risk_pro, ent);
        vplot_pro= horzcat(vplot_pro, vp);
    end

    pg = pg + step0;

end



figure
plot(risk_pro,rplot_pro)
xlabel('Risk') ; ylabel('Return')
```

4) CODICE CALCOLO PERFORMANCE

```
clc;
clear all;
close all;


format long g


prezzi=xlsread('periodoexceloutofsample'); %input prezzi titoli futuro
virtuale
x= xlsread('pesiportafoglio');

rend = log(prezzi(2:end,:)./prezzi(1:end-1,:)); % rendimenti logaritmici

r = mean(rend); % vettore dei rendimenti probabilistici;
```

```
v = cov(rend); % matrice di covarianza probabilistica;

[rig,col] = size(rend); % rig: numero di rendimenti; col: numero di titoli


% calcolo performance portafoglio


rp = r*x; % rendimento atteso del portafoglio (giornaliero)

vp = x'*v*x; % varianza del rendimento del portafogli
```