



Università  
Ca' Foscari  
Venezia

Corso di Laurea Magistrale  
in Economia e Finanza  
(ordinamento ex D.M. 270/2004)

Tesi di Laurea

# Una variante del modello di Pogue per la revisione di portafoglio

Un'applicazione al mercato finanziario greco

**Relatore**

Ch. Prof. Marco Corazza

**Laureando**

Federico Fort  
Matricola 837474

**Anno Accademico**

2016 / 2017



# Indice

Introduzione.....	4
Capitolo I La revisione del portafoglio: .....	7
caratteristiche generali .....	7
1.1 La gestione del portafoglio e il processo di Asset Allocation .....	7
1.2 La revisione del portafoglio e la sua importanza .....	9
1.3 Alcuni vincoli nella revisione del portafoglio .....	11
1.3.1 I costi di transazione .....	11
1.3.2 I costi di raccolta e aggiornamento dati .....	12
1.3.3 La tassazione del <i>capital gain</i> .....	12
1.4 Le strategie di revisione del portafoglio .....	13
1.4.1 La strategia di “revisione attiva” .....	13
1.4.2 La strategia di “revisione passiva” .....	14
1.5 Il <i>rebalancing</i> del portafoglio .....	15
1.5.1 Il ribilanciamento a proporzione costante .....	15
1.5.2 Il ribilanciamento a proporzione costante con assicurazione di portafoglio .....	18
1.6 Le peculiarità di un buon modello di revisione .....	19
Capitolo II Alcuni modelli di revisione del portafoglio .....	21
2.1 Oltre il modello di Markowitz: costi di transazione, algoritmi euristici, modelli multi- periodali e nuove misure di rischio.....	21
2.2 Modelli “classici”.....	25
2.2.1 Il modello di Smith .....	26
2.2.1.1 Criticità del modello di Smith.....	30
2.2.2 Il modello di Pogue.....	31
2.2.2.1 I costi di transazione .....	32
2.2.2.2 La tassazione.....	34
2.2.2.3 Le vendite allo scoperto .....	37
2.2.2.4 I prestiti garantiti.....	38
2.2.2.5 I prestiti non garantiti.....	40
2.2.2.6 Il vincolo di <i>budget</i> .....	42
2.2.2.7 La formulazione del modello.....	43
2.3 Modelli “moderni” .....	46
2.3.1 Il modello di Guastaroba-Mansini-Speranza .....	47
2.3.1.1 Il modello CVaR( $\beta$ ) mono-periodale con i costi di transazione .....	49
2.3.1.2 Il modello di revisione .....	51

2.3.2	Il modello di Corazza-Fasano-Gusso .....	54
2.3.2.1	Il modello di selezione del portafoglio .....	56
2.3.2.2	La PSO applicata ad una <i>non-smooth reformulation</i> del problema di selezione del portafoglio.....	59
Capitolo III	Una variante del modello di Pogue .....	64
3.1	Le misure di rischio coerenti.....	64
3.2	Il <i>Conditional Value-at-Risk (CVaR)</i> .....	67
3.2.1	Il CVaR e il comitato di Basilea .....	71
3.2.2	La formulazione del CVaR nel problema di minimizzazione .....	73
3.3	La formulazione dei vincoli .....	75
3.3.1	Costi di transazione e vincolo di rendimento .....	75
3.3.2	Tassazione del <i>capital gain</i> .....	76
3.3.3	Divieto di <i>short selling</i> .....	77
3.3.4	Vincolo di bilancio .....	78
3.3.5	Vincolo di liquidità.....	79
3.3.6	Vincoli di <i>bound</i> .....	80
3.4	La formulazione del modello di revisione proposto .....	80
Capitolo IV	L'applicazione del modello di revisione.....	82
4.1	I dati utilizzati e la selezione del portafoglio iniziale .....	82
4.2	La riformulazione del modello con vincoli estesi.....	88
4.3	La definizione dei parametri del modello .....	91
4.4	L'applicazione del modello.....	95
4.4.1	Scenario 1 .....	96
4.4.2	Scenario 2 .....	100
4.4.3	Scenario 3 .....	102
4.4.4	Scenario 4 .....	105
4.4.5	Scenario A .....	107
4.4.6	Scenario B.....	110
Conclusioni	.....	113
Appendice A	.....	115
Appendice B	.....	123
Appendice C	.....	126
Bibliografia	.....	132



# Introduzione

Nel 1952 Markowitz presentò il proprio modello di selezione del portafoglio centrato sul criterio media-varianza, che ha posto le basi della finanza quantitativa. Nel corso degli anni sono state mosse alcune critiche nei confronti di questo modello in quanto basato su una misura di rischio ritenuta non idonea per la quantificazione del rischio di uno strumento finanziario e perché ritenuto troppo poco aderente alla realtà dei mercati finanziari. Sotto quest'ultimo aspetto, infatti, Pogue nel 1970 pubblica un'estensione del modello di selezione di Markowitz, introducendo molti vincoli per renderlo più realistico e utilizzabile anche nel processo di revisione. In questo modo Pogue ottenne un modello coerente con il mercato reale, ma piuttosto complicato da utilizzare. Nel proprio studio, infatti, Pogue pone il problema solamente a livello teorico, senza fornirne una soluzione in quanto molto complesso. Si è deciso, quindi, di creare una variante del modello di Pogue, coerente con la realtà dei mercati finanziari e applicabile sul piano pratico. Al posto della varianza, viene utilizzata come misura di rischio il *Conditional Value-at-Risk* (CVaR), così definito da Rockafellar e Uryasev (2000). Al tal proposito, Acerbi e Tasche (2002) definiscono misure di rischio solamente quelle che rispettano gli assiomi di coerenza (invarianza per traslazioni, positiva omogeneità, subadditività e monotonicità) specificati per la prima volta da Artzner *et al.* nel 1999. Anche per questo motivo, oltre che per il contesto di applicazione, nel modello proposto si ricorre al CVaR. Inoltre, numerosi fatti empirici hanno dimostrato che la distribuzione dei rendimenti non sia rappresentabile mediante una variabile casuale Normale, piuttosto mediante distribuzioni caratterizzate dalle cosiddette “code pesanti” che, rispetto alla distribuzione Normale, associano una maggior probabilità agli eventi estremi. Mentre il CVaR può essere in linea con il concetto di curtosi nei rendimenti, il Value-at-Risk (VaR), invece, che è una misura ancora molto utilizzata nella prassi, tende in parte a trascurare questo aspetto, oltre a non essere considerata una misura di rischio coerente perché non sempre rispetta l'assioma della subadditività. Con l'utilizzo del CVaR, quindi, si cerca di considerare simultaneamente le proprietà che contraddistinguono le misure coerenti di rischio e le evidenze empiriche relative alla

distribuzione dei rendimenti. Dal momento che il CVaR si focalizza sulle perdite, la nostra attenzione riguarda la coda sinistra della distribuzione dei rendimenti. In particolar modo, il modello di revisione proposto si concentra sulla minimizzazione di questa misura di rischio, con la prerogativa di essere utilizzato per la revisione di portafogli investiti in mercati poco liquidi. Per regolare il livello dei volumi scambiati nel processo di revisione, il modello contempla i vincoli relativi alla liquidità del portafoglio e al valore monetario scambiato per ciascun titolo, in aggiunta ai vincoli di rendimento e di bilancio.

La scelta del portafoglio revisionato, quindi, avviene sulla base del valore del CVaR, senza escludere le preferenze dell'investitore in merito al valore finale del portafoglio revisionato, al rendimento e ai costi di transazione e tassazione.

La risoluzione di questo problema di minimizzazione vincolato è affidata ad un algoritmo meta-euristico definito *Particle Swarm Optimization* (PSO), che per la ricerca della soluzione ottima si ispira al comportamento degli stormi di uccelli o dei banchi di pesci durante la ricerca di cibo. Dato che la PSO è utilizzata per la soluzione di problemi di ottimizzazione non vincolata, si ricorre al metodo delle penalità esatte per trasformare il problema vincolato iniziale in un problema non vincolato. Infine, vengono condotte delle analisi sul comportamento del modello in differenti contesti storici del mercato azionario greco, collocati tra il 2010 e il 2017.

Ricapitolando brevemente, l'elaborato è suddiviso in 4 capitoli. Nel primo capitolo si affronta il concetto di revisione in generale, contestualizzando il processo di revisione e analizzandone la sua importanza.

Nel secondo capitolo vengono illustrati alcuni importanti studi sui processi di revisione del portafoglio; una parte dell'analisi riguarda alcuni modelli precursori come il modello di Smith e il modello di Pogue, l'altra parte dell'analisi, invece, si concentra su un modello recente di revisione e su un modello di selezione del portafoglio basato sulla meta-euristica *Particle Swarm Optimization* (PSO).

Nel terzo capitolo viene proposta una variante del modello di revisione di Pogue, con alcune modifiche soprattutto per quanto riguarda la misura di rischio minimizzata e i vincoli inseriti nel modello.

Il quarto capitolo prevede un'applicazione al mercato greco del modello proposto, implementato con la PSO.

Per concludere, nell'appendice A è riportata la spiegazione del concetto di utilità attesa e di portafoglio ottimo, in appendice B sono riportate le tabelle relative al calcolo della liquidità del portafoglio per ogni scenario e nell'appendice C è possibile trovare il codice utilizzato in ambiente MATLAB sviluppato per l'applicazione del modello di revisione proposto.



# Capitolo I

## La revisione del portafoglio: caratteristiche generali

### 1.1 La gestione del portafoglio e il processo di Asset Allocation

L'attività di costruzione e gestione del portafoglio è costituita inizialmente da una fase di analisi dei bisogni del cliente individuandone il profilo di tolleranza al rischio, successivamente da una fase "core" destinata alla creazione di portafogli diversificati (nota come *asset allocation*) ed infine dal monitoraggio dei risultati del portafoglio in funzione dei vincoli di rischio e rendimento dell'investitore.

All'interno di questa complessa attività di pianificazione del portafoglio, *l'asset allocation* è il processo decisionale finalizzato all'allocazione del patrimonio dell'investitore fra diversi possibili investimenti, cioè in una pluralità di asset class, coerentemente con il proprio profilo di rischio. I vari investimenti sono suddivisi e organizzati per tipologie definite asset class, cioè insiemi di attività finanziarie o reali<sup>1</sup> con caratteristiche simili sia in termini di rischio-rendimento sul mercato, sia in termini di assoggettamento a una normativa di negoziazione comune. In sostanza, nel mercato finanziario si possono riconoscere tre macro asset class: titoli azionari (*equity*), titoli obbligazionari (*bond*) e titoli monetari (*cash*). Tuttavia all'interno di ogni macro-asset class si individua una pluralità di micro-asset class, ognuna caratterizzata da determinati fattori quali, ad esempio, l'orizzonte temporale di esercizio dell'investimento, la dimensione dell'emittente, il settore industriale di appartenenza, l'area geografica di negoziazione e di pertinenza degli emittenti, la valuta di emissione, gli indicatori di redditività e di rischiosità.

---

<sup>1</sup> Per "attività reale" si intende un bene fisico: ad esempio, un immobile (*real estate*) o merci (*commodities*).

Introdotta le diverse asset class presenti nel mercato, l'attività di *asset allocation* prosegue con la definizione dei pesi strategici di equilibrio relativi ad ogni asset class costituente il portafoglio, identificando un intervallo di variazione per ogni singola asset class ed infine selezionando i titoli rappresentativi di ogni asset class<sup>2</sup>. In definitiva, l'obiettivo dell'*asset allocation* è di ottenere una gestione del portafoglio che faccia combaciare, in modo ottimale, il rendimento e il rischio degli asset al profilo di rischio e alle aspettative dell'investitore. Entrando nello specifico, l'*asset allocation* può essere suddivisa in tre categorie<sup>3</sup>: l'*asset allocation strategica*, in cui gli investimenti sono organizzati nel portafoglio secondo un orizzonte di medio-lungo periodo; l'*asset allocation tattica*, che individua l'attività di revisione del portafoglio (composto nella fase di *asset allocation strategica*) ed è finalizzata a cogliere, su un orizzonte temporale di breve termine, opportunità di rendimento o, in particolar modo, a scongiurare eventuali perdite derivanti da dinamiche inattese dei mercati e delle asset class precedentemente selezionate<sup>4</sup> (questo tipo di *asset allocation* è utilizzata per adattare l'*allocation strategica* a temporanei andamenti del mercato e in pratica si concretizza nell'inserimento o nell'eliminazione temporanea di alcuni assets, nella variazione dei pesi degli assets presenti in portafoglio e nell'attività di market timing<sup>5</sup>); infine, l'*asset allocation dinamica*, che rappresenta un processo di allocazione degli investimenti maggiormente orientato a una lettura del mercato di breve periodo: si colloca tra l'*asset allocation strategica* e l'*asset allocation tattica* in quanto non cerca né di definire un'allocazione di lungo periodo degli assets né di prevedere movimenti di breve termine del mercato, ma calcola la migliore allocazione degli assets in funzione dei rapidi cambiamenti del mercato e della propensione al rischio dell'investitore.

---

<sup>2</sup> GANDOLFI G. (a cura di), *Scelta e gestione degli investimenti finanziari*, in *Banca e Mercati*, Roma, Bancaria Editrice, 2009.

<sup>3</sup> DEGREGORI & PARTNERS, *Asset allocation – La gestione del portafoglio*, Edizioni R.E.I., 2015.

<sup>4</sup> PACELLI V., *Consulenza finanziaria e ottimizzazione di portafoglio*, Roma, Bancaria Editrice, 2014.

<sup>5</sup> Per "market timing" si fa riferimento alle stime finalizzate a cogliere il momento opportuno per entrare o uscire da un determinato mercato; in termini maggiormente specifici, con "market timing" si indica il processo di aggiustamento del portafoglio attraverso l'aumento o la diminuzione dei pesi degli assets sulla base di previsioni di rendimenti positivi o negativi degli stessi.

## 1.2 La revisione del portafoglio e la sua importanza

Una volta costruito il portafoglio e definita la strategia di lungo periodo, occorre dotarsi di strumenti idonei alla gestione del portafoglio nel tempo: l'*asset allocation* disposta in fase di costruzione del portafoglio non sarà valida per sempre, dal momento che il trascorrere del tempo, l'avvicinamento agli obiettivi di investimento, l'emergere di nuovi obiettivi, la disponibilità di maggiore liquidità, il bisogno di liquidare parte del portafoglio per ricavare dei fondi destinati ad altri utilizzi, la modifica della propensione al rischio dell'investitore o la semplice fluttuazione dei prezzi comportano necessariamente una revisione della struttura del portafoglio, definendone una rinnovata allocazione coerente con il nuovo profilo finanziario. L'*asset allocation tattica* e soprattutto l'*asset allocation dinamica* agiscono "sottopesando" o "sovrappesando" le asset class rispetto ai pesi iniziali, preservando e, se possibile, migliorando il profilo rischio-rendimento del portafoglio in relazione all'evoluzione contingente del mercato. L'esigenza di procedere alla revisione del portafoglio, quindi, deriva dal fatto che le oscillazioni dei prezzi degli assets in portafoglio rendono necessario un aggiustamento dei pesi, generando una conseguente modifica del rapporto rischio/rendimento definito in sede di costruzione del portafoglio. In generale, per revisione del portafoglio si intende l'allineamento del portafoglio stesso alla propria composizione<sup>6</sup> ottimale (degli assets), sulla base della tolleranza al rischio dell'investitore. Il processo di ribilanciamento (o revisione) interviene quando il portafoglio si è "allontanato" dalla propria allocazione ottimale e si concretizza con l'adeguamento dei pesi degli assets, vendendo i titoli che risultano "sovrappesati" (a causa dei movimenti dei prezzi) e utilizzando i proventi, al netto dei costi e della tassazione, per l'acquisto di assets "sottopesati". La revisione del portafoglio, inoltre, può comportare la modifica del mix di titoli in esso contenuti: oltre a modificare le quote dei fondi investiti nei rispettivi titoli, possono essere aggiunti nuovi titoli nel portafoglio oppure alcuni possono essere rimossi dallo stesso. La revisione del portafoglio comporta, quindi, anche acquisti e vendite di

---

<sup>6</sup> La composizione di un portafoglio è determinata da due variabili: la prima corrisponde ai titoli inclusi nel portafoglio e selezionati da un vasto universo di assets, mentre la seconda è la percentuale (pesi) dei fondi totali investiti in ogni singolo titolo.

titoli non presenti nel portafoglio di partenza. L'obiettivo della revisione del portafoglio è simile a quello del processo di selezione del portafoglio (*portfolio selection*), cioè massimizzare il rendimento per un determinato livello di rischio o minimizzare il rischio per un dato livello di rendimento. L'obiettivo finale della revisione è garantire il massimo rendimento con il minimo rischio.

Sappiamo che il processo di selezione di portafoglio alla Markowitz<sup>7</sup>, finalizzato alla determinazione dei portafogli efficienti<sup>8</sup> che andranno a comporre la frontiera efficiente<sup>9</sup>, utilizza come parametri di riferimento i rendimenti attesi dei titoli considerati e le rispettive varianze e covarianze. Ovviamente, dal momento che non è possibile ricavare tali parametri dai rendimenti futuri dei titoli, che sarebbero quindi i dati “corretti” da utilizzare, occorre calcolare le stime di tali parametri utilizzando i rendimenti passati dei titoli selezionati. Tale approccio sarebbe corretto se si utilizzassero delle serie storiche generate da processi stazionari<sup>10</sup>, ma, come sappiamo da numerosi studi in merito<sup>11</sup>, solitamente i rendimenti dei titoli azionari non risultano stazionari. Molti test eseguiti sulle serie storiche dei rendimenti azionari, infatti, hanno indotto a rifiutare le ipotesi di stazionarietà sia in media sia in varianza, nonostante per brevi periodi sia possibile riscontrare una certa “stabilità” delle stime dei parametri di interesse. La mancanza di stazionarietà crea alcune difficoltà per l'applicazione del modello di Markowitz, perché le stime di valori attesi, varianze e covarianze risultano inattendibili e mutevoli, anche di molto, col passare del tempo: se al tempo  $t$  viene selezionato un portafoglio efficiente  $X_t$  (quindi giace sulla frontiera efficiente determinata nell'istante temporale  $t$ ), al tempo  $t+1$  tale portafoglio potrebbe non essere più efficiente (cioè potrebbe non giacere sulla nuova frontiera efficiente relativa all'istante temporale  $t+1$ ). Come già

---

<sup>7</sup> MARKOWITZ H. M., *Portfolio Selection*, Journal of Finance, 7(1), 1952, pp. 77-91.

<sup>8</sup> Per definizione, un portafoglio è efficiente quanto non è dominato in media-varianza da nessun altro portafoglio.

<sup>9</sup> La frontiera efficiente è l'insieme dei portafogli definiti dominanti, perché, a parità di rendimento, sono i meno rischiosi, oppure, a parità di rischio, sono quelli con il maggior rendimento.

<sup>10</sup> Un processo è stazionario quando i momenti (media, varianza e covarianza) della distribuzione dei dati generati non dipendono dal tempo di riferimento, cioè variano al variare del tempo. In caso contrario si parla di processo integrato (di “ordine uno”, generalmente quando si tratta con serie finanziarie) o di processo a radice unitaria.

<sup>11</sup> Si consideri, ad esempio, KRYZANOWSKI L., TO M. C., *The E-V Stationarity of Secure Returns*, Journal of Banking and Finance, 11, 1987, pp. 117-135.

specificato, il fluire del tempo e le variazioni dei prezzi influiscono sulle quote percentuali di ricchezza investita nei singoli titoli selezionati. La soluzione a tale problema consiste, appunto, nel revisionare il portafoglio riposizionandolo sulla nuova frontiera efficiente: tale processo si concretizza nell'aggiornamento delle stime dei parametri di interesse (per il calcolo della nuova frontiera efficiente) e nella modifica dei "pesi" (quote percentuali di ricchezza investita) dei titoli considerati nel vecchio portafoglio.

### **1.3 Alcuni vincoli nella revisione del portafoglio**

Come precedentemente spiegato, la revisione o l'adeguamento del portafoglio in base alle variazioni dei mercati finanziari e alla posizione finanziaria dell'investitore comporta l'acquisto e la vendita di titoli, dando origine a determinati problemi che fungono da vincoli nella revisione del portafoglio. Successivamente si riportano alcuni vincoli comuni nei processi di revisione.

#### **1.3.1 I costi di transazione**

L'acquisto e la vendita di titoli comportano dei costi di transazione, le cosiddette commissioni, generalmente applicate in proporzione al valore acquistato o venduto dall'intermediario che esegue l'operazione. Occorre tenere presente che ricorrere frequentemente all'acquisto e alla vendita di titoli può incrementare a tal punto i costi di transazione da ridurre notevolmente o addirittura elidere il rendimento netto del portafoglio revisionato. Di conseguenza, tali costi possono agire come vincolo alla revisione tempestiva del portafoglio. Oltre alle commissioni, all'interno dei costi di transazione rientrano anche i costi di illiquidità, derivanti dalla vendita o dall'acquisto di una rilevante quantità di azioni dello stesso titolo, il cui prezzo si riduce o aumenta creando de facto un costo, dal momento che non è stato possibile vendere o acquistare tutte le azioni al prezzo iniziale. Una parte delle azioni, infatti, sarà stata ceduta ad un prezzo inferiore, ricavando un ammontare minore di quello atteso o una parte sarà stata acquistata ad un prezzo maggiore, costringendo l'esborso di una somma maggiore. Se il quantitativo di azioni (dello

stesso titolo) da acquistare o vendere è rilevante (e al momento non c'è una disponibilità sul mercato a ricevere o fornire), i costi di illiquidità possono gravare notevolmente sulla convenienza della revisione.

### 1.3.2 I costi di raccolta e aggiornamento dati

Sono i costi sostenuti dall'investitore per la raccolta dei dati e per l'aggiornamento delle stime dei parametri dei titoli. A differenza dei costi di transazione, che sono variabili in quanto dipendono dalla quantità di ordini di acquisto o di vendita eseguiti durante l'operazione di revisione del portafoglio, questa tipologia di costi è fissa ed è sostenuta per tutta la durata dell'investimento.

### 1.3.3 La tassazione del *capital gain*

Nel momento in cui la revisione comporta la cessione di azioni, le plusvalenze (*capital gains*) derivanti dalla loro vendita vengono tassate.

Attraverso un esempio<sup>12</sup>, cerchiamo di comprendere cosa succede quando un portafoglio viene revisionato. Si supponga di possedere, al tempo  $t$ , un portafoglio costituito da  $A_t$  azioni del titolo  $A$  e di revisionare (sempre al tempo  $t$ ) tale portafoglio vendendo le azioni del titolo  $A$  per acquistare quelle del titolo  $B$ . Indicando con  $P_{At}$  il prezzo corrente (cioè al tempo  $t$ ) di un'azione del titolo  $A$  e con  $P_{At-1}$  il prezzo di acquisto (in  $t-1$ ) del titolo  $A$ , il rendimento atteso del portafoglio (tralasciando i costi di aggiornamento e di transazione) è dato da:

$$[A_t P_{At} - T_c A_t (P_{At} - P_{At-1})] \mu_B,$$

in cui  $T_c$  rappresenta l'aliquota fiscale applicata al *capital gain* e  $\mu_B$  è il rendimento atteso per il titolo  $B$  nel periodo seguente. Ovviamente se  $P_{At} > P_{At-1}$ , allora  $T_c > 0$  e  $T_c A_t (P_{At} - P_{At-1}) > 0$ , che rappresenta la tassa pagata sulla plusvalenza derivante dalla vendita del titolo  $A$ . È importante notare che la quantità disponibile  $A_t P_{At} -$

---

<sup>12</sup> Si veda CORAZZA M., *La revisione statica del portafoglio azionario: i principali modelli classici*, Dipartimento di Matematica Applicata - Università Ca' Foscari di Venezia, 7, 2002, pp. 1-21.

$T_c A_t (P_{At} - P_{At-1})$  da investire nel portafoglio soggetto a revisione è inferiore all'ammontare  $A_t P_{At}$ , relativo al caso in cui si mantenga inalterata la composizione del portafoglio (cioè non vengano cedute le azioni del titolo  $A$ ) anche per il periodo  $t + 1$ <sup>13</sup>.

Si comprende, quindi, come la tassazione del *capital gain* rappresenti un vincolo importante nel processo di revisione del portafoglio, in quanto costituisce un vero e proprio costo che non può essere trascurato. La tassazione del *capital gain* sarà trattata in modo dettagliato nei capitoli successivi.

## 1.4 Le strategie di revisione del portafoglio

Possono essere adottate due diverse strategie per la revisione del portafoglio, una strategia di “revisione attiva” e una strategia di “revisione passiva”. La scelta della strategia dipende dagli obiettivi, dalle competenze, dalle risorse e dall'orizzonte temporale di interesse dell'investitore.

### 1.4.1 La strategia di “revisione attiva”

La strategia di “revisione attiva” prevede frequenti e talvolta sostanziali aggiustamenti del portafoglio e gli investitori che intraprendono tale strategia ritengono che i mercati finanziari non siano sempre efficienti: essi sostengono che, a volte, i titoli possano essere prezzati erroneamente, offrendo la possibilità di ottenere dei profitti attraverso la loro negoziazione fino a quando tali prezzi non ritornano al valore “corretto”. Quindi, credendo nella divergenza e nell'eterogeneità delle aspettative tra gli investitori per quanto riguarda il rischio e il rendimento dei titoli nel mercato, coloro che ricorrono alla strategia di “revisione attiva” intendono sviluppare delle stime migliori in merito al reale rischio e rendimento dei titoli rispetto al resto del mercato e sperano di utilizzare tali stime per generare dei profitti maggiori. Pertanto, l'obiettivo della strategia di “revisione attiva” del portafoglio è di

---

<sup>13</sup> In tal caso il rendimento atteso del portafoglio è dato da  $A_t P_{At} \mu_A$ , con  $\mu_A$  che rappresenta il rendimento atteso del titolo  $A$ .

battere il mercato. Questo tipo di strategia consiste essenzialmente in una nuova analisi e selezione del portafoglio. Si basa sull'analisi dei fattori fondamentali che influenzano l'economia, l'industria e le società, nonché dei fattori tecnici come la domanda e l'offerta. Di conseguenza, l'attuazione della strategia di “revisione attiva” richiede risorse maggiori in termini di tempo, strumenti e competenze. È importante ricordare che il frequente ricorso alla negoziazione delle azioni comporta elevati costi di transazione.

### 1.4.2 La strategia di “revisione passiva”

La strategia di “revisione passiva”, invece, comporta un minore e poco frequente aggiustamento del portafoglio nel tempo. I professionisti della strategia di “revisione passiva” credono nell'efficienza del mercato e nell'omogeneità delle aspettative tra gli investitori, trovando poco incentivo per l'attività di negoziazione e revisione periodica dei portafogli. Nell'ambito della strategia di “revisione passiva”, l'aggiustamento del portafoglio viene effettuato seguendo predeterminate regole e procedure, definite *formula plans*, che aiutano l'investitore ad aggiustare il proprio portafoglio in base alle variazioni del mercato. I *formula plans* rappresentano un tentativo di sfruttare le fluttuazioni dei prezzi nel mercato, rendendole una fonte di profitto per l'investitore. Questi piani stabiliscono in modo automatico le tempistiche (*timing*) di acquisto e vendita dei titoli, perché sono costituiti da regole predeterminate riguardo quando e quanto acquistare o vendere. L'utilizzo dei *formula plans* richiede che l'investitore divida i suoi investimenti in due portafogli, uno aggressivo e l'altro più difensivo<sup>14</sup>. I *formula plans* prevedono delle regole per il trasferimento dei fondi dal portafoglio aggressivo al portafoglio difensivo e viceversa: tali regole consentono all'investitore di vendere automaticamente le azioni quando i loro prezzi stanno aumentando e di acquistarle quando i loro prezzi stanno diminuendo. In seguito, per completezza, si riportano brevemente tre comuni tipologie di *formula plans* per l'implementazione della revisione passiva del portafoglio: Constant Rupee value plan, il cui scopo è quello di mantenere costante il

---

<sup>14</sup> Generalmente il portafoglio aggressivo è costituito da azioni, mentre il portafoglio difensivo è costituito da obbligazioni.



valore del portafoglio aggressivo; Constant Ratio plan, in cui i valori degli investimenti nei due portafogli sono impostati, ad esempio, secondo il rapporto 1: 1 o 1.5: 1 e lo scopo di questo piano è quello di mantenere costante tale rapporto; Dollar cost averaging, piano che prevede che l'investitore investa regolarmente una somma costante in una determinata azione o in un portafoglio di azioni a intervalli periodici e per un periodo abbastanza lungo, indipendentemente dal prezzo delle azioni al momento dell'investimento. Tuttavia i *formula plans* presentano delle limitazioni, in quanto sono inflessibili e non indicano quali titoli del portafoglio debbano essere venduti o acquistati. Solo la strategia di “revisione attiva” del portafoglio può fornire le risposte a queste domande.

## 1.5 Il *rebalancing* del portafoglio

Il ribilanciamento (*rebalancing*) è il processo di reimpostazione dei pesi del portafoglio al loro target. La necessità di riequilibrare il portafoglio deriva dal fatto che le differenti prestazioni delle attività all'interno del portafoglio comportano una variazione dei propri pesi. Donohue e Yip<sup>15</sup> infatti, affermano che, poiché le proporzioni di ricchezza assegnate alle singole attività cambiano a causa delle differenze di performance, dei cambiamenti negli obiettivi degli investitori, dei mutamenti dei profili di rischio o dell'introduzione di nuovo capitale, gli investitori devono riallocare i fondi del portafoglio per riportare le allocazioni degli asset a determinati valori-target. Ciò significa che, quando i portafogli vengono riequilibrati, generalmente sono venduti gli assets che hanno realizzato importanti performance e acquistati i titoli che hanno sottoperformato (e quindi valgono meno).

### 1.5.1 Il ribilanciamento a proporzione costante

Per meglio comprendere le dinamiche appena esplicitate, di seguito si riporta un semplice esempio di ribilanciamento del portafoglio. Si consideri un portafoglio

---

<sup>15</sup> DONOHUE C., YIP K., *Optimal Portfolio Rebalancing with Transaction Costs*, Journal of Portfolio Management, 29(4), 2003, pp. 49-63.

equamente ripartito in due asset class, una azionaria (quindi rischiosa) e l'altra obbligazionaria (poco rischiosa); il valore iniziale del portafoglio è pari a €100 e si supponga che dopo un breve periodo di investimento (ad esempio dopo 1 mese) le azioni registrino un incremento del 10%<sup>16</sup>: tale situazione comporta un aumento del valore del portafoglio a €105 (€55 + €50), un incremento del peso dell'asset class azionaria al 52,38% (55/105) e un decremento del peso dell'asset class obbligazionaria al 47,62% (50/105), modificando il livello di esposizione al rischio del portafoglio. Per mantenere inalterata l'allocazione strategica iniziale occorre eseguire un ribilanciamento del portafoglio, vendendo una quota di asset class azionaria pari al 2,38% e reinvestendo il ricavato per l'acquisto di obbligazioni. In questo modo, il processo di ribilanciamento modifica i valori assoluti delle due asset class costituenti il portafoglio, diminuendo da €55 a €52,5 (50% di €105) la componente azionaria e aumentando da €50 a €52,5 la componente obbligazionaria<sup>17</sup>.

L'esempio appena presentato fa riferimento alla nota strategia di ribilanciamento a proporzione costante (*constant mix strategy*), in cui il gestore del portafoglio si pone l'obiettivo di mantenere inalterata l'allocazione strategica iniziale (cioè i pesi originali delle asset class) a fronte delle oscillazioni dei prezzi del mercato che tendono a modificarla. In questo modo si ripristina l'esposizione iniziale del portafoglio alla volatilità del mercato. Si può notare che il principio al quale fa riferimento il ribilanciamento del portafoglio è contrario alle consuete logiche di profitto, in quanto si vende quando il mercato è a rialzo e si acquista quando il mercato è a ribasso. Ovviamente il giudizio sulla profittabilità di tale strategia è in funzione degli andamenti e dei rimbalzi<sup>18</sup> del mercato.

È importante sottolineare che ad ogni riequilibrio dei pesi è collegato un costo di transazione e, di conseguenza, il frequente ricorso a tale processo potrebbe rendere

---

<sup>16</sup> Per semplicità, l'esempio si concentra sulle modifiche dei pesi provocate solamente dalla variazione dell'asset class azionaria (è ipotizzato costante il valore dell'asset class obbligazionaria).

<sup>17</sup> GANDOLFI G. (a cura di), *Scelta e gestione degli investimenti finanziari*, in *Banca e Mercati*, Roma, Bancaria Editrice, 2009.

<sup>18</sup> Per rimbalzo si intende il recupero temporaneo del mercato nell'ambito di un andamento decrescente. In altre parole, è un breve movimento rialzista del titolo, solitamente dopo un deciso ribasso.

la strategia di ribilanciamento a proporzione costante poco accessibile e profittevole. Sorge spontanea, quindi, la consapevolezza dell'importanza della tempistica di rebalancing. A tal proposito si riconoscono almeno quattro tipologie di ribilanciamento a proporzione costante: *periodic rebalancing*, che prevede il riequilibrio del portafoglio ad intervalli di tempo predefiniti (ad esempio mensili, trimestrali, annuali); *threshold rebalancing*, che collega i ribilanciamenti del portafoglio al verificarsi di una variazione dei pesi dei titoli superiore ad una determinata soglia percentuale (ad esempio, si procede al ribilanciamento quando il peso di un'asset class aumenta o si riduce del 10% rispetto a suo livello target, non alterando la composizione del portafoglio in caso variazioni minori); *range rebalancing*, che prevede il ribilanciamento in caso di variazione dei pesi superiore ad un determinato intervallo: rispetto alla *threshold rebalancing*, questa strategia comporta non un ritorno al peso target ma al valore massimo di scostamento (si supponga di avere un portafoglio in cui il peso ottimale di una determinata asset class sia del 30% con un'oscillazione massima concessa del +5%; se un rialzo dei prezzi ne aumenta il peso fino al 40%, il ribilanciamento riporta il peso dell'asset class al 35% e non al 30%; lo stesso vale nel caso di ribasso con un'oscillazione massima consentita del -5%); *volatility-based strategy*, che consiste nel determinare delle soglie di volatilità riferite a ciascuna asset class e qualora tali soglie vengano superate si procede alla ricomposizione del portafoglio, diminuendo il peso dell'asset class caratterizzata dall'eccessiva volatilità a favore delle altre (l'obiettivo primario non è più il riequilibrio dei pesi ai livelli originali, bensì il controllo della volatilità del portafoglio). Si nota che l'obiettivo della non alterazione dell'allocazione strategica iniziale del portafoglio è totalmente rispettato solo nei primi due casi (*periodic* e *threshold rebalancing*). Negli altri due casi, invece, l'attenzione del gestore si concentra sul ribilanciamento entro un livello di tolleranza allo scostamento (*range rebalancing*) ed entro un valore di volatilità sopportato dall'investitore (*volatility-based rebalancing*).

La decisione a quale tra queste tipologie di rebalancing ricorrere deriva, in primis, dalla frequenza del ribilanciamento e dall'incidenza dei costi di transazione, che possono risultare determinanti per l'esito positivo della strategia di riequilibrio

del portafoglio. Non sono da trascurare, inoltre, altri fattori quali l'orizzonte di investimento, la tolleranza al rischio dell'investitore e le previsioni sui mercati.

Di seguito si riporta un'altra strategia di ribilanciamento che segue una regola opposta alla precedente, cioè acquista l'attività rischiosa quando il mercato è in rialzo e la vende quando il mercato è in ribasso.

### **1.5.2 Il ribilanciamento a proporzione costante con assicurazione di portafoglio**

Oltre alla strategia di ribilanciamento a proporzione costante, si può considerare brevemente anche la strategia di ribilanciamento a proporzione costante con assicurazione di portafoglio. Questa modalità di rebalancing consente di cogliere le opportunità di investimento derivanti dall'andamento del mercato, pur sempre offrendo una protezione al portafoglio che consiste nella definizione di una perdita massima o di un valore minimo (*floor*) raggiungibile dal portafoglio. Per protezione del capitale si intende il tentativo di evitare che il valore del portafoglio diminuisca oltre un determinato valore. Il valore del *floor* è in funzione del profilo di rischio dell'investitore e influenza il livello di esposizione del portafoglio all'attività rischiosa. Considerando sempre, per semplicità, un portafoglio ripartito in due asset class (una azionaria e l'altra obbligazionaria), il processo di ribilanciamento è definito dalla formula

$$risky\ asset = m (portfolio\ value - floor),$$

in cui per *risky asset* si intende l'ammontare da investire nell'attività rischiosa e *m* è un moltiplicatore di esposizione con segno positivo: esso consente di definire il livello di aggressività della gestione, in quanto un valore elevato di *m* indica una maggiore esposizione verso l'asset rischiosa contribuendo, in caso di trend positivo o negativo del mercato, ad aumentare la conformità del portafoglio all'andamento del mercato

Si consideri un breve esempio<sup>19</sup> per meglio comprendere le dinamiche di questa strategia di ribilanciamento. Dato un portafoglio di valore iniziale pari a €100 ripartito in azioni e attività liquide, con  $m = 2$  e  $floor = €75$ , inserendo tali valori nella formula soprariportata otteniamo una ripartizione analoga (50% e 50%) tra le due asset class. Se il mercato azionario, dopo un mese di investimento, presenta un aumento del 10%, il valore del portafoglio diventa di €105 poiché le azioni aumentano a €55, il cui peso in portafoglio diventa del 52,38% (55/105). Il valore della liquidità, invece, rimane invariato e il suo peso in portafoglio si riduce al 47,62% (50/105). Dal momento che la differenza tra valore del portafoglio e  $floor$  varia da €25 a €30, la ricchezza da investire nella componente rischiosa (*risky asset*) è pari a €60: questo significa vendere una quota di liquidità pari a €5 per investirla in azioni. In conclusione, dopo un mese di investimento il ribilanciamento porta ad una nuova combinazione dei pesi, in cui il 57,14% (60/105) del portafoglio è destinato alla componente azionaria e 42,86% (45/105) alle attività liquide.

Si può notare che, differentemente dal ribilanciamento a proporzione costante, una variazione positiva del mercato azionario comporta un aumento del peso dell'asset rischiosa nel portafoglio, consentendo a quest'ultimo, appunto, di assumere una natura in linea con il trend rialzista del mercato. Allo stesso modo, questa strategia di ribilanciamento conduce a vendere la componente rischiosa quando essa è in fase di ribasso, rendendo il portafoglio più orientato all'attività generalmente poco rischiosa e meno sensibile ad un trend ribassista del mercato azionario<sup>20</sup>.

## 1.6 Le peculiarità di un buon modello di revisione

In letteratura è diffusa l'opinione che un corretto modello di revisione del portafoglio, per essere considerato tale, dovrebbe possedere alcune caratteristiche<sup>21</sup>:

---

<sup>19</sup> Si veda GANDOLFI G. (a cura di), *Scelta e gestione degli investimenti finanziari*, in *Banca e Mercati*, Roma, Bancaria Editrice, 2009.

<sup>20</sup> Per ulteriori dettagli sulla strategia di ribilanciamento a proporzione costante con assicurazione di portafoglio (CPPI) si rimanda al testo a cura di Gandolfi.

<sup>21</sup> CORAZZA M., *La revisione statica del portafoglio azionario: i principali modelli classici*, Dipartimento di Matematica Applicata - Università Ca' Foscari di Venezia, 7, 2002, pp. 1-21.

- ridotta complessità (computazionale): il modello deve risultare utilizzabile nella pratica e deve essere sufficientemente semplice, in quanto un'eccessiva complessità lo renderebbe inutilizzabile;
- realistica: il modello deve essere coerente con i regolamenti del mercato che disciplinano la negoziazione degli strumenti finanziari, non può dunque tralasciare elementi caratterizzanti il funzionamento del mercato stesso quali, ad esempio, l'impossibilità di vendite allo scoperto, l'esistenza di costi di transazione, la presenza di lotti minimi di contrattazione. Trascurando questi vincoli che incidono sul modello di revisione si corre il rischio, infatti, di ottenere delle soluzioni che non possono essere applicate operativamente nel mercato. Si consideri, ad esempio, un modello senza vincoli di non negatività che presenti come soluzione un portafoglio con titoli venduti allo scoperto in un mercato in cui tali operazioni non siano consentite; non potremmo, quindi, costituire il portafoglio indicato dal modello;
- efficacia: il modello di revisione deve arrecare un vantaggio in termini di rendimento rispetto all'originale modello di selezione del portafoglio implementato periodicamente o quasi periodicamente. Dato che il modello di revisione del portafoglio comporta dei costi di applicazione, quindi ci si attende che dal suo utilizzo derivi una performance tale da coprire questi costi aggiuntivi e da produrre un sostanziale incremento dei rendimenti.

Prendendo in considerazione i numerosi modelli di revisione presenti in letteratura, per il gestore del portafoglio risulta necessario valutare quali modelli soddisfino le caratteristiche di ridotta complessità (computazionale), realistica ed efficacia, oltre alla "filosofia" o alla politica di investimento del gestore medesimo.

## Capitolo II

### Alcuni modelli di revisione del portafoglio

Dopo una breve analisi degli studi che hanno succeduto l'opera pionieristica di Markowitz, questo capitolo affronta alcuni modelli di revisione del portafoglio. I modelli che possiamo definire "classici" riguardano importanti processi di revisione del portafoglio che sono stati i precursori per l'avvenire dei modelli successivi (che informalmente definiamo "moderni"). In letteratura la revisione del portafoglio è stata affrontata secondo diverse sfaccettature, per questo motivo si è deciso di selezionare solo alcuni modelli, le cui caratteristiche sono utili per affrontare lo sviluppo di un modello sul quale ci si concentrerà nei capitoli successivi.

#### **2.1 Oltre il modello di Markowitz: costi di transazione, algoritmi euristici, modelli multi-periodali e nuove misure di rischio**

Nella teoria dell'ottimizzazione del portafoglio, un'implicazione di base del modello di Markowitz è che gli investitori detengono dei portafogli di titoli ben diversificati. In realtà gli investitori selezionano dei portafogli costituiti da un piccolo numero di titoli, a causa soprattutto della presenza dei costi di transazione. Sappiamo, infatti, che nei mercati finanziari ogni movimento di denaro tra attività sostiene un costo di transazione. Arnott e Wagner<sup>22</sup> hanno riscontrato che ignorare tali costi spesso porta alla creazione di portafogli inefficienti e per questo motivo molti studiosi hanno affrontato la tematica della corretta modellazione dei costi di transazione. Patel e Subrahmanyam<sup>23</sup>, ad esempio, hanno analizzato l'impatto dei

---

<sup>22</sup> ARNOTT R. D., WAGNER W. H., *The measurement and control of trading costs*, Financial Analysts Journal, 46, 1990, pp. 73-80.

<sup>23</sup> PATEL, N. R., SUBRAHMANYAM, M. G., *A simple algorithm for optimal portfolio selection with fixed transaction costs*, Management Science, 38, 1982, pp. 303-314.

costi fissi di transazione sulla diversificazione del portafoglio. Pogue<sup>24</sup> ha affrontato le commissioni proporzionali di intermediazione coinvolte nella revisione di un portafoglio esistente. Yoshimoto<sup>25</sup> ha esaminato il problema dell'ottimizzazione del portafoglio con costi di transazione variabili, adottando un approccio media-varianza. Il modello di ottimizzazione secondo l'approccio media-varianza è stato utilizzato anche da Marasović *et al.*<sup>26</sup> per analizzare l'impatto dei costi di transazione sul ribilanciamento del portafoglio. Gennotte e Jung<sup>27</sup>, ancora, hanno studiato l'effetto dei costi di transazione sulle strategie di portafoglio dinamico.

I contributi recenti sui modelli di ottimizzazione che tengono conto dei costi di transazione e di numerosi altri vicoli hanno sottolineato le criticità computazionali di tali problemi e la necessità di efficaci algoritmi che possano risolverli. A tal proposito Kellerer *et al.*<sup>28</sup>, Mansini & Speranza<sup>29</sup> e Konno & Wijayanayake<sup>30</sup> hanno utilizzato degli algoritmi euristici per risolvere i problemi di ottimizzazione del portafoglio con costi e lotti minimi di transazione. Anche gli autori Li *et al.*<sup>31</sup> hanno integrato il processo di ottimizzazione del portafoglio proposto da Markowitz con i costi di transazione e il divieto di vendite allo scoperto, proponendo degli algoritmi euristici per i problemi considerati<sup>32</sup>. Chang *et al.*<sup>33</sup> hanno esteso il modello di

---

<sup>24</sup> POGUE G. A., *An extension of the Markowitz portfolio selection model to include variable transaction costs, short sales, leverage policies and taxes*, Journal of Finance, 25, 1970, pp. 1005-1028.

<sup>25</sup> YOSHIMOTO A., *The mean-variance approach to portfolio optimization subject to transaction costs*, Journal of the Operation Research Society of Japan, 39, 1996, pp. 99-117.

<sup>26</sup> MARASOVIĆ B., PIVAC S., VUKASOVIĆ S. V., *The impact of transaction cost on rebalancing an investment portfolio in portfolio optimization*, International Scholarly and Scientific Research & Innovation, 9 (3), 2015.

<sup>27</sup> GENNOTTE G., JUNG A., *Investment strategies under transaction costs: The finite horizon case*, Management Science, 40, 1994, pp. 385-404.

<sup>28</sup> KELLERER H., MANSINI R., SPERANZA M. G., *Selecting portfolios with fixed costs and minimum transaction lots*, Annals of Operations Research, 99, 2000, pp. 287-304.

<sup>29</sup> MANSINI R., SPERANZA M. G., *Heuristic algorithms for the portfolio selection problem with minimum transaction lots*, European Journal of Operational Research, 114, 1999, pp. 219-233.

<sup>30</sup> KONNO H., WIJAYANAYAKE A., *Portfolio optimization problem under concave transaction costs and minimal transaction unit constraints*, Mathematical Programming, 89, 2001, pp. 233-250.

<sup>31</sup> LI Z.-F., LI Z.-X., WANG S.-Y., DENG X.-T., *Optimal portfolio selection of assets with transaction costs and no short sales*, International Journal of Systems Science, 32, 2001, pp. 599-607.

<sup>32</sup> LI Z.-F., WANG S.-Y., DENG X.-T., *A linear programming algorithm for optimal portfolio selection with transaction costs*, International Journal of Systems Science, 31, 2000, 107-117.

<sup>33</sup> CHANG T. J., MEADE N., BEASLEY J. E., SHARAIHA Y. M., *Heuristic for cardinality constrained portfolio optimization*, Computer & Operations Research, 27, 2000, pp. 1271-1302.



Markowitz includendoci vincoli di cardinalità e vincoli di *bound* (limiti superiori e inferiori sulla percentuale di portafoglio che può essere investita in ciascun *asset*) e per trovare la frontiera efficiente (vincolata) gli autori hanno testato tre algoritmi euristici. Jobst *et al.*<sup>34</sup> hanno incluso nel modello i vincoli di cardinalità e di lotti minimi acquistabili e l'approccio risolutivo utilizzato per risolvere il problema di programmazione matematica si basa su tecniche algoritmiche di tipo *branch-and-bound tree research* combinate con un'euristica. Un ulteriore contributo in termini di utilizzo degli algoritmi euristici nei problemi di ottimizzazione del portafoglio deriva dagli autori Corazza *et al.*<sup>35</sup>, che considerano un modello di selezione del portafoglio non lineare con vincoli a variabili miste-interi e per risolvere approssimativamente questo modello vincolato sperimentano la meta-euristica *Particle Swarm Optimization* (PSO), di cui si parlerà in seguito.

I costi di transazione possono dipendere da molteplici fattori, spesso non facili da considerare all'interno di un unico modello di revisione. Alcuni autori come Schreiner<sup>36</sup> e Drenovak & Rankovic<sup>37</sup> hanno cercato di bypassare il problema ricorrendo al vincolo di *turn-over* come *proxy* dei costi di transazione.

Il modello originale di Markowitz è mono-periodale, cioè considera l'investimento in un unico periodo: l'investitore determina il vettore dei pesi del portafoglio all'inizio del periodo di investimento e attende pazientemente fino alla fine del periodo stesso. Nel corso degli anni c'è stato un notevole sviluppo dei problemi di portafoglio multi-periodali, basati su una sequenza di decisioni effettuate dall'investitore che ad ogni periodo riequilibra il proprio portafoglio, tenendo conto di una futura opportunità di cambiamento e del rimanente orizzonte d'investimento. I modelli di revisione multi-periodali, quindi, sono costruiti sulla base di una strategia che coinvolge più periodi, consentendo di ottimizzare le revisioni in prospettiva degli

---

<sup>34</sup> JOBST N., HORNIMAN M. D., LUCAS C. A., MITRA G., *Computational aspects of alternative portfolio selection models in the presence of discrete asset choice constraints*, Quantitative Finance, 1, 2001, pp. 1-13.

<sup>35</sup> CORAZZA M., FASANO G., GUSSO R., *Particle swarm optimization with non-smooth penalty reformulation, for a complex portfolio selection problem*, Applied Mathematics and Computation, 224, 2013, pp. 611-624.

<sup>36</sup> SCHREINER J., *A turn-over constrained approach*, Management Science, 9, 1980, pp. 67-75.

<sup>37</sup> DRENOVAK M., RANKOVIC V., *Markowitz portfolio rebalancing with turnover monitoring*, Faculty of Economics, University of Kragujevac, 16(3), 2014, pp. 207-217.

accadimenti futuri. Tuttavia i modelli mono-periodali sono spesso utilizzati per la loro minore complessità computazionale e per la possibilità, comunque, di poter aggiornare ad ogni periodo le stime dei parametri di interesse (valori attesi, varianze e covarianze) per il periodo successivo. Nella propria seconda pubblicazione Markowitz<sup>38</sup> ha riconosciuto l'importanza del processo di aggiustamento del portafoglio e ha indicato la strategia di gestione multi-periodale come un problema di programmazione dinamico. Anche Smith<sup>39</sup> ha sviluppato un modello di revisione del portafoglio (con costi di transazione), modificando la struttura mono-periodale di Markowitz e applicandolo in un contesto multi-periodale<sup>40</sup>. Per concludere, Elton e Gruber<sup>41</sup>, così come qualche anno dopo Li-Ng<sup>42</sup> e Steinbach<sup>43</sup>, hanno esteso l'approccio di Markowitz ai problemi di ottimizzazione multi-periodale del portafoglio.

Nel modello originale di Markowitz il rischio è misurato dalla deviazione standard o dalla varianza. La varianza è un indice statistico di variabilità e può essere adottata come misura di rischio solamente se la distribuzione dei rendimenti è simmetrica<sup>44</sup>. Per questo motivo in letteratura sono state introdotte delle misure di rischio diverse dalla varianza come, ad esempio, la semi-varianza, la *mean absolute deviation*<sup>45</sup> e la varianza più la *skewness*<sup>46</sup>. Negli ultimi anni le misure di rischio definite *shortfall measures*, come il *Value-at-Risk* e il *Conditional Value-at-Risk*, sono state fortemente utilizzate nell'area del *risk management*. Il *Value-at-Risk*

---

<sup>38</sup> MARKOWITZ H. M., *Portfolio selection: Efficient diversification of investments*, New York, John Wiley & Sons, 1959.

<sup>39</sup> SMITH K. V., *A transition model for portfolio revision*, *Journal of Finance*, 3, 1967, pp. 425-439.

<sup>40</sup> Nella propria opera *A transition model for portfolio revision*, Smith sostiene: "A shortcoming of the Markowitz [...] model is that it tells how to select a portfolio at only a single point in time".

<sup>41</sup> ELTON E. J., GRUBER M. J., *On the optimality of some multiperiod portfolio selection criteria*, *Journal of Business*, 47, 1974, 231-243.

<sup>42</sup> LI D., NG W.-L., *Optimal dynamic portfolio selection: multiperiod mean-variance formulation*, *Mathematical Finance*, 10, 2000, pp. 387-406.

<sup>43</sup> STEINBACH M. C., *Markowitz revisited: mean-variance models in financial portfolio analysis*, *Society for Industrial and Applied Mathematics Review*, 43, 2001, pp. 31-85.

<sup>44</sup> In generale i rendimenti non hanno una distribuzione normale, ma presentano un'asimmetria (*skewness*) negativa, a favore dei valori al di sotto della media.

<sup>45</sup> KONNO H., YAMAZAKI H., *Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its application to Tokyo stock market*, *Management Science*, 37, 1991, pp. 519-531.

<sup>46</sup> CHANG T.-J., YANG S.-C., CHANG K.-J., *Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm*, *Expert System with Applications*, 36, 2009, pp. 10529-10537.

(VaR) è una misura del rischio di perdita, ma presenta alcune caratteristiche matematiche indesiderate come la mancanza di subadditività e convessità<sup>47</sup>, proprietà che tratteremo successivamente. Per superare queste carenze, gli studiosi si sono concentrati sulle cosiddette misure coerenti di rischio<sup>48</sup>, in particolare sul *Conditional Value-at-Risk* (CVaR) utilizzato inizialmente da Rockafellar e Uryasev<sup>49</sup> nei problemi di selezione del portafoglio. Altri autori come Wang *et al.*<sup>50</sup> e Guastaroba *et al.*<sup>51</sup> sono ricorsi al CVaR (e in alcuni casi ad estensioni del CVaR<sup>52</sup>) come misura di rischio nel processo di revisione del portafoglio.

Recentemente Chen e Wang<sup>53</sup> hanno sviluppato delle nuove misure di rischio coerenti del portafoglio, definite *two-sided risk measures*, che considerano momenti di diverso ordine e sono costruite combinando gli scarti positivi e negativi rispetto al rendimento medio; in altre parole, queste misure di rischio sono interpretabili finanziariamente come una combinazione lineare di momenti sia positivi sia negativi della distribuzione dei rendimenti.

## 2.2 Modelli “classici”

Presentiamo ora alcuni studi relativi alla revisione statica di portafoglio: i modelli di Smith<sup>54</sup> e di Pogue<sup>55</sup>. Sono due diversi approcci che possono essere

---

<sup>47</sup> ARTZNER P., DELBAEN F., EBER J.-M., HEATH D., *Coherent measures of risk*, Mathematical Finance, 9 (3), 1999, pp. 203–228.

<sup>48</sup> Una misura di rischio è coerente se soddisfa i quattro assiomi di coerenza (invarianza transizionale, subadditività, positiva omogeneità e monotonicità) che affronteremo nel prossimo capitolo.

<sup>49</sup> ROCKAFELLAR R. T., URYASEV S., *Optimization of conditional value-at-risk*, Journal of Risk, 2 (3), 2000, pp. 21-41.

<sup>50</sup> WANG M., LI C., XUE H., XU F., *A new portfolio rebalancing model with transaction costs*, Hindawi Publishing Corporation - Journal of Applied Mathematics, 2014.

<sup>51</sup> GUASTAROBA G., MANSINI R., SPERANZA M. G., *Models and simulations for portfolio rebalancing*, Computational Economics, 33, 2009, pp. 237-262.

<sup>52</sup> MANSINI R., OGRYCZAK W., SPERANZA M. G., *Conditional value at risk and related linear programming models for portfolio optimization*, Annals of Operations Research, 152, 2005, pp. 227-256.

<sup>53</sup> CHEN Z., WANG Y., *Two-sided coherent risk measures and their application in realistic portfolio optimization*, Journal of Banking and Finance, 32 (12), 2008, pp. 2667-2673.

<sup>54</sup> SMITH K. V., *A transition model for portfolio revision*, Journal of Finance, 3, 1967, pp. 425-439.

utilizzati per affrontare il problema della revisione ed entrambi hanno come punto di partenza il processo di selezione del portafoglio alla Markowitz.

Il modello di Smith affronta la revisione del portafoglio senza introdurre direttamente la funzione dei costi di transazione nel problema di ottimizzazione, pur tenendone conto. Smith, inizialmente, determina la frontiera efficiente risolvendo il problema di selezione alla Markowitz e successivamente verifica la convenienza nell'eseguire la revisione del portafoglio, valutando i costi da sostenere per l'acquisto di un portafoglio collocato sulla nuova frontiera efficiente. È un modello piuttosto facile da applicare, ma fa ricorso a semplificazioni che ne riducono sensibilmente la "realisticità".

Nel modello di Pogue, invece, la revisione è affrontata inserendo nel problema di ottimizzazione originario (alla Markowitz) nuovi vincoli che influenzano la funzione da ottimizzare. Si ottiene, così, un nuovo problema di ottimizzazione per individuare delle nuove soluzioni relative al processo di revisione. Questo approccio consente di formulare un modello aderente alla realtà, in cui non viene trascurato alcun elemento che possa influenzare l'esito della revisione. Nel proprio modello, infatti, Pogue inserisce i costi di transazione, la tassazione, le vendite allo scoperto e il ricorso ai prestiti (garantiti e non). In questo modo ne risulta un modello coerente con il mercato reale, tuttavia tale accuratezza si ottiene a discapito della semplicità d'uso. Nel proprio studio, infatti, Pogue pone il problema a livello teorico, senza fornire una soluzione in forma chiusa. In definitiva, rispetto a quello di Smith, questo modello si rivela molto realistico, potenzialmente efficace ma non sufficientemente semplice sul piano operativo.

### **2.2.1 Il modello di Smith**

Uno dei primi studi sul problema di revisione del portafoglio è stato realizzato da K. V. Smith, che propone un'estensione del processo di selezione alla Markowitz rendendolo applicabile su base intertemporale. Smith presenta un metodo uniperiodale da applicare a determinate scadenze e che consente di ottenere una

---

<sup>55</sup> POGUE G. A., *An extension of the Markowitz portfolio selection model to include variable transaction costs, short sales, leverage policies and taxes*, Journal of Finance, 25, 1970, pp. 1005-1028.

revisione del portafoglio tenendo conto dei costi di revisione, fra i quali i costi di transazione e la tassazione sui dividendi e sul *capital gain*.

Il modello di Smith prevede che, ad ogni prefissata scadenza, venga calcolata la nuova frontiera efficiente, ma, a questo punto, l'investitore non dovrà scegliere il portafoglio come nel modello di Markowitz, cioè selezionando il portafoglio della frontiera efficiente che, in base alla curva delle preferenze, lo soddisfi maggiormente, in quanto tale scelta potrebbe comportare eccessivi livelli di turn-over che ridurrebbero eccessivamente il rendimento del portafoglio a causa dei costi di transazione. Un elevato turn-over è dovuto alla selezione di un nuovo portafoglio a prescindere dalle quote già detenute nel vecchio portafoglio.

Al fine di esemplificare, si consideri il lato sinistro della Figura 1 che indica la frontiera efficiente e il portafoglio ottimo<sup>56</sup> iniziale  $X^o$  selezionato dall'investitore al tempo  $t$ ; il lato destro, invece, raffigura quanto succede all'istante  $t + 1$ , in cui il portafoglio  $X^o$  non si trova più sulla (nuova) frontiera efficiente e quindi dovrebbe essere revisionato<sup>57</sup>. L'investitore può spostarsi dal portafoglio iniziale ad uno appartenente alla nuova frontiera efficiente, eseguendo quattro scelte:

- potrebbe muoversi dal portafoglio  $X^o$  al portafoglio A nel caso in cui riuscisse a specificare la propria nuova curva di utilità attesa<sup>58</sup> (in  $t+1$ ), ma tale specificazione, secondo Smith, non è semplice e quindi occorre scartare la scelta del portafoglio A;

- muovendosi da  $X^o$  a B, l'investitore otterrebbe una riduzione del rischio a parità di rendimento e per capire se sia conveniente tale revisione si dovrebbe confrontare l'ammontare dei costi di transazione (sostenuti per costituire il portafoglio B) con il vantaggio ottenuto in termini di minor rischio, ma tale confronto non risulta agevole perché costi e varianza hanno unità di misura diverse, quindi occorre scartare anche il portafoglio B;

- ugualmente, il passaggio da  $X^o$  a C è caratterizzato dai medesimi problemi di valutazione e quindi anche il portafoglio C può essere scartato;

<sup>56</sup> Per la definizione di "portafoglio ottimo" si veda l'appendice A.

<sup>57</sup> Dal momento che al tempo  $t+1$  il portafoglio  $X^o$  si trova a destra della nuova frontiera efficiente, in tal caso si parlerebbe di portafoglio inefficiente.

<sup>58</sup> Si veda appendice A.

- diversamente dagli altri portafogli, è invece possibile muoversi dal portafoglio  $X^o$  al portafoglio D calcolando la convenienza della revisione, perché è sufficiente confrontare i costi di transazione (sostenuti per passare da  $X^o$  a D) con l'aumento del rendimento atteso (rappresentato da  $\Delta E$ ), entrambi espressi secondo la stessa unità di misura (dollari).

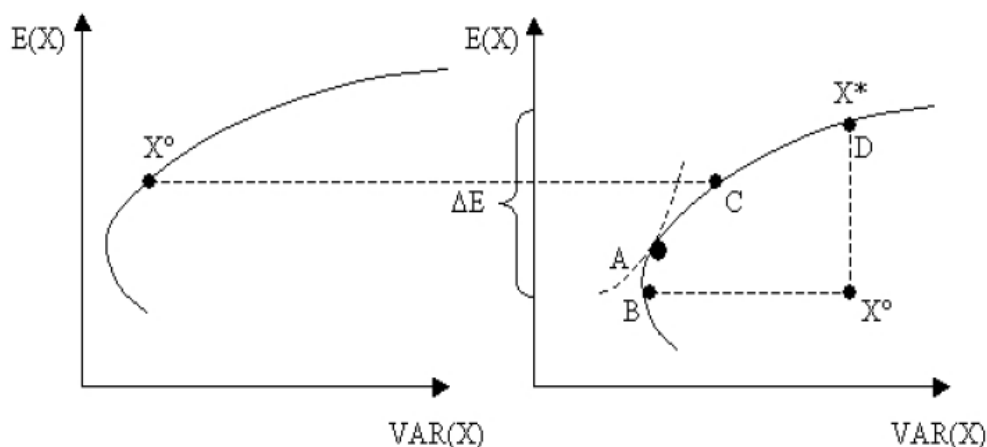


Figura 1: Il processo di revisione secondo il modello di Smith.

Smith conclude affermando che se

$$\Delta E * Capitale\ investito - Costi\ di\ revisione > 0,$$

allora la revisione è conveniente.

Per quanto riguarda i costi di transazione, essi sono costituiti dalle commissioni, dalle tasse sui dividendi e dalla tassazione sul capital gain.

Partendo dalle imposte, si considerino i seguenti fattori:

- $Z_j$  indica l'ammontare del titolo  $j$ -esimo disinvestito alla fine del primo periodo in seguito alla revisione;
- $s_j$  è la percentuale di apprezzamento del titolo  $j$ -esimo durante il periodo appena trascorso;
- $T_g \in [0,1]$  è l'aliquota applicata sul *capital gains*;
- $\mu_j$  è il valore atteso del titolo  $j$ .

Il *capital gain* maturato nel periodo appena concluso è dato da:

$$Z_j - \frac{Z_j}{(s_j + 1)} = \frac{Z_j s_j}{s_j + 1},$$

in cui la quantità  $\frac{Z_j}{(s_j+1)}$  rappresenta il valore all'inizio del periodo di  $Z_j$ . Ora è possibile determinare le imposte dovute all'Erario, moltiplicando il *capital gain* per l'aliquota fiscale:

$$\frac{Z_j s_j}{s_j + 1} * T_g.$$

Per determinare il costo relativo alle commissioni, si utilizza una funzione di costo  $C^{59}$ :

$$C \left[ Z_j + \left( Z_j - C[Z_j] - \frac{Z_j s_j}{s_j + 1} * T_g \right) \right],$$

in cui il primo addendo  $Z_j$  rappresenta la somma venduta e il secondo addendo (quello all'interno delle parentesi tonde), indica la somma, al netto dei costi di vendita e delle imposte sul *capital gain*, destinata al riacquisto di nuovi titoli.

Quindi i costi di revisione legati ad ogni  $j$ -esimo titolo sono rappresentabili nel seguente modo:

$$\frac{Z_j s_j}{s_j + 1} * T_g + C \left[ Z_j + \left( Z_j - C[Z_j] - \frac{Z_j s_j}{s_j + 1} T_g \right) \right], \text{ con } j = 1, \dots, n.$$

Applicando questa funzione di costo per ogni titolo in portafoglio, si ottiene il costo di revisione totale necessario per spostarsi dal vecchio portafoglio  $X^\circ$  al nuovo portafoglio  $X^*$ :

$$CT[X^\circ, X^*] = \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{Z_j s_j}{s_j + 1} T_g + C \left[ Z_j + \left( Z_j - C[Z_j] - \frac{Z_j s_j}{s_j + 1} T_g \right) \right] \right\}.$$

Ovviamente i costi di transazione rappresentano una componente negativa e di conseguenza riducono le risorse disponibili per revisionare il portafoglio.

Al termine del primo periodo di investimento, il gestore decide se revisionare il portafoglio. Considerando  $P(t)$  il valore del vecchio portafoglio e  $P(t + 1)$  il valore

<sup>59</sup> La funzione dei costi di transazione usata da Smith è così definita:

$$C[Z_j] = \begin{cases} a_1 + b_1 Z_j & \text{se } Z_j > c_1 \\ a_2 + b_2 Z_j & \text{se } c_2 < Z_j < c_1 \\ \vdots & \\ a_{n-1} + b_{n-1} Z_j & \text{se } c_{n-1} < Z_j < c_n \\ b_n Z_j & \text{se } Z_j < c_n \end{cases}$$

con  $a_1 > a_2 > \dots > a_{n-1}$ ,  $b_1 > b_2 > \dots > b_{n-1}$ ,  $c_1 > c_2 > \dots > c_n$ , per ogni  $j = 1, \dots, n$ .

del nuovo portafoglio derivante dal processo di revisione e indicando con  $\mu_{X^\circ}$  e  $\mu_{X^*}$  il rendimento atteso (per il periodo  $t + 1$ ) del portafoglio  $X^\circ$  e del portafoglio  $X^*$ , il gestore avrà a che fare con una delle seguenti situazioni:

- se  $P(t)\mu_{X^\circ} > \{P(t + 1) - CT[X^\circ, X^*]\}\mu_{X^*}$ , significa che il rendimento atteso del portafoglio non revisionato è maggiore di quello del portafoglio revisionato e quindi non conviene revisionare il portafoglio iniziale;

- se  $P(t)\mu_{X^\circ} < \{P(t + 1) - CT[X^\circ, X^*]\}\mu_{X^*}$ , significa che il rendimento atteso del portafoglio non revisionato è minore di quello del portafoglio revisionato e quindi conviene procedere alla revisione;

- se  $P(t)\mu_{X^\circ} = \{P(t + 1) - CT[X^\circ, X^*]\}\mu_{X^*}$ , il rendimento atteso del portafoglio non revisionato è uguale a quello del portafoglio revisionato e quindi è indifferente revisionare il portafoglio iniziale<sup>60</sup>.

### 2.2.1.1 Criticità del modello di Smith

Il modello di Smith può essere sottoposto ad almeno due critiche. La prima riguarda il metodo utilizzato per calcolare la nuova frontiera efficiente: nel proprio modello Smith risolve il problema di selezione del portafoglio con il metodo di Markowitz e una volta individuata la frontiera efficiente indica un metodo per verificare la convenienza della revisione; tuttavia, la nuova frontiera efficiente non considera i costi di revisione e dunque non rispecchia la “reale” nuova frontiera, che di fatto risulta traslata verso il basso rispetto a quella individuata da Smith (si veda Figura 2). Questo aspetto può portare l’investitore a scegliere un portafoglio non in linea con le proprie preferenze.

---

<sup>60</sup> CORAZZA M., *La revisione statica del portafoglio azionario: i principali modelli classici*, Dipartimento di Matematica Applicata - Università Ca’ Foscari di Venezia, 7, 2002, pp. 1-21.



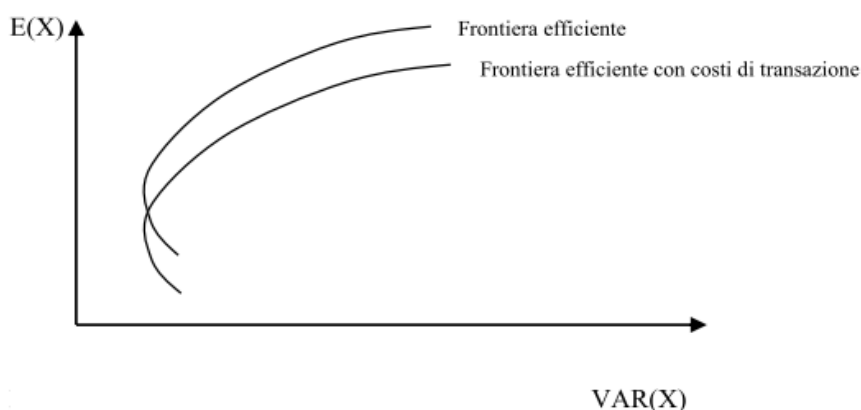


Figura 2: Traslazione verso destra della frontiera efficiente.

Il secondo aspetto critico del modello di Smith sul quale è necessario porre l'attenzione è come viene selezionato il nuovo portafoglio sulla nuova frontiera efficiente: l'autore non considera né le preferenze dell'investitore, né il rendimento (al netto dei costi di transazione) di tutti i portafogli presenti sulla frontiera, ma sceglie il nuovo portafoglio in modo indipendente, senza considerarne il rendimento atteso e la varianza. In pratica, con questo approccio Smith considera un solo portafoglio e valuta la convenienza a “muoversi” su di esso, escludendo i portafogli della frontiera che potrebbero presentare, allo stesso tempo, sia un maggior rendimento sia un minor costo di revisione.

### 2.2.2 Il modello di Pogue

Riscontrata l'inadeguatezza del modello di Markowitz per quanto riguarda la revisione del portafoglio, Pogue modifica tale modello di selezione<sup>61</sup> introducendo alcuni vincoli per renderlo più realistico e quindi utilizzabile anche nel processo di revisione. I vincoli introdotti da Pogue sono relativi a:

- costi di transazione variabili;
- vendite allo scoperto;
- tassazione;
- prestiti (indebitamento).

<sup>61</sup> Pogue, infatti, parla di “estensione del modello di Markowitz”.

Nell'introduzione del proprio studio<sup>62</sup>, l'autore spiega che quando l'insieme delle alternative di investimento viene ampliato per includere le vendite allo scoperto e le passività, l'insieme risultante di portafogli efficienti domina, generalmente, il set di portafogli creati senza tali alternative. Pertanto, per un determinato livello di rischio, i portafogli selezionati nell'ambito del gruppo ampliato di alternative di investimento hanno dei rendimenti attesi uguali o maggiori di quelli dei portafogli selezionati sotto le usuali restrizioni.

Occorre porre in evidenza che Pogue ha formulato il proprio modello in termini di prezzi e quantità di azioni piuttosto che in termini di rendimenti e le consuete quote percentuali di portafoglio, perché i costi di revisione sono collegati ai prezzi e alle quantità e non alle quote percentuali di portafoglio.

### **2.2.2.1 I costi di transazione**

Così come Smith, anche Pogue suddivide i costi di transazione in due tipologie: le commissioni di intermediazione (*brokerage fees*) proporzionali alle quantità scambiate<sup>63</sup> e i costi di illiquidità (*marketability costs*), cioè gli effetti sui prezzi derivanti dalla illiquidità degli assets. I costi di illiquidità sono considerati legati alla liquidità del titolo selezionato, quindi, per ogni titolo, si considera un volume atteso di scambi al quale è collegato il costo di transazione in proporzione alle azioni acquistate o vendute. La figura sotto riportata offre una esemplificazione grafica della struttura dei costi di transazione per un generico titolo  $j$ , in cui l'area tratteggiata rappresenta l'aspettativa dell'investitore circa i costi che saranno necessari per acquistare o vendere un determinato volume di azioni del titolo  $j$ , in aggiunta alle commissioni di intermediazione.

---

<sup>62</sup> POGUE G. A., *An extension of the Markowitz portfolio selection model to include variable transaction costs, short sales, leverage policies and taxes*, Journal of Finance, 25, 1970, pp. 1005-1028.

<sup>63</sup> Definendo con  $c_j$  la frazione del prezzo corrente di mercato che deve essere pagata nelle commissioni di intermediazione, il costo di acquisto del numero di azioni  $x_j^+$  del titolo  $j$  è dato da  $c_j * x_j^+$ . Lo stesso vale per il costo di vendita delle azioni  $x_j^-$ .

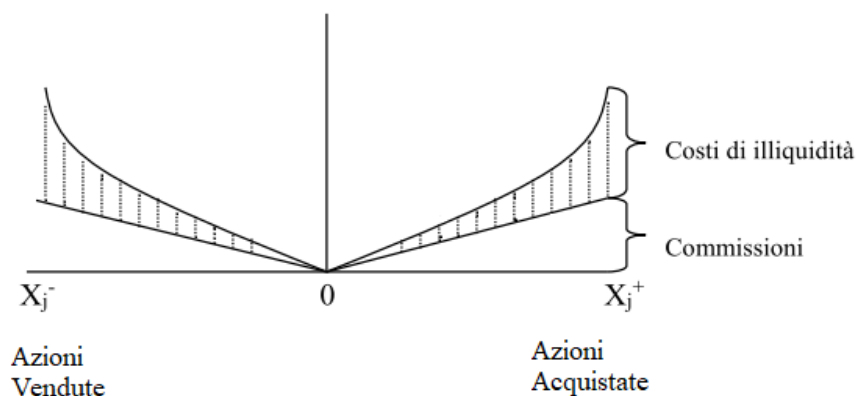


Figura 3: Costi di transazione teorici per un generico titolo  $j$ .

Per approssimare tali costi, Pogue utilizza una funzione lineare a tratti, in cui i punti dove variano le pendenze dei segmenti lineari corrispondono a determinate percentuali di volumi scambiati per il titolo  $j$ , come esemplificato nella figura sottostante.

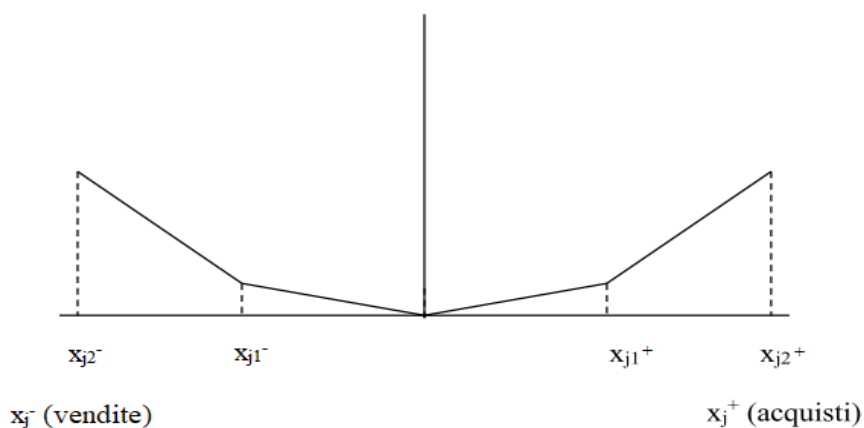


Figura 4: Costi di transazione per il titolo  $j$ .

Indichiamo con  $x_{ji}^+$  il numero di azioni del titolo  $j$  acquistate nel segmento lineare  $i$ -esimo della funzione lineare a tratti dei costi di transazione, con  $x_j^+$  il

numero totale di azioni acquistate del titolo  $j$ <sup>64</sup> per revisionare il portafoglio e con  $r_{ji}^+$  il costo di transazione (in dollari) per l'acquisto di un'azione del titolo  $j$  nel segmento lineare  $i$ -esimo. Considerando che una simile notazione vale anche per i segmenti di vendita delle azioni nella curva dei costi di transazione, Pogue definisce il numero di azioni (del titolo  $j$ ) scambiate in termini di acquisti e vendite nei vari segmenti lineari della curva dei costi. Il numero di azioni scambiate del titolo  $j$  è dato da

$$X_j - X_j(0) = x_j^+ - x_j^- = \sum_{i=1}^{m^+} x_{ji}^+ - \sum_{i=1}^{m^-} x_{ji}^- ,$$

in cui  $X_j$  indica il numero di azioni presenti in portafoglio dopo la revisione e  $X_j(0)$  il numero di azioni presenti in portafoglio fino al momento della revisione.

Da questa equivalenza è possibile ricavare i costi di transazione da sostenere per la revisione del portafoglio:

$$CT = \sum_{j=1}^{m^+} r_{ji}^+ x_{ji}^+ + \sum_{j=1}^{m^-} r_{ji}^- x_{ji}^- .$$

Come già anticipato nel modello di Smith, i costi di transazione rappresentano una componente negativa all'interno del vincolo di budget del processo di revisione e di conseguenza riducono la quantità di risorse disponibili per revisionare il portafoglio.

### 2.2.2.2 La tassazione

L'investitore è interessato al valore di mercato finale del proprio portafoglio, al netto delle imposte sui dividendi percepiti durante il periodo di investimento e sulle plusvalenze (*capital gains*) derivanti dall'apprezzamento del portafoglio.

Definendo con  $P_j(0)$  il prezzo di mercato corrente del titolo  $j$ , con  $P_j(A)$  il prezzo di acquisto medio delle azioni del titolo  $j$  presenti in portafoglio prima della revisione, con  $T_C$  l'aliquota fiscale applicata alle plusvalenze (*capital gains*) e con  $T_I$  l'aliquota fiscale applicata ai dividendi, quando si revisiona il portafoglio iniziale

---

<sup>64</sup>  $x_j^+ = \sum_{i=1}^{m^+} x_{ji}^+$ , con  $i = 1, \dots, m^+$ .

$X(0)$ , il *cash flow* derivante da plusvalenze o minusvalenze sui titoli detenuti in portafoglio è dato da

$$T_c \sum_{j=1}^N x_j^- [P_j(0) - P_j(A)],$$

in cui  $x_j^-$  indica il numero di azioni vendute del titolo  $j$ . Questa componente sarà inclusa nel vincolo di budget del processo di revisione.

Quindi il valore atteso futuro del portafoglio, al netto delle passività fiscali, è dato dalla formula

$$\begin{aligned} \tilde{M}_P^T &= \sum_{j=1}^N X_j \tilde{P}_j + \left[ \sum_{j=1}^N X_j \tilde{D}_j \right] (1 - T_l) \\ &- T_c \left[ \sum_{j=1}^N X_j \left( \tilde{P}_j - P_j(0) \right) + \sum_{j=1}^N (X_j(0) - x_j^-) (P_j(0) - P_j(A)) \right]. \end{aligned}$$

La prima sommatoria si riferisce al valore di mercato del portafoglio finale nell'istante temporale  $t = 1$ , in cui il numero di azioni  $X_j$  è moltiplicato per il prezzo atteso futuro  $\tilde{P}_j$ . La seconda sommatoria rappresenta i dividendi percepiti durante il periodo di investimento al netto delle tasse, con  $\tilde{D}_j$  che indica i dividendi ricevuti per ogni azione del titolo  $j$ . La terza quantità, quella tra parentesi quadre, rappresenta le tasse sul *capital gain*, in cui la prima parte (la prima sommatoria all'interno delle parentesi quadre) indica le imposte sulle plusvalenze dovute all'apprezzamento del titolo durante il periodo futuro di investimento (cioè tra  $t = 0$  e  $t = 1$ , con  $P_j(0)$  il prezzo all'istante  $t = 0$ ), mentre la seconda parte (seconda sommatoria all'interno delle parentesi quadre) rappresenta il *capital gain* realizzato nel periodo precedente (cioè tra  $t = -1$  e  $t = 0$ ) ma non è ancora stato tassato in quanto all'istante  $t = 0$  un numero di azioni pari a  $X_j(0) - x_j^-$  non è stato ceduto per essere tenuto in portafoglio fino all'istante  $t = 1$ . Si consideri la figura sottostante che illustra come si distribuiscono temporalmente i *capital gains*.

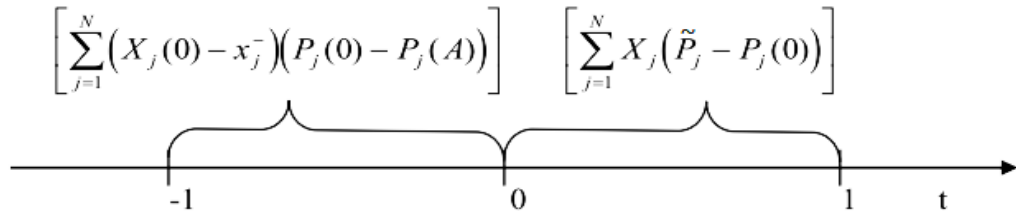


Figura 5: *Capital gains* relativi a diversi periodi, da corrispondere in  $t=1$ .

Considerando che

$$X_j - X_j(0) = x_j^+ - x_j^-,$$

l'equazione precedente relativa al valore atteso del portafoglio al netto della tassazione può essere riscritta nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_P^T &= (1 - T_C) \left[ \sum_{j=1}^N X_j \tilde{P}_j \right] + (1 - T_I) \left[ \sum_{j=1}^N X_j \tilde{D}_j \right] \\ &+ T_C \left[ \sum_{j=1}^N (X_j - x_j^+) P_j(A) + \sum_{j=1}^N x_j^+ P_j(0) \right]. \end{aligned}$$

Per completezza si mostra che tale espressione può essere scritta in termini di quantità vettoriali:

$$\tilde{M}_P^T = X \left[ (1 - T_C) \tilde{P} + (1 - T_I) \tilde{D} \right] + T_C [(X - X^+) P(A) + X^+ P(0)],$$

in cui  $X$  rappresenta il vettore con il numero di azioni dei vari titoli del portafoglio finale,  $\tilde{P}$  il vettore dei prezzi al termine del periodo di investimento,  $\tilde{D}$  il vettore dei dividendi percepiti,  $P(A)$  il vettore dei prezzi medi di acquisto dei titoli presenti nel portafoglio prima della revisione,  $P(0)$  il vettore dei prezzi al momento della revisione e  $X^+$  il vettore con il numero di azioni acquistate nel processo di revisione.

Si prosegue la descrizione del modello Pogue trattando le vendite allo scoperto, i prestiti garantiti e non garantiti, che incidono sul bilanciamento del budget necessario per la revisione e quindi sul valore finale del portafoglio.

### 2.2.2.3 Le vendite allo scoperto

Nel proprio modello Pogue, al fine di renderlo più aderente alla realtà, tiene conto anche del particolare meccanismo che regola le vendite allo scoperto nel mercato statunitense.

Al portafoglio contenente gli  $N$  titoli iniziali  $X_j$ , con  $j = 1, \dots, N$ , viene affiancato un insieme aggiuntivo di  $N$  titoli  $X_{N+j}$ , con  $j = 1, \dots, N$ , che rappresentano le posizioni corte (cioè le quote vendute allo scoperto) sui titoli originali. Si definisce, infatti,  $X_{N+j}$ , con  $j = 1, \dots, N$ , il numero di azioni del titolo  $j$  detenute durante il periodo di investimento.

Quando l'investitore assume una posizione corta, i proventi derivanti dalla vendita allo scoperto vengono trattenuti dal broker fino alla chiusura della posizione corta (*short position*). Questo deposito deve essere adeguato al variare dei prezzi di mercato in modo che il suo valore sia pari a quello di mercato dei titoli venduti allo scoperto. Inoltre, l'investitore deve fornire, allo stesso broker, delle garanzie pari al valore di mercato dei titoli presi in prestito e venduti allo scoperto. L'investitore non guadagna alcun interesse sul deposito detenuto dal broker relativo all'ammontare derivante dalla vendita allo scoperto (cioè il saldo dello *short account*), ma guadagna un interesse, pari a  $r_m$  (cioè il tasso sui prestiti del broker), sulle garanzie detenute dal broker. Praticamente, la somma che rimane al broker e che deve essere considerata nel vincolo di budget è pari a due volte la somma che si otterrebbe dalla semplice vendita delle azioni allo scoperto.

Una delle funzioni della revisione è quella di adeguare i depositi e le garanzie per le "posizioni corte" esistenti, nonché per quelle nuove. Definendo con  $C(0)$  l'ammontare dei depositi e delle garanzie prima della revisione del portafoglio

$$C(0) = 2 \sum_{j=N+1}^{2N} X_j P_j(0)$$

e con  $C(1)$  il saldo richiesto dopo la revisione del portafoglio e lasciato in deposito presso il broker fino all'istante  $t = 1$  (cioè al termine del periodo di investimento), nel processo di revisione del portafoglio l'equazione del budget deve includere una quantità pari a  $C(1) - C(0)$ , che rappresenta la variazione dei depositi presso il broker dovuta ai cambiamenti nei requisiti di versamento e di garanzia richiesti.

#### 2.2.2.4 I prestiti garantiti

Se le politiche di portafoglio dell'investitore lo consentono, Pogue inserisce nel proprio modello la possibilità di ottenere ulteriori fondi, e quindi di indebitarsi, per effettuare acquisti e vendite allo scoperto. Nel mercato statunitense il finanziamento può essere accordato dal proprio broker e i titoli acquistati fanno da garanzia per il prestito concesso. Tale garanzia, tuttavia, rimane di proprietà dell'investitore, che ha diritto a qualsiasi dividendo pagato sul titolo. Il broker, ovviamente, riceve un interesse sull'ammontare del debito concesso all'investitore.

Quando si procede con l'acquisto di titoli con margine<sup>65</sup> (cioè mediante indebitamento) una percentuale specifica del prezzo è anticipata dall'investitore mentre il rimanente è preso in prestito dal broker. La parte del prezzo di acquisto sostenuta dall'investitore è determinata dalla Federal Reserve<sup>66</sup>. Questa percentuale del prezzo di acquisto dei titoli che l'investitore è tenuto a pagare è chiamata margine iniziale (*initial margin*) e si applica solo nel giorno dell'acquisto. Il giorno dopo la transazione, invece, al titolo viene applicato un margine di mantenimento (*maintenance margin*), che è inferiore al margine iniziale ed è determinato dalla Borsa valori<sup>67</sup>. I singoli broker, tuttavia, hanno la libertà di aumentare il margine di mantenimento, spesso nel caso di titoli a basso prezzo o considerati speculativi<sup>68</sup>. Per l'acquisto di titoli, il margine iniziale può essere espresso come:

---

<sup>65</sup> L'assunzione in prestito di denaro per l'acquisto di titoli è nota come "acquisto con margine". Qualora si intenda prendere in prestito del denaro dal proprio broker per acquistare delle azioni, l'investitore è tenuto ad aprire un conto a margine con il proprio broker e attenersi ai requisiti di margine del proprio broker. Il prestito è garantito dai titoli e dalla liquidità dell'investitore. Qualora il valore dell'azione diminuisca eccessivamente, l'investitore è tenuto a versare ulteriore liquidità nel proprio conto, oppure vendere una porzione del titolo. In merito, si consulti il sito [www.interactivebrokers.com](http://www.interactivebrokers.com).

<sup>66</sup> Negli USA, la normativa prevista dalla Fed permette agli investitori di prendere in prestito fino al 50% del prezzo dei titoli per l'acquisto a margine.

<sup>67</sup> Nel mercato statunitense, una volta che l'investitore ha iniziato ad acquistare un'azione con margine, il NYSE e il FINRA (Financial Industry Regulatory Authority) richiedono il mantenimento di un importo minimo di capitale nel conto a margine dell'investitore. Queste normative richiedono agli investitori di disporre di un importo, noto con il nome di margine di mantenimento, pari ad almeno il 25% del valore totale di mercato dei titoli detenuti nel proprio conto a margine.

<sup>68</sup> I broker sono autorizzati a fissare i propri requisiti di margine minimi, noti come "house requirements". Alcuni broker avanzano condizioni più flessibili per l'erogazione dei prestiti rispetto ad



$$\text{Margine} = \frac{\text{Valore della garanzia} - \text{Debito}}{\text{Valore della garanzia}}.$$

Tali requisiti si applicano anche alle vendite allo scoperto con margine, in cui è richiesto il deposito, presso il broker, di una percentuale specifica della garanzia. Il margine sulle *short positions* è dato da:

$$\text{Margine} = \frac{\text{Deposito} - \text{Valore di mercato della posizione corta} + \text{Garanzia}}{\text{Valore di mercato della posizione corta}}.$$

I requisiti del margine iniziale e del margine di mantenimento si applicano alle vendite allo scoperto in modo analogo alle operazioni di acquisto dei titoli.

Definendo con  $\beta_j^I$  il margine iniziale per l'acquisto del titolo  $j$  ( $j = 1, \dots, 2N$ ), con  $\beta_j^M$  il margine di mantenimento per le azioni del titolo  $j$  ( $j = 1, \dots, 2N$ ), Pogue formula delle funzioni relative a  $M(1)$  e a  $M(0)$ , che indicano gli importi totali dei prestiti (dei broker) detenuti rispettivamente prima e dopo la revisione del portafoglio all'inizio del periodo di investimento:

$$M(1) = M^I(1) + M^M(1),$$

in cui

$$M^I(1) = M_L^I(1) + M_S^I(1) \leq \sum_{j=1}^{2N} (1 - \beta_j^I) x_j^+ P_j(0)$$

$$M^M(1) = M_L^M(1) + M_S^M(1) \leq \sum_{j=1}^{2N} (1 - \beta_j^M) (x_j - x_j^+) P_j(0).$$

Si ricorda che  $x_j$  si riferisce al numero di azioni del titolo  $j$  possedute durante il periodo di investimento;  $x_j^+$  è il numero di azioni del titolo  $j$  acquistate con la revisione;  $P_j(0)$  è il prezzo del titolo  $j$  all'inizio del periodo di investimento (dopo la revisione).

---

altri broker e i termini del prestito possono variare da un cliente all'altro, ma i broker sono tenuti a operare sempre nel rispetto dei parametri dei requisiti di margine fissati dagli enti regolatori.

Il valore pari a  $M(1) - M(0)$  deve essere incluso nell'equazione di bilancio per rappresentare la variazione dei prestiti dei broker in seguito alla revisione del portafoglio.

### 2.2.2.5 I prestiti non garantiti

Oltre alla possibilità di vedersi accordare un prestito (garantito) dal proprio broker, l'investitore può ottenere dei fondi per gli investimenti anche dalla banca mediante dei prestiti non garantiti. Un esempio potrebbero essere i prestiti bancari non garantiti. Queste passività sarebbero garantite solo dalla liquidità dei titoli in portafoglio e dalla solvibilità dell'investitore nel momento del rimborso. L'ammontare dei prestiti a margine<sup>69</sup> concesso all'investitore dipende dalle stime dei creditori circa la sua capacità di rimborsare il debito.

Indicando con  $B(1)$  l'importo dei prestiti non garantiti durante il periodo di investimento e con  $B(0)$  l'importo originario del debito non garantito (prima della revisione del portafoglio), l'equazione relativa al budget disponibile dell'investitore deve considerare un valore pari a  $B(1) - B(0)$ , per tenere conto dei flussi derivanti dal cambiamento del livello di esposizione al debito non garantito dopo la revisione del portafoglio.

Si presume che il prestito a margine garantito  $M(1)$  e il prestito bancario non garantito  $B(1)$  siano detenuti per tutta la durata del periodo di investimento e si suppone che i creditori dell'investitore limitino l'importo del credito concesso in modo tale che il patrimonio netto finale dell'investitore non sia minore di zero. Quindi l'investitore dovrebbe avere liquidità e titoli non vincolati sufficienti per soddisfare le passività del proprio portafoglio.

Il valore netto (atteso) del portafoglio alla fine del periodo di investimento,  $N\tilde{W}$  (=net worth), è dato da:

---

<sup>69</sup> Il prestito a margine è l'ammontare di denaro che un investitore prende in prestito dal proprio broker per acquistare titoli.

$$\begin{aligned} \tilde{N}W = & \sum_{j=1}^N X_j \tilde{P}_j + (1 - T_I) \sum_{j=1}^N X_j \tilde{D}_j + (1 + \frac{r_M}{2})C(1) - \sum_{j=N+1}^{2N} X_j \tilde{P}_j - \\ & (1 - T_I) \sum_{j=N+1}^{2N} X_j \tilde{D}_j - (1 + r_M)M(1) - (1 + r_B)B(1) - \tilde{T}, \end{aligned}$$

in cui  $r_M$  è il costo al netto delle imposte dei prestiti (garantiti) dei broker,  $r_B$  è il costo al netto delle imposte del prestito non garantito e  $\tilde{T}$  è il debito fiscale sui *capital gains* del portafoglio non ancora realizzati<sup>70</sup>.

Riprendendo la precedente argomentazione sulla tassazione del *capital gains*, l'equazione di  $\tilde{T}$  risulta:

$$\begin{aligned} \tilde{T} = & T_C \left[ \sum_{j=1}^N (X_j - X_{N+j}) \left( \tilde{P}_j - P_j(0) \right) \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^N [X_j(0) - x_j^- - X_{N+j}(0) + X_{N+j}^-] [P_j(0) - P_j(A)] \right]. \end{aligned}$$

L'equazione del valore netto (atteso) futuro del portafoglio può essere scritta in forma vettoriale (i pedici L e S sui vettori indicano rispettivamente posizione lunga e corta):

$$\begin{aligned} \tilde{N}W = & (X_L - X_S)' \left[ (1 - T_C) \tilde{P} + (1 - T_I) \tilde{D} \right] + T_C [(X_L - X_S - X_L^+ + \\ & X_S^+) P(A) + (X_L^+ - X_S^+) P(0)] + \left( 1 + \frac{r_M}{2} \right) C(1) - (1 + r_M)M(1) - (1 + r_B)B(1), \end{aligned}$$

con  $X_L, X_S, X_L^+, X_S^+, \tilde{P}, \tilde{D}, P(A)$  e  $P(0)$  considerati vettori.

L'ipotesi che i creditori non forniscano fondi a meno che non siano certi della positività del patrimonio netto degli investitori, implica la considerazione del vincolo probabilistico

<sup>70</sup> Parte del *capital gain* è atteso nel periodo futuro e parte è già stato realizzato nel periodo precedente ma ancora non è stato tassato in quanto un numero di azioni pari a  $X_j(0) - x_j^- - X_{N+j}(0) + X_{N+j}^-$  non è stato ceduto e verrà tenuto in portafoglio fino all'istante  $t=1$ .

$$P(\tilde{N}W \leq 0) \leq \varepsilon, \text{ in cui } \varepsilon \text{ è vicino a zero.}$$

Pogue presenta dettagliatamente la tematica della conversione del vincolo probabilistico in un equivalente deterministico utilizzando il lemma esteso di Tchebysheff. Tralasciamo la trattazione di tale procedura rinviando al lavoro originale per maggiori dettagli.

In molti casi pratici, possono esistere delle restrizioni legali sulle passività del portafoglio tali che questo vincolo probabilistico non risulta essere vincolante. Nei casi in cui non esistano passività, questo vincolo può essere ignorato. Nei casi in cui esistano alcune passività, le soluzioni ottenute ignorando tale vincolo potrebbero essere esaminate per determinare se il vincolo sia stato violato. Se violato, le restrizioni sulle passività del portafoglio potrebbero essere rafforzate e il processo ripetuto.

### 2.2.2.6 Il vincolo di *budget*

Il vincolo di budget assicura il bilanciamento nell'impiego dei fondi quando il portafoglio viene revisionato.

Indichiamo con  $X_N(0)$  il saldo di cassa iniziale e con  $F(0)$  i flussi di cassa esogeni che devono essere investiti o sborsati in modo ottimale durante il processo di revisione del portafoglio. Il calcolo per il saldo di cassa dopo la revisione,  $X_N$ , nonché le componenti del vincolo relativo al budget, è riportato nella tabella seguente.

Voci	Componenti	Descrizione
1	$+X_N(0)$	Saldo di cassa iniziale
2	$+F(0)$	Flussi di cassa esogeni
3	$-\sum_{j=1}^{2N} \left[ \sum_{i=1}^{m+} r_{ji}^+ x_{ji}^+ + \sum_{i=1}^{m-} r_{ji}^- x_{ji}^- \right]$	Costi di transazione

4	$-\sum_{j=1}^N (X_j - X_j(0))P_j(0)$	Costo per acquisto titoli
5	$+\sum_{j=N+1}^{2N} (X_j - X_j(0))P_j(0)$	Liquidità da <i>short sales</i>
6	$-(C(1) - C(0))$	Variazione depositi di garanzia
7	$+(M(1) - M(0))$	Incremento debiti garantiti
8	$+(B(1) - B(0))$	Incremento debiti non garantiti
9	$-T_C \sum_{j=1}^N (X_j^- - X_{N+j}^-)(P_j(0) - P_j(A))$	Tassazione <i>capital gains</i>

**Tabella 1:** Calcolo per il vincolo di budget nel processo di revisione.

La liquidità generata dalla vendita dei titoli presi in prestito (voce 5) è assorbita dagli aumenti dei depositi richiesti con il broker (voce 6). Allo stesso modo, quando le posizioni *short* sono coperte, i depositi presso il broker si riducono, generando cassa.

Al saldo di cassa iniziale e ai flussi di cassa esogeni (ad esempio i dividendi accumulati dal precedente periodo di investimento) vengono sommati o sottratti i costi di transazione, il costo per l'acquisto dei titoli, la variazione dei depositi presso il broker, la variazione dei debiti garantiti, la variazione dei debiti non garantiti e le tasse sui *capital gains* realizzati con la revisione.

### 2.2.2.7 La formulazione del modello

Si procede a questo punto con il modello di selezione del portafoglio che massimizza l'utilità attesa dell'investitore.

Il portafoglio  $X$ , composto da attività e passività, può essere rappresentato nel seguente modo:

$$X = \begin{bmatrix} X_L \\ X_S \\ B(1) \\ M(1) \end{bmatrix}.$$

La funzione da massimizzare è data da:

$$Z = \theta E \left( \tilde{N}W(X) \right) - \sigma^2 \left( \tilde{N}W(X) \right), \text{ con } \theta \geq 0,$$

in cui

$$E \left( \tilde{N}W(X) \right) = (X_L - X_S)' \left[ (1 - T_C) \tilde{P} + (1 - T_I) \tilde{D} \right] + T_C [(X_L - X_S - X_L^+ + X_S^+) P(A) + (X_L^+ - X_S^+) P(0)] + \left( 1 + \frac{r_M}{2} \right) C(1) - (1 + r_M) M(1) - (1 + r_B) B(1);$$

$$\sigma^2 \left( \tilde{N}W(X) \right) = (X_L - X_S)' \Sigma^T (X_L - X_S),$$

con  $\Sigma^T$  matrice NxN di varianza-covarianza tra gli assets.

La prima formula indica il valore netto atteso del portafoglio; la seconda formula, invece, indica la varianza del valore netto futuro del portafoglio.

Facendo variare il parametro  $\theta$  da 0 a  $\infty$  si ottiene un insieme di portafogli efficienti che costituiscono una nuova frontiera efficiente. Il valore di  $\theta$  da inserire nel problema di ottimizzazione dipende dall'avversione al rischio del singolo investitore.

La funzione da massimizzare è soggetta ai vincoli di seguito riportati:

1) Vincolo di bilancio:

$$X_N = X_N(0) + F(0) - \sum_{j=1}^{2N} \left[ \sum_{i=1}^{m^+} r_{ji}^+ x_{ji}^+ + \sum_{i=1}^{m^-} r_{ji}^- x_{ji}^- \right] - \sum_{j=1}^N \left( X_j - X_j(0) \right) P_j(0) + \sum_{j=N+1}^{2N} \left( X_j - X_j(0) \right) P_j(0) - (C(1) - C(0)) + (M(1) - M(0)) + (B(1) - B(0)) - T_C \sum_{j=1}^N (X_j^- - X_{N+j}^-) (P_j(0) - P_j(A)) = 0.$$

Il risultato finale deve essere uguale a zero perché la revisione deve avvenire utilizzando il denaro inizialmente investito, senza ulteriori versamenti o prelievi.

2) Vincolo relativo al deposito, presso il broker, dei proventi derivanti dalle vendite allo scoperto e delle garanzie:

$$C(1) = 2 \sum_{j=N+1}^{2N} X_j P_j(0).$$

3) Vincoli relativi alla curva dei costi di transazione:

$$X_j - X_j(0) = x_j^+ - x_j^- = \sum_{i=1}^{m^+} x_{ji}^+ - \sum_{i=1}^{m^-} x_{ji}^- ,$$

$x_{ji}^+ \leq \hat{x}_{ji}^+$ ,  $\hat{x}_{ji}^+$  indica il limite superiore del segmento lineare di acquisto i-esimo della curva dei costi di transazione;

$x_{ji}^- \leq \hat{x}_{ji}^-$ ,  $\hat{x}_{ji}^-$  indica il limite superiore del segmento lineare di vendita i-esimo della curva dei costi di transazione.

4) Vincoli sui prestiti garantiti:

$$M(1) \leq \sum_{j=1}^{2N} (1 - \beta_j^l) x_j^+ P_j(0) + \sum_{j=1}^{2N} (1 - \beta_j^M) (x_j - x_j^+) P_j(0).$$

5) Vincoli sulle passività non garantite del portafoglio:

$$E \left( \tilde{N}W(X) \right) + k\sigma \left( \tilde{N}W(X) \right) \geq 0, \text{ con } k < 0.$$

6) Vincoli di non negatività generali:

$$X_j \geq 0, j=1, \dots, 2N;$$

$$x_{ji}^+ \geq 0, j=1, \dots, 2N, i=1, \dots, m^+;$$

$$x_{ji}^- \geq 0, j=1, \dots, 2N, i=1, \dots, m^-;$$

$$M(1) \geq 0;$$

$$B(1) \geq 0.$$

Pogue mostra che la frontiera efficiente dei portafogli senza vincoli sulle vendite allo scoperto domina quella in cui tali vendite non sono ammesse. Una tipica situazione è illustrata nella figura sottostante, in cui la curva BB rappresenta la frontiera efficiente che include le vendite allo scoperto e AA rappresenta la frontiera efficiente che esclude le vendite allo scoperto.

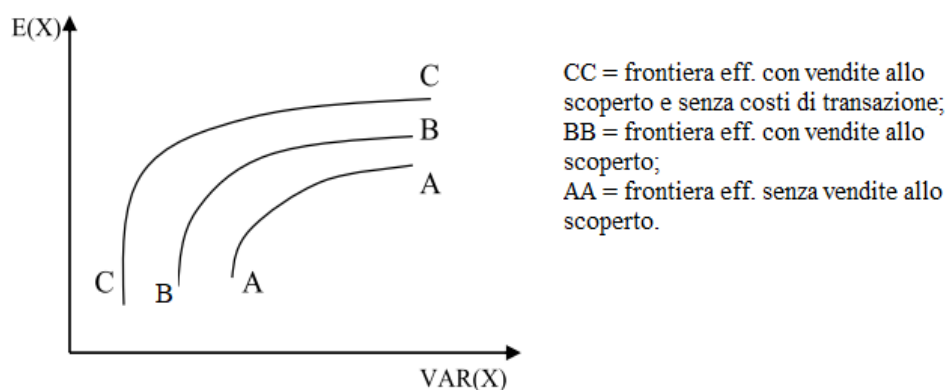


Figura 6: Esempificazione grafica dell'influenza esercitata dal vincolo sulle vendite allo scoperto nella determinazione della frontiera efficiente.

La curva CC rappresenta la frontiera BB con l'eccezione che i costi di transazione sono considerati pari a zero e domina tutte le altre frontiere, ma sappiamo essere un'alternativa fittizia in quanto non considera i costi di transazione.

Pogue ci fa capire che se utilizziamo un modello che non comprende le vendite allo scoperto quando queste sono ammesse, si rischia di non effettuare una scelta ottimale e di collocarsi, ad esempio, sulla frontiera efficiente AA (che non contempla le vendite allo scoperto), trascurando la possibilità di poter scegliere i portafogli della frontiera efficiente BB in cui, appunto, è ammessa la vendita allo scoperto.

In conclusione, il problema di programmazione matematica di Pogue per affrontare la revisione è di tipo Markowitz-like, con l'aggiunta di numerosi vincoli che rendono il problema coerente con le dinamiche dei mercati finanziari reali. Tuttavia, proprio per il fatto che questo approccio considera tutti gli aspetti caratterizzanti il processo di revisione, da un punto di vista pratico non è facilmente trattabile. Nel capitolo successivo di questa tesi, infatti, si affronterà lo sviluppo di una variante del modello di Pogue con lo studio di un caso pratico mediante l'applicazione del modello sui mercati finanziari.

## 2.3 Modelli “moderni”

Presentiamo ora due modelli, già citati nel paragrafo 2.1, che ci consentono di introdurre delle tematiche necessarie per lo sviluppo di una variante del modello di Pogue, di cui parleremo nel capitolo III.



Il primo modello, quello di Guastaroba *et al.*<sup>71</sup>, studia, in un primo momento, il processo di ottimizzazione del portafoglio in un contesto mono-periodale, utilizzando il CVaR come misura di rischio e tenendo conto dei costi di transazione; successivamente gli autori introducono una variante di questo modello per affrontare il processo di revisione del portafoglio a livello multi-periodale.

Nel secondo modello preso in considerazione, gli autori Corazza *et al.*<sup>72</sup> si concentrano su una classe di misure di rischio che utilizza le informazioni contenute su entrambe le code della distribuzione dei rendimenti e presentano un modello di selezione del portafoglio non lineare, che tiene conto di diversi vincoli a variabili miste-intere solitamente utilizzati nella pratica di gestione dei portafogli. Per risolvere questo modello gli autori si servono della metà-euristica bio-ispirata *Particle Swarm Optimization*<sup>73</sup>, applicandola ad una riformulazione del modello in cui viene introdotta una *exact penalty function* per trasformare il problema di selezione del portafoglio iniziale, con vincoli a variabili miste-intere, in un problema equivalente di minimizzazione non vincolato, anche se non differenziabile e non lineare.

### 2.3.1 Il modello di Guastaroba-Mansini-Speranza

Sia  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  un insieme di titoli rischiosi (disponibili per l'investimento) e  $R_j$  la variabile casuale che rappresenta il tasso di rendimento del titolo  $j$  ( $j \in N$ ) con media  $r_j = E[R_j]$ . Si considerino  $T$  scenari con uguale probabilità  $p_t = 1/T$  ( $t = 1, \dots, T$ ) e si supponga che per ogni variabile casuale  $R_j$  sia nota la sua realizzazione  $r_{jt}$  (ricavata dai dati storici) nello scenario  $t$ . Il tasso di rendimento medio del titolo  $j$  è calcolato come

<sup>71</sup> GUASTAROBA G., MANSINI R., SPERANZA M. G., *Models and simulations for portfolio rebalancing*, Computational Economics, 33, 2009, pp. 237-262.

<sup>72</sup> CORAZZA M., FASANO G., GUSSO R., *Particle swarm optimization with non-smooth penalty reformulation, for a complex portfolio selection problem*, Applied Mathematics and Computation, 224, 2013, pp. 611-624.

<sup>73</sup> La Particle Swarm Optimization (PSO) è un algoritmo iterativo di ispirazione biologica per l'ottimizzazione non vincolata. Nello specifico, è una meta-euristica evolutiva di tipo *population-based* (cioè prevede la generazione e la gestione di un insieme di soluzioni definito "popolazione") ispirata al comportamento sociale degli stormi di uccelli o dei banchi di pesci.

$$r_j = E[R_j] = \sum_{t=1}^T p_t r_{jt} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{jt}.$$

Si indichi con  $w_j, j = 1, \dots, n$ , i pesi del portafoglio, cioè le frazioni di capitale investite nei titoli, la cui somma è supposta uguale a uno e si ipotizzi che non siano consentite le vendite allo scoperto, cioè  $w_j \geq 0$  per  $j = 1, \dots, n$ . Per ogni portafoglio  $w$  si definisce la variabile casuale  $R_w = \sum_{j=1}^n R_j w_j$  che rappresenta il rendimento del portafoglio, con il valore atteso dato da  $\mu(w) = E[R_w]$ . Considerando con  $\mu_t = \sum_{j=1}^n r_{jt} w_j$  la realizzazione del rendimento del portafoglio  $R_w$  nello scenario  $t$ , allora

$$E[R_w] = \sum_{t=1}^T p_t \mu_t = \sum_{t=1}^T \frac{1}{T} \left( \sum_{j=1}^n r_{jt} w_j \right) = \sum_{j=1}^n r_j w_j.$$

Young<sup>74</sup> ha proposto di selezionare il portafoglio basandosi sulla massimizzazione della realizzazione peggiore del portafoglio stesso, cioè  $\max M(w) = \{\min_{t=1, \dots, T} \mu_t\}$ . Alternativamente a considerare il solo scenario peggiore, si può massimizzare la media di un quantile delle peggiori realizzazioni, cioè il *Conditional Value-at-Risk* per un dato livello di confidenza  $0 < \beta \leq 1$ :

$$M_\beta(w) = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta F_w^{(-1)}(\alpha) d\alpha,$$

in cui  $F_w^{(-1)}(\alpha) = \inf\{x: F_w(x) \geq \alpha\}$  è la funzione inversa della funzione di distribuzione cumulativa dei rendimenti  $F_w(x) = P\{R_w \leq x\}$ .

Dato che il rendimento del portafoglio è una variabile casuale rappresentata dalle sue realizzazioni  $\mu_t$ , il *Conditional Value-at-Risk* è definito come il rendimento medio del portafoglio nei  $k$  scenari peggiori, in cui  $k = \beta T$ .

Gli autori Guastaroba, Mansini e Speranza definiscono il problema di ottimizzazione del portafoglio, basato su questa misura di rischio, “modello CVaR( $\beta$ )”, che può essere formulato come il seguente problema di programmazione lineare (*Linear Programming problem*):

---

<sup>74</sup> YOUNG M. R., *A minimax portfolio selection rule with linear programming solution*, Management Science, 44, 1998, pp. 673-683.

$$M_{\beta}(w) = \max q - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t,$$

soggetto ai vincoli:

$$q - \mu_t \leq d_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

$$\sum_{j=1}^N r_j w_j \geq \mu_0,$$

$$\sum_{j=1}^N w_j = 1,$$

$$w_j \geq 0, \quad j \in N$$

$$d_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T,$$

in cui  $q$  è una variabile ausiliaria che rappresenta il  $\beta$ -quantile;  $\mu_0$  è un parametro che rappresenta il tasso minimo richiesto di rendimento del portafoglio; la variabile non negativa  $d_t$ , con  $t = 1, \dots, T$ , misura la deviazione positiva massima della realizzazione  $\mu_t$  dal quantile  $\beta$ , cioè  $d_t = \max\{0, q - \mu_t\}$ .

### 2.3.1.1 Il modello CVaR( $\beta$ ) mono-periodale con i costi di transazione

Gli autori utilizzano la misura di rischio CVaR per gestire la situazione in cui un investitore seleziona in modo ottimale un portafoglio e lo mantiene fino alla fine del periodo di investimento (*buy and hold strategy*). Per ciascun titolo selezionato, l'investitore sostiene un costo fisso e proporzionale. Si supponga che i titoli possano essere acquistati in frazioni di unità e si indichi con  $x = (x_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , il vettore delle variabili decisionali in cui  $x_j$ ,  $j \in N$ , rappresenta il valore frazionario (di un'unità di azione) investito nel titolo  $j$ . Con  $q_j$  viene definita la quotazione del titolo  $j$ ,  $j \in N$ , alla data di selezione del portafoglio (tempo 0) e con  $q_j x_j$  l'importo investito nel titolo  $j$  alla stessa data;  $f_j$  è il costo di transazione fisso sostenuto dall'investitore quando acquista il titolo  $j$ ;  $c_j$  è il costo di transazione proporzionale;  $C$  è il capitale disponibile per l'investimento;  $u_j$ ,  $j \in N$ , rappresenta il limite superiore della frazione (di unità) investita nel titolo  $j$ . Per ogni  $0 < \beta \leq 1$ , il modello CVaR( $\beta$ ) mono-periodale con i costi di transazione è definito:

$$\max_q q - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t,$$

i vincoli a cui è soggetta la funzione obiettivo sono:

$$q - \sum_{j=1}^n (r_{jt} - c_j) q_j x_j + \sum_{j=1}^n f_j z_j \leq d_t, \quad t = 1, \dots, T$$

$$\sum_{j=1}^n (r_j - c_j) q_j x_j - \sum_{j=1}^n f_j z_j \geq \mu_0 \sum_{j=1}^n q_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^n q_j x_j = C$$

$$x_j \leq u_j z_j, \quad j = 1, \dots, n$$

$$d_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$z_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Guastaroba *et al.* definiscono il modello appena presentato *basic model*. La funzione obiettivo  $\max_q q - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t$  massimizza il *Conditional Value-at-Risk*. I vincoli  $q - \sum_{j=1}^n (r_{jt} - c_j) q_j x_j + \sum_{j=1}^n f_j z_j \leq d_t$  e  $d_t \geq 0$  si riferiscono alle variabili non negative  $d_t = \max\{0, q - y_t\}$ , in cui  $y_t = \sum_{j=1}^n (r_{jt} - c_j) q_j x_j - \sum_{j=1}^n f_j z_j$  è il rendimento netto del portafoglio a tempo  $t$ . La variabile  $d_t$  misura la deviazione del rendimento netto del portafoglio  $y_t$  dal  $\beta$ -quantile  $q$  quando  $y_t < q$ , mentre è uguale a zero in tutti gli altri casi. Il vincolo  $\sum_{j=1}^n (r_j - c_j) q_j x_j - \sum_{j=1}^n f_j z_j \geq \mu_0 \sum_{j=1}^n q_j x_j$  stabilisce che il rendimento medio netto del portafoglio, espresso come la differenza tra il rendimento medio del portafoglio e i costi totali di transazione (proporzionali e fissi), deve essere almeno uguale al rendimento richiesto  $\mu_0 C$ . Il vincolo  $\sum_{j=1}^n q_j x_j = C$  impone che l'investimento totale nel portafoglio deve essere uguale a  $C$ . Il vincolo  $x_j \leq u_j z_j$  definisce il limite superiore dell'investimento in ciascun titolo. Dal momento che il costo fisso  $f_j$  viene pagato solo se si seleziona il titolo  $j$ , gli autori introducono una variabile binaria  $z_j$ ,  $j \in N$ , condizionata dal vincolo  $x_j \leq u_j z_j$  ad assumere il valore 1 se  $x_j > 0$  o qualsiasi valore se  $x_j = 0$ ;  $z_j \in \{0,1\}$  definisce i

valori della variabile binaria. Infine, la restrizione  $x_j \geq 0$  vieta le vendite allo scoperto.

I costi di transazione devono essere inseriti nel vincolo di rendimento  $\sum_{j=1}^n (r_j - c_j) q_j x_j - \sum_{j=1}^n f_j z_j \geq \mu_0 \sum_{j=1}^n q_j x_j$  per garantire un tasso di rendimento netto minimo del portafoglio. Diversamente, i costi di transazione possono essere inclusi o meno nel vincolo di budget  $\sum_{j=1}^n q_j x_j = C$ , a seconda che il capitale  $C$  sia utilizzato per acquistare i titoli e per pagare i costi di transazione o solamente per acquistare i titoli. Guastaroba *et al.* hanno scelto questa seconda alternativa, che ha il vantaggio di separare il capitale investito nel portafoglio dal denaro speso in costi di transazione. Qualora venisse considerata la prima alternativa, il vincolo  $\sum_{j=1}^n q_j x_j = C$  risulterebbe:

$$\sum_{j=1}^n \{(1 + c_j) q_j x_j + f_j z_j\} = C.$$

### 2.3.1.2 Il modello di revisione

Il modello CVaR( $\beta$ ) con i costi di transazione è utilizzato dall'investitore che segue la strategia di investimento *buy-and-hold*, cioè l'investitore acquista i titoli a propria disposizione costruendo un portafoglio da conservare durante tutto il periodo di investimento.

Ora si ipotizza che un investitore decida di revisionare il proprio portafoglio per tenere conto delle nuove informazioni di mercato, anche se questo implica dei costi aggiuntivi di transazione. Consideriamo due diversi periodi di investimento: nel primo periodo (tempo 0) l'investitore seleziona il portafoglio e lo conserva fino al secondo periodo (tempo 1), in cui può decidere di riequilibrarlo. La variabile decisionale  $x_j^1$ ,  $j \in N$ , rappresenta la quantità del titolo  $j$  presente nel portafoglio dopo la revisione;  $x_j^0$ ,  $j \in N$ , rappresenta la composizione del portafoglio al tempo 0, cioè prima della revisione. Per rappresentare correttamente un problema di revisione del portafoglio, è necessario considerare sia un costo fisso  $f_j$  per ogni titolo  $j$  venduto o acquistato sia un costo proporzionale  $c_j$ , applicato alla differenza assoluta

tra l'importo investito (relativamente al titolo  $j$ ) nel portafoglio revisionato e in quello iniziale:

$$c_j q_j |x_j^1 - x_j^0|,$$

in cui  $q_j$  indica la quotazione del titolo  $j$  nel momento della revisione. Per linearizzare tale espressione, gli autori introducono la variabile non negativa  $\delta_j$  (per ogni titolo  $j \in N$ ) e i due vincoli seguenti:

$$\delta_j \geq (x_j^1 - x_j^0),$$

$$\delta_j \geq -(x_j^1 - x_j^0).$$

Infine, per modellare correttamente il costo fisso  $f_j$ ,  $j \in N$ , gli autori utilizzano la variabile binaria  $z_j$ ,  $j \in N$ , che qui ha un ruolo diverso rispetto al *basic model*.  $z_j$  è uguale a 1 se l'investitore acquista o vende una frazione del titolo  $j$ , altrimenti assume valore 0:

$$z_j = \begin{cases} 1, & \text{se } (x_j^1 - x_j^0) > 0 \quad \text{o} \quad (x_j^1 - x_j^0) < 0, \\ 0, & \text{se } (x_j^1 - x_j^0) = 0. \end{cases}$$

Rispetto al *basic model* vengono introdotti dei nuovi limiti superiori (*upper bounds*)  $u_j^1$  sulla frazione di unità che può essere acquistata per ciascun titolo  $j$ ,  $j \in N$ . Solo le variabili decisionali  $x_j^1$  e i limiti superiori  $u_j^1$  sono stati indicizzati al tempo 1, poiché hanno un significato differente rispetto al *basic model*. Infatti tutti i parametri (ad esempio le probabilità  $p_t$  e le quotazioni  $q_j$ ) e le variabili (ad esempio quelle non negative  $d_t$  e  $\delta_j$ ) del modello di ottimizzazione seguente sono definite rispetto al tempo 1. Il modello di revisione (*rebalancing model*) può essere formulato nel modo seguente:

$$\max_q q - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t,$$

la funzione obiettivo soprariportata è soggetta ai seguenti vincoli:

$$q - \sum_{j=1}^n r_{jt} q_j x_j^1 + \sum_{j=1}^n c_j q_j \delta_j + \sum_{j=1}^n f_j z_j \leq d_t, \quad t = 1, \dots, T$$

$$\sum_{j=1}^n r_{jt} q_j x_j^1 - \sum_{j=1}^n c_j q_j \delta_j - \sum_{j=1}^n f_j z_j \geq \mu_0 \sum_{j=1}^n q_j x_j^1$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n q_j x_j^1 &= \sum_{j=1}^n q_j x_j^0 + \alpha \\
 z_j &\geq \frac{(x_j^1 - x_j^0)}{u_j^1}, \quad j = 1, \dots, n \\
 z_j &\geq -\frac{(x_j^1 - x_j^0)}{u_j^1}, \quad j = 1, \dots, n \\
 x_j^1 &\leq u_j^1 z_j, \quad j = 1, \dots, n \\
 \delta_j &\geq (x_j^1 - x_j^0), \quad j = 1, \dots, n \\
 \delta_j &\geq -(x_j^1 - x_j^0), \quad j = 1, \dots, n \\
 d_t &\geq 0, \quad t = 1, \dots, T \\
 x_j^1 &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n \\
 \delta_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n \\
 z_j &\in \{0,1\}, \quad j = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Allo stesso modo del *basic model*, la funzione obiettivo  $\max_q q - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t$ , insieme ai vincoli  $q - \sum_{j=1}^n r_{jt} q_j x_j^1 + \sum_{j=1}^n c_j q_j \delta_j + \sum_{j=1}^n f_j z_j \leq d_t$  e  $d_t \geq 0$ , determina la massimizzazione della misura di rischio (CVaR) e la definizione della variabile non negativa  $d_t$ ,  $t = 1, \dots, T$ , che misura la deviazione dal  $\beta$ -quantile. Il vincolo  $\sum_{j=1}^n r_{jt} q_j x_j^1 - \sum_{j=1}^n c_j q_j \delta_j - \sum_{j=1}^n f_j z_j \geq \mu_0 \sum_{j=1}^n q_j x_j^1$  definisce il rendimento medio del portafoglio basato sui costi di transazione (proporzionali e fissi) e impone che il rendimento netto del portafoglio sia maggiore o uguale al rendimento richiesto  $\mu_0 \sum_{j=1}^n q_j x_j^1$ , dove  $\sum_{j=1}^n q_j x_j^1$  è l'importo investito nel portafoglio al tempo 1. Il vincolo di budget  $\sum_{j=1}^n q_j x_j^1 = \sum_{j=1}^n q_j x_j^0 + \alpha$  richiede che il capitale disponibile sia uguale al valore del portafoglio iniziale al tempo 0,  $\sum_{j=1}^n q_j x_j^0$ , più una quantità addizionale (non negativa)  $\alpha$ , se disponibile<sup>75</sup>. Come già accennato, i vincoli  $\delta_j \geq (x_j^1 - x_j^0)$  e  $\delta_j \geq -(x_j^1 - x_j^0)$  consentono alla variabile  $\delta_j$

<sup>75</sup> Gli autori non specificano la funzione di questa quantità aggiuntiva  $\alpha$ , che potrebbe essere un flusso di cassa esogeno e derivare, ad esempio, dai dividendi accumulati nel precedente periodo d'investimento.

di assumere il valore dato dalla differenza assoluta  $|x_j^1 - x_j^0|$ . Infine, i vincoli  $z_j \geq \frac{(x_j^1 - x_j^0)}{u_j^1}$  e  $z_j \geq -\frac{(x_j^1 - x_j^0)}{u_j^1}$  impongono alla variabile  $z_j$  di assumere valore 1 quando  $|x_j^1 - x_j^0| \neq 0$ , cioè nel momento in cui la quantità del titolo  $j$  presente nel portfolio è stata modificata. Se  $x_j^1 - x_j^0 > 0$  (l'investitore acquista una quantità del titolo  $j$ ), allora  $\frac{(x_j^1 - x_j^0)}{u_j^1}$  è un valore positivo nell'intervallo  $(0, 1]$ , poiché  $u_j^1$  è un limite superiore (*upper bound*) di  $x_j^1$  e  $x_j^0$ . Quindi il vincolo  $z_j \geq \frac{(x_j^1 - x_j^0)}{u_j^1}$  costringe  $z_j$  a 1, mentre il vincolo  $z_j \geq -\frac{(x_j^1 - x_j^0)}{u_j^1}$  non impone alcuna restrizione reale. Invece, se  $x_j^1 - x_j^0 < 0$  (l'investitore vende una quantità del titolo  $j$ ), allora il vincolo  $z_j \geq -\frac{(x_j^1 - x_j^0)}{u_j^1}$  costringe  $z_j$  a 1, mentre il vincolo  $z_j \geq \frac{(x_j^1 - x_j^0)}{u_j^1}$  non è vincolante. In entrambi i casi in cui  $z_j = 1$  il costo fisso  $f_j$  è incluso nell'espressione del vincolo di rendimento<sup>76</sup> e nella funzione obiettivo<sup>77</sup> attraverso il vincolo  $q - \sum_{j=1}^n r_{jt} q_j x_j^1 + \sum_{j=1}^n c_j q_j \delta_j + \sum_{j=1}^n f_j z_j \leq d_t$ . Se  $x_j^1 = x_j^0$ , allora vincoli  $z_j \geq \frac{(x_j^1 - x_j^0)}{u_j^1}$  e  $z_j \geq -\frac{(x_j^1 - x_j^0)}{u_j^1}$  consentono a  $z_j$  di assumere qualsiasi valore. In questo caso, data la presenza del costo fisso nella funzione obiettivo,  $z_j$  assume valore pari a 0.

### 2.3.2 Il modello di Corazza-Fasano-Gusso

Nel proprio articolo Corazza *et al.*<sup>78</sup> affrontano il processo di selezione del portafoglio nel caso in cui si presenti un problema di programmazione matematica

---

<sup>76</sup>  $\sum_{j=1}^n r_{jt} q_j x_j^1 - \sum_{j=1}^n c_j q_j \delta_j - \sum_{j=1}^n f_j z_j \geq \mu_0 \sum_{j=1}^n q_j x_j^1$ .

<sup>77</sup>  $\max_q q - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^T p_t d_t$ .

<sup>78</sup> CORAZZA M., FASANO G., GUSSO R., *Particle swarm optimization with non-smooth penalty reformulation, for a complex portfolio selection problem*, Applied Mathematics and Computation, 224, 2013, pp. 611-624.



*NP-hard*<sup>79</sup>, cioè quando si tengono in considerazione diversi vincoli relativi alla gestione del portafoglio che possono incidere in modo determinante sulla possibilità di trovare le soluzioni di tale processo. Gli autori, inoltre, non si focalizzano più sulla varianza (come Markowitz) ma ricorrono a delle misure di rischio alternative, note come misure di rischio coerenti<sup>80</sup>. In questo modo i problemi di selezione del portafoglio che ne derivano sono piuttosto complessi e di conseguenza è necessario sviluppare degli approcci risolutivi che consentano di trovare delle soluzioni almeno sub-ottimali. Gli autori Corazza, Fasano e Gusso si sono occupati di questi problemi e hanno proposto uno strumento per affrontarli.

Come già accennato, la misura di rischio del portafoglio utilizzata rientra nel novero delle misure coerenti di rischio ed è basata sulla combinazione di momenti superiori e inferiori di ordini diversi: gli autori fanno riferimento alla *two-sided risk measure*, sviluppata per la prima volta da Chen e Wang<sup>81</sup>. La scelta di questa misura deriva dal fatto di essere in grado di gestire efficacemente le distribuzioni non simmetriche dei rendimenti e di riflettere in modo adeguato il grado di avversione al rischio dell'investitore. In particolare consente di tenere conto del rischio contenuto sia nella coda a sinistra, cioè quella dei rendimenti negativi del portafoglio, sia nella coda a destra, cioè quella relativa ai rendimenti positivi.

La complessità del problema di selezione del portfolio deriva anche dalla presenza di vincoli a variabili miste-interi che rendono il problema di ottimizzazione difficile da risolvere, appunto *NP-hard*<sup>82</sup>. Gli autori inseriscono nel proprio modello

---

<sup>79</sup> Nella teoria dei sistemi complessi, i problemi *NP-hard* (*non deterministic polynomial-time hard problem*, "problema difficile non deterministico in tempo polinomiale") sono una classe di problemi difficili almeno quanto i più difficili problemi delle classi *P* e *NP*. La classe di complessità *P* (*polynomial*, "polinomiale") contiene tutti i problemi per i quali sono noti gli algoritmi di soluzione e possono essere risolti in un tempo polinomiale, rispetto alla dimensione dei dati, da una macchina di Turing deterministica. Invece la classe di complessità *NP* (*non deterministic polynomial*, "polinomiale non deterministico") raggruppa tutti problemi per i quali non sono noti gli algoritmi che possano risolverli, ma potrebbero essere risolti in un tempo polinomiale mediante una macchina di Turing non deterministica.

<sup>80</sup> ARTZNER P., DELBAEN F., EBER J.-M., HEATH D., *Coherent measures of risk*, *Mathematical Finance*, 9 (3), 1999, pp. 203–228.

<sup>81</sup> CHEN Z., WANG Y., *Two-sided coherent risk measures and their application in realistic portfolio optimization*, *Journal of Banking and Finance*, 32 (12), 2008, pp. 2667-2673.

<sup>82</sup> I vincoli a variabili miste-interi danno ai problemi di programmazione matematica per la selezione dei portafogli azionari una valenza operativa maggiore rispetto a quella posseduta dai problemi

ulteriori vincoli particolarmente utilizzati nell'ambito della gestione dei portafogli per controllare indirettamente i costi di transazione: i vincoli di cardinalità, cioè i limiti relativi al numero minimo e massimo di titoli da negoziare, e i vincoli sulla percentuale di capitale minimo e massimo da investire in ciascun titolo. Il modello tiene conto anche delle restrizioni sul rendimento minimo e sul budget disponibile per l'investimento. Tutte queste regole, formalizzate in termini di vincoli, contribuiscono a rendere il problema di programmazione matematica *NP-hard*.

Per fornire una soluzione economica e affidabile, gli autori sviluppano e applicano un *exact penalty method* combinato con la *Particle Swarm Optimization* (PSO), quest'ultima una meta-euristica evolutiva di tipo *population-based* di ispirazione biologica.

L'approccio utilizzato dagli autori per giungere alla soluzione di questo complesso problema di selezione del portafoglio può essere brevemente riassunto in due passaggi:

- 1) uno schema *exact penalty* trasforma il problema di selezione del portafoglio con vincoli misto-interi in un equivalente problema di minimizzazione non vincolato e non differenziabile;
- 2) per risolvere questo problema, gli autori ricorrono all'algoritmo iterativo PSO.

### 2.3.2.1 Il modello di selezione del portafoglio

Sia  $Y$  una variabile casuale a valori reali che rappresenta la distribuzione dei profitti e delle perdite e definiamo la  $p$ -norma di  $Y$  come  $\|Y\|_p = (E[|Y|^p])^{1/p}$ , con  $p \in [1, +\infty[$  e con  $E[\cdot]$  che indica il valore atteso di una variabile casuale. La misura di rischio *two-sided* è descritta nella formula seguente:

$$\begin{aligned}\rho_{a,p}(Y) &= a\sigma_1^+(Y) + (1-a)\sigma_p^-(Y) - E(Y) \\ &= a\|(Y - E[Y])^+\|_1 + (1-a)\|(Y - E[Y])^-\|_p - E[Y],\end{aligned}$$

---

classici. L'introduzione di tali categorie di vincoli, però, ha un'importante implicazione sul piano computazionale, dal momento che risolvere questi problemi di programmazione matematica significa affrontare dei problemi *NP-hard*.

in cui  $a \in [0,1]$ ,  $Y^- = \max\{-Y, 0\}$  e  $Y^+ = (-Y)^-$ . Questa misura di rischio è la combinazione di due misure di rischio basate sui momenti parziali  $\|(Y - E[Y])^+\|_1 - E[Y]$  e  $\|(Y - E[Y])^-\|_p - E[Y]$ . Rispetto al valore atteso  $E[Y]$ , infatti, la variabile casuale  $(Y - E[Y])^+ = \max\{Y - E[Y], 0\}$  rappresenta il lato dei profitti di  $Y$ , mentre  $(Y - E[Y])^- = \max\{E[Y] - Y, 0\}$  rappresenta il lato delle perdite di  $Y$ . I valori dei parametri  $p$  e  $a$  sono adattati per rispecchiare l'avversione al rischio dell'investitore, in cui il parametro  $p$  è un fattore di rischio che monitora il rischio dell'investimento e cresce proporzionalmente con l'avversione al rischio dell'investitore, mentre  $a$  è un fattore di rischio che mantiene l'equilibrio desiderato dall'investitore tra volatilità positiva,  $\sigma_1^+(Y)$ , e volatilità negativa,  $\sigma_p^-(Y)$ . La funzione  $\rho_{a,p}$  non è decrescente rispetto a  $p$  e non aumenta rispetto ad  $a$ . Questo significa che più alto è il valore assegnato a  $p$  maggiormente l'investitore è avverso al rischio; diversamente, un valore elevato assegnato ad  $a$  significa che l'investitore è poco avverso al rischio.

Si supponga ora di avere  $N$  titoli tra cui scegliere e di indicare con  $x_i \in \mathbb{R}$ , per  $i = 1, \dots, N$ , il peso della  $i$ -esimo titolo nel portafoglio.  $Z^T = (z_1, \dots, z_N) \in \{0,1\}^N$  è un vettore binario, tale che  $z_i = 1$  se il titolo  $i$ -esimo è incluso nel portafoglio,  $z_i = 0$  altrimenti. Inoltre, per  $i = 1, \dots, N$ , indichiamo con  $r_i$  una variabile casuale che esprime il rendimento del titolo  $i$  e con  $\hat{r}_i$  il suo valore atteso, cioè  $\hat{r}_i = E[r_i]$ . La variabile casuale  $R \in \mathbb{R}$ , indicante il rendimento dell'intero portafoglio, può essere espressa come  $R = \sum_{i=1}^N x_i r_i$ , con il valore atteso  $\hat{R} = \sum_{i=1}^N x_i \hat{r}_i$ . In riferimento alla formula precedentemente presentata relativa alla *two-sided risk measure*, l'obiettivo è minimizzare  $\rho_{a,p}(R)$ , sotto determinati vincoli. I primi da considerare sono i vincoli relativi al rendimento atteso minimo del portafoglio, cioè  $\hat{R} \geq l$  con  $l > 0$ , e alla somma percentuale dei pesi di ciascun titolo nel portafoglio  $\sum_{i=1}^N x_i = 1$ . In aggiunta, gli autori introducono il vincolo di cardinalità, cioè selezionano un sottoinsieme di titoli disponibili. L'introduzione di questo vincolo deriva dal fatto che quando il numero di titoli selezionati è troppo grande possono sorgere diversi problemi, tra cui l'aumento dei costi di transazione. Utilizzando il vincolo di cardinalità vengono considerati implicitamente i costi di transazione e il vincolo

risultante è dato da  $K_d \leq \sum_{i=1}^N z_i \leq K_u$ , in cui  $1 \leq K_d \leq K_u \leq N$ . Gli autori, inoltre, impongono che ciascun titolo selezionato non possa rappresentare una frazione troppo grande o troppo piccola del portafoglio, cioè  $z_i d \leq x_i \leq z_i u$ , in cui  $0 \leq d \leq u \leq 1$ . I parametri  $d$  e  $u$  rappresentano rispettivamente la frazione minima e massima consentita e per garantire la compatibilità con il vincolo di cardinalità devono soddisfare le condizioni:  $d \leq \frac{1}{K_d}$  e  $u \geq \frac{1}{K_u}$ .

Riassumendo, il modello di selezione del portafoglio proposto da Corazza *et al.* è rappresentato nello schema seguente:

$$\min_{x,Z} \rho_{a,p}(R)$$

subject to:

$$\hat{R} \geq l$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1$$

$$K_d \leq \sum_{i=1}^N z_i \leq K_u$$

$$z_i d \leq x_i \leq z_i u, \quad i = 1, \dots, N$$

$$z_i(z_i - 1) = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Se  $z_i = 0$ , allora la variabile  $x_i$  non svolge alcun ruolo nella soluzione del problema proposto, cioè  $x_i = 0$ ; al contrario, se  $z_i = 1$  significa che l' $i$ -esimo titolo è presente nel portafoglio finale, con  $x_i \in [d, u]$ . Infine,  $z_i(z_i - 1) = 0$ , con  $i = 1, \dots, N$ , rappresenta solamente una riformulazione del vincolo  $z_i \in \{0,1\}$ , con  $i = 1, \dots, N$ .

Il modello di selezione del portafoglio appena presentato è un problema con vincoli misti-interi, non lineare e non convesso, che in generale ammette diverse soluzioni locali. Tuttavia, l'obiettivo degli autori è cercare delle soluzioni globali, ma il rilevamento di soluzioni precise mediante l'utilizzo di *exact methods* può richiedere molto tempo. Per questo motivo gli autori ricorrono alla tecnica metaeuristica PSO applicandola ad una previa riformulazione (*non-smooth*) del problema sopra presentato.

### 2.3.2.2 La PSO applicata ad una *non-smooth reformulation* del problema di selezione del portafoglio

La *Particle Swarm Optimization* è una mèta-euristica iterativa per la soluzione di problemi di ottimizzazione libera non lineari, basata su un paradigma biologico che si ispira al comportamento dei banchi di pesci o degli stormi di uccelli quando cooperano alla ricerca di cibo: ogni membro dello sciame (*swarm*) esplora l'area di ricerca ricordando la propria posizione migliore raggiunta finora (*personal best position*) e scambia queste informazioni con i membri vicini; alla fine l'intero sciame dovrebbe convergere verso la posizione migliore globale raggiunta dai propri membri (cioè le particelle).

In termini quantitativi, il paradigma dello stormo di uccelli o del banco di pesci può essere formulato nel modo seguente: dato un problema di minimizzazione non lineare, si cerca di trovare un minimo globale. Ogni membro dello sciame (cioè ogni particella) rappresenta una possibile soluzione del problema di minimizzazione ed è espressa in termini di variabile o di vettore di variabili. Inizialmente, le particelle sono posizionate in maniera casuale all'interno dello spazio delle soluzioni<sup>83</sup> e ad ogni particella viene assegnata una velocità utilizzata per determinare la sua direzione di movimento.

Più formalmente, si consideri il problema di ottimizzazione globale

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x),$$

in cui  $f: \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$  è la funzione obiettivo nel problema di minimizzazione. Si supponga di applicare la PSO per ricavarne la soluzione e di considerare  $M$  particelle. Alla  $k$ -esima iterazione dell'algoritmo la particella  $j$ -esima,  $j \in \{1, \dots, M\}$ , è caratterizzata da:  $x_j^k \in \mathbb{R}^d$ , che indica la sua posizione;  $v_j^k \in \mathbb{R}^d$ , la sua velocità;  $p_j \in \mathbb{R}^d$  la sua posizione migliore raggiunta finora.

---

<sup>83</sup> Il funzionamento della PSO prevede la generazione e la gestione di un insieme di soluzioni, definito "popolazione". Da qui deriva il significato di mèta-euristica evolutiva di tipo *population-based*.

Inoltre, con  $pbest_j = f(p_j)$  si indica il valore della funzione obiettivo nella posizione  $p_j$  della particella  $j$ -esima. Il funzionamento della PSO è riportato di seguito:

- 1) Si pone  $k = 1$  e si valuta  $f(x_j^k)$  per  $j = 1, \dots, M$ .  
Poniamo  $pbest_j = +\infty$  per  $j = 1, \dots, M$ .
- 2) Se  $f(x_j^k) < pbest_j$ , allora  $p_j = x_j^k$  e  $pbest_j = f(x_j^k)$ .
- 3) L'algoritmo di riferimento aggiorna iterativamente la posizione e la velocità della particella  $j$ -esima, con  $j = 1, \dots, M$ , fino a quando non risulta soddisfatto un prefissato criterio di arresto (ad esempio, il raggiungimento di un determinato valore della funzione obiettivo o di un elevato numero di iterazioni):

$$v_j^{k+1} = w^{k+1}v_j^k + c_1 * rand_1 \otimes (p_j - x_j^k) + c_2 * rand_2 \otimes (s - x_j^k)$$

$$x_j^{k+1} = x_j^k + v_j^{k+1}$$

in cui  $w^k$  rappresenta il peso d'inerzia;  $c_1$  esprime l'effetto che produce la migliore direzione individuale;  $c_2$  esprime l'effetto che produce la migliore direzione collettiva;  $rand_1$  e  $rand_2$  sono due numeri generati casualmente in modo uniforme nell'intervallo  $[0,1]$ ;  $s$  indica la migliore posizione raggiunta dallo sciame.

- 4) Se la convergenza verso l'ottimo del problema (cioè la posizione migliore globale) non è soddisfatta, allora si reimposta il numero di iterazioni  $k$  con  $k = k + 1$  e si riprende dal punto 2.

Per consentire la convergenza dello sciame verso l'ottimo del problema, i valori di  $c_1$  e  $c_2$  (cioè i coefficienti di accelerazione) devono essere impostati in base alla seguente relazione:

$$\left[ \frac{(c_1 + c_2)}{2} \right] - 1 < w.$$

Generalmente il valore del peso di inerzia  $w^k$  diminuisce linearmente con il numero di iterazioni:

$$w^k = w_{max} + \frac{w_{min} - w_{max}}{k_{max}} k,$$

dove, in genere, i valori per  $w_{max}$  (prefissato valore massimo per il peso d'inerzia) e  $w_{min}$  (prefissato valore minimo per il peso d'inerzia) sono rispettivamente 0,9 e 0,4;  $k_{max}$  indica il numero massimo di iterazioni prefissate.

Un'altra versione, ampiamente utilizzata, dell'algoritmo PSO è quella con i coefficienti di costrizione, in cui la velocità della particella j-esima è data da:

$$v_j^{k+1} = \lambda * [v_j^k + c_1 * rand_1 \otimes (p_j - x_j^k) + c_2 * rand_2 \otimes (s - x_j^k)],$$

$$\text{in cui } \lambda = \frac{2}{a-2+(\sqrt{a^2-4a})}, \quad a = c_1 + c_2, \quad a > 4.$$

Ricordiamo che la formulazione originale della PSO è stata concepita per problemi di ottimizzazione non vincolati. Pertanto, in generale, utilizzare le formule  $v_j^{k+1} = w^{k+1}v_j^k + c_1 * rand_1 \otimes (p_j - x_j^k) + c_2 * rand_2 \otimes (s - x_j^k)$  e  $x_j^{k+1} = x_j^k + v_j^{k+1}$  quando i vincoli sono inclusi nella formulazione del modello non è corretto, perché l'algoritmo non può impedire la generazione di posizioni di particelle non ammissibili. In letteratura, infatti, sono state proposte diverse strategie<sup>84</sup> per garantire che, anche in presenza di modelli vincolati, ogni iterazione della PSO generi delle posizioni realizzabili. Tuttavia, Corazza, Fasano e Gusso hanno deciso di utilizzare la PSO in forma originale, cioè come strumento per risolvere problemi di ottimizzazione non vincolati.

Gli autori hanno riformulato il problema di selezione del portafoglio iniziale in un problema di ottimizzazione non vincolato, servendosi del metodo della funzione di penalizzazione non differenziabile. Questo approccio è noto in letteratura con il nome di *exact penalty method*, in cui il termine “esatto” si riferisce alla corrispondenza tra la minimizzazione del problema vincolato e la minimizzazione di quello non vincolato. I vincoli contenuti nel problema di selezione del portafoglio (presentato nel paragrafo precedente) sono stati riformulati nel modo seguente:

$$\hat{R} \geq l \rightarrow \max\{0, l - \hat{R}\} = 0,$$

---

<sup>84</sup> BLACKWELL T., KENNEDY J., POLI R., *Particle swarm optimization – An overview*, Swarm Intelligence, 1 (1), 2007, pp. 33-57.

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1 \rightarrow \left| \sum_{i=1}^N x_i - 1 \right| = 0,$$

$$K_d \leq \sum_{i=1}^N z_i \rightarrow \max \left\{ 0, K_d - \sum_{i=1}^N z_i \right\} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^N z_i \leq K_u \rightarrow \max \left\{ 0, \sum_{i=1}^N z_i - K_u \right\} = 0,$$

$$z_i d \leq x_i \rightarrow \sum_{i=1}^N \max \{ 0, z_i d - x_i \} = 0,$$

$$x_i \leq z_i u \rightarrow \sum_{i=1}^N \max \{ 0, x_i - z_i u \} = 0,$$

$$z_i \in \{0,1\} \rightarrow \sum_{i=1}^N |z_i(1 - z_i)| = 0.$$

Di seguito è riportato come gli autori hanno riformulato il problema di selezione del portafoglio in forma non vincolata, utilizzando la funzione di penalizzazione non differenziabile:

$$\min_{X,Z} P(X, Z; \varepsilon)$$

in cui

$$P(X, Z; \varepsilon) = \rho_{a,p}(R) + \frac{1}{\varepsilon} \left[ \max \{ 0, l - \hat{R} \} + \left| \sum_{i=1}^N x_i - 1 \right| + \max \{ 0, K_d - \sum_{i=1}^N z_i \} + \max \{ 0, \sum_{i=1}^N z_i - K_u \} + \sum_{i=1}^N \max \{ 0, z_i d - x_i \} + \sum_{i=1}^N \max \{ 0, x_i - z_i u \} + \sum_{i=1}^N |z_i(1 - z_i)| \right].$$

La funzione racchiusa all'interno delle parentesi quadre e moltiplicata per  $\frac{1}{\varepsilon}$  è, appunto, la *exact penalty function* ed  $\varepsilon$  rappresenta un parametro positivo definito “parametro di penalizzazione”. La scelta corretta di  $\varepsilon$ <sup>85</sup> garantisce la corrispondenza tra le soluzioni dei due problemi di ottimizzazione esaminati.

---

<sup>85</sup> Generalmente i valori assegnati ad  $\varepsilon$  sono: 1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001.



Nel problema di selezione appena considerato si vuole minimizzare, contemporaneamente, la funzione obiettivo (funzione di *fitness*) e le violazioni dei vincoli. Infatti, alla misura di rischio  $\rho_{a,p}(R)$ , vengono sommate tutte violazioni dei vincoli corrette per  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Qualora in un possibile portafoglio non vengano rispettati i vincoli, la funzione obiettivo assumerà un valore elevato, con la conseguenza che l'algoritmo scarterà tale portafoglio. Più i vincoli sono rispettati, minore sarà il valore assunto dalla funzione obiettivo, cioè nel caso in cui tutti i vincoli siano rispettati, la somma algebrica dentro le parentesi quadre sarà nulla; invece, qualora anche un solo vincolo non venga soddisfatto, tale somma presenterà un valore positivo, che si aggiungerà alla funzione obiettivo. In sintesi, se tutti i vincoli sono rispettati, il processo di minimizzazione vincolata si concentrerà unicamente sulla misura di rischio  $\rho_{a,p}(R)$ . Diversamente, la minimizzazione sarà condotta su una quantità maggiore, la cui differenza con la sola misura di rischio deriva dall'entità della violazione riscontrata in uno o più vincoli.

La funzione  $P(X, Z; \varepsilon)$  non è differenziabile e questo motiva la scelta di utilizzare la PSO per la sua minimizzazione, poiché la PSO non richiede le derivate della funzione  $P(X, Z; \varepsilon)$ .

Dal momento che la PSO è una mèta-euristica, la minimizzazione della funzione  $P(X, Z; \varepsilon)$  non garantisce che venga ottenuto un minimo globale del problema di selezione del portafoglio. Tuttavia, questo algoritmo spesso fornisce un compromesso adeguato tra la determinazione di un sub-ottimo globale e il costo computazionale per ottenerlo.

## Capitolo III

# Una variante del modello di Pogue

Giunti a questo punto, introduciamo una variante del modello di revisione di Pogue, in cui nella funzione obiettivo si minimizza il CVaR del rendimento del portafoglio e tra i vincoli si considerano quasi tutti quelli propri del modello di Pogue, tranne la possibilità di eseguire le vendite allo scoperto e di ottenere prestiti (garantiti e non) per l'acquisto dei titoli. Per quanto riguarda le vendite allo scoperto, esse non sono consentite in quanto il modello è applicato per la revisione di portafogli investiti in mercato in cui tali operazioni sono vietate. Per quanto riguarda la possibilità di ottenere prestiti per l'acquisto di titoli, essa può risultare piuttosto bassa dato che il modello di revisione opererà in un mercato in fase di generale ribasso e poco liquido. Nei successivi paragrafi saranno descritte dettagliatamente le componenti che andranno a costituire questa variante del modello di Pogue.

### 3.1 Le misure di rischio coerenti

Prima di affrontare il *Conditional Value-at-Risk*, è necessario parlare delle misure coerenti di rischio e delle proprietà che le caratterizzano.

Nell'ambito della finanza matematica, ha riscontrato un crescente interesse la ricerca di metodi per la valutazione del rischio connesso alle posizioni finanziarie. In questo contesto ha assunto una grande importanza la nozione di "misura di rischio coerente" introdotta da Artzner *et al.*<sup>86</sup>, i quali hanno definito alcuni requisiti fondamentali che ogni misura di rischio finanziario dovrebbe soddisfare.

Facendo un passo indietro, concentriamoci sul concetto di misura di rischio finanziario, che deriva dalla necessità di esprimere il grado di rischiosità dei numeri aleatori appartenenti ad un insieme  $D$ , ognuno dei quali rappresenta il valore che

---

<sup>86</sup> ARTZNER P., DELBAEN F., EBER J.-M., HEATH D., *Coherent measures of risk*, Mathematical Finance, 9 (3), 1999, pp. 203-228.

assumerà una determinata posizione nel futuro<sup>87</sup>. Una misura di rischio, infatti, può essere definita come una funzione  $\rho$  che attribuisce un valore numerico non negativo al rischio di una variabile aleatoria  $X$ , interpretabile come il valore futuro dell'investimento,  $\rho: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Secondo Artzner *et al.*, le misure di rischio possono essere utilizzate come requisiti patrimoniali per regolare il rischio assunto dagli investitori. Quindi se una misura di rischio  $\rho(X)$  è un numero positivo, essa può assumere il significato di minimo ammontare che è necessario aggiungere alla posizione  $X$  per renderla accettabile al supervisore, il quale ha l'onere di decidere se tale posizione possa essere assunta o meno. Inoltre, la misura di rischio deve essere indicata nelle stesse unità di misura dell'investimento, cioè deve essere espressa in termini monetari.

Una misura di rischio coerente è definita tale se soddisfa i quattro assiomi di coerenza enunciati da Artzner *et al.*:

- Invarianza per traslazioni: questo assioma garantisce che investendo una parte del capitale in un titolo privo di rischio (*risk free*), il rischio complessivo del portafoglio diminuisce proporzionalmente alla quantità  $a$  investita nel titolo privo di rischio.

$$\rho(X + a * r) = \rho(X) - a \quad \forall v. c. X, \forall a \in \mathbb{R},$$

in cui  $a$  è l'ammontare investito nel titolo *risk free* con rendimento  $r$ .

L'assioma di invarianza per traslazioni implica che  $\rho[X + \rho(X)] = 0$ , cioè con l'aggiunta di una quantità priva di rischio pari a  $\rho(X)$  alla posizione rischiosa  $X$  si ottiene una posizione a rischio nullo.

- Subadditività: questo assioma si basa un'idea storica nel mondo della finanza, secondo la quale una maggiore diversificazione comporta una minore rischiosità complessiva del portafoglio. Infatti, nel caso di un portafoglio costituito, ad esempio, da due titoli rischiosi  $X$  e  $Y$ , il suo livello di rischiosità è minore rispetto alla somma delle rischiosità dei due titoli che lo compongono, cioè:

---

<sup>87</sup> PELESSONI R., *Misure di rischio e coerenza*, Materiale del Dipartimento di Matematica Applicata "Bruno de Finetti", Università di Trieste, 2002. pp. 423-433.

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y) \quad \forall v. c. X, Y.$$

- **Positiva omogeneità:** questo assioma esprime la diretta proporzionalità tra l'aumento ( $\lambda$ ) della quota investita in un titolo rischioso e l'incremento della rischiosità associata all'investimento in quel titolo. Questa proprietà è legata alla dimensione e alla liquidità del titolo contenuto in portafoglio: la dimensione della posizione può influenzarne il rischio, in quanto liquidare una posizione piuttosto grande può richiedere tempo e quindi comportare un costo di liquidità. Dal momento che la posizione  $\lambda X$  è di solito meno liquida di  $X$ , è chiaro che la rischiosità dell'investimento in  $\lambda X$  sia uguale a quella relativa a  $\lambda$  posizioni  $X$  assunte singolarmente:

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X) \quad \forall v. c. X, \forall \lambda \geq 0.$$

- **Monotonicità:** questo assioma riguarda un principio secondo il quale se il titolo  $Y$  ha un rendimento maggiore rispetto a quello del titolo ( $X \leq Y$ ), allora il livello di rischio associato a  $Y$  non può essere inferiore a quello associato a  $X$ . In pratica, un maggior rendimento è legato ad un maggior rischio e questo postulato vale nel caso in cui non ci siano possibilità di effettuare arbitraggi<sup>88</sup>. Qualora siano presenti, la misura di rischio che rispetta l'assioma di monotonicità consente di sfruttarle, permettendo di realizzare un profitto privo di rischio, poiché attribuisce un maggior livello di rischio al titolo con minor rendimento.

$$\rho(Y) \leq \rho(X) \quad \forall v. c. X, Y \text{ con } X \leq Y.$$

Ora che abbiamo affrontato le proprietà delle misure di rischio coerenti, possiamo definire un esempio concreto appartenente alla famiglia di tali misure: il *Conditional Value-at-Risk*, definito anche *Expected Shortfall*<sup>89</sup>, sotto particolari ipotesi. Questa misura di rischio sarà utilizzata come funzione obiettivo della

---

<sup>88</sup> Per arbitraggio si intende un'operazione finanziaria che consente di ricavare un profitto senza sopportare alcun rischio. Nello specifico, l'arbitraggio consiste nell'acquisto e nella vendita della medesima attività su due mercati differenti, sfruttando le differenze di prezzo che si riscontrano sui due mercati per la stessa attività.

<sup>89</sup> ACERBI C., TASCHE D., *On the coherence of Expected Shortfall*, Working paper, 2002.

variante proposta del modello di revisione di Pogue, basata, appunto, sulla minimizzazione del CVaR.

### 3.2 Il *Conditional Value-at-Risk* (CVaR)

A differenza del *Value-at-Risk* (VaR) che risponde alla domanda “quanto male possono andare le cose?”, il *Conditional Value-at-Risk* (CVaR) consente di rispondere alla domanda “se le cose vanno male, quanto ci aspettiamo di perdere?”.

La differenza tra queste due misure deriva dal fatto che il VaR (di seguito definito) non è sempre una misura di rischio coerente e non considera ciò che potrebbe accadere oltre una specificata soglia: dato un livello di confidenza  $a$ , il VaR non dice nulla in merito alle perdite oltre il quantile  $1 - a$ . Per questo motivo c'è il rischio di considerare analoghi dei portafogli che, aventi lo stesso VaR, invece presentano un comportamento nelle code decisamente diverso. In forma analitica il VaR è definito nel modo seguente:

$$VaR_a(X) = \inf\{x : P(X < x) = a\},$$

cioè che  $P(X > VaR_a) = 1 - a$ , dove  $a$  indica il livello di confidenza e  $X$  indica una generica distribuzione delle perdite. Ad esempio, se si ipotizza che il VaR di un portafoglio, su un orizzonte temporale  $N = 10$  giorni, sia pari a €100 con un livello di confidenza  $a = 99\%$ , significa che con una probabilità di  $\frac{99}{100}$  le perdite non superano il valore di €100. Il problema sorge nel momento in cui ci si interroga su quale sia il valore della perdita in quell'1% dei casi, manifestando una chiara mancanza di informazione del VaR. Questa misura di rischio, inoltre, si basa sul presupposto che la distribuzione dei rendimenti azionari sia normale (si veda la figura sotto riportata). In verità, spesso tale distribuzione presenta delle “code” più ampie e più spesse rispetto alla distribuzione normale e la differenza tra la distribuzione stimata e quella osservata comporta dei risultati distorti, che rendono il VaR non sempre coerente.

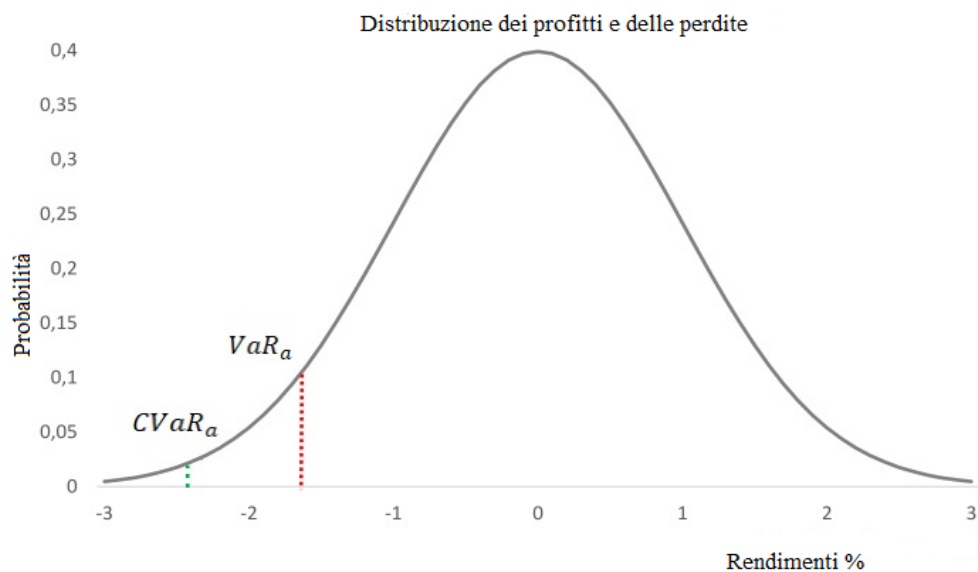


Figura 7: Esempio di VaR e CVaR con distribuzione normale dei rendimenti.

Il CVaR, invece, è calcolabile empiricamente come la media aritmetica dei rendimenti che eccedono il VaR, cioè si concentra su quale sia la perdita attesa, nei prossimi  $N$  giorni, nell' $(1 - a)\%$  dei casi peggiori, invece di soffermarsi solamente sul valore soglia (come il VaR):

$$CVaR_a(X) = E[X|X > VaR_a(X)],$$

in cui  $X$  è la variabile aleatoria continua che rappresenta le perdite del portafoglio nell'orizzonte temporale di riferimento e  $a$  indica il livello di confidenza. Questa formula, appunto, può essere interpretata come la media delle perdite condizionata al superamento del VaR. Ad esempio, se ipotizziamo che l'orizzonte temporale (espresso in giorni) sia  $N = 10$  e il livello di confidenza sia  $a = 99\%$ , il CVaR è il valore atteso delle perdite nei prossimi 10 giorni calcolato nell'ipotesi che si verifichi un evento estremo al quale è associata una probabilità non superiore all'1% (1% degli eventi peggiori)<sup>90</sup>. Nello specifico, indicando la perdita con  $z = f(x, y)$ , in cui il vettore  $x = (x_1, \dots, x_N)$  rappresenta un portafoglio di  $N$  titoli e  $y = (y_1, \dots, y_N)$  è il vettore dei rendimenti futuri<sup>91</sup>, Rockafellar e Uryasev<sup>92</sup> definiscono il CVaR

<sup>90</sup> HULL J. C., *Opzioni, Futures e altri derivati*, a cura di Emilio Barone, VIII edizione, Pearson Italia, 2012, pag. 515.

<sup>91</sup> La moltiplicazione di questi due vettori indica la perdita  $(-x'y)$ .

partendo dall'identificazione della funzione di distribuzione associata alla perdita  $z$  con  $\Psi(x, \zeta) = P\{y|f(x, y) \leq \zeta\}$ . Quindi il  $CVaR_a$ , definito come il valore atteso delle perdite che eccedono il  $VaR_a$  nel  $(1 - a)\%$  dei casi, è dato dalla media della funzione di distribuzione

$$\Psi_a(x, \zeta) = \begin{cases} 0, & \text{se } \zeta \leq \zeta_a(x) \\ \left[ \frac{\Psi(x, \zeta) - a}{1 - a} \right], & \text{se } \zeta \geq \zeta_a(x) \end{cases} ,$$

con  $\zeta_a(x)$  che indica il  $VaR_a(x)$  associato al portafoglio  $x$ .

Acerbi e Tasche<sup>93</sup>, inoltre, spiegano che il CVaR coincide con l'*Expected Shortfall* (ES) nel caso in cui la distribuzione dei rendimenti sia continua. Nel corso della trattazione, quindi, si ipotizzerà l'uguaglianza tra CVaR ed ES.

La figura sottostante mostra il  $VaR_a$  e il  $CVaR_a$  sulla *loss distribution*, cioè sulla funzione di distribuzione delle perdite.

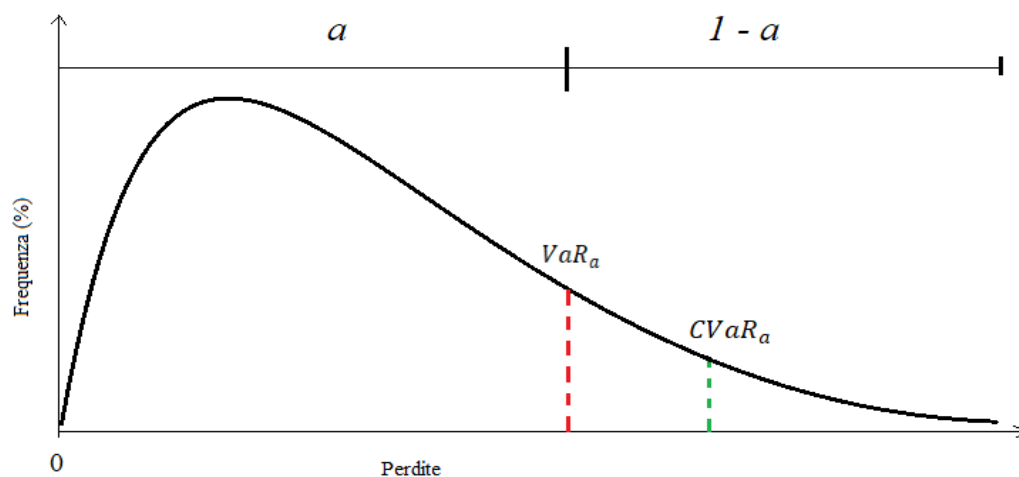


Figura 8: Rappresentazione di VaR e CVaR sulla curva di distribuzione delle perdite.

Tuttavia il calcolo il  $CVaR_a(X)$  può risultare complicato nel caso in cui non si conosca il valore del  $VaR_a(X)$ . Questo problema è stato risolto da Rockafellar e

<sup>92</sup> ROCKAFELLAR R. T., URYASEV S., *Conditional value-at-risk for general loss distribution*, Journal of Banking & Finance, 26, 2002, pp. 1443-1471.

<sup>93</sup> ACERBI C., TASCHE D., *On the coherence of Expected Shortfall*, Working paper, 2002.

Uryasev<sup>94</sup> che hanno proposto una funzione ausiliaria per calcolare il  $CVaR_a(X)$  di una posizione anche senza conoscerne il  $VaR_a(X)$ . L'obiettivo degli autori è dimostrare che il  $VaR_a(x)$  e il  $CVaR_a(x)$  della perdita  $z$  (associata al portafoglio  $x$ ) possono essere calcolati simultaneamente risolvendo un problema di ottimizzazione convesso in una dimensione. Per questo scopo è stata utilizzata la seguente funzione:

$$F_a(x, \zeta) = \zeta + \frac{1}{1-a} E\{[f(x, y) - \zeta]^+\} = \zeta + \frac{1}{1-a} \int_{y \in \mathbb{R}} [f(x, y) - \zeta]^+ p(y) dy,$$

con  $[f(x, y) - \zeta]^+ = \max\{0, f(x, y) - \zeta\}$  e  $p(y)$  la funzione di densità di probabilità del vettore dei rendimenti  $y$ .

L'integrale della funzione  $F_a(x, \zeta)$  può essere ulteriormente approssimato quando i valori del vettore dei rendimenti  $y$  sono dati dai vettori discreti  $y_1, \dots, y_T$ ; quindi, una corrispondente approssimazione della funzione  $F_a(x, \zeta)$  è:

$$\tilde{F}_a(x, \zeta) = \zeta + \frac{1}{T(1-a)} \sum_{t=1}^q [f(x, y_t) - \zeta]^+.$$

Da questa funzione, Rockafellar e Uryasev definiscono due importanti teoremi, utili per lo sviluppo dei problemi di ottimizzazione con il  $CVaR$ . Mediante la dimostrazione del primo teorema<sup>95</sup>, Rockafellar e Uryasev evidenziano che il  $CVaR_a$  può essere calcolato senza aver prima ricavato il valore del  $VaR_a$ . In questo modo è possibile evitare l'inconvenienza del calcolo del  $VaR$  se non necessario. Quindi, il  $CVaR_a$  associato a qualsiasi  $x \in X$  può essere determinato con la seguente formula:

$$CVaR_a(x) = \min_{\zeta \in \mathbb{R}} F_a(x, \zeta),$$

con  $F_a(x, \zeta)$  che è un'espressione convessa.

<sup>94</sup> ROCKAFELLAR R. T., URYASEV S., *Optimization of conditional value-at-risk*, Journal of Risk, 2 (3), 2000, pp. 21-41.

<sup>95</sup> Si veda ROCKAFELLAR R. T., URYASEV S., *Optimization of conditional value-at-risk*, Journal of Risk, 2 (3), 2000, pag. 24.



Con il secondo teorema<sup>96</sup>, gli autori dimostrano che la minimizzazione del  $CVaR_a(x)$  associato al portafoglio  $x$ , per tutti gli  $x \in X$ , è equivalente a minimizzare  $F_a(x, \zeta)$  per ogni  $(x, \zeta) \in X \times \mathbb{R}$ , cioè:

$$\min_{x \in X} CVaR_a(x) = \min_{(x, \zeta) \in X \times \mathbb{R}} F_a(x, \zeta).$$

Dato che nella definizione di  $F_a(x, \zeta)$  è presente l'operatore valore atteso ( $E$ ), questo secondo teorema ha aperto le porte all'applicazione dell'ottimizzazione stocastica per la minimizzazione del  $CVaR_a$ .

### 3.2.1 Il CVaR e il comitato di Basilea

Nell'ottica della revisione del portafoglio di negoziazione (il cosiddetto *trading book*<sup>97</sup>) delle banche, il comitato di Basilea ha proposto l'introduzione del CVaR come sostituto del VaR nella disciplina sui rischi di mercato, per tenere conto del *tail risk*, cioè del "rischio di coda"<sup>98</sup>. Infatti, sono state identificate alcune criticità derivanti dall'utilizzo del VaR per determinare i requisiti patrimoniali delle banche e tra queste rientra soprattutto la sua incapacità di considerare, appunto, il "rischio di coda". Per questo motivo, nel maggio 2012 il comitato di Basilea ha proposto di sostituire il VaR con il CVaR o così come riportato nel documento, con l'*Expected shortfall* (ES), che misura la rischiosità di una posizione considerando la dimensione media e la probabilità delle perdite superiori a un certo livello di confidenza. Il comitato di Basilea ha deciso di impostare un ES al 97,5% per il calcolo dei requisiti patrimoniali necessari contro il rischio di mercato. Il Comitato ritiene che questo livello di confidenza dell'ES presenti un livello di gestione del rischio simile a quello

<sup>96</sup> ROCKAFELLAR R. T., URYASEV S., *Optimization of conditional value-at-risk*, Journal of Risk, 2 (3), 2000, pag. 25.

<sup>97</sup> Il *trading book* è il portafoglio di strumenti finanziari negoziati da una banca (azioni, obbligazioni, *swaps*, *futures*, opzioni, ...) per coprire vari tipi di rischio ed è rivalutato a fine giornata.

<sup>98</sup> Basel Committee on Banking Supervision, *Fundamental review of the trading book: A revised market risk framework*, Bank for International Settlements, ottobre 2013.

con il VaR al 99%<sup>99</sup>, fornendo al tempo stesso una maggior stabilità del modello in quanto meno sensibile a realizzazioni estreme.

Facendo qualche passo indietro, una delle principali debolezze del portafoglio di negoziazione nel periodo pre-crisi (cioè prima del 2009) è stata la sua dipendenza da fattori di rischio calibrati sulle condizioni di mercato dell'epoca. Ciò ha comportato delle esposizioni del portafoglio a rischi non adeguatamente stimati che hanno recato importanti oneri patrimoniali durante la crisi. In risposta a questa debolezza, Basilea ha introdotto un requisito patrimoniale addizionale (cioè oltre al *current VaR*) basato sul calcolo del "*stressed VaR*", per garantire che il patrimonio di vigilanza richiesto risultasse sufficiente non solo in condizioni di mercato favorevoli, ma anche durante periodi di notevole stress finanziario. Tuttavia il Comitato ha riconosciuto che basare il capitale regolamentare sia sul *current VaR* che sul *stressed VaR* potesse risultare ripetitivo. Di conseguenza, si è proposto di semplificare la struttura del capitale di vigilanza facendo ricorso all'*Expected shortfall*, i cui parametri sono calibrati su un periodo di notevole stress finanziario.

Il comitato di Basilea non si riferisce direttamente al CVaR, ma affronta questa misura di rischio con la denominazione di *Expected Shortfall (ES)* che, come sappiamo da Acerbi e Tasche<sup>100</sup>, coincide con il CVaR. Per il momento non esiste una normativa sull'utilizzo del CVaR per la gestione del rischio a livello di portafoglio. Tuttavia, il fatto che il comitato di Basilea abbia introdotto l'obbligo dell'utilizzo dell'ES come misura di rischio per la gestione del portafoglio di negoziazione delle banche (*trading book*), si ritiene sia una condizione sufficiente perché questa misura di rischio possa essere utilizzata da un qualsiasi gestore di portafogli azionari. Inoltre, il CVaR è già utilizzato da alcuni gestori di fondi nel padovano. Quindi, sulla base di queste considerazioni, il modello di revisione qui proposto fonda la propria struttura sulla minimizzazione del CVaR.

---

<sup>99</sup> L' "Emendamento del 1996", pubblicato dal Comitato di Basilea, richiede che le banche calcolino i requisiti patrimoniali, a fronte dei rischi di mercato, sulla base del VaR con un livello di confidenza del 99%. Si veda HULL J. C., *Opzioni, Futures e Altri Derivati*, a cura di Emilio Barone, VIII edizione, Pearson Italia, 2012, pag. 514.

<sup>100</sup> ACERBI C., TASCHE D., *On the coherence of Expected Shortfall*, Working paper, 2002.

### 3.2.2 La formulazione del CVaR nel problema di minimizzazione

Definito in modo dettagliato il *CVaR* così come è stato coniato da Rockafellar e Uryasev, ora determiniamo come sarà utilizzato il *CVaR* nel nostro modello di revisione del portafoglio.

Si ipotizzi che l'investitore detenga un portafoglio costituito da  $N$  titoli e che  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)'$  indichi il portafoglio iniziale (prima della revisione), in cui  $s_i$  rappresenta l'ammontare (in euro) investito nel titolo  $i$ -esimo. Il vettore  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ , invece, rappresenta il valore negoziato per ciascun titolo  $i$  del portafoglio, con  $x_i$  che indica il controvalore negoziato del titolo  $i$ -esimo. Sapendo che  $f(x, r)$  è la funzione di perdita associata al vettore  $(s + x)' = (s_1 + x_1, s_2 + x_2, \dots, s_n + x_n)'$ , cioè il portafoglio dopo la revisione, e al vettore dei rendimenti  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)'$ , quando si revisiona un portafoglio iniziale  $s$  la funzione di perdita è data da:

$$f(s + x, r) = -(s + x)'r .$$

Quindi, la funzione obiettivo associata alla minimizzazione del  $CVaR_a$  può essere espressa in termini generali come:

$$\min_{x, \zeta} \tilde{F}_a(s + x, \zeta) = \min_{x, \zeta} \zeta + \frac{1}{T(1-a)} \sum_{t=1}^T [-(s + x)'r_t - \zeta]^+ .$$

Il termine  $[-(s + x)'r_t - \zeta]^+$  può essere sostituito con una variabile ausiliaria  $q_t$ :

$$q_t = [-(s + x)'r_t - \zeta]^+, \quad t = 1, \dots, T.$$

Riscrivendolo in forma lineare, l'espressione precedente diventa:

$$q_t \geq -(s + x)'r_t - \zeta, \quad t = 1, \dots, T.$$

Quindi, la funzione obiettivo del modello di revisione può essere riscritta come:

$$\min_{x, \zeta, q} \zeta + \frac{1}{T(1-a)} \sum_{t=1}^T q_t .$$

A livello applicativo, in linea secondo quanto riportato da Acerbi e Tasche<sup>101</sup> che hanno dimostrato l'uguaglianza tra *Conditional Value-at-Risk* ed *Expected Shortfall* nel caso di distribuzione continua dei rendimenti, per maggiore facilità computazionale e per ridurre l'impatto degli errori di stima sul calcolo del CVaR<sup>102</sup>, il modello di revisione sarà implementato con la minimizzazione dell'*Expected Shortfall* (ES). La formula dell'ES utilizzata da Acerbi e Tasche<sup>103</sup> è:

$$ES_n^{(\alpha)}(X) = -\frac{\sum_{i=1}^w X_{i:n}}{w},$$

con  $\{X_{1:n}, \dots, X_{w:n}\}$  l'insieme degli  $(1 - \alpha)\%$  casi peggiori (rappresentati con  $w$ ) tra tutte le  $n$  realizzazioni  $\{X_i\}_{i=1, \dots, n}$  della variabile casuale  $X$ <sup>104</sup>. Prendendo spunto da Acerbi e Tasche, si propone la seguente formulazione del CVaR (in termini di ES) per il problema di minimizzazione:

$$ES_n^{(\alpha)}(s + x) = -\sum_{i=1}^n (s_i + x_i)r_{w,i},$$

dove

$$r_{w,i} = \frac{1}{w} \sum_{i=1}^w r_i.$$

$r_{w,i}$  è la media dei rendimenti peggiori relativi all' $(1 - \alpha)\%$  dei casi. Quindi la funzione obiettivo da utilizzare per l'implementazione del modello sarà:

$$\min_x -\sum_{i=1}^n (s_i + x_i)r_{w,i},$$

<sup>101</sup> ACERBI C., TASCHE D., *On the coherence of Expected Shortfall*, Working paper, 2002.

<sup>102</sup> LIM A. E. B., SHANTHIKUMAR J. G., VAHN G.-Y., *Conditional value-at-risk in portfolio optimization: Coherent but fragile*, Operations Research Letters, 39, 2011, pp. 163-171.

<sup>103</sup> ACERBI C., TASCHE D., *Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk*, Working paper, 2001.

<sup>104</sup>  $X$  è la variabile casuale che descrive il valore del profitto o della perdita di un portafoglio su un determinato orizzonte temporale  $T$ ;  $\alpha = A\% \in (0, 1)$ , invece, è una percentuale che rappresenta il campione dei "casi peggiori" per il portafoglio che gli autori intendono analizzare.

cioè la minimizzazione della media dei rendimenti peggiori ( $w$ ) del portafoglio revisionato.

### 3.3 La formulazione dei vincoli

Dopo aver presentato la funzione obiettivo, ora si illustrano i vincoli che devono essere tenuti in considerazione dal modello nel momento in cui si affronta il problema di revisione del portafoglio. In aggiunta al modello di Pogue, in questo nuovo modello si considerano i vincoli sui volumi di negoziazione, di *bound* e di rendimento.

#### 3.3.1 Costi di transazione e vincolo di rendimento

Nel proprio modello Pogue contempla nei costi di transazione le commissioni di intermediazione, proporzionali alle quantità scambiate, e i costi di illiquidità, derivanti dalla scarsa disponibilità di negoziazione dei titoli<sup>105</sup>. Nella variante proposta, invece, tra i costi di transazione vengono considerate esclusivamente le commissioni di intermediazione. I costi di illiquidità, invece, saranno tenuti in considerazione con l'applicazione di un vincolo relativo ai volumi scambiati.

Riprendendo, in parte, la formulazione utilizzata da Pogue e indicando rispettivamente con  $c_i^B$  e  $c_i^S$  i costi di transazione proporzionali per acquistare o vendere un valore unitario del titolo  $i$ -esimo, con  $i = 1, \dots, n$ , i costi di transazione da sostenere per la revisione del portafoglio sono dati da:

$$CT(x_i) = \sum_{i=1}^n c_i^B x_i^+ + c_i^S x_i^- ,$$

dove  $x_i^+ = \max\{0, x_i\}$  e  $x_i^- = -\min\{0, x_i\}$  indicano, rispettivamente, l'ammontare del titolo  $i$  acquistato e veduto per revisionare il portafoglio, con  $x_i$  che indica il

---

<sup>105</sup> Si veda paragrafo 1.3.1.

valore negoziato per ciascun titolo  $i$ . Le quantità scambiate sono poste nel modello con i seguenti vincoli:

$$\begin{aligned}x_i^+ &\geq 0, \\x_i^- &\geq 0.\end{aligned}$$

I costi di transazione costituiscono una componente negativa che riducono il rendimento netto del portafoglio dopo la revisione. Indichiamo il rendimento atteso del portafoglio revisionato espresso in termini monetari:

$$E(R) = \sum_{i=1}^n (s_i + x_i) \hat{r}_i,$$

in cui  $\hat{r}_i$  è il rendimento atteso del medesimo titolo. Definendo con  $x_i^1$  l'ammontare del titolo  $i$  presente in portafoglio dopo la revisione e riprendendo in parte la formulazione utilizzata da Guastaroba *et al.*<sup>106</sup>, il vincolo di rendimento da porre all'interno del modello di revisione risulta:

$$\sum_{i=1}^n (s_i + x_i) \hat{r}_i - \sum_{i=1}^n c_i^B x_i^+ + c_i^S x_i^- \geq \mu \sum_{i=1}^n (s_i + x_i),$$

in cui  $\mu \sum_{i=1}^n (s_i + x_i)$ , con  $\mu > 0$ , rappresenta il rendimento minimo desiderato dall'investitore.

### 3.3.2 Tassazione del *capital gain*

La tassazione del *capital gain* si applica sui redditi di capitale, ovvero sul guadagno che si ottiene dall'acquisto e dalla successiva vendita di un determinato asset. Le imposte si pagano solamente sulla vendita di quel dato asset e non durante il suo possesso. Così come i costi di transazione, anche la tassazione delle plusvalenze incide negativamente sul rendimento netto del portafoglio revisionato. Si consideri  $T_c$  l'aliquota fiscale;  $x_i^-$  l'ammontare di azioni vendute del titolo  $i$  con la

<sup>106</sup> GUASTAROBA G., MANSINI R., SPERANZA M. G., *Models and simulations for portfolio rebalancing*, Computational Economics, 33, 2009, pp. 237-262.

revisione del portafoglio;  $p_i$  il prezzo corrente del titolo  $i$ ;  $p_i(A)$  il prezzo medio di acquisto del titolo  $i$  (prima della revisione)<sup>107</sup>. Allora la tassazione del *capital gain* è data da:

$$-T_c \sum_{i=1}^n \frac{x_i^-}{p_i(A)} [p_i - p_i(A)].$$

Affinché ci sia una plusvalenza è chiaro che l'azione deve essere venduta ad un prezzo maggiore del prezzo medio di acquisto, cioè  $p_i > p_i(A)$ . Quindi, aggiungendo la tassazione delle plusvalenze, il vincolo di rendimento diventa:

$$\sum_{i=1}^n (s_i + x_i) \hat{r}_i - \sum_{i=1}^n c_i^B x_i^+ + c_i^S x_i^- - T_c \sum_{i=1}^n \frac{x_i^-}{p_i(A)} [p_i - p_i(A)] \geq \mu \sum_{i=1}^n (s_i + x_i).$$

### 3.3.3 Divieto di *short selling*

Come già accennato, il modello è applicato per la revisione di portafogli investiti in mercato in cui le vendite allo scoperto non sono permesse. Il vincolo da inserire nel modello di revisione può essere formulato nel seguente modo:

$$s_i + x_i \geq 0,$$

per  $i = 1, \dots, n$ , indicando che il valore investito inizialmente nel titolo  $i$  sommato al valore scambiato nel processo di revisione non deve essere negativo. Tenendo in considerazione che l'applicazione del modello di revisione sarà condotta sul mercato azionario greco, l'inserimento del divieto di *short selling* deriva dall'iniziativa adottata dall'autorità di vigilanza greca nell'aprile 2010<sup>108</sup>, quando, per far fronte all'ondata di speculazione che stava trascinando verso il basso i titoli del mercato

<sup>107</sup> Si considera il prezzo medio di acquisto perché è possibile che le azioni del titolo  $i$  siano state acquistate in tempi diversi.

<sup>108</sup> Anon., *Greek SEC watchdog bans short selling in stocks*, www.reuters.com, 28 aprile 2010.

azionario greco, la *Hellenic Capital Market Commission*<sup>109</sup> ha deciso di vietare le vendite allo scoperto nella borsa di Atene. Successivamente il divieto di *short selling* fu adottato in comunione con le Autorità di vigilanza di altri paesi europei<sup>110</sup>.

Il vincolo  $s_i + x_i \geq 0$  è, in parte, legato ad un altro vincolo inserito nel modello, relativo all'ammontare massimo vendibile durante il processo di revisione:

$$x_i^- \leq s_i,$$

indicando che non è possibile vendere più di quanto si possiede inizialmente.

### 3.3.4 Vincolo di bilancio

Così come il modello di Pogue, in cui la revisione del portafoglio deve avvenire utilizzando il denaro inizialmente investito, senza ulteriori versamenti e prelievi, anche la sua variante qui proposta è specificata nell'ambito della strategia di autofinanziamento. Il vincolo di autofinanziamento (o vincolo di bilancio) può essere espresso dal valore del portafoglio dopo la revisione pari al valore attuale del portafoglio iniziale (nel momento della revisione) a cui sono sottratti i costi di transazione e la tassazione dei *capital gains*:

$$\sum_{i=1}^n (s_i + x_i) = \sum_{i=1}^n s_i \frac{p_i}{p_i(A)} - \sum_{i=1}^n c_i^B x_i^+ + c_i^S x_i^- - T_c \sum_{i=1}^n \frac{x_i^-}{p_i(A)} [p_i - p_i(A)]$$

dove  $\sum_{i=1}^n (s_i + x_i)$  è il valore del portafoglio dopo la revisione e  $\sum_{i=1}^n s_i \frac{p_i}{p_i(A)}$  indica il valore attuale del portafoglio iniziale nel momento della revisione (comprendente già i ricavi dalla vendita dei titoli e il costo per l'acquisto dei titoli). Questa relazione è posta uguale a zero perché il modello deve finanziarsi autonomamente, utilizzando il capitale disponibile iniziale.

<sup>109</sup> La *Hellenic Capital Market Commission* (HCMC) è l'autorità competente per la supervisione delle leggi in materia di titoli e ha l'obiettivo di garantire la protezione e il funzionamento del mercato azionario greco.

<sup>110</sup> Anon., *Europa unita contro lo short selling*, [www.ilsole24ore.com](http://www.ilsole24ore.com), 12 agosto 2011.



### 3.3.5 Vincolo di liquidità

Nel proprio modello di revisione Pogue considera all'interno dei costi di transazione anche i costi di illiquidità, legati alla scarsa negoziabilità dei titoli sul mercato in quanto operazioni di piccole dimensioni possono provocare ampie oscillazioni nel prezzo di un titolo che a loro volta possono incidere sull'entità del prezzo di acquisto o di vendita sostenuto dall'investitore.

I costi d'illiquidità, se pur non trascurabili, non sono facilmente stimabili: lo stesso Pogue, infatti, ne fornisce una spiegazione puramente teorica. Si è deciso, dunque, di ricorrere al vincolo sui volumi di negoziazione come *proxy* dei costi di illiquidità. Nello specifico, il modello è stato integrato con il vincolo sulla liquidità del portafoglio formulato da Lo *et al.*<sup>111</sup>:

$$l_p = \sum_{i=1}^N w_{pi} l_{pi} \leq l_0,$$

in cui  $l_p$  è la liquidità del portafoglio;  $w_p = (w_{p1}, w_{p2}, \dots, w_{pN})'$  è il vettore dei pesi all'interno del portafoglio e  $w_{pi}$  indica il peso del titolo  $i$ ;  $l_{pi} = p_i v_i$ <sup>112</sup> è il volume monetario scambiato relativo al titolo  $i$ , con  $p_i$  il prezzo medio e  $v_i$  il numero di azioni scambiate del titolo  $i$ ;  $l_0$  è il livello massimo di liquidità del portafoglio, espresso in valore monetario. Riscrivendo tale vincolo in funzione della variabile decisionale  $x_i$ , il vincolo di liquidità del portafoglio da inserire nel modello di revisione diventa:

$$\sum_{i=1}^n \frac{s_i + x_i}{\sum_{i=1}^n s_i + x_i} l_{pi} \leq l_0.$$

Inoltre, si assume come d'uso che

<sup>111</sup> LO A. W., PETROV C., WIERZBICKI M., *It's 11 pm – Do you know where your liquidity is? The mean-variance-liquidity frontier*, Journal of Investment Management, 1 (1), 2003, pp. 55-93.

<sup>112</sup> PEREIRA G. M., SANT'ANNA L. R., FILOMENA T. P., BECKER J. L., *Restrição de liquidez para modelos de seleção de carteiras*, Revista Brasileira de Finanças (Online), Rio de Janeiro, 13 (2), 2015, pp. 288-324.

$$\sum_{i=1}^n \frac{s_i + x_i}{\sum_{i=1}^n s_i + x_i} = 1,$$

cioè che il capitale disponibile sia totalmente investito negli  $n$  titoli del portafoglio.

### 3.3.6 Vincoli di *bound*

Dato che il modello sarà applicato ad un mercato finanziario poco liquido, spesso non è possibile negoziare grosse quantità del medesimo titolo. Inoltre, si vuole che il modello revisioni il portafoglio iniziale diversificando le quantità negoziate. Per questi motivi vengono posti un limite inferiore ( $L_i$ ) e uno superiore ( $U_i$ ) all'ammontare negoziato per ciascun titolo  $i$  nel processo di revisione del portafoglio:

$$L_i \leq x_i \leq U_i.$$

È possibile riformulare tale vincolo con l'introduzione della variabile binaria  $z_i \in \{0,1\}$  per ogni titolo  $i$ , in cui  $z_i = 0$  se non si scambia il titolo  $i$  e  $z_i = 1$  se, invece, si negozia (sia in posizione lunga che corta). Quindi il vincolo diventa:

$$L_i z_i \leq x_i \leq U_i z_i.$$

## 3.4 La formulazione del modello di revisione proposto

Giunti a questo punto, si riporta la formulazione della variante proposta del modello di revisione di Pogue con tutti i vincoli analizzati nel paragrafo precedente. Il problema di minimizzazione vincolato risulta:

$$\min_{x,z} - \sum_{i=1}^n (s_i + x_i) r_{w,i}$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^n (s_i + x_i) \hat{r}_i - \sum_{i=1}^n c_i^B x_i^+ + c_i^S x_i^- - T_c \sum_{i=1}^n \frac{x_i^-}{p_i(A)} [p_i - p_i(A)] \geq \mu \sum_{i=1}^n (s_i + x_i)$$

$$s_i + x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_i^+ \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_i^- \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_i^- \leq s_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n (s_i + x_i) = \sum_{i=1}^n s_i \frac{p_i}{p_i(A)} - \sum_{i=1}^n c_i^B x_i^+ + c_i^S x_i^- - T_c \sum_{i=1}^n \frac{x_i^-}{p_i(A)} [p_i - p_i(A)]$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{s_i + x_i}{\sum_{i=1}^n s_i + x_i} l_{pi} \leq l_0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{s_i + x_i}{\sum_{i=1}^n s_i + x_i} = 1, \quad i = 1, \dots, n$$

$$Lz_i \leq x_i \leq Uz_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$z_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, n$$

Il comportamento del modello sarà analizzato nel capitolo successivo con l'implementazione della meta-euristica *Particle Swarm Optimization* (PSO), affrontata nel capitolo II. Com'è già stato spiegato, la PSO è una meta-euristica per l'ottimizzazione non vincolata, quindi è necessario ricorrere alla tecnica di penalizzazione e riformulare i vincoli (si veda il capitolo IV).

## Capitolo IV

### L'applicazione del modello di revisione

In questo capitolo si propone l'applicazione del modello di revisione alle serie storiche di 22 titoli negoziati sul mercato azionario greco. In particolar modo si valuta il comportamento del modello durante la complicata situazione che ha duramente colpito l'economia ellenica a partire dalla fine del 2009. Supponendo che l'investitore detenga un portafoglio ottimo investito nel mercato azionario greco al tempo  $t = 0$ , col passare del tempo il rendimento e il rischio del portafoglio esistente sono cambiati e quindi è possibile che tale portafoglio non sia più ottimale. A questo punto, in base alla congiuntura economica sottostante, il modello di revisione proposto sarà utilizzato con lo scopo di aiutare l'investitore a decidere se revisionare o meno il proprio portafoglio.

#### 4.1 I dati utilizzati e la selezione del portafoglio iniziale

Il modello sarà testato sui prezzi di chiusura e sui controvalori scambiati settimanalmente dal 10/01/2010 al 31/12/2017 relativi a 22 titoli azionari appartenenti all'indice greco FTSE/Athex Large Cap<sup>113</sup>. Attualmente questo indice è composto da 26 titoli, ma Admie S.A., Coca-Cola HBC AG, Metka e Viohalco S.A. non sono stati considerati in quanto nel 2010 non erano ancora presenti nel FTSE/Athex. Di seguito si riportano i titoli utilizzati nell'applicazione del modello di revisione proposto.

---

<sup>113</sup> Il FTSE / Athex Large Cap è l'indice azionario delle 26 società più capitalizzate della Borsa di Atene.

Titolo	Settore
Aegean Airlines	Compagnie aeree
Alpha Bank	Bancario
Jumbo	Giocattoli
Ellaktor	Costruzioni
Hellenic Petroleum	Industria energetica
National Bank of Greece	Bancario
Eurobank Ergasias	Bancario
Hellenic Exchanges Group	Servizi di investimento
Folli Follie	Beni di lusso
Fourlis S.A.	Prodotti per la casa durevoli
GEK Terna	Costruzioni
Grivalia Properties R.E.I.C.	Investimenti immobiliari
OTE	Telecomunicazioni
Lamda Development S.A.	Investimenti immobiliari
Motor Oil Hellas	Compagnie petrolifere
Mytilineos Holdings	Metallurgia ed energia
OPAP	Gioco d'azzardo
Piraeus Port Authority S.A.	Servizi di trasporto
Public Power Corporation	Elettricità
Gr. Sarantis S.A.	Prodotti cosmetici
Titan Cement	Cemento e materiali da costruzione
Piraeus Bank	Bancario

**Tabella 2: Titoli utilizzati per l'applicazione del modello di revisione.**

Leggendo la Tabella 2 si può notare come le maggiori realtà societarie del mercato greco si contrino intorno a pochi settori, in particolare quello bancario, immobiliare, energetico e delle costruzioni. Manca totalmente, ad esempio, un'azienda con grande capitalizzazione nel settore tecnologico, automobilistico o multimediale, tutti settori poco compatibili con l'economia greca allo stato attuale, centrata soprattutto sui settori primario e terziario. Una scarsa diversificazione potrebbe comportare un'alta correlazione tra i titoli e di conseguenza limitare l'efficacia del modello.

In base ai prezzi osservati sono stati calcolati 414 rendimenti logaritmici settimanali per ogni titolo, mediante la formula:

$$R_{i,t} = \ln \left( \frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}} \right).$$

Per valutarne il diverso comportamento, il modello è stato applicato dividendo l'intervallo temporale considerato in quattro scenari<sup>114</sup>, ognuno dei quali è stato caratterizzato dalla presenza di un evento politico-economico rilevante per lo Stato greco. Ogni scenario, inoltre, è stato suddiviso in due parti: la prima, definita *in-sample*, comprende i rendimenti logaritmici relativi alle prime 52 (o 53) settimane del campione considerato ed è utilizzata per la stima dei parametri del modello; la seconda parte, *out-of-sample*<sup>115</sup>, riguarda i rendimenti delle ultime 17 (o 18) settimane ed è utilizzata per verificare l'efficacia del modello sulla base dei suddetti parametri. La logica nel suddividere il campione tra *in-sample* ed *out-of-sample* deriva dal fatto che si ipotizza di essere nell'ultima settimana del dodicesimo mese e si intende revisionare il proprio portafoglio per le 17 (o 18) settimane successive: qualora i rendimenti attesi e il CVaR riscontrati nel campione *in-sample* rimangano simili ai medesimi rilevati nella parte *out-of-sample*, allora gli ammontare da acquistare o vendere indicati dal modello sulla base del periodo *in-sample* dovrebbero assicurare la miglior composizione di portafoglio anche per gli istanti successivi, cioè al termine del periodo *out-of-sample* il portafoglio revisionato dovrebbe avere un rendimento e un CVaR in linea con quanto previsto alla fine della 52esima (o 53esima) settimana.

La suddivisione in diversi scenari è avvenuta considerando i maggiori eventi politico-economici che hanno caratterizzato l'economia greca tra il 2010 e il 2017. In particolare sono stati individuati quattro micro-scenari, ognuno dei quali copre un arco temporale di circa 17 mesi, e due macro-scenari, costituiti da circa 51 mesi ciascuno, che distinguono tra crollo e segnali di timida ripresa del mercato azionario greco. Precisamente, i quattro micro-scenari sono:

- Scenario 1: compreso tra gennaio 2010 e maggio 2011, in questo periodo iniziano a diffondersi i timori di una crisi del debito pubblico greco (oltre a quello spagnolo, italiano, irlandese, portoghese e cipriota) con la definizione del primo “piano di salvataggio” da 110 miliardi di euro da parte dei paesi

---

<sup>114</sup> Nello specifico, l'analisi empirica sarà condotta su 4 micro-scenari e su 2 macro-scenari.

<sup>115</sup> I dati *out-of-sample* costituiscono quello che è definito come “futuro virtuale”.

dell'eurozona<sup>116</sup>, dopo il declassamento da parte delle agenzie di rating internazionali<sup>117</sup>.

- Scenario 2: compreso tra gennaio 2012 e maggio 2013, questo periodo è legato all'opinione sempre più diffusa dell'inevitabile default della Grecia<sup>118</sup> e a un ulteriore aiuto da parte della Troika<sup>119</sup> di 130 miliardi di euro<sup>120</sup>.
- Scenario 3: compreso tra gennaio 2014 e maggio 2015, in questo periodo il Pil greco torna a crescere, seppur leggermente,<sup>121</sup> e a gennaio 2015 viene eletto il nuovo capo del governo Alexis Tsipras, che negozia con la Troika il pagamento del debito greco; permane l'andamento negativo nel mercato azionario.
- Scenario 4: compreso tra gennaio 2016 e maggio 2017, questo periodo è caratterizzato da un andamento rialzista del mercato azionario greco.

I due macro-scenari, invece, in base ai quali è stato diviso l'intero periodo tra il 2010 e la fine del 2017 sono:

- Scenario A: compreso tra gennaio 2010 e gennaio 2014, l'intero periodo è definito dal crollo dei prezzi del mercato ellenico.
- Scenario B: compreso tra gennaio 2014 e dicembre 2017, questo periodo presenta un clima di fiducia del mercato, con segnali di rallentamento verso la fine del 2017.

Questi due scenari saranno utilizzati per testare il comportamento del modello di revisione nel caso di un maggior numero di osservazioni a disposizione.

---

<sup>116</sup> DA ROLD V., *Accordo per salvare la Grecia. Piano da 110 miliardi di euro. Ad Atene settimana di scioperi*, [www.ilsole24ore.com](http://www.ilsole24ore.com), 2 maggio 2010.

<sup>117</sup> Anon., *Government debt: Judging the judges*, [www.theguardian.com](http://www.theguardian.com), 4 gennaio 2010.

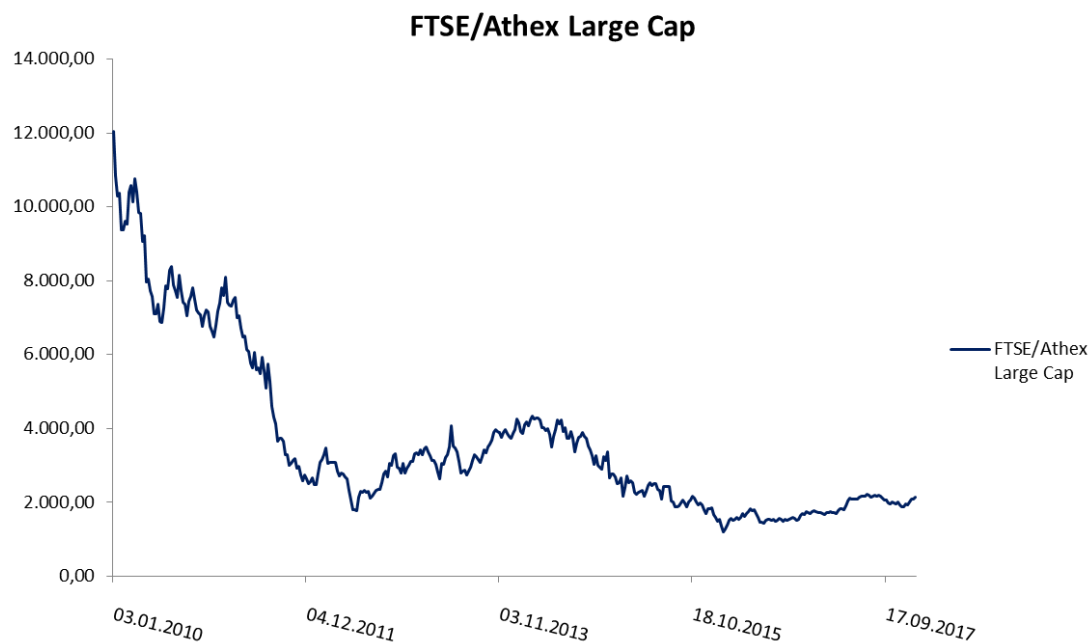
<sup>118</sup> Anon., *L'allarme di Fitch: la Grecia non ce la farà, sarà default*, [www.tg1.rai.it](http://www.tg1.rai.it), 17 gennaio 2012.

<sup>119</sup> Organismo collegiale formato dai rappresentanti della Commissione Europea, della Banca Centrale Europea e del Fondo Monetario Internazionale.

<sup>120</sup> Anon., *Grecia, accordo nella notte. Via libera agli aiuti*, [www.corriere.it](http://www.corriere.it), 21 febbraio 2012.

<sup>121</sup> Anon., *Greece Exits Recession After Crisis That Put Euro at Risk*, [www.bloomberg.com](http://www.bloomberg.com), 14 novembre 2014.

Il grafico sottostante, che riporta l'andamento l'indice greco dal quale sono stati ricavati i 22 titoli selezionati, può essere utile per capire meglio l'andamento del mercato azionario greco durante l'intervallo temporale considerato.



**Figura 9: Andamento dell'indice FTSE/Athex Large Cap tra gennaio 2010 e dicembre 2017.**

Come si può notare da grafico, tra gennaio 2010 e giugno 2012 l'indice ha registrato una perdita di oltre l'85% e si prolunga l'intervallo fino febbraio 2016 il decremento arriva a circa il 90%. Sicuramente operare in un mercato simile non è certamente semplice, vista soprattutto la scarsa disponibilità di investitori che vogliano scommettere sul mercato. Inoltre, come già specificato, è un mercato che non permette piena libertà anche da un punto di vista operativo, dato che sono vietate le vendite allo scoperto.

Fatte queste brevi considerazioni, sarà interessante capire come si comporterà il modello proposto, che dovrà essere abile nel districarsi tra rendimenti molto negativi, scarsa liquidità e poca diversificazione.

Ovviamente, il modello di revisione necessita di un portafoglio iniziale da revisionare nel periodo stabilito e secondo le esigenze dell'investitore. Il portafoglio iniziale è stato selezionato mediante la funzione "rand" di MATLAB che assegna un



valore casuale d'investimento a ciascuno dei 22 titoli che lo compongono. Si ipotizzi che, prima della revisione, l'investitore sia in possesso di un portafoglio azionario composto dai 22 titoli greci sopra specificati e che la sua composizione sia la seguente:

Titoli	Valore investito
<i>Aegean Airlines</i>	€ 9.791.432
<i>Alpha Bank SA</i>	€ 8.626.272
<i>Jumbo SA</i>	€ 1.172.028
<i>Ellaktor SA</i>	€ 161.175
<i>Hellenic Petroleum SA</i>	€ 4.619.542
<i>National Bank of Greece</i>	€ 1.876.960
<i>Eurobank Ergasias</i>	€ 4.890.139
<i>Hellenic Exchanges</i>	€ 2.019.216
<i>Folli Follie</i>	€ 7.965.273
<i>Fourlis Hld</i>	€ 8.441.094
<i>Gek Terna</i>	€ 6.259.662
<i>Grivalia Properties REIC</i>	€ 529.171
<i>Hellenic Telecom</i>	€ 6.769.577
<i>Lamda Development</i>	€ 2.853.320
<i>Motor Oil Hellas</i>	€ 4.423.788
<i>Mytilineos Holdings</i>	€ 7.816.734
<i>OPAP</i>	€ 5.308.706
<i>Piraeus Port</i>	€ 1.374.880
<i>Public Power Corporation</i>	€ 4.694.540
<i>Gr. Sarantis SA</i>	€ 1.189.775
<i>Titan Cement</i>	€ 3.518.932
<i>Piraeus Bank</i>	€ 7.939.810

**Tabella 3: Composizione del portafoglio iniziale.**

Il valore del portafoglio iniziale ipotizzato, calcolato come la somma di tutte quote investite in ciascun titolo, è di € 102.242.026. È importante sapere che la composizione iniziale del portafoglio può incidere in modo determinante sui risultati ottenuti con il processo di revisione. I sei scenari considerati hanno come punto di partenza il medesimo portafoglio, in modo tale da valutare quali siano i fattori che caratterizzano maggiormente l'esito della revisione. Ad esempio potrebbe essere interessante capire se il modello sia condizionato maggiormente dal contesto storico, piuttosto che dai numeri di osservazioni analizzate o, appunto, dalla composizione del portafoglio iniziale.

## 4.2 La riformulazione del modello con vincoli estesi

Nel secondo capitolo, trattando la il modello di Corazza *et al.*<sup>122</sup>, è stata affrontata la meta-euristica *Particle Swarm Optimization* (PSO) come algoritmo per la soluzione di problemi di ottimizzazione non vincolata. Dato che il modello di revisione proposto è un problema di ottimizzazione vincolato, per essere risolto mediante la PSO è necessario riformulare i vincoli in forma di violazioni dei medesimi<sup>123</sup>. Ricordando che  $x_i^+ = \max\{0, x_i\}$  e che  $x_i^- = -\min\{0, x_i\}$ , di seguito si riportano i vincoli riformulati per la PSO:

- Vincolo di rendimento:

$$\max \left\{ 0, \mu \sum_{i=1}^n (s_i + x_i) - \sum_{i=1}^n (s_i + x_i) \hat{r}_i + \sum_{i=1}^n c_i^B x_i^+ + c_i^S x_i^- + T_c \sum_{i=1}^n \frac{x_i^-}{p_i(A)} [p_i - p_i(A)] \right\};$$

- Divieto di vendite allo scoperto:

$$\sum_{i=1}^n \max\{0, -s_i - x_i\}, \quad i = 1, \dots, n;$$

- Ammontare acquistato con la revisione  $\geq 0$ :

$$\sum_{i=1}^n \max\{0, -x_i^+\}, \quad i = 1, \dots, n;$$

- Ammontare venduto con la revisione  $\geq 0$ :

$$\sum_{i=1}^n \max\{0, -x_i^-\}, \quad i = 1, \dots, n;$$

<sup>122</sup> CORAZZA M., FASANO G., GUSSO R., *Particle swarm optimization with non-smooth penalty reformulation, for a complex portfolio selection problem*, Applied Mathematics and Computation, 224, 2013, pp. 611-624.

<sup>123</sup> Si ricordi la *exact penalty function* affrontata nel capitolo 2.

- Massimo ammontare venduto con la revisione  $\leq s_i$ :

$$\sum_{i=1}^n \max\{0, x_i^- - s_i\}, \quad i = 1, \dots, n;$$

- Vincolo di bilancio (autofinanziamento):

$$\left| \sum_{i=1}^n (s_i + x_i) - \sum_{i=1}^n s_i \frac{p_i}{p_i(A)} + \sum_{i=1}^n c_i^B x_i^+ + c_i^S x_i^- + T_c \sum_{i=1}^n \frac{x_i^-}{p_i(A)} [p_i - p_i(A)] \right|;$$

- Vincolo di liquidità del portafoglio:

$$\max \left\{ 0, \sum_{i=1}^n \frac{s_i + x_i}{\sum_{i=1}^n s_i + x_i} l_{pi} - l_0 \right\}, \quad i = 1, \dots, n;$$

- Vincolo sulla somma dei pesi = 1:

$$\left| \sum_{i=1}^n \frac{s_i + x_i}{\sum_{i=1}^n s_i + x_i} - 1 \right|, \quad i = 1, \dots, n;$$

- Ammontare negoziato (con la revisione) minimo:

$$\sum_{i=1}^n \max\{0, Lz_i - x_i\}, \quad i = 1, \dots, n;$$

- Ammontare negoziato (con la revisione) massimo:

$$\sum_{i=1}^n \max\{0, x_i - Uz_i\}, \quad i = 1, \dots, n;$$

- Vincolo sulla variabile binaria:

$$\sum_{i=1}^n |z_i(1 - z_i)|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Tutte le violazioni dei vincoli sono moltiplicate per  $\frac{1}{\varepsilon}$  ( $\varepsilon$  rappresenta il “parametro di penalizzazione”) e sommate al CVaR. Se invece il vincolo viene rispettato, alla misura di rischio non è sommata alcuna quantità. In un problema di ottimizzazione in cui l’obiettivo è la minimizzazione della funzione di fitness, più non vengono rispettati i vincoli, più la *fitness function* di quel portafoglio assume un valore elevato, venendo così scartato dall’algoritmo. Quindi con l’applicazione del metodo delle penalità esatte, utilizzato da Corazza *et al.*, il problema risulta riformulato nel modo seguente:

$$\min_{x,z} P(x, z; \varepsilon).$$

Definendo con le lettere A, B e C rispettivamente la redditività attesa del portafoglio revisionato, i costi di transazione e la tassazione del capital gain, cioè

$$A = \sum_{i=1}^n (s_i + x_i) \hat{r}_i;$$

$$B = \sum_{i=1}^n c_i^B x_i^+ + c_i^S x_i^-;$$

$$C = T_c \sum_{i=1}^n \frac{x_i^-}{p_i(A)} [p_i - p_i(A)],$$

si riporta la formulazione estesa della *fitness function* utilizzata nella PSO:

$$P(x, z; \varepsilon) = -\sum_{i=1}^n (s_i + x_i) r_{w,i} + \frac{1}{\varepsilon} \left[ \max\{0, \mu \sum_{i=1}^n (s_i + x_i) - A + B + C\} + \sum_{i=1}^n \max\{0, -s_i - x_i\} + \sum_{i=1}^n \max\{0, -x_i^+\} + \sum_{i=1}^n \max\{0, -x_i^-\} + \sum_{i=1}^n \max\{0, x_i^- - s_i\} + \left| \sum_{i=1}^n (s_i + x_i) - \sum_{i=1}^n s_i \frac{p_i}{p_i(A)} + B + C \right| + \max\left\{0, \sum_{i=1}^n \frac{s_i + x_i}{\sum_i s_i + x_i} l_{pi} - l_0\right\} + \left| \sum_{i=1}^n \frac{s_i + x_i}{\sum_i s_i + x_i} - 1 \right| + \sum_{i=1}^n \max\{0, Lz_i - x_i\} + \sum_{i=1}^n \max\{0, x_i - Uz_i\} + \sum_{i=1}^n |z_i(1 - z_i)| \right].$$

È importante sottolineare che non vengono penalizzati i vincoli, ma le violazioni dei vincoli. Ogni addendo all’interno delle parentesi quadre si riferisce ad

un vincolo, ma è formulato in modo tale da porre in evidenza il mancato rispetto delle condizioni poste dal vincolo stesso. Se tutti i vincoli venissero rispettati, il valore all'interno delle parentesi quadre sarebbe nullo. Invece, se anche solo uno dei vincoli non fosse rispettato, allora la somma all'interno delle parentesi quadre produrrebbe un valore positivo, che si aggiungerebbe alla funzione obiettivo. In sintesi, se nessun vincolo venisse violato, il processo di minimizzazione vincolata si focalizzerebbe solamente sul CVaR; in caso contrario, la minimizzazione avrebbe come oggetto una quantità maggiore e l'entità della violazione, relativa a uno o più vincoli, spiegherebbe la differenza con la misura del rischio.

### 4.3 La definizione dei parametri del modello

L'applicazione del modello di revisione necessita di una preliminare definizione dei parametri riguardanti i vincoli e la PSO.

Relativamente ai vincoli del modello, in ogni simulazione eseguita sono stati mantenuti invariati i seguenti dati:

- Livello di significatività  $\alpha$  del CVaR al 95%;
- Commissione per l'acquisto del valore monetario  $x_i^+$ :  $c_i^B = 0,1\%$ ;
- Commissione per la vendita del valore monetario  $x_i^-$ :  $c_i^S = 0,1\%$ ;
- Aliquota applicata al *capital gain*:  $T_c = 15\%$ ;
- Controvalore minimo negoziato per ciascun titolo:  $L = \text{€ } 100.000$ .
- Controvalore massimo negoziato per ciascun titolo:  $U = \text{€ } 15.000.000$ .
- Liquidità massima del portafoglio:  $l_0 = \text{€ } 20.000.000$ .
- Rendimento medio annuo minimo (del portafoglio) desiderato dall'investitore:  
 $\pi = 1\%$ ;
- Rendimento medio settimanale minimo (del portafoglio) desiderato dall'investitore:  $\mu = (1 + \pi)^{\frac{1}{52}} - 1 = 0,02\%$ .

Data la "delicatezza" dell'intervallo temporale considerato per l'analisi empirica e la poca liquidità del mercato azionario greco, si è deciso di porre un rendimento minimo richiesto comunque positivo ma piuttosto basso, per cercare di agevolare il

modello nella ricerca della soluzione ottima. L'idea di mantenere un rendimento richiesto positivo, nonostante le "criticità" del periodo, deriva dal fatto che l'obiettivo dell'investitore sia quello di continuare ad investire in questo mercato con la speranza di ottenere un guadagno, anche minimo. Il rendimento richiesto in termini monetari (euro) è dato da:  $\mu \sum_{i=1}^n (s_i + x_i)$ .

Per quanto riguarda i vincoli sui controvalori scambiati ( $U$  e  $L$ ) e sulla liquidità del portafoglio ( $l_0$ ), essi sono stati ricavati eseguendo una breve analisi sui controvalori scambiati dai 22 titoli sopracitati tra il 2010 e il 2017. Per quanto riguarda le limitazioni sul massimo e minimo controvalore negoziato per ciascun titolo, si considerino le due tabelle riportate di seguito.

Titoli	Medie
<i>Aegean Airlines</i>	€ 1.477.922
<i>Alpha Bank SA</i>	€ 52.099.643
<i>Jumbo SA</i>	€ 9.256.517
<i>Ellaktor SA</i>	€ 2.944.371
<i>Hellenic Petroleum SA</i>	€ 4.171.962
<i>National Bank of Greece</i>	€ 80.482.596
<i>Eurobank Ergasias</i>	€ 28.057.728
<i>Hellenic Exchanges</i>	€ 5.572.050
<i>Folli Follie</i>	€ 6.171.961
<i>Fourlis Hld</i>	€ 1.549.744
<i>Gek Terna</i>	€ 1.959.654
<i>Grivalia Properties REIC</i>	€ 2.526.907
<i>Hellenic Telecom</i>	€ 36.038.474
<i>Lamda Development</i>	€ 919.237
<i>Motor Oil Hellas</i>	€ 5.495.365
<i>Mytilineos Holdings</i>	€ 5.705.305
<i>OPAP</i>	€ 36.644.821
<i>Piraeus Port</i>	€ 1.382.744
<i>Public Power Corporation</i>	€ 16.248.891
<i>Gr. Sarantis SA</i>	€ 664.781
<i>Titan Cement</i>	€ 6.192.758
<i>Piraeus Bank</i>	€ 37.521.597
	€ 15.594.774

**Tabella 4: Medie dei controvalori negoziati settimanalmente tra gennaio 2010 e dicembre 2017.**

La Tabella 4 è stata utilizzata per determinare il vincolo superiore: per ciascun titolo è stata calcolata la media aritmetica del controvalore negoziato settimanalmente tra il 10/01/10 e il 31/12/17 e successivamente è stata calcolata una

semplice media (€ 15.594.774) dei valori ottenuti. Si è deciso, dunque, di inserire nel modello un vincolo superiore pari a € 15.000.000. Durante il processo di applicazione del modello nei diversi scenari considerati, il vincolo non sarà mai violato.

Titoli	Minori
<i>Aegean Airlines</i>	€ 5.990
<i>Alpha Bank SA</i>	€ 3.472.270
<i>Jumbo SA</i>	€ 223.480
<i>Ellaktor SA</i>	€ 57.610
<i>Hellenic Petroleum SA</i>	€ 383.360
<i>National Bank of Greece</i>	€ 2.014.470
<i>Eurobank Ergasias</i>	€ 413.330
<i>Hellenic Exchanges</i>	€ 454.290
<i>Folli Follie</i>	€ 5.430
<i>Fourlis Hld</i>	€ 25.640
<i>Gek Terna</i>	€ 36.410
<i>Grivalia Properties REIC</i>	€ 15.160
<i>Hellenic Telecom</i>	€ 3.383.920
<i>Lamda Development</i>	€ 5.430
<i>Motor Oil Hellas</i>	€ 924.530
<i>Mytilineos Holdings</i>	€ 828.950
<i>OPAP</i>	€ 5.960.250
<i>Piraeus Port</i>	€ 21.460
<i>Public Power Corporation</i>	€ 782.340
<i>Gr. Sarantis SA</i>	€ 5.120
<i>Titan Cement</i>	€ 325.160
<i>Piraeus Bank</i>	€ 586.590
	€ 905.963

**Tabella 5: Controvalori più bassi negoziati settimanalmente tra gennaio 2010 e dicembre 2017.**

La Tabella 5, invece, è stata utilizzata per determinare il vincolo inferiore: per ciascun titolo è stato selezionato il controvalore minore negoziato tra il 10/01/10 e il 31/12/17 ed è stata calcolata una media (€ 905.963) dei 22 valori rilevati. Il valore ottenuto è stato inizialmente inserito nel modello, tuttavia dopo numerose iterazioni si è costata una frequente e ampia violazione di tale vincolo. Per ovviare a questo problema si è deciso di riconsiderare i controvalori minori escludendo i titoli appartenenti ai maggiori settori, quali bancario, del gioco d'azzardo, delle telecomunicazioni, delle industrie petrolifere e della metallurgia. Ricalcolando la media si ottiene un valore decisamente ridotto, pari a circa € 100.000. In conclusione si è deciso di porre un vincolo pari a € 100.000 e come si avrà modo di constatare di

seguito, questo valore sembra essere ancora troppo elevato poiché il modello tenderà spesso a violarlo, seppur non eccessivamente.

Per quanto riguarda il valore massimo di liquidità del portafoglio, esso è stato ottenuto un semplice calcolo riportato nella tabella sottostante.

Pesi portafoglio iniziale	Scenario 1		Scenario 2		Scenario 3		Scenario 4	
	Controvalori medi <i>in sample</i>	Liquidità portafoglio	Controvalori medi <i>in sample</i>	Liquidità portafoglio	Controvalori medi <i>in sample</i>	Liquidità portafoglio	Controvalori medi <i>in sample</i>	Liquidità portafoglio
0,10	€ 315.437	€ 30.209	54547,16981	€ 5.224	4360758,654	€ 417.618	1805670,192	€ 172.924
0,08	€ 65.472.770	€ 5.524.009	29296180	€ 2.471.751	74962350,58	€ 6.324.656	70883416,35	€ 5.980.512
0,01	€ 6.571.500	€ 75.331	2336897,736	€ 26.788	15220677,31	€ 174.479	9871370,577	€ 113.158
0,00	€ 3.777.338	€ 5.955	2098493,585	€ 3.308	4949931,346	€ 7.803	1180079,231	€ 1.860
0,05	€ 6.206.311	€ 280.416	2392776,604	€ 108.111	6518877,885	€ 294.539	2701690,385	€ 122.069
0,02	€ 213.786.576	€ 3.924.696	46649341,13	€ 856.389	107725071,2	€ 1.977.618	38015531,35	€ 697.889
0,05	€ 39.158.350	€ 1.872.907	12927533,77	€ 618.312	48224502,31	€ 2.306.532	31927525,96	€ 1.527.063
0,02	€ 5.904.442	€ 116.609	4250857,925	€ 83.952	9860716,538	€ 194.743	3309630,769	€ 65.363
0,08	€ 248.437	€ 19.355	2609198,491	€ 203.272	12139754,42	€ 945.760	5305869,615	€ 413.359
0,08	€ 2.076.878	€ 171.467	1083301,509	€ 89.437	2085268,269	€ 172.160	696904,0385	€ 57.536
0,06	€ 2.098.112	€ 128.455	1337231,887	€ 81.871	3378909,808	€ 206.870	816004,2308	€ 49.959
0,01	€ 540.475	€ 2.797	1136368,113	€ 5.881	4850371,731	€ 25.104	2329478,654	€ 12.057
0,07	€ 38.903.970	€ 2.575.882	20918562,83	€ 1.385.045	55003049,42	€ 3.641.823	25418203,85	€ 1.682.972
0,03	€ 339.767	€ 9.482	117703,0189	€ 3.285	2166287,308	€ 60.456	794059,8077	€ 22.160
0,04	€ 5.952.829	€ 257.566	3997316,226	€ 172.955	4537916,154	€ 196.346	5774103,846	€ 249.833
0,08	€ 5.113.143	€ 390.916	4414001,321	€ 337.465	7969482,885	€ 609.293	3335111,154	€ 254.980
0,05	€ 49.229.048	€ 2.556.117	30308858,11	€ 1.573.725	45738156,15	€ 2.374.859	20712616,54	€ 1.075.460
0,01	€ 429.962	€ 5.782	461307,3585	€ 6.203	805101,7308	€ 10.826	5895930	€ 79.284
0,05	€ 27.883.810	€ 1.280.312	10359188,11	€ 475.652	22679333,46	€ 1.041.343	5527909,038	€ 253.819
0,01	€ 603.942	€ 7.028	407718,3019	€ 4.745	391379,0385	€ 4.554	689092,6923	€ 8.019
0,03	€ 8.970.761	€ 308.753	2384465,849	€ 82.068	7946646,731	€ 273.505	5905877,692	€ 203.267
0,08	€ 33.159.913	€ 2.575.100	13737333,4	€ 1.066.800	93908360,96	€ 7.292.642	23215934,62	€ 1.802.880
1,00		€ 22.119.142		€ 9.662.239		€ 28.553.529		€ 14.846.424

€ 18.795.334

**Tabella 6: Determinazione del vincolo di liquidità.**

La Tabella 6 mostra, per ogni scenario, la liquidità del portafoglio, ottenuta moltiplicando le quote (percentuali) del portafoglio iniziale per i controvalori negoziati relativi al periodo *in-sample* di ciascun scenario. Successivamente è stata calcolata la media delle liquidità dei portafogli, ottenendo così il valore riportato in basso a destra. Come si avrà modo di vedere, il vincolo di liquidità, posto pari a € 20.000.000, non sarà mai violato dal modello.

Per concludere, i vincoli appena trattati sono stati posti anche per valutare la capacità di diversificazione del modello, oltre che per rendere il modello più aderente possibile al contesto politico-economico al quale viene applicato.

In riferimento a quanto riportato in letteratura, i parametri della PSO relativi al calcolo della velocità di aggiornamento di ogni particella devono essere impostati nel modo seguente:



- Peso d'inerzia:  $iw = 0.7298$ ;
- Coefficiente di accelerazione cognitivo:  $c1 = 1.49618$ ;
- Coefficiente di accelerazione cognitivo:  $c2 = 1.49618$ ;
- Numero di particelle:  $P = 100$ ;
- Numero di iterazioni:  $niter = 100$ ;
- Parametro di penalità:  $\varepsilon = 0.0001$ .

Sono state effettuate numerose simulazioni per la definizione del numero di particelle, delle iterazioni e del valore di  $\varepsilon$ . È importante considerare che il modello richiede un gran numero di particelle, in quanto ci sono 22 variabili  $x_i$  e 22 variabili  $z_i$ . Per questo motivo si è deciso di porre il numero delle possibili soluzioni pari a 100. Per quanto riguarda le iterazioni, si è notato che il modello funziona meglio con un numero ridotto di “niter”. Infine, il parametro di penalità è stato posto pari a 0.0001 perché, con valori minori di  $\varepsilon$ , il modello non riesce mai a trovare una soluzione al problema di ottimizzazione. È importante sottolineare che dal parametro  $\varepsilon$  dipende la corrispondenza tra il problema di ottimizzazione vincolato e quello non vincolato risolto mediante la PSO.

Definiti i valori dei parametri, ora è possibile valutare il comportamento del modello di revisione applicandolo in scenari differenti.

## 4.4 L'applicazione del modello

Il modello viene applicato in un contesto politico-economico molto critico esploso alla fine del 2009, quando l'allora primo ministro della Repubblica Ellenica, George Papandreu, dichiarò che i governi precedenti avessero falsificato i dati di bilancio dei conti pubblici per agevolare l'entrata nell'euro della Grecia, denunciando, così, il rischio di bancarotta del paese<sup>124</sup>. Procediamo ora con l'analisi dei 6 scenari sopra presentati.

---

<sup>124</sup> DA ROLD V., *Grecia sull'orlo della bancarotta*, [www.ilsole24ore.com](http://www.ilsole24ore.com), 20 novembre 2009.

#### 4.4.1 Scenario 1

Il primo scenario coinvolge l'intervallo temporale tra il 10/01/2010 e il 01/05/2011 e utilizza 51 osservazioni sui rendimenti settimanali *in-sample* (primi 12 mesi) e 17 rendimenti settimanali *out-of-sample* (ultimi 4 mesi e mezzo). I parametri vengono stimati in un periodo in cui inizia a formarsi in clima di totale sfiducia nei confronti dello stato greco, con il conseguente crollo del mercato azionario. Questa situazione negativa perdura anche nel periodo di valutazione del modello (tranne che per l'inizio del 2011 in cui si nota un rallentamento della tendenza negativa), in quanto Moody's, Standard & Poor's e Fitch tagliano una seconda volta il rating della Grecia, diffondendo sempre più conferme sulla sua insolvenza. Le aspettative creatisi a priori, quindi, sono confrontate con un iniziale rallentamento del trend negativo del mercato azionario greco.

Si consideri la tabella sottostante, che riporta in modo dettagliato i risultati ottenuti implementando con la PSO il modello di revisione proposto.

Prima di consultare la tabella è necessario evidenziare che la colonna delle medie è stata evidenziata solamente per aiutare il lettore ad orientarsi tra i valori riportati dalle simulazioni, ma non deve fuorviare il lettore in quanto la media risultante da diverse simulazioni di un algoritmo stocastico come la PSO non ha alcuna interpretazione economica. Ciò che, invece, occorre ben tenere in considerazione è la simulazione che riporta il miglior valore della *fitness function*, cioè quella con il valore minore. I valori legati alla migliore *fitness function* corrispondono alle soluzioni ottime calcolate dall'implementazione del modello di revisione mediante la PSO.

Titoli	Portafoglio iniziale	Simulazioni revisione					Media
		1	2	3	4	5	
<i>Aegean Airlines</i>	€ 9.791.432	-€ 260.463	-€ 2.623.940	€ 23.617	-€ 3.255.133	-€ 1.175.602	-€ 1.458.304
<i>Alpha Bank SA</i>	€ 8.626.272	-€ 426.148	-€ 6.392.303	-€ 8.416.640	-€ 1.314.521	-€ 937.089	-€ 3.497.340
<i>Jumbo SA</i>	€ 1.172.028	-€ 365.598	€ 11.117	-€ 771.331	-€ 1.014.531	-€ 626.603	-€ 553.389
<i>Ellaktor SA</i>	€ 161.175	-€ 153.141	€ 6.168	€ 124.346	-€ 28.486	€ 48.430	-€ 537
<i>Hellenic Petroleum SA</i>	€ 4.619.542	-€ 2.976.115	-€ 636.642	-€ 124.773	-€ 1.966.901	-€ 1.532.929	-€ 1.447.472
<i>National Bank of Greece</i>	€ 1.876.960	-€ 77.862	-€ 443.805	-€ 53.532	-€ 637.387	-€ 12.091	-€ 244.935
<i>Eurobank Ergasias</i>	€ 4.890.139	€ 101.450	-€ 2.187.884	-€ 160.613	-€ 4.645.443	€ 98.754	-€ 1.358.747
<i>Hellenic Exchanges</i>	€ 2.019.216	-€ 1.097.839	€ 115.378	€ 183.013	-€ 644.545	-€ 1.513.779	-€ 591.554
<i>Folli Follie</i>	€ 7.965.273	-€ 199.750	-€ 1.312.136	-€ 6.588.235	€ 54.926	-€ 5.919.871	-€ 2.793.013
<i>Fourlis Hld</i>	€ 8.441.094	-€ 435.973	-€ 2.780.955	€ 18.287	-€ 103.928	-€ 2.375.374	-€ 1.135.588
<i>Gek Terna</i>	€ 6.259.662	-€ 1.979.235	-€ 3.379.241	-€ 846.138	-€ 1.333.063	-€ 266.418	-€ 1.560.819
<i>Grivalia Properties REIC</i>	€ 529.171	-€ 359.811	€ 141.125	€ 121.573	-€ 186.131	-€ 57.995	-€ 68.248
<i>Hellenic Telecom</i>	€ 6.769.577	-€ 1.353.812	-€ 1.441.712	-€ 4.208.107	-€ 6.405.371	-€ 1.244.030	-€ 2.930.606
<i>Lamda Development</i>	€ 2.853.320	-€ 6.771	-€ 158.369	-€ 177.905	-€ 1.716.618	-€ 1.366.541	-€ 685.241
<i>Motor Oil Hellas</i>	€ 4.423.788	-€ 598.239	-€ 613.179	-€ 240.922	-€ 2.476.543	-€ 314.179	-€ 848.613
<i>Mytilineos Holdings</i>	€ 7.816.734	-€ 5.787.054	-€ 1.702.726	-€ 4.942.476	-€ 2.763.283	-€ 421.986	-€ 3.123.505
<i>OPAP</i>	€ 5.308.706	-€ 3.742.451	-€ 68.237	-€ 13.174	-€ 974.036	-€ 1.918.227	-€ 1.343.225
<i>Piraeus Port</i>	€ 1.374.880	-€ 246.933	€ 127.412	-€ 467.306	-€ 847.135	€ 313.352	-€ 224.122
<i>Public Power Corporation</i>	€ 4.694.540	-€ 2.576.795	-€ 671.168	-€ 3.234.481	-€ 439.838	-€ 719.011	-€ 1.528.258
<i>Gr. Sarantis SA</i>	€ 1.189.775	-€ 844.487	-€ 1.069.227	-€ 505.331	-€ 58.305	-€ 1.027.672	-€ 701.004
<i>Titan Cement</i>	€ 3.518.932	€ 90.535	-€ 752.477	€ 82.129	-€ 630.336	-€ 2.576.396	-€ 757.309
<i>Piraeus Bank</i>	€ 7.939.810	-€ 5.827.955	-€ 4.549.871	-€ 598.223	-€ 603.771	-€ 7.628.945	-€ 3.841.753
Valore portafoglio finale	€ 102.242.026	€ 73.117.580	€ 71.859.354	€ 71.445.804	€ 70.251.648	€ 71.067.823	€ 71.548.442
<b>Fitness</b>	-	3,43756E+11	3,44248E+11	3,54251E+11	3,47931E+11	3,50152E+11	3,48068E+11
<b>CVaR out of sample</b>	€ 15.153.499	€ 7.243.215	€ 7.118.572	€ 7.077.605	€ 6.959.309	€ 7.040.161	€ 7.087.772
<b>CVaR in sample</b>	€ 10.128.358	€ 10.942.228	€ 10.440.640	€ 10.377.713	€ 10.397.867	€ 10.395.678	€ 10.510.825
<b>Rendimento out of sample (€)</b>	-€ 90.416	-€ 58.271	€ 72.470	-€ 149.214	-€ 149.901	€ 53.554	-€ 46.272
<b>Rendimento in sample (€)</b>	-€ 976.404	-€ 726.399	-€ 609.554	-€ 721.156	-€ 661.515	-€ 680.366	-€ 679.798
Rendimento richiesto (€)	€ 19.566	€ 13.993	€ 13.752	€ 13.673	€ 13.444	€ 13.600	€ 13.692
Violazione vincolo di rendimento (€)	-	€ 769.900	€ 654.491	€ 766.730	€ 707.060	€ 726.062	€ 724.849
Rendimento (%) oos	-0,09%	-0,08%	0,10%	-0,21%	-0,21%	0,08%	-0,07%
Violazione short selling	-	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0
Costi di transazione	-	€ 29.508	€ 31.185	€ 31.902	€ 32.100	€ 32.095	€ 31.358
Tassazione capital gain	-	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0
Valore attuale del portafoglio s	€ 70.021.130	€ 70.021.130	€ 70.021.130	€ 70.021.130	€ 70.021.130	€ 70.021.130	€ 70.021.130
Violazione vincolo di bilancio	-	€ 3.125.959	€ 1.869.409	€ 1.456.576	€ 262.618	€ 1.078.789	€ 1.558.670
Liquidità portafoglio	-	€ 8.431.064	€ 7.340.356	€ 8.439.247	€ 10.410.394	€ 8.188.264	€ 8.561.865
Somma pesi	1	1	1	1	1	1	1
Violazione vincolo L	-	€ 175.168	€ 85.522	€ 190.740	€ 141.717	€ 217.271	€ 162.083
Violazione vincolo U	-	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0

Tabella 7: Risultati della revisione nello scenario 1.

L'obiettivo è quello di analizzare il portafoglio risultante dal processo di revisione, sia in termini di rischiosità (valutandone il CVaR) sia in termini di redditività, senza escludere le violazioni del sistema di vincoli imposti dal modello. Come prima considerazione è opportuno evidenziare che il modello ha prodotto un portafoglio finale ridotto di circa 30 mila euro rispetto a quello iniziale. Infatti tutti i titoli sono in parte stati venduti, in particolar modo le aziende maggiormente vendute risultano essere Alpha Bank SA, Folli Follie, Hellenic Telecom, Mytilineos Holdings e Piraeus Bank. La tabella sottostante riporta com'è cambiato il peso di ciascun titolo nel portafoglio in seguito al processo di revisione.

titoli	portafoglio iniziale	Simulazioni					Media
		1	2	3	4	5	
Aegean Airlines	0,10	0,13	0,10	0,14	0,09	0,12	0,12
Alpha Bank SA	0,08	0,11	0,03	0,00	0,10	0,11	0,07
Jumbo SA	0,01	0,01	0,02	0,01	0,00	0,01	0,01
Ellaktor SA	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Hellenic Petroleum SA	0,05	0,02	0,06	0,06	0,04	0,04	0,04
National Bank of Greece	0,02	0,02	0,02	0,03	0,02	0,03	0,02
Eurobank Ergasias	0,05	0,07	0,04	0,07	0,00	0,07	0,05
Hellenic Exchanges	0,02	0,01	0,03	0,03	0,02	0,01	0,02
Folli Follie	0,08	0,11	0,09	0,02	0,11	0,03	0,07
Fourlis Hld	0,08	0,11	0,08	0,12	0,12	0,09	0,10
Gek Terna	0,06	0,06	0,04	0,08	0,07	0,08	0,07
Grivalia Properties REIC	0,01	0,00	0,01	0,01	0,00	0,01	0,01
Hellenic Telecom	0,07	0,07	0,07	0,04	0,01	0,08	0,05
Lamda Development	0,03	0,04	0,04	0,04	0,02	0,02	0,03
Motor Oil Hellas	0,04	0,05	0,05	0,06	0,03	0,06	0,05
Mytilineos Holdings	0,08	0,03	0,09	0,04	0,07	0,10	0,07
OPAP	0,05	0,02	0,07	0,07	0,06	0,05	0,06
Piraeus Port	0,01	0,02	0,02	0,01	0,01	0,02	0,02
Public Power Corporation	0,05	0,03	0,06	0,02	0,06	0,06	0,04
Gr. Sarantis SA	0,01	0,00	0,00	0,01	0,02	0,00	0,01
Titan Cement	0,03	0,05	0,04	0,05	0,04	0,01	0,04
Piraeus Bank	0,08	0,03	0,05	0,10	0,10	0,00	0,06
Somma	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Tabella 8: Variazione dei pesi dei titoli all'interno del portafoglio.

Ritornando ai risultati sintetizzati nella Tabella 4, è possibile notare che il CVaR relativo al portafoglio *out-of-sample* sia minore di quello ottenuto dal portafoglio basato sui dati *in-sample*. Anche relativamente al rendimento, la *performance* del portafoglio *out-of-sample* è migliore, seppur negativa, di quella attesa. È importante considerare, inoltre, l'effetto della revisione: il portafoglio revisionato *out-of-sample* ha un CVaR dimezzato rispetto a quello del portafoglio iniziale *out-of-sample*; anche i rendimenti (espressi in termini monetari) del portafoglio revisionato sono migliori di quelli del portafoglio iniziale.

Per quanto riguarda i vincoli, il vincolo di rendimento, il vincolo di bilancio e il vincolo sull'ammontare minimo negoziato non vengono mai rispettati in questo scenario. La violazione del rendimento è ovviamente dovuta ai forti cali dei prezzi registrati nel periodo di stima dei parametri del modello (*in-sample*) ed è accettabile che il modello non riesca a rispettare il rendimento positivo minimo desiderato dall'investitore (quasi € 14000). Una diversa considerazione deve essere fatta per la violazione del vincolo di bilancio (o vincolo di autofinanziamento). Ricordando che il modello è basato sulla strategia dell'autofinanziamento, cioè il valore del portafoglio finale deve essere pari al portafoglio iniziale, a cui vengono sottratti i costi di transazione e la tassazione del *capital gain*, l'esito della revisione comporta una leggera violazione positiva del vincolo di bilancio, segnale che il portafoglio

finale non è riuscito ad autofinanziarsi completamente. Infine, un ulteriore vincolo che il modello ha qualche difficoltà nel rispettare è quello relativo all'ammontare minimo negoziato in ciascun titolo, nonostante il suo valore sia stato posto piuttosto basso ( $L = € 100000$ ). La violazione di questo vincolo può derivare dalla forte riduzione dei prezzi registrata in questo periodo, che ha indotto numerosi investitori ad uscire dal mercato rendendolo meno liquido. Come già spiegato, tale vincolo è stato posto per testare la capacità di diversificazione del modello.

Dal momento che il modello è applicato su un mercato poco liquido, è importante che non venga violato il vincolo di liquidità massima del portafoglio ( $l_0 = € 20000000$ ). La tabella sottostante riporta la liquidità del portafoglio per ogni simulazione. La liquidità (a livello di portafoglio) di ciascun titolo è stata calcolata moltiplicando il suo peso all'interno del portafoglio per il controvalore scambiato del medesimo titolo nel momento in cui avviene la revisione del portafoglio.

Liquidità del portafoglio $\sum (s+x)$						
Titoli	Simulazione 1	Simulazione 2	Simulazione 3	Simulazione 4	Simulazione 5	Media
Aegean Airlines	€ 4.892	€ 3.743	€ 5.156	€ 3.492	€ 4.550	€ 4.367
Alpha Bank SA	€ 3.638.142	€ 1.008.498	€ 95.183	€ 3.376.339	€ 3.509.848	€ 2.325.602
Jumbo SA	€ 5.798	€ 8.655	€ 2.948	€ 1.178	€ 4.034	€ 4.523
Ellaktor SA	€ 154	€ 3.267	€ 5.606	€ 2.650	€ 4.138	€ 3.163
Hellenic Petroleum SA	€ 28.087	€ 69.262	€ 78.616	€ 47.185	€ 54.273	€ 55.484
National Bank of Greece	€ 1.076.803	€ 872.797	€ 1.116.903	€ 772.181	€ 1.148.362	€ 997.409
Eurobank Ergasias	€ 543.859	€ 299.580	€ 527.363	€ 27.749	€ 559.243	€ 391.559
Hellenic Exchanges	€ 21.920	€ 51.671	€ 53.617	€ 34.038	€ 12.371	€ 34.723
Folli Follie	€ 2.823	€ 2.461	€ 512	€ 3.034	€ 765	€ 1.919
Fourlis Hld	€ 107.373	€ 77.249	€ 116.121	€ 116.389	€ 83.706	€ 100.168
Gek Terna	€ 37.660	€ 25.786	€ 48.744	€ 45.113	€ 54.250	€ 42.311
Grivalia Properties REIC	€ 334	€ 1.347	€ 1.315	€ 705	€ 957	€ 932
Hellenic Telecom	€ 1.049.218	€ 1.050.262	€ 507.856	€ 73.438	€ 1.101.362	€ 756.427
Lamda Development	€ 4.467	€ 4.303	€ 4.297	€ 1.857	€ 2.401	€ 3.465
Motor Oil Hellas	€ 48.372	€ 49.027	€ 54.128	€ 25.626	€ 53.462	€ 46.123
Mytilineos Holdings	€ 46.855	€ 143.613	€ 67.905	€ 121.418	€ 175.631	€ 111.085
OPAP	€ 420.438	€ 1.431.359	€ 1.454.771	€ 1.211.048	€ 936.375	€ 1.090.798
Piraeus Port	€ 1.873	€ 2.538	€ 1.542	€ 912	€ 2.884	€ 1.950
Public Power Corporation	€ 144.685	€ 279.691	€ 102.086	€ 302.541	€ 279.443	€ 221.689
Gr. Sarantis SA	€ 307	€ 109	€ 623	€ 1.047	€ 148	€ 447
Titan Cement	€ 95.605	€ 74.559	€ 97.614	€ 79.633	€ 25.685	€ 74.619
Piraeus Bank	€ 1.151.397	€ 1.880.579	€ 4.096.341	€ 4.162.824	€ 174.374	€ 2.293.103
Totale liquidità	€ 8.431.064	€ 7.340.356	€ 8.439.247	€ 10.410.394	€ 8.188.264	€ 8.561.865

**Tabella 9: Liquidità dei portafogli revisionati.**

## 4.4.2 Scenario 2

Il secondo scenario riguarda il periodo che va dall' 08/01/2012 al 05/05/2013, con un totale di 69 rendimenti settimanali di cui 52 per la parte *in sample* (cioè i primi 12 mesi) e gli ultimi 17 per la parte *out-of-sample*. La stima dei parametri del modello avviene in un periodo in cui l'agenzia di rating Fitch è sempre più convinta del default greco e i paesi dell'eurozona approvano un "piano di aiuti" da 130 miliardi di euro; è un periodo in cui il crollo dei prezzi si arresta con un'inversione del trend negativo. Il periodo *out-of-sample*, utilizzato per la valutazione del modello, vede subito un rallentamento della ripresa registrata nel 2012, quindi le aspettative saranno migliori di quanto realizzato nel futuro virtuale, dato che i parametri del modello sono stati stimati in un contesto migliore di quello *out of sample*. Si consideri la tabella sottostante per analizzare i risultati ottenuti applicando il modello di revisione in questo secondo scenario.

Titoli	Portafoglio iniziale	Simulazioni revisione					Media
		1	2	3	4	5	
Aegean Airlines	€ 9.791.432	-€ 46.598	-€ 100.980	-€ 657.253	-€ 10.149	-€ 17.539	-€ 166.504
Alpha Bank SA	€ 8.626.272	-€ 199.824	-€ 60.724	-€ 1.507.661	-€ 683.026	-€ 432.751	-€ 576.797
Jumbo SA	€ 1.172.028	€ 170.235	€ 117.614	€ 410.579	-€ 211.385	-€ 438.353	€ 9.738
Ellaktor SA	€ 161.175	-€ 133.941	€ 33.936	-€ 71.409	€ 431.719	€ 108.416	€ 73.744
Hellenic Petroleum SA	€ 4.619.542	-€ 34.082	-€ 346.419	€ 96.863	-€ 109.804	-€ 1.408.456	-€ 360.379
National Bank of Greece	€ 1.876.960	-€ 418.367	-€ 29.934	-€ 83.269	-€ 21.274	€ 105.399	-€ 89.489
Eurobank Ergasias	€ 4.890.139	-€ 1.350.924	€ 216.014	-€ 552.705	-€ 1.521.390	-€ 869.738	-€ 815.749
Hellenic Exchanges	€ 2.019.216	-€ 73.523	€ 184.819	€ 34.030	€ 31.179	€ 70.608	€ 49.423
Folli Follie	€ 7.965.273	-€ 143.933	-€ 239.388	-€ 556.133	€ 162.333	-€ 499.997	-€ 255.424
Fourlis Hld	€ 8.441.094	€ 172.319	-€ 52.952	€ 1.727	€ 308.633	€ 87.717	€ 103.489
Gek Terna	€ 6.259.662	-€ 10.417	€ 78.890	€ 67.181	-€ 503.218	-€ 321.047	-€ 137.722
Grivalia Properties REIC	€ 529.171	€ 105.987	-€ 266.443	€ 27.885	-€ 494.469	-€ 70.779	-€ 139.564
Hellenic Telecom	€ 6.769.577	-€ 72.054	€ 58.045	-€ 13.971	-€ 183.891	€ 345.259	€ 26.678
Lamda Development	€ 2.853.320	€ 106.783	-€ 341.940	-€ 60.144	-€ 212.174	-€ 23.018	-€ 106.099
Motor Oil Hellas	€ 4.423.788	€ 15.393	-€ 544.433	€ 100.930	-€ 350.828	-€ 750.761	-€ 305.940
Mytilineos Holdings	€ 7.816.734	-€ 161.233	-€ 233.935	-€ 615.986	€ 50.867	-€ 1.364.925	-€ 465.042
OPAP	€ 5.308.706	€ 174.073	-€ 254.293	€ 9.772	€ 20.717	€ 199.983	€ 30.051
Piraeus Port	€ 1.374.880	-€ 243.221	€ 31.293	-€ 28.270	€ 8.034	-€ 238.431	-€ 94.119
Public Power Corporation	€ 4.694.540	-€ 134.852	-€ 46.489	-€ 494.048	-€ 56.223	-€ 74.204	-€ 161.163
Gr. Sarantis SA	€ 1.189.775	-€ 286.012	-€ 109.746	€ 8.726	-€ 476.426	-€ 25.478	-€ 177.787
Titan Cement	€ 3.518.932	-€ 873.474	-€ 524.162	-€ 1.883.488	-€ 286.350	-€ 641.245	-€ 841.744
Piraeus Bank	€ 7.939.810	-€ 1.581.016	-€ 824.349	€ 4.739	€ 213.051	-€ 452.603	-€ 528.036
Valore portafoglio finale	€ 102.242.026	€ 97.223.347	€ 98.986.450	€ 96.480.120	€ 98.347.954	€ 95.530.083	€ 97.313.591
Fitness	-	1,03118E+11	1,05989E+11	1,04152E+11	1,10406E+11	1,05726E+11	1,05878E+11
CVaR out of sample	€ 15.424.125	€ 14.667.012	€ 14.932.992	€ 14.554.890	€ 14.836.669	€ 14.411.568	€ 14.680.626
CVaR in sample	€ 24.410.179	€ 22.700.110	€ 23.614.102	€ 22.906.802	€ 23.320.859	€ 22.815.663	€ 23.071.507
Rendimento out of sample (€)	-€ 71.752	€ 24.761	-€ 80.243	-€ 42.106	€ 4.185	-€ 24.127	-€ 23.506
Rendimento in sample (€)	€ 1.271.947	€ 1.218.084	€ 1.248.874	€ 1.196.283	€ 1.205.392	€ 1.190.805	€ 1.211.888
Rendimento richiesto (€)	€ 19.566	€ 18.606	€ 18.943	€ 18.463	€ 18.821	€ 18.282	€ 18.623
Violazione vincolo di rendimento (€)	-	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0
Rendimento (%) oos	-0,07%	0,03%	-0,08%	-0,04%	0,00%	-0,03%	-0,02%
Violazione short selling	-	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0
Costi di transazione	-	€ 6.508	€ 4.697	€ 7.287	€ 6.347	€ 8.547	€ 6.677
Tassazione capital gain	-	€ 214.741	€ 241.423	€ 322.471	€ 469.004	€ 519.561	€ 353.440
Valore attuale del portafoglio s	€ 94.612.512	€ 94.612.512	€ 94.612.512	€ 94.612.512	€ 94.612.512	€ 94.612.512	€ 94.612.512
Violazione vincolo di bilancio	-	€ 2.832.084	€ 4.620.059	€ 2.197.367	€ 4.210.793	€ 1.445.679	€ 3.061.196
Liquidità portafoglio	-	€ 6.593.027	€ 6.558.299	€ 6.606.313	€ 6.645.701	€ 6.725.088	€ 6.625.686
Somma pesi	1	1	1	1	1	1	1
Violazione vincolo L	-	€ 252.066	€ 392.264	€ 507.986	€ 198.443	€ 369.344	€ 344.021
Violazione vincolo U	-	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0

Tabella 10: Risultati della revisione nello scenario 2.

Notiamo subito che, a differenza del precedente scenario, il valore del portafoglio revisionato è simile al valore del portafoglio iniziale e le quantità vendute sono sensibilmente ridotte. Inoltre in alcuni casi, come nella simulazione 1 in cui la funzione fitness assume il valore migliore, il modello suggerisce di acquistare soprattutto i titoli Jumbo SA, Fourlis Hdl e OPAP. La tabella sottostante riporta il peso di ciascun titolo dopo il processo di revisione del portafoglio.

titoli	portafoglio iniziale	Simulazioni					Media
		1	2	3	4	5	
<i>Aegean Airlines</i>	0,10	0,10	0,10	0,09	0,10	0,10	0,10
<i>Alpha Bank SA</i>	0,08	0,09	0,09	0,07	0,08	0,09	0,08
<i>Jumbo SA</i>	0,01	0,01	0,01	0,02	0,01	0,01	0,01
<i>Ellaktor SA</i>	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00
<i>Hellenic Petroleum SA</i>	0,05	0,05	0,04	0,05	0,05	0,03	0,04
<i>National Bank of Greece</i>	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
<i>Eurobank Ergasias</i>	0,05	0,04	0,05	0,04	0,03	0,04	0,04
<i>Hellenic Exchanges</i>	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
<i>Folli Follie</i>	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08
<i>Fourlis Hld</i>	0,08	0,09	0,08	0,09	0,09	0,09	0,09
<i>Gek Terna</i>	0,06	0,06	0,06	0,07	0,06	0,06	0,06
<i>Grivalia Properties REIC</i>	0,01	0,01	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00
<i>Hellenic Telecom</i>	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07
<i>Lamda Development</i>	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
<i>Motor Oil Hellas</i>	0,04	0,05	0,04	0,05	0,04	0,04	0,04
<i>Mytilineos Holdings</i>	0,08	0,08	0,08	0,07	0,08	0,07	0,08
<i>OPAP</i>	0,05	0,06	0,05	0,06	0,05	0,06	0,05
<i>Piraeus Port</i>	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
<i>Public Power Corporation</i>	0,05	0,05	0,05	0,04	0,05	0,05	0,05
<i>Gr. Sarantis SA</i>	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
<i>Titan Cement</i>	0,03	0,03	0,03	0,02	0,03	0,03	0,03
<i>Piraeus Bank</i>	0,08	0,07	0,07	0,08	0,08	0,08	0,08
Somma	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Tabella 11: Variazioni dei pesi dei titoli all'interno del portafoglio.

Analogamente allo scenario 1, il CVaR relativo al portafoglio *out-of-sample* è minore del CVaR basato sui dati *in-sample*. Invece, a differenza del precedente scenario, il CVaR del portafoglio revisionato è simile a quello del portafoglio iniziale. Per quanto riguarda il rendimento, la *performance* del portafoglio *out-of-sample* è decisamente peggiore di quella *in-sample*: questo peggioramento nel rendimento medio ottenuto deriva dall'interruzione del trend rialzista che ha contraddistinto gli ultimi mesi del 2012. Possiamo affermare che l'effetto della revisione non incide particolarmente sul portafoglio finale.

Rispetto allo scenario 1, in questo caso il modello di revisione tende a non rispettare solamente il vincolo di bilancio e il vincolo sull'ammontare minimo

negoziato, dato che il vincolo di rendimento viene sempre rispettato. Similmente al caso precedente, l'esito della revisione comporta una violazione positiva del vincolo di bilancio, segnale che il portafoglio finale non è stato in grado di finanziarsi autonomamente. La violazione del vincolo relativo all'ammontare minimo negoziato in ciascun titolo è più evidente rispetto allo scenario 1 e può derivare dalla scarsa liquidità che attanaglia il mercato greco. La frequente violazione di questo vincolo può essere un indice di scarsa capacità di diversificazione del modello di revisione proposto.

Infine, il vincolo di liquidità non viene mai violato dal modello. La Tabella 12 (riportata in Appendice B) indica la liquidità del portafoglio per ogni simulazione.

### 4.4.3 Scenario 3

Il terzo scenario abbraccia l'arco temporale tra il 12/01/2014 e il 04/01/2015 per la parte *in-sample* (51 osservazioni) e tra l'11/01/2015 e il 03/05/15 per la parte *out-of-sample* (17 osservazioni). La stima dei parametri ha come sfondo ancora una volta un clima di sfiducia nei confronti del mercato greco, nonostante nel 3° trimestre del 2014 l'economia greca riprenda a crescere dello 0,6% sul Pil, dopo anni di grave recessione<sup>125</sup>. La valutazione del modello è stata eseguita durante un periodo grande fermento politico, dato che a gennaio 2015 ci sono state le elezioni del radicale Alexis Tsipras, incaricato del delicato compito di trattare le gravose condizioni di pagamento del debito imposte dalla Troika. L'accordo sulla ristrutturazione del debito viene raggiunto a luglio 2015.

Si consideri la tabella sottostante per analizzare i risultati ottenuti applicando il modello di revisione in questo terzo scenario.

---

<sup>125</sup> LIVINI E., *La Grecia fuori dalla recessione. Il Pil torna a crescere nel 2014*, [www.repubblica.it](http://www.repubblica.it), 4 novembre 2014.



Titoli	Portafoglio iniziale	Simulazioni revisione					Media
		1	2	3	4	5	
Aegean Airlines	€ 9.791.432	-€ 58.418	-€ 2.512.812	-€ 8.071.477	-€ 2.473.484	-€ 874.740	-€ 2.798.186
Alpha Bank SA	€ 8.626.272	-€ 1.405.440	-€ 6.471.036	-€ 633.339	-€ 803.319	-€ 1.182.581	-€ 2.099.143
Jumbo SA	€ 1.172.028	-€ 164.355	-€ 1.153.163	€ 36.259	-€ 74.818	-€ 945.355	-€ 460.286
Ellaktor SA	€ 161.175	€ 90.184	-€ 46.447	€ 50.112	-€ 160.396	-€ 73.537	-€ 28.017
Hellenic Petroleum SA	€ 4.619.542	-€ 1.101.564	-€ 1.418.502	-€ 3.459.472	-€ 1.854.728	-€ 2.879.535	-€ 2.142.760
National Bank of Greece	€ 1.876.960	-€ 1.048.469	-€ 1.182.391	-€ 413.319	-€ 1.591.298	-€ 1.733.915	-€ 1.193.878
Eurobank Ergasias	€ 4.890.139	-€ 3.444.967	-€ 548.167	-€ 3.603.298	€ 65.232	-€ 4.714.672	-€ 2.449.174
Hellenic Exchanges	€ 2.019.216	-€ 872.917	-€ 784.869	-€ 1.057.807	-€ 967.235	-€ 606.006	-€ 857.767
Folli Follie	€ 7.965.273	-€ 154.826	-€ 50.566	-€ 186.963	-€ 4.910.503	-€ 6.669.994	-€ 2.394.570
Fourlis Hld	€ 8.441.094	-€ 5.878.445	-€ 1.099.785	-€ 3.093.430	-€ 3.470.221	-€ 4.651.476	-€ 3.638.672
Gek Terna	€ 6.259.662	-€ 752.667	-€ 772.273	-€ 63.977	-€ 666.895	-€ 937.300	-€ 638.623
Grivalia Properties REIC	€ 529.171	€ 47.285	€ 19.410	-€ 513.815	-€ 204.647	€ 164.047	-€ 97.544
Hellenic Telecom	€ 6.769.577	-€ 1.902.025	-€ 113.503	€ 82.045	-€ 4.514.542	-€ 298.182	-€ 1.349.241
Lamda Development	€ 2.853.320	-€ 1.677.901	-€ 180.417	-€ 1.114.296	-€ 543.257	-€ 529.910	-€ 809.156
Motor Oil Hellas	€ 4.423.788	-€ 4.312.835	-€ 1.323.601	-€ 465.340	-€ 2.212.569	-€ 2.048.724	-€ 2.072.614
Mytilineos Holdings	€ 7.816.734	-€ 712.390	-€ 6.914.370	-€ 4.044.778	-€ 1.612.684	-€ 762.599	-€ 2.809.364
OPAP	€ 5.308.706	-€ 396.130	-€ 1.214.087	-€ 1.727.044	-€ 894.608	-€ 2.904.191	-€ 1.427.212
Piraeus Port	€ 1.374.880	-€ 495.337	€ 233.456	-€ 727.822	-€ 480.358	-€ 1.034.097	-€ 500.832
Public Power Corporation	€ 4.694.540	-€ 705.542	-€ 4.110.470	-€ 2.555.056	-€ 4.375.345	-€ 549.708	-€ 2.459.224
Gr. Sarantis SA	€ 1.189.775	-€ 580.297	-€ 341.339	-€ 557.718	-€ 843.821	-€ 784.205	-€ 621.476
Titan Cement	€ 3.518.932	€ 80.602	-€ 2.893.357	-€ 124.871	-€ 579.811	-€ 237.030	-€ 750.893
Piraeus Bank	€ 7.939.810	-€ 6.962.648	-€ 2.638.221	-€ 1.545.202	-€ 6.120.553	-€ 55.242	-€ 3.464.373
Valore portafoglio finale	€ 102.242.026	€ 69.832.923	€ 66.725.516	€ 68.451.418	€ 62.952.168	€ 67.933.072	€ 67.179.020
Fitness	-	4,1822E+11	4,28996E+11	4,17636E+11	4,19232E+11	4,18168E+11	4,2045E+11
CVaR out of sample	€ 18.900.684	€ 12.909.466	€ 12.335.024	€ 12.654.078	€ 11.637.475	€ 12.558.256	€ 12.418.860
CVaR in sample	€ 20.019.222	€ 13.650.816	€ 12.929.558	€ 13.418.970	€ 12.118.514	€ 13.288.563	€ 13.081.284
Rendimento out of sample (€)	€ 51.921	€ 227.897	-€ 35.326	-€ 77.933	€ 125.717	-€ 46.160	€ 38.839
Rendimento in sample (€)	-€ 853.986	-€ 478.564	-€ 525.029	-€ 569.100	-€ 514.556	-€ 524.261	-€ 522.302
Rendimento richiesto (€)	€ 19.566	€ 13.364	€ 12.769	€ 13.100	€ 12.047	€ 13.000	€ 12.856
Violazione vincolo di rendimento (€)	-	€ 524.774	€ 573.820	€ 616.327	€ 566.024	€ 571.898	€ 570.569
Rendimento (%) oos	0,05%	0,33%	-0,05%	-0,11%	0,20%	-0,07%	0,06%
Violazione short selling	-	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0
Costi di transazione	-	€ 32.845	€ 36.022	€ 34.127	€ 39.420	€ 34.637	€ 35.410
Tassazione capital gain	-	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0
Valore attuale del portafoglio s	€ 62.740.306	€ 62.740.306	€ 62.740.306	€ 62.740.306	€ 62.740.306	€ 62.740.306	€ 62.740.306
Violazione vincolo di bilancio	-	€ 7.125.462	€ 4.021.232	€ 5.745.239	€ 251.282	€ 5.227.403	€ 4.474.124
Liquidità portafoglio	-	€ 10.401.511	€ 9.889.637	€ 12.777.889	€ 11.768.176	€ 11.493.425	€ 11.266.127
Somma pesi	1	1	1	1	1	1	1
Violazione vincolo L	-	€ 276.488	€ 116.423	€ 232.394	€ 140.050	€ 128.779	€ 178.827
Violazione vincolo U	-	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0

Tabella 12: Risultati della revisione nello scenario 3.

I risultati ottenuti in questo scenario riprendono quelli del primo scenario. Il valore del portafoglio revisionato è inferiore di circa 35 mila euro rispetto a quello del portafoglio iniziale e le vendite coinvolgono quasi tutti i titoli nelle cinque le simulazioni. In riferimento alla terza simulazione, che presenta la *fitness function* con il valore migliore, i titoli maggiormente venduti sono Aegean Airlines, Hellenic Petroleum SA, Eurobank Ergasias, Fourlis Hld e Mytilineos Holdings e come nello scenario precedente tra i titoli da acquistare viene suggerito Jumbo SA. La tabella sottostante mostra come variano i pesi del portafoglio revisionato ad ogni simulazione.

titoli	portafoglio iniziale	Simulazioni					Media
		1	2	3	4	5	
Aegean Airlines	0,10	0,14	0,11	0,03	0,12	0,13	0,10
Alpha Bank SA	0,08	0,10	0,03	0,12	0,12	0,11	0,10
Jumbo SA	0,01	0,01	0,00	0,02	0,02	0,00	0,01
Ellaktor SA	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Hellenic Petroleum SA	0,05	0,05	0,05	0,02	0,04	0,03	0,04
National Bank of Greece	0,02	0,01	0,01	0,02	0,00	0,00	0,01
Eurobank Ergasias	0,05	0,02	0,07	0,02	0,08	0,00	0,04
Hellenic Exchanges	0,02	0,02	0,02	0,01	0,02	0,02	0,02
Falli Follie	0,08	0,11	0,12	0,11	0,05	0,02	0,08
Fourlis Hld	0,08	0,04	0,11	0,08	0,08	0,06	0,07
Gek Terna	0,06	0,08	0,08	0,09	0,09	0,08	0,08
Grivalia Properties REIC	0,01	0,01	0,01	0,00	0,01	0,01	0,01
Hellenic Telecom	0,07	0,07	0,10	0,10	0,04	0,10	0,08
Lamda Development	0,03	0,02	0,04	0,03	0,04	0,03	0,03
Motor Oil Hellas	0,04	0,00	0,05	0,06	0,04	0,03	0,04
Mytilineos Holdings	0,08	0,10	0,01	0,06	0,10	0,10	0,07
OPAP	0,05	0,07	0,06	0,05	0,07	0,04	0,06
Piraeus Port	0,01	0,01	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01
Public Power Corporation	0,05	0,06	0,01	0,03	0,01	0,06	0,03
Gr. Sarantis SA	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
Titan Cement	0,03	0,05	0,01	0,05	0,05	0,05	0,04
Piraeus Bank	0,08	0,01	0,08	0,09	0,03	0,12	0,07
Somma	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Tabella 13: Pesì del portafoglio revisionato.

In questo scenario, dal punto di vista della rischiosità, il modello sembra funzionare abbastanza bene perché il CVaR del portafoglio revisionato è minore di quello del portafoglio iniziale e la misura di rischio relativa al periodo *out-of-sample* è minore della medesima attesa. Dal punto di vista della redditività, invece, le cinque simulazioni mostrano che non sempre il rendimento del portafoglio revisionato *out-of-sample* è migliore del rendimento *out-of-sample* del portafoglio iniziale (si veda, ad esempio, la simulazione 3 che presenta la migliore *fitness*). Questo fatto deriva dalla situazione altalenante che contraddistingue il mercato azionario greco nel 2015.

Allo stesso modo del primo scenario, il modello tende a non rispettare i vincoli di rendimento, di bilancio e di ammontare minimo negoziato. Dato il calo dei prezzi registrato nel periodo *in-sample*, la revisione comporta una violazione del vincolo di rendimento richiesto. Come negli scenari precedenti il modello continua a violare leggermente il vincolo di bilancio. La violazione dell'ammontare minimo negoziato in ciascun titolo è in linea con quanto riscontrato per lo scenario 1.

Rispetto ai precedenti scenari, il portafoglio revisionato presenta un livello di liquidità maggiore, sempre però nei limiti del vincolo imposto dal modello. Si veda la tabella riportata in appendice B per la liquidità del portafoglio revisionato.

#### 4.4.4 Scenario 4

L'ultimo dei quattro micro-scenari si basa su una situazione del mercato azionario tendenzialmente positiva rispetto ai drammatici periodi precedenti che hanno visto lo Stato greco annaspire in anni di grave recessione economica. Nello specifico, questo scenario riguarda il periodo che va dal 10/01/2016 al 07/05/2017, con 51 rendimenti settimanali osservati per la parte *in-sample* e 18 per la parte *out-of-sample*. In generale, il periodo in questione è caratterizzato da una modesta crescita dei prezzi dei titoli azionari, dunque i valori *in-sample* dovrebbero essere in linea con quelli *out-of-sample*. La tabella sottostante riporta i risultati ottenuti applicando il modello di revisione in questo quarto scenario considerato.

Titoli	Portafoglio iniziale	Simulazioni revisione					Media
		1	2	3	4	5	
Aegean Airlines	€ 9.791.432	€ 240.480	€ 108.049	€ 3.178.136	€ 562.395	€ 1.075.560	€ 1.032.924
Alpha Bank SA	€ 8.626.272	€ 122.666	€ 844.454	€ 70.762	€ 283.912	€ 656.820	€ 395.723
Jumbo SA	€ 1.172.028	€ 944.832	€ 463.060	€ 154.264	€ 182.315	€ 331.129	€ 415.120
Ellaktor SA	€ 161.175	€ 956.291	€ 231.951	€ 546.659	€ 379.926	€ 718.865	€ 566.738
Hellenic Petroleum SA	€ 4.619.542	€ 181.236	€ 381.209	-€ 34.560	€ 500.009	€ 170.415	€ 239.662
National Bank of Greece	€ 1.876.960	€ 274.596	€ 248.937	€ 510.391	€ 463.805	€ 2.358.335	€ 771.213
Eurobank Ergasias	€ 4.890.139	€ 199.304	€ 86.874	€ 278.684	€ 1.490.355	€ 501.855	€ 511.415
Hellenic Exchanges	€ 2.019.216	€ 673.212	€ 411.782	€ 127.659	€ 988.094	€ 442.830	€ 528.715
Folli Follie	€ 7.965.273	€ 588.507	€ 258.426	€ 381.902	€ 611.814	€ 507.413	€ 469.612
Fourlis Hld	€ 8.441.094	€ 817.541	€ 2.612.950	€ 551.880	€ 272.568	€ 63.517	€ 863.691
Gek Terna	€ 6.259.662	€ 444.173	€ 446.799	€ 33.085	€ 215.796	€ 259.547	€ 279.880
Grivalia Properties REIC	€ 529.171	€ 1.716.863	€ 216.336	€ 1.226.658	€ 1.308.195	€ 414.346	€ 976.480
Hellenic Telecom	€ 6.769.577	€ 555.333	€ 440.164	€ 373.631	€ 335.136	€ 221.324	€ 385.117
Lamda Development	€ 2.853.320	€ 142.488	€ 3.629.947	€ 734.766	€ 248.380	€ 1.551.744	€ 1.261.465
Motor Oil Hellas	€ 4.423.788	€ 461.739	€ 235.160	€ 999.995	€ 338.284	€ 180.980	€ 443.232
Mytilineos Holdings	€ 7.816.734	€ 496.643	€ 154.525	€ 206.681	€ 452.285	€ 1.063.913	€ 474.809
OPAP	€ 5.308.706	€ 291.567	€ 406.195	€ 106.773	€ 514.660	€ 322.226	€ 328.284
Piraeus Port	€ 1.374.880	€ 3.556.708	€ 312.198	€ 221.271	€ 1.644.253	€ 450.467	€ 1.236.979
Public Power Corporation	€ 4.694.540	€ 780.129	€ 843.032	€ 155.001	€ 866.828	€ 241.741	€ 577.346
Gr. Sarantis SA	€ 1.189.775	€ 172.181	€ 186.725	€ 488.482	€ 926.021	€ 416.459	€ 437.974
Titan Cement	€ 3.518.932	-€ 367.317	€ 135.074	€ 475.170	€ 121.602	€ 895.793	€ 252.064
Piraeus Bank	€ 7.939.810	€ 7.834	€ 391.822	€ 2.262.620	€ 382.806	€ 232.125	€ 655.441
Valore portafoglio finale	€ 102.242.026	€ 115.499.029	€ 115.287.694	€ 115.291.935	€ 115.331.465	€ 115.319.432	€ 115.345.911
Fitness	-	7485267108	77438992,51	843117453,7	2416669861	681144966,6	2300727676
CVaR out of sample	€ 6.404.544	€ 7.234.976	€ 7.221.738	€ 7.222.004	€ 7.224.480	€ 7.223.726	€ 7.225.385
CVaR in sample	€ 20.397.822	€ 22.207.287	€ 22.365.490	€ 23.157.296	€ 23.006.416	€ 23.106.621	€ 22.768.622
Rendimento out of sample (€)	€ 1.136.167	€ 1.256.644	€ 1.256.564	€ 1.270.292	€ 1.272.743	€ 1.268.008	€ 1.264.850
Rendimento in sample (€)	€ 356.723	€ 389.979	€ 408.665	€ 373.689	€ 375.120	€ 387.330	€ 386.956
Rendimento richiesto (€)	€ 19.566	€ 22.103	€ 22.063	€ 22.064	€ 22.071	€ 22.069	€ 22.074
Violazione vincolo di rendimento (€)	-	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0
Rendimento (%) oos	1,11%	1,09%	1,09%	1,10%	1,10%	1,10%	1,10%
Violazione short selling	-	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0
Costi di transazione	-	€ 13.992	€ 13.046	€ 13.119	€ 13.089	€ 13.077	€ 13.265
Tassazione capital gain	-	€ 45.019	€ 15.940	€ 3.114	€ 35.377	€ 2.624	€ 20.415
Valore attuale del portafoglio s	€ 115.306.223	€ 115.306.223	€ 115.306.223	€ 115.306.223	€ 115.306.223	€ 115.306.223	€ 115.306.223
Violazione vincolo di bilancio	-	€ 251.817	€ 10.457	€ 1.946	€ 73.709	€ 28.910	€ 73.368
Liquidità portafoglio	-	€ 4.889.905	€ 5.011.809	€ 5.094.916	€ 5.059.319	€ 5.149.841	€ 5.041.158
Somma pesi	1	1	1	1	1	1	1
Violazione vincolo L	-	€ 7.834	€ 86.874	€ 138.407	€ 0	€ 63.517	€ 59.326
Violazione vincolo U	-	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0

Tabella 14: Risultati della revisione nello scenario 4.

Si noti che questo è il primo caso in cui il modello suggerisce unicamente di comprare, senza alcuna operazione di vendita. Infatti il portafoglio revisionato, in tutte le simulazioni, assume un valore maggiore del portafoglio iniziale. Considerando la simulazione 2 che ha la funzione *fitness* migliore, i titoli che il modello indica maggiormente di comprare sono Fourlis Hld e Lamda Development. La tabella sottostante mostra i pesi del portafoglio revisionato per ogni simulazione.

titoli	portafoglio iniziale	Simulazioni					Media
		1	2	3	4	5	
Aegean Airlines	0,10	0,09	0,09	0,11	0,09	0,09	0,09
Alpha Bank SA	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08
Jumbo SA	0,01	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
Ellaktor SA	0,00	0,01	0,00	0,01	0,00	0,01	0,01
Hellenic Petroleum SA	0,05	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04
National Bank of Greece	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,04	0,02
Eurobank Ergasias	0,05	0,04	0,04	0,04	0,06	0,05	0,05
Hellenic Exchanges	0,02	0,02	0,02	0,02	0,03	0,02	0,02
Folli Folie	0,08	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07
Fourlis Hld	0,08	0,08	0,10	0,08	0,08	0,07	0,08
Gek Terna	0,06	0,06	0,06	0,05	0,06	0,06	0,06
Grivalia Properties REIC	0,01	0,02	0,01	0,02	0,02	0,01	0,01
Hellenic Telecom	0,07	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06
Lamda Development	0,03	0,03	0,06	0,03	0,03	0,04	0,04
Motor Oil Hellas	0,04	0,04	0,04	0,05	0,04	0,04	0,04
Mytilineos Holdings	0,08	0,07	0,07	0,07	0,07	0,08	0,07
OPAP	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
Piraeus Port	0,01	0,04	0,01	0,01	0,03	0,02	0,02
Public Power Corporation	0,05	0,05	0,05	0,04	0,05	0,04	0,05
Gr. Sarantis SA	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02	0,01	0,01
Titan Cement	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,04	0,03
Piraeus Bank	0,08	0,07	0,07	0,09	0,07	0,07	0,07
Somma	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

**Tabella 15: Quote del portafoglio revisionato.**

Si noti che il peso maggiore (10%) è assunto dal titolo Fourlis Hld nella seconda simulazione. Questo scenario mostra come il modello non consenta di guidare in modo esaustivo l'investitore nell'effettuare o meno la revisione. Dal punto di vista reddituale, infatti, il modello suggerisce di eseguire la revisione, dato che il portafoglio revisionato presenta un rendimento maggiore di quello iniziale. Dal punto di vista della rischiosità, invece, il portafoglio revisionato presenta un livello di rischio maggiore di quello iniziale. Quindi rimane la scelta all'investitore se decidere di avere un portafoglio con rischio e rendimento minori (portafoglio iniziale), oppure scegliere un portafoglio con *performance* migliori ma legato ad un rischio maggiore (portafoglio revisionato). Confrontando i parametri *in-sample* con quelli *out-of-*

*sample*, si nota chiaramente come i primi presentino delle condizioni peggiori di quelli relativi al futuro virtuale. Questa condizione è dovuta all'incremento dell'aumento dei prezzi registrato dal mercato greco all'inizio del 2017. Rispetto ai precedenti scenari, in questo caso il modello tende a rispettare maggiormente i vincoli. Questo è indicato soprattutto dalla ridotta violazione del vincolo di bilancio e dalla minima violazione dell'ammontare minimo negoziato. Il vincolo di rendimento è sempre rispettato, grazie al trend rialzista in atto nel periodo considerato. In merito alla liquidità del portafoglio revisionato, che in questa circostanza presenta i valori più bassi tra tutti e quattro gli scenari considerati, si consideri la tabella riportata in appendice B.

I due scenari analizzati di seguito sono utilizzati per testare il comportamento del modello di revisione nel caso di un maggior numero di osservazioni a disposizione.

#### 4.4.5 Scenario A

Lo scenario A comprende il periodo tra il 10/01/2010 e 05/01/2014, con un totale di 208 rendimenti settimanali, di cui 156 (primi 3 anni) riservati per l'intervallo *in-sample* e i rimanenti 52 (ultimo anno) per la parte *out-of-sample*. Come si può dedurre dalla figura sottostante e dalle analisi dei quattro micro-scenari precedenti, lo scenario A racchiude l'intero periodo che ha visto il drastico crollo dei prezzi dei titoli azionari greci.

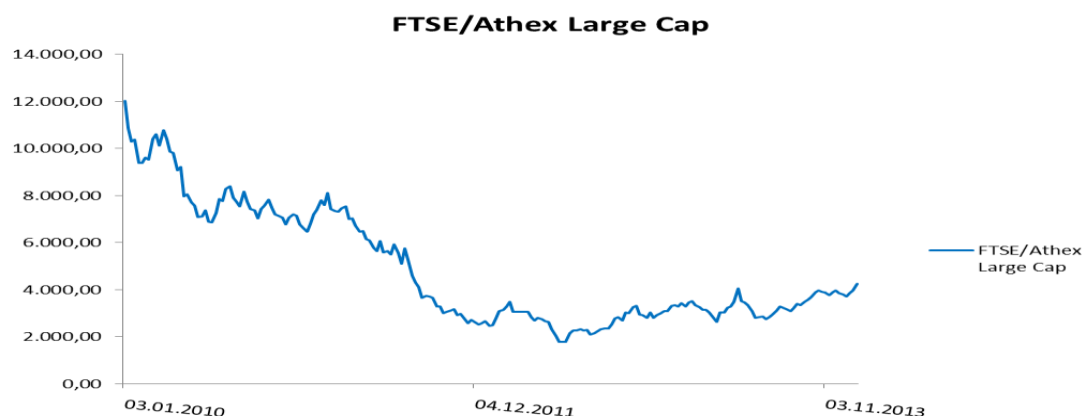


Figura 10: Andamento del FTSE/Athex Large Cap tra gennaio 2010 e gennaio 2014.

Osservando l'andamento del grafico è normale attendersi una stima dei parametri del modello piuttosto pessimistica, a differenza di quando realizzato nel futuro virtuale in cui si sono registrati dei segnali di crescita dei prezzi azionari. La tabella sottostante riporta i risultati derivanti dall'applicazione del modello di revisione in base alle osservazioni dello scenario A.

Titoli	Portafoglio iniziale	Simulazioni revisione					Media
		1	2	3	4	5	
Aegean Airlines	€ 9.791.432	-€ 7.676.992	-€ 666.759	-€ 6.254.623	-€ 525.345	-€ 5.081.380	-€ 4.041.020
Alpha Bank SA	€ 8.626.272	-€ 421.179	-€ 432.438	-€ 8.566.069	-€ 6.925.962	-€ 4.086.333	-€ 4.086.396
Jumbo SA	€ 1.172.028	-€ 955.654	-€ 106.213	€ 294.910	-€ 439.694	-€ 955.787	-€ 432.488
Ellaktor SA	€ 161.175	-€ 7.099	€ 20.449	-€ 158.778	-€ 146.257	€ 63.513	-€ 45.634
Hellenic Petroleum SA	€ 4.619.542	-€ 2.777.372	-€ 3.110.387	-€ 3.383.412	-€ 4.531.683	-€ 3.532.936	-€ 3.467.158
National Bank of Greece	€ 1.876.960	-€ 1.193.268	-€ 1.875.752	-€ 2.653	-€ 326.551	-€ 1.204.194	-€ 920.484
Eurobank Ergasias	€ 4.890.139	-€ 2.949.491	-€ 3.178.052	-€ 2.905.481	-€ 435.380	-€ 2.672.117	-€ 2.428.104
Hellenic Exchanges	€ 2.019.216	-€ 389.820	-€ 785.006	-€ 98.934	-€ 1.912.164	-€ 624.130	-€ 762.011
Folli Follie	€ 7.965.273	-€ 2.839.488	-€ 4.077.239	-€ 4.285.005	-€ 7.153.849	-€ 2.699.568	-€ 4.211.030
Fourlis Hld	€ 8.441.094	-€ 4.289.844	-€ 3.463.321	€ 478.784	-€ 2.985.040	-€ 5.945.622	-€ 3.241.009
Gek Terna	€ 6.259.662	-€ 2.600.912	-€ 3.525.304	-€ 4.684.066	-€ 5.785.411	-€ 5.973.543	-€ 4.513.847
Grivalia Properties REIC	€ 529.171	-€ 260.323	-€ 455.867	-€ 299.206	-€ 144.886	-€ 66.181	-€ 245.293
Hellenic Telecom	€ 6.769.577	-€ 1.972.239	-€ 2.483.844	-€ 5.873.448	-€ 4.961.240	-€ 6.040.621	-€ 4.266.278
Lamda Development	€ 2.853.320	-€ 1.477.750	-€ 1.199.121	€ 218.498	-€ 1.923.345	-€ 2.053.927	-€ 1.287.129
Motor Oil Hellas	€ 4.423.788	-€ 143.152	-€ 3.616.881	-€ 3.138.836	€ 21.586	-€ 3.559.611	-€ 2.087.379
Mytilineos Holdings	€ 7.816.734	-€ 5.506.655	-€ 6.810.068	-€ 654.322	-€ 1.073.103	-€ 117.016	-€ 2.832.233
OPAP	€ 5.308.706	-€ 1.965.128	-€ 2.174.128	-€ 3.556.908	-€ 1.076.547	-€ 2.085.674	-€ 2.171.677
Piraeus Port	€ 1.374.880	€ 41.868	-€ 611.019	-€ 331.430	-€ 57.058	-€ 1.298.391	-€ 451.206
Public Power Corporation	€ 4.694.540	-€ 2.382.384	-€ 1.211.529	-€ 740.758	-€ 2.191.644	-€ 3.916.766	-€ 2.088.616
Gr. Sarantis SA	€ 1.189.775	-€ 428.710	-€ 709.969	€ 79.109	-€ 87.399	-€ 377.270	-€ 304.848
Titan Cement	€ 3.518.932	-€ 1.225.605	-€ 528.848	-€ 854.661	-€ 1.026.991	-€ 2.672.177	-€ 1.261.656
Piraeus Bank	€ 7.939.810	-€ 1.713.247	-€ 7.140.136	-€ 5.158.913	-€ 6.807.823	-€ 5.257.794	-€ 5.215.582
Valore portafoglio finale	€ 102.242.026	€ 59.107.582	€ 54.100.594	€ 52.365.827	€ 51.746.240	€ 42.084.500	€ 51.880.949
Fitness	-	7,74847E+11	7,8238E+11	7,85601E+11	7,75205E+11	7,77155E+11	7,79039E+11
CVaR out of sample	€ 20.908.840	€ 12.645.018	€ 8.985.718	€ 9.769.352	€ 10.166.202	€ 8.331.132	€ 9.979.484
CVaR in sample	€ 19.349.499	€ 11.738.063	€ 9.826.133	€ 9.565.430	€ 9.048.116	€ 7.903.331	€ 9.616.215
Rendimento out of sample (€)	€ 362.185	€ 144.207	€ 400.898	€ 242.714	€ 190.521	€ 156.272	€ 226.922
Rendimento in sample (€)	-€ 564.709	-€ 353.430	-€ 275.927	-€ 253.084	-€ 262.745	-€ 209.797	-€ 270.997
Rendimento richiesto (€)	€ 19.566	€ 11.311	€ 10.353	€ 10.021	€ 9.903	€ 8.054	€ 9.928
Violazione vincolo di rendimento (€)	-	€ 407.960	€ 334.463	€ 315.124	€ 323.187	€ 278.135	€ 331.774
Rendimento (%) oos	0,35%	0,24%	0,74%	0,46%	0,37%	0,37%	0,44%
Violazione short selling	-	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0
Costi di transazione	-	€ 43.218	€ 48.182	€ 52.019	€ 50.539	€ 60.285	€ 50.849
Tassazione capital gain	-	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0
Valore attuale del portafoglio s	€ 26.230.174	€ 26.230.174	€ 26.230.174	€ 26.230.174	€ 26.230.174	€ 26.230.174	€ 26.230.174
Violazione vincolo di bilancio	-	€ 32.920.626	€ 27.918.603	€ 26.187.672	€ 25.566.605	€ 15.914.611	€ 25.701.623
Liquidità portafoglio	-	€ 7.516.002	€ 6.569.333	€ 5.213.932	€ 5.821.574	€ 6.326.598	€ 6.289.488
Somma pesi	1	1	1	1	1	1	1
Violazione vincolo L	-	€ 48.966	€ 20.449	€ 180.696	€ 166.043	€ 129.694	€ 109.170
Violazione vincolo U	-	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0

Tabella 16: Risultati della revisione nello scenario A.

Dato che per la stima dei parametri sono state utilizzate delle osservazioni legate ad un periodo di grave difficoltà economica e poiché il modello, invece, è stato applicato ad una fase in cui la situazione era miglioramento, è normale riscontrare una certa discrepanza tra i rendimenti *in-sample* e quelli *out-of-sample*. Il

livello di rischio, invece, è rimasto in generale stabile, con una tendenza al peggioramento nel futuro virtuale. In questo caso il modello ha agito riducendo di molto la rischiosità, mantenendo però un livello simile di rendimento. Se consideriamo che l'obiettivo del modello sia quello di limitare le potenziali perdite in un periodo in cui i prezzi dei titoli azionari stanno crollando drasticamente, possiamo affermare che il modello sia riuscito nel proprio intento. Si consideri nella tabella sottostante la distribuzione delle quote di ciascun titolo all'interno del portafoglio revisionato.

titoli	portafoglio iniziale	Simulazioni				
		1	2	3	4	5
<i>Aegean Airlines</i>	0,10	0,04	0,17	0,07	0,18	0,11
<i>Alpha Bank SA</i>	0,08	0,14	0,15	0,00	0,03	0,11
<i>Jumbo SA</i>	0,01	0,00	0,02	0,03	0,01	0,01
<i>Ellaktor SA</i>	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01
<i>Hellenic Petroleum SA</i>	0,05	0,03	0,03	0,02	0,00	0,03
<i>National Bank of Greece</i>	0,02	0,01	0,00	0,04	0,03	0,02
<i>Eurobank Ergasias</i>	0,05	0,03	0,03	0,04	0,09	0,05
<i>Hellenic Exchanges</i>	0,02	0,03	0,02	0,04	0,00	0,03
<i>Folli Follie</i>	0,08	0,09	0,07	0,07	0,02	0,13
<i>Fourlis Hld</i>	0,08	0,07	0,09	0,17	0,11	0,06
<i>Gek Terna</i>	0,06	0,06	0,05	0,03	0,01	0,01
<i>Grivalia Properties REIC</i>	0,01	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01
<i>Hellenic Telecom</i>	0,07	0,08	0,08	0,02	0,03	0,02
<i>Lamda Development</i>	0,03	0,02	0,03	0,06	0,02	0,02
<i>Motor Oil Hellas</i>	0,04	0,07	0,01	0,02	0,09	0,02
<i>Mytilineos Holdings</i>	0,08	0,04	0,02	0,14	0,13	0,18
<i>OPAP</i>	0,05	0,06	0,06	0,03	0,08	0,08
<i>Piraeus Port</i>	0,01	0,02	0,01	0,02	0,03	0,00
<i>Public Power Corporation</i>	0,05	0,04	0,06	0,08	0,05	0,02
<i>Gr. Sarantis SA</i>	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02
<i>Titan Cement</i>	0,03	0,04	0,06	0,05	0,05	0,02
<i>Piraeus Bank</i>	0,08	0,11	0,01	0,05	0,02	0,06
Somma	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

**Tabella 12: Quote di ciascun titolo all'interno del portafoglio revisionato.**

In questo scenario si nota un importante incremento della violazione del vincolo di bilancio, circostanza che conferma l'incapacità del modello di autofinanziarsi. La liquidità del portafoglio revisionato, invece, anche in questa occasione presenta dei valori abbastanza bassi contenuti. Si consideri la tabella riportata in appendice B

#### 4.4.6 Scenario B

Infine, per concludere l'analisi empirica sul comportamento del modello di revisione proposto, analizziamo lo scenario B che riguarda il recente periodo storico, ovvero tra il 12/01/2014 e il 31/12/2017. In tutto vengono considerate 204 osservazioni di rendimenti settimanali, di cui 152 per la stima dei parametri e le restanti 52 per la valutazione del modello. Osservando la figura sottostante, come nel caso precedente lo scenario B è diviso tra una fase di riduzione e una fase di leggera crescita dei prezzi azionari greci.

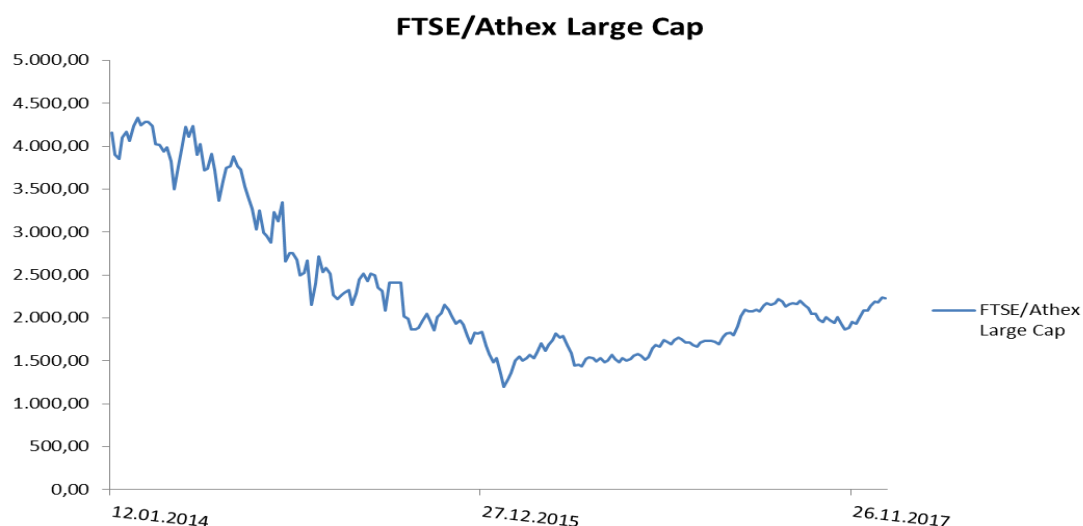


Figura 11: Andamento dell'indice FTSE/Athex Large Cap tra gennaio 2014 e dicembre 2017.

Osservando l'andamento del grafico ci si potrebbe attendere una divergenza tra la stima dei parametri e i valori effettivamente ottenuti nel futuro virtuale, in cui si sono registrati dei timidi segnali di crescita del mercato. La tabella sottostante riporta i risultati derivanti dall'applicazione del modello di revisione in base alle osservazioni dello scenario B.



Titoli	Portafoglio iniziale	Simulazioni revisione					Media
		1	2	3	4	5	
Aegean Airlines	€ 9.791.432	-€ 207.737	-€ 9.625.163	-€ 2.182.241	-€ 811.307	-€ 4.723.047	-€ 3.509.899
Alpha Bank SA	€ 8.626.272	-€ 6.350.767	-€ 3.132.734	-€ 7.402.152	-€ 3.820.667	-€ 5.272.174	-€ 5.195.699
Jumbo SA	€ 1.172.028	-€ 288.673	-€ 792.670	-€ 767.781	-€ 629.663	-€ 61.926	-€ 508.143
Ellaktor SA	€ 161.175	-€ 16.678	€ 250.427	€ 92.861	€ 63.858	-€ 43.215	€ 69.450
Hellenic Petroleum SA	€ 4.619.542	-€ 2.103.131	-€ 2.289.996	-€ 545.875	-€ 1.231.960	-€ 2.904.777	-€ 1.815.148
National Bank of Greece	€ 1.876.960	-€ 1.666.091	-€ 913.649	€ 55.180	-€ 560.897	-€ 379.004	-€ 692.892
Eurobank Ergasias	€ 4.890.139	-€ 4.179.093	-€ 4.884.936	-€ 2.487.523	-€ 4.345.983	-€ 4.610.745	-€ 4.101.656
Hellenic Exchanges	€ 2.019.216	-€ 712.045	-€ 1.826.913	-€ 1.464.680	-€ 303.388	-€ 1.950.928	-€ 1.251.591
Folli Follie	€ 7.965.273	-€ 656.265	-€ 7.535.281	-€ 3.481.206	-€ 1.799.076	-€ 748.702	-€ 2.844.106
Fourlis Hld	€ 8.441.094	-€ 4.350.551	-€ 935.540	-€ 297.101	-€ 3.776.419	-€ 3.421.857	-€ 2.556.294
Gek Terna	€ 6.259.662	-€ 3.211.825	-€ 2.439.110	-€ 5.477.893	-€ 5.420.044	-€ 1.790.560	-€ 3.667.887
Grivalia Properties REIC	€ 529.171	€ 128.629	-€ 361.426	-€ 143.995	-€ 217.623	€ 24.581	-€ 113.967
Hellenic Telecom	€ 6.769.577	-€ 5.065.954	-€ 3.993.408	-€ 2.407.432	-€ 4.570.180	-€ 65.168	-€ 3.220.428
Lamda Development	€ 2.853.320	-€ 1.020.246	-€ 2.596.162	-€ 2.027.422	-€ 139.061	-€ 769.022	-€ 1.310.383
Motor Oil Hellas	€ 4.423.788	-€ 2.656.798	-€ 4.367.065	-€ 3.077.283	-€ 3.225.564	-€ 4.019.997	-€ 3.469.341
Mytilineos Holdings	€ 7.816.734	-€ 1.321.007	-€ 5.406.027	-€ 5.901.259	-€ 4.356.461	-€ 1.235.482	-€ 3.644.047
OPAP	€ 5.308.706	-€ 1.528.024	-€ 3.279.032	-€ 4.793.962	-€ 5.059.452	-€ 2.869.696	-€ 3.506.033
Piraeus Port	€ 1.374.880	€ 18.883	-€ 117.204	-€ 970.083	-€ 626.506	-€ 172.501	-€ 373.482
Public Power Corporation	€ 4.694.540	-€ 312.439	-€ 4.283.019	-€ 2.247.960	-€ 4.702.884	-€ 4.255.103	-€ 3.160.281
Gr. Sarantis SA	€ 1.189.775	-€ 933.627	-€ 697.798	-€ 38.032	-€ 221.304	-€ 542.461	-€ 486.644
Titan Cement	€ 3.518.932	-€ 530.693	€ 38.682	-€ 842.200	-€ 351.638	-€ 1.288.330	-€ 594.836
Piraeus Bank	€ 7.939.810	-€ 4.252.347	-€ 308.345	-€ 6.937.694	-€ 7.403.968	-€ 6.743.822	-€ 5.129.235
Valore portafoglio finale	€ 102.242.026	€ 61.025.548	€ 42.745.657	€ 48.896.294	€ 48.731.840	€ 54.398.088	€ 51.159.485
Fitness	-	7,34621E+11	7,30154E+11	7,33459E+11	7,2861E+11	7,30681E+11	7,31504E+11
CVaR out of sample	€ 9.746.430	€ 5.596.473	€ 4.353.092	€ 4.288.066	€ 3.706.620	€ 3.805.804	€ 4.350.011
CVaR in sample	€ 26.019.707	€ 12.860.915	€ 13.420.313	€ 10.449.253	€ 9.963.105	€ 11.043.191	€ 11.547.355
Rendimento out of sample (€)	€ 371.911	€ 209.680	€ 143.082	€ 206.976	€ 198.301	€ 249.256	€ 201.459
Rendimento in sample (€)	-€ 823.984	-€ 309.682	-€ 511.106	-€ 259.596	-€ 209.243	-€ 226.003	-€ 303.126
Rendimento richiesto (€)	€ 19.566	€ 11.679	€ 8.180	€ 9.357	€ 9.326	€ 10.410	€ 9.790
Violazione vincolo di rendimento (€)	-	€ 362.872	€ 579.361	€ 322.595	€ 272.206	€ 284.307	€ 364.268
Rendimento (%) oos	0,36%	0,34%	0,33%	0,42%	0,41%	0,46%	0,39%
Violazione short selling	-	€ 0	€ 0	€ 0	€ 8.344	€ 0	€ 1.669
Costi di transazione	-	€ 41.512	€ 60.075	€ 53.642	€ 53.638	€ 47.893	€ 51.352
Tassazione capital gain	-	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0
Valore attuale del portafoglio s	€ 31.026.373	€ 31.026.373	€ 31.026.373	€ 31.026.373	€ 31.026.373	€ 31.026.373	€ 31.026.373
Violazione vincolo di bilancio	-	€ 30.040.686	€ 11.779.358	€ 17.923.563	€ 17.759.105	€ 23.419.609	€ 20.184.464
Liquidità portafoglio	-	€ 3.821.791	€ 6.554.802	€ 3.411.982	€ 3.799.697	€ 4.397.963	€ 4.397.247
Somma pesi	1	1	1	1	1	1	1
Violazione vincolo L	-	€ 35.561	€ 38.682	€ 186.073	€ 63.858	€ 194.890	€ 103.813
Violazione vincolo U	-	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0	€ 0

Tabella 18: Risultati della revisione per lo scenario B

A differenza dello scenario A in cui la discrepanza tra valori *in-sample* ed *out-of-sample* coinvolgeva solamente il rendimento, in questo scenario tale divergenza coinvolge anche la misura di rischio. Sul piano della rischiosità, il portafoglio revisionato presenta un valore di CVaR circa dimezzato rispetto a quello del portafoglio iniziale, a livello sia *in-sample* sia *out-of-sample*. Sul piano del rendimento, invece, rimane la migliore *performance* relativa alla fase *out-of-sample* ma il portafoglio iniziale ha un rendimento *out-of-sample* migliore del portafoglio revisionato. In sintesi, anche in questo caso il modello ha agito riducendo di molto la rischiosità, lasciando un po' a desiderare a livello di rendimento. È opportuno

sottolineare che per la prima volta il modello non rispetta il divieto di vendite allo scoperto (si veda simulazione 4), dovuto probabilmente a una fase piuttosto critica dell'andamento di alcuni titoli. Inoltre, anche in questo scenario si nota un livello importante di violazione del vincolo di bilancio.

Si consideri nella tabella sottostante la distribuzione delle quote di ciascun titolo all'interno del portafoglio revisionato.

titoli	portafoglio iniziale	Simulazioni				
		1	2	3	4	5
<i>Aegean Airlines</i>	0,10	0,16	0,00	0,16	0,18	0,09
<i>Alpha Bank SA</i>	0,08	0,04	0,13	0,03	0,10	0,06
<i>Jumbo SA</i>	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02
<i>Ellaktor SA</i>	0,00	0,00	0,01	0,01	0,00	0,00
<i>Hellenic Petroleum SA</i>	0,05	0,04	0,05	0,08	0,07	0,03
<i>National Bank of Greece</i>	0,02	0,00	0,02	0,04	0,03	0,03
<i>Eurobank Ergasias</i>	0,05	0,01	0,00	0,05	0,01	0,01
<i>Hellenic Exchanges</i>	0,02	0,02	0,00	0,01	0,04	0,00
<i>Folli Follie</i>	0,08	0,12	0,01	0,09	0,13	0,13
<i>Fourlis Hld</i>	0,08	0,07	0,18	0,17	0,10	0,09
<i>Gek Terna</i>	0,06	0,05	0,09	0,02	0,02	0,08
<i>Grivalia Properties REIC</i>	0,01	0,01	0,00	0,01	0,01	0,01
<i>Hellenic Telecom</i>	0,07	0,03	0,06	0,09	0,05	0,12
<i>Lamda Development</i>	0,03	0,03	0,01	0,02	0,06	0,04
<i>Motor Oil Hellas</i>	0,04	0,03	0,00	0,03	0,02	0,01
<i>Mytilineos Holdings</i>	0,08	0,11	0,06	0,04	0,07	0,12
<i>OPAP</i>	0,05	0,06	0,05	0,01	0,01	0,04
<i>Piraeus Port</i>	0,01	0,02	0,03	0,01	0,02	0,02
<i>Public Power Corporation</i>	0,05	0,07	0,01	0,05	0,00	0,01
<i>Gr. Sarantis SA</i>	0,01	0,00	0,01	0,02	0,02	0,01
<i>Titan Cement</i>	0,03	0,05	0,08	0,05	0,06	0,04
<i>Piraeus Bank</i>	0,08	0,06	0,18	0,02	0,01	0,02
Somma	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

**Tabella 13: Quote di ciascun titolo all'interno del portafoglio revisionato.**

La tabella mostra come il modello tenda a non sempre a diversificare in modo adeguato. Prendendo la simulazione 4 (che presenta la miglior *fitness*), ad esempio, si nota che il modello si focalizza soprattutto su Aegean Airlines (18%) e Folli Follie (13%).

Infine, si consideri la tabella riportata in appendice B per la liquidità del portafoglio revisionato, che risulta essere abbastanza contenuta.

## Conclusioni

Partendo dal modello di Pogue, in questo elaborato si è cercato di sviluppare un modello revisione che avesse come misura di rischio il *Conditional Value-at-Risk* e che fosse applicabile per la gestione di portafogli investiti in un mercato poco liquido. Il modello è stato implementato mediante la *Particle Swarm Optimization* e la sua efficacia è stata testata con i dati ricavati dal mercato azionario greco. In particolare sono stati selezionati 22 titoli dall'indice FTSE/Athex Large Cap e per ogni titolo è stato ottenuto il rendimento logaritmico e il controvalore scambiato settimanalmente tra il 10/01/2010 e il 31/12/2017. L'analisi empirica del modello è stata condotta suddividendo il periodo sopracitato in sei scenari: quattro micro-scenari composti da 68 a 69 osservazioni e due macro-scenari composti da 204 a 208 rendimenti. Il portafoglio di partenza per tutti gli scenari, composto anch'esso da 22 titoli, è stato selezionato mediante la funzione "rand" di MATLAB ed ha un valore complessivo di € 102.242.026. Si ipotizzi che esso sia un generico portafoglio investito nel mercato greco e sia posseduto dall'investitore che intende revisionarlo.

Dall'analisi dei risultati ottenuti nei sei scenari, emerge che l'efficacia del modello dipende dal periodo storico al quale è applicato. Nel caso dei micro-scenari 1 e 3 e dei macro-scenari A e B, il valore della rischiosità si riduce ampiamente rispetto al portafoglio iniziale. Questi quattro scenari hanno in comune il fatto che le stime dei parametri avvengono in periodi di tendenza al ribasso del mercato. Dal punto di vista del rendimento, invece, il modello risulta abbastanza robusto negli scenari 1 e 3, in cui riesce migliorare le *performance* rispetto al portafoglio iniziale. Nonostante siano migliori, tali performance rimangono comunque negative e ciò è indicato chiaramente dalla violazione del vincolo di rendimento, soprattutto per quanto riguarda lo scenario 1 che, rispetto agli altri scenari, mostra un crollo dei prezzi sia nella fase *in-sample* che in quella *out-of-sample*. Per quanto riguarda gli scenari A e B, invece, i rendimenti del portafoglio revisionato rimangono in linea con quelli del portafoglio di partenza. Negli scenari 2 e 4, entrambi sposati con una fase di leggera crescita dei prezzi, il modello mantiene quasi inalterati sia il CVaR e che la redditività.

Una dovuta osservazione deve riguardare il vincolo di autofinanziamento (o vincolo di bilancio), in quanto in tutti gli scenari il modello tende a non rispettare tale vincolo. In particolar modo esso viene drammaticamente violato da due macro-scenari, mentre è leggermente violato nello scenario 4, segno che il modello risulta in tal senso fragile in quanto pesantemente condizionato dai valori molto negativi dei rendimenti registrati nella fase di stima dei parametri.

Un'ulteriore considerazione riguarda la capacità di diversificazione del modello proposto. Il vincolo posto sull'ammontare minimo negoziato, nonostante non sia particolarmente restrittivo, viene violato in quasi tutte le simulazioni degli scenari considerati. Questo fattore, confermato dalle tabelle raffiguranti le quote percentuali del portafoglio revisionato, può indicare un limite nella capacità di diversificazione del modello che non riesce a ripartire in modo omogeneo la negoziazione dei controvalori relativi a ciascun titolo.

Per concludere, alcune proposte inerenti gli sviluppi futuri di questo modello possono riguardare l'analisi di una revisione periodale relativa a un singolo scenario e un confronto tra il modello appena presentato e un modello di revisione contenente un vincolo di cardinalità per approssimare i costi di transazione e, in particolar modo, i costi di illiquidità, che risultano piuttosto complessi da stimare.

## Appendice A

In questa appendice si parlerà del concetto di utilità attesa e di portafoglio ottimo. Una volta individuati i portafogli efficienti, l'investitore deve stabilire un criterio per determinare il proprio portafoglio ottimo. Il criterio dell'utilità attesa, per l'appunto, consente di porre in ordine gerarchico le preferenze dell'investitore, tenendo conto della sua avversione al rischio. Più precisamente, il criterio dell'utilità attesa cambia la scala con cui si misurano i valori monetari, sostituendo la scala oggettiva con una scala soggettiva basata, appunto, sull'utilità. Formalmente, viene introdotta una funzione di utilità  $u(x)$  del capitale  $x$ , che rappresenta l'"importanza" del possesso del capitale  $x$  per l'investitore. Se l'investitore deve scegliere tra due opportunità  $x_1$  e  $x_2$ , l'alternativa  $x_2$  è preferita a  $x_1$  se e solo se  $E[u(x_2)] > E[u(x_1)]$ . Il criterio decisionale utilizzato dall'investitore consiste nella massimizzazione dell'utilità attesa. In base a questo criterio di scelta, l'investitore considererà la situazione finanziaria  $x_2$ :

- vantaggiosa, se  $E[u(x_2)] - E[u(x_1)] > 0$ ;
- indifferente, se  $E[u(x_2)] - E[u(x_1)] = 0$ ;
- svantaggiosa, se  $E[u(x_2)] - E[u(x_1)] < 0$ .

Dal momento che l'obiettivo dell'investitore è la massimizzazione del profitto,  $u(x)$  è una funzione strettamente crescente di  $x$ :

$$u(x_2) > u(x_1), \forall x_2 > x_1.$$

La funzione di utilità  $u(x)$  è caratterizzata dal fatto che ad incrementi uguali di capitale corrispondono incrementi di utilità tanto più piccoli quanto più grande è il capitale posseduto dall'investitore. Supposto che la funzione sia continua su tutto il proprio insieme di definizione<sup>126</sup>, questa proprietà implica che la funzione di utilità  $u(x)$  sia concava su tutto il dominio. Per meglio comprendere questa proprietà, si

---

<sup>126</sup> Il dominio  $D$  della funzione di utilità  $u(x)$  coincide con l'insieme  $\mathbb{R}^+$  dei numeri reali non-negativi. In casi particolari può aver senso utilizzare funzioni di utilità definite anche per numeri negativi.

consideri la figura sottostante, in cui in ordinata sono rappresentati i valori di utilità attesa  $u(x)$  e in ascissa i valori del capitale  $x$ .

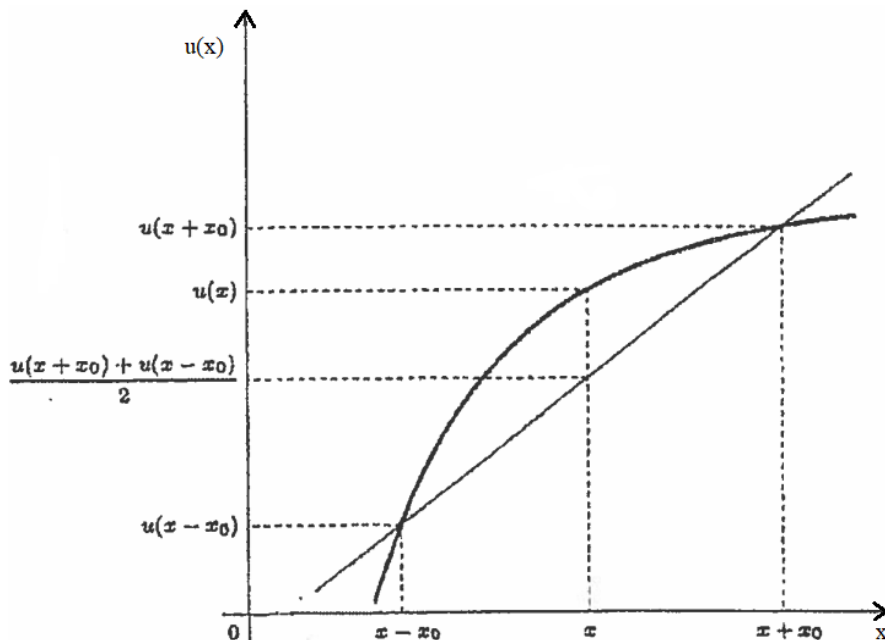


Figura 12: Concavità della funzione di utilità.

Selezionando due incrementi  $x_0$  consecutivi a partire da  $(x - x_0)$ , si nota che:

$$u(x) - u(x - x_0) > u(x + x_0) - u(x).$$

Esplicitando rispetto a  $u(x)$ , la disuguaglianza diventa:

$$u(x) > \frac{u(x+x_0) + u(x - x_0)}{2}.$$

La prima disuguaglianza indica che ad un incremento di capitale da  $(x - x_0)$  a  $(x)$  corrisponde un aumento dell'utilità maggiore rispetto all'incremento di capitale da  $(x)$  a  $(x + x_0)$ . La seconda disuguaglianza può essere interpretata nel seguente modo: se un investitore con capitale  $x$  investe un importo pari a  $x_0$ , il valore sperato dell'utilità, dato dalla media tra l'utilità in caso di successo  $u(x + x_0)$  e l'utilità in caso di perdita  $u(x - x_0)$ , è inferiore all'utilità che esso avrebbe astenendosi dall'investimento. L'investitore, dunque, reputa svantaggioso questo investimento e risulta essere avverso al rischio.

In sintesi, assumendo che la funzione di utilità  $u(x)$  sia continua e derivabile almeno due volte, la derivata prima  $u'(x)$ , definita “utilità marginale” del capitale  $x$ , è strettamente positiva su tutto il dominio in quanto la funzione di utilità è strettamente crescente rispetto alla ricchezza  $x$  e la derivata seconda  $u''(x)$  è strettamente negativa su tutto il dominio per la concavità, che è una misura dell’avversione al rischio dell’investitore. Quindi se  $u'(x) > 0$  e  $u''(x) < 0$ , l’utilità marginale diminuisce all’aumentare del capitale.

La propensione o l’avversione al rischio dell’individuo è data dall’andamento della derivata seconda della funzione di utilità  $u(x)$ :

- $u''(x) < 0 \rightarrow$  avversione al rischio;
- $u''(x) = 0 \rightarrow$  indifferenza al rischio;
- $u''(x) > 0 \rightarrow$  propensione al rischio.

Si riportano alcuni tipi di funzioni di utilità (del capitale  $x$ ):

- Utilità logaritmica: l’incremento di utilità è direttamente proporzionale all’incremento di capitale  $x_0$  e inversamente proporzionale al capitale posseduto  $x$ .

La funzione di utilità è  $u(x) = \alpha \log x + b$ , in cui  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  e  $b \in \mathbb{R}$  sono costanti arbitrarie. La misura assoluta di avversione al rischio in forma locale<sup>127</sup>, introdotta da Arrow e Pratt<sup>128</sup>, è data da  $r(x) = \frac{1}{x}$  e la misura di tolleranza del rischio in forma locale<sup>129</sup> è pari a  $B(x) = x$ , quindi è soddisfatta l’ipotesi di decrescenza. Un’esemplificazione del comportamento di tale funzione è riportata nella figura sottostante.

<sup>127</sup> La misura di avversione al rischio in forma locale è data dalla cosiddetta “funzione di concavità relativa” di  $u(x)$ :  $r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$ . Questa funzione misura localmente la concavità di  $u(x)$ .

<sup>128</sup> ARROW, K.J., *Aspects of the Theory of Risk Bearing*, Yrjo Jahnssonin Saatio, Helsinki, 1965.

<sup>129</sup> La misura di tolleranza del rischio in forma locale dell’individuo è data da  $B(x) = \frac{1}{r(x)}$ , che rappresenta una dimensione in termini monetari ed è un importo tanto più grande quanto meno l’individuo è avverso al rischio.

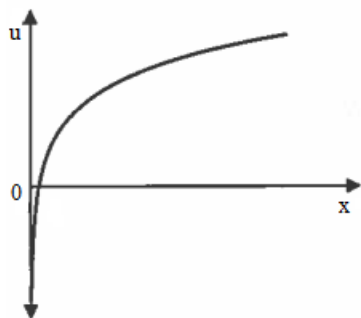


Figura 13: Esempificazione di una funzione di utilità logaritmica.

- Utilità esponenziale: è una funzione superiormente limitata, in quanto presenta come estremo superiore il parametro  $\alpha$ , definito “potenzialità massima”.

La funzione di utilità esponenziale è data da:  $u(x) = \alpha \left[ 1 - e^{-\frac{1}{\alpha}x} \right]$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . In questa funzione di utilità, la misura assoluta di avversione al rischio in forma locale (di Arrow e Pratt) è considerata costante:  $r(x) = \frac{1}{\alpha}$ .

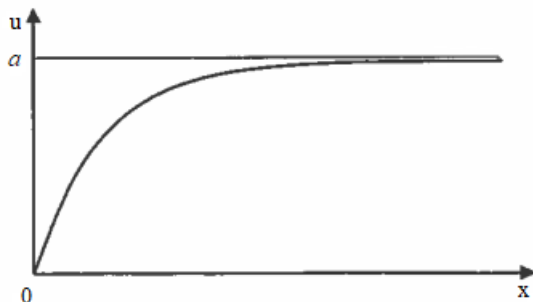


Figura 14: Rappresentazione della funzione di utilità esponenziale.

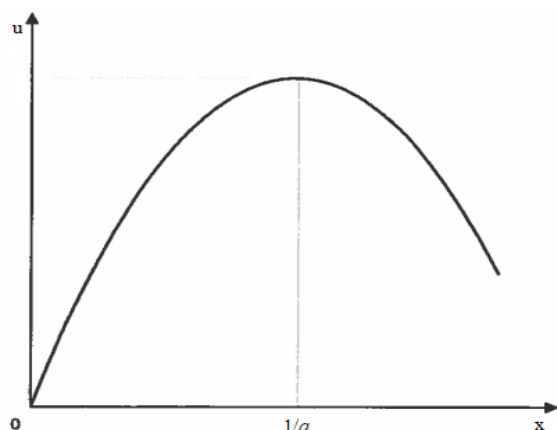
- Utilità quadratica: è la funzione di utilità utilizzata nel modello di Markowitz (in quanto è consistente con il criterio media-varianza<sup>130</sup>) ed è rappresentata secondo la seguente formulazione:  $u(x) = x - \frac{\alpha}{2}x^2$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ .

Come si può notare dalla figura sottostante, la funzione è strettamente crescente per i valori di  $x$  compresi tra 0 e  $\frac{1}{\alpha}$ , quindi il dominio della

<sup>130</sup> GALLOCCHIO C., *PSO vs FWA: due metaeuristiche per la selezione di portafogli basati sulle misure di rischio coerenti two-sided*, Università Ca' Foscari, Venezia, 2017.



funzione è ridotto a questo intervallo. La concavità della funzione è assicurata dalla non negatività del parametro  $\alpha$ , che riflette l'avversione al rischio dell'investitore: più grande è il valore di questo parametro e maggiore è l'avversione al rischio. La misura di avversione al rischio (Arrow-Pratt) è data da  $r(x) = \frac{\alpha}{1-\alpha x}$  e nel dominio  $(0, \frac{1}{\alpha})$  è una funzione crescente di  $x$ .



**Figura 15: Rappresentazione della funzione di utilità quadratica.**

Affrontiamo, ora, il concetto di curva di indifferenza, che ci conduce alla determinazione del portafoglio ottimo. Dalla funzione di utilità quadratica utilizzata da Markowitz è possibile ricavare le curve di indifferenza: esse rappresentano le scelte di consumo che consentono al consumatore di ottenere la medesima utilità. Nei problemi di selezione del portafoglio, si parla di scelte d'investimento che offrono all'investitore lo stesso livello di utilità. In pratica, le curve di indifferenza consentono di identificare le combinazioni rischio-rendimento ritenute analoghe dall'investitore. Come si può notare nella figura sottostante, la curva d'indifferenza, definita nello spazio (deviazione standard  $\sigma$ , media  $\mu$ ), è costituita da tutte le combinazioni rischio-rendimento che presentano la medesima utilità attesa per l'investitore. Quindi l'investitore è indifferente per ogni combinazione  $(\sigma, \mu)$  appartenente alla curva di indifferenza. Tale curva è ottenuta esplicitando la deviazione standard ( $\sigma$ ) dal valore atteso della funzione di utilità quadratica,  $E[u(x)] = E[x - \frac{\alpha}{2}x^2]$ . Quindi, considerando la funzione di utilità quadratica (nel modello di Markowitz,  $x = R_p =$  rendimento del portafoglio)

$$u(x) = x - \frac{\alpha}{2}x^2, \text{ con } \alpha \in R^+,$$

il valore atteso della funzione di utilità quadratica risulta:

$$E[u(x)] = E\left[x - \frac{\alpha}{2}x^2\right] = E(x) - \frac{1}{2}\alpha E(x^2) = \mu - \frac{1}{2}\alpha(\sigma^2 + \mu^2),$$

poiché  $Var(x) = \sigma^2 = E(x^2) - [E(x)]^2 \rightarrow E(x^2) = Var(x) + [E(x)]^2 = \sigma^2 + \mu^2$ .

Fissato un valore  $\bar{u}$  per l'utilità attesa, ricaviamo la varianza e quindi la deviazione standard:

$$\bar{u} = \mu - \frac{1}{2}\alpha(\sigma^2 + \mu^2),$$

$$\sigma^2 = \frac{2}{\alpha}\mu - \frac{2}{\alpha}\bar{u} - \mu^2,$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{\alpha}\mu - \frac{2}{\alpha}\bar{u} - \mu^2}.$$

Se l'investitore aumentasse la quota di rischio  $\sigma$  di un ammontare infinitesimale  $\Delta\sigma$  ( $\Delta\sigma \rightarrow 0$ ), questo provocherebbe una perdita di utilità attesa secondo la derivata prima

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = -\alpha\sigma < 0,$$

dove  $\frac{\partial u}{\partial \sigma}$  indica una la variazione di utilità dovuta ad una variazione minima (tendente a zero) di  $\sigma$ . In termini geometrici, l'utilità marginale di  $\sigma$ , intesa come

$$\lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta\sigma} = \frac{\partial u}{\partial \sigma},$$

rappresenta la pendenza della funzione di utilità rispetto ad  $\sigma$ . Per mantenere invariato il livello di utilità attesa, l'investitore dovrebbe ottenere un maggior rendimento atteso  $\mu$  secondo la derivata prima

$$\frac{\partial u}{\partial \mu} = 1 - \alpha\mu > 0,$$

in modo tale che la variazione totale mantenga invariata l'utilità attesa complessiva dell'investitore, cioè:

$$\Delta E(u) = \frac{\partial u}{\partial \sigma}\Delta\sigma + \frac{\partial u}{\partial \mu}\Delta\mu = -\alpha\sigma\Delta\sigma + \Delta\mu - \alpha\mu\Delta\mu = 0.$$

Quindi l'incremento di rendimento atteso  $\Delta\mu$ , per ogni unità di aumento del rischio  $\Delta\sigma$ , deve soddisfare la relazione precedente, cioè:

$$\frac{\Delta\mu}{\Delta\sigma} = \frac{a\sigma}{1 - a\mu} > 0.$$

Questa relazione rappresenta il premio di rendimento per unità di rischio richiesto dall'investitore ed è definita relazione di "indifferenza rischio-rendimento".<sup>131</sup> Detto questo, è possibile affermare che le curve d'indifferenza sono crescenti, cioè quando aumenta  $\sigma$ , si incrementa anche  $\mu$ , in modo tale da mantenere costante l'utilità attesa. Ovviamente, affinché la curva sia crescente è necessario che  $\mu < \frac{1}{a}$ , altrimenti il denominatore risulterebbe negativo. Inoltre occorre sottolineare che la curva di indifferenza è convessa, cioè l'incremento di rendimento atteso  $\mu$  richiesto dall'investitore cresce più velocemente del rischio  $\sigma$ . Come mostrato nella figura sottostante, all'aumentare dell'utilità (spostamento delle curve d'indifferenza verso l'alto), per un fissato livello rendimento atteso diminuisce il livello di rischio (deviazione standard). Allo stesso modo, fissato un livello di rischio, il rendimento atteso aumenta all'aumentare dell'utilità. Di conseguenza, l'investitore tenderà a preferire la curva d'indifferenza collocata più in alto, in quanto presenta il maggior grado di utilità.

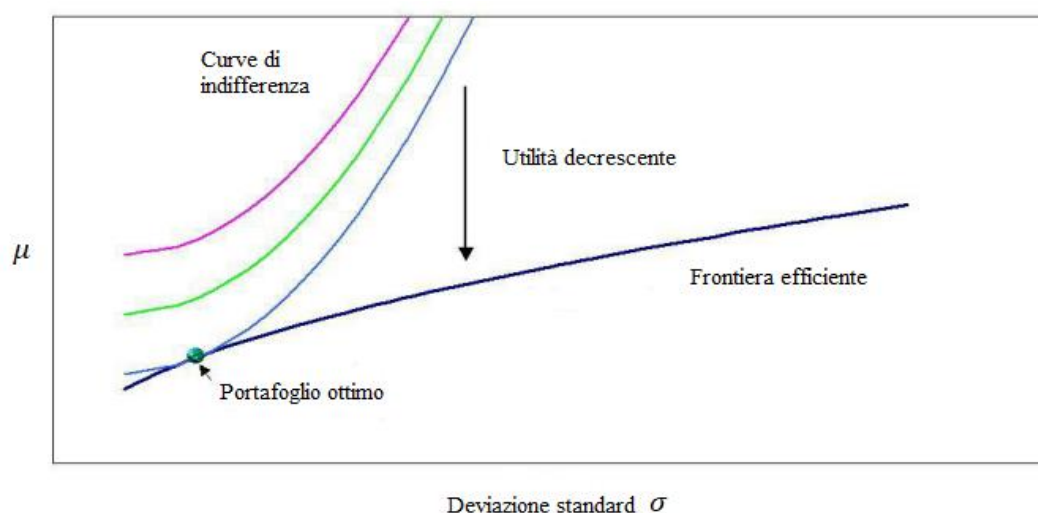


Figura 16: Curve d'indifferenza e portafoglio ottimo.

<sup>131</sup> TAMBORINI R., *Economia e Finanza*, II edizione, Padova, CEDAM, 2011.

Una volta calcolate le curve di indifferenza è possibile determinare il portafoglio ottimo, la cui scelta ha una determinazione puramente soggettiva legata alla funzione di utilità, che dipende l'attitudine al rischio dell'investitore. Quindi, una volta selezionati i portafogli collocati sulla frontiera efficiente, l'investitore deve indicare le combinazioni di rischio-rendimento (curva di indifferenza) che lo soddisfano maggiormente. In questo modo è possibile identificare il portafoglio ottimale, che giace nel punto di tangenza tra la frontiera efficiente e la curva d'indifferenza con l'utilità più elevata possibile per l'investitore.

# Appendice B

In questa appendice vengono inserite le tabelle contenenti i calcoli per la liquidità del portafoglio negli scenari 2,3,4,A e B.

Liquidità del portafoglio $\Sigma (s+x)$						
Titoli	Simulazione 1	Simulazione 2	Simulazione 3	Simulazione 4	Simulazione 5	Media
Aegean Airlines	€ 11.332	€ 11.068	€ 10.704	€ 11.244	€ 11.567	€ 11.183
Alpha Bank SA	€ 1.120.426	€ 1.118.635	€ 953.820	€ 1.044.099	€ 1.108.765	€ 1.069.149
Jumbo SA	€ 37.343	€ 35.240	€ 44.369	€ 26.420	€ 20.773	€ 32.829
Ellaktor SA	€ 1.690	€ 11.890	€ 5.612	€ 36.364	€ 17.023	€ 14.516
Hellenic Petroleum SA	€ 325.771	€ 298.174	€ 337.655	€ 316.728	€ 232.173	€ 302.100
National Bank of Greece	€ 194.657	€ 242.105	€ 241.222	€ 244.820	€ 269.246	€ 238.410
Eurobank Ergasias	€ 99.776	€ 141.387	€ 123.222	€ 93.885	€ 115.351	€ 114.724
Hellenic Exchanges	€ 132.086	€ 146.958	€ 140.461	€ 137.602	€ 144.385	€ 140.298
Folli Follie	€ 142.301	€ 138.060	€ 135.839	€ 146.182	€ 138.230	€ 140.122
Fourlis Hld	€ 499.749	€ 478.011	€ 493.625	€ 501.853	€ 503.612	€ 495.370
Gek Terna	€ 173.292	€ 172.638	€ 176.795	€ 157.801	€ 167.597	€ 169.625
Grivalia Properties REIC	€ 1.665	€ 676	€ 1.471	€ 90	€ 1.223	€ 1.025
Hellenic Telecom	€ 1.013.815	€ 1.015.099	€ 1.030.484	€ 985.486	€ 1.096.073	€ 1.028.192
Lamda Development	€ 1.887	€ 1.572	€ 1.794	€ 1.664	€ 1.836	€ 1.751
Motor Oil Hellas	€ 287.798	€ 247.024	€ 295.603	€ 261.036	€ 242.348	€ 266.762
Mytilineos Holdings	€ 375.610	€ 365.416	€ 356.019	€ 381.602	€ 322.163	€ 360.162
OPAP	€ 1.120.810	€ 1.014.838	€ 1.095.598	€ 1.077.002	€ 1.146.066	€ 1.090.863
Piraeus Port	€ 15.310	€ 18.685	€ 18.359	€ 18.496	€ 15.648	€ 17.300
Public Power Corporation	€ 413.112	€ 413.617	€ 383.500	€ 415.431	€ 426.027	€ 410.337
Gr. Sarantis SA	€ 2.661	€ 3.123	€ 3.556	€ 2.076	€ 3.489	€ 2.981
Titan Cement	€ 41.536	€ 46.183	€ 25.876	€ 50.174	€ 45.983	€ 41.951
Piraeus Bank	€ 580.400	€ 637.897	€ 730.726	€ 735.645	€ 695.509	€ 676.036
Totale liquidità	€ 6.593.027	€ 6.558.299	€ 6.606.313	€ 6.645.701	€ 6.725.088	€ 6.625.686

**Tabella 14: Liquidità del portafoglio dopo il processo di revisione, scenario 2.**

Liquidità del portafoglio $\Sigma (s+x)$						
Titoli	Simulazione 1	Simulazione 2	Simulazione 3	Simulazione 4	Simulazione 5	Media
Aegean Airlines	€ 296.041	€ 231.698	€ 53.370	€ 246.913	€ 278.796	€ 221.364
Alpha Bank SA	€ 4.086.931	€ 1.276.654	€ 4.615.236	€ 4.911.682	€ 4.330.892	€ 3.844.279
Jumbo SA	€ 103.172	€ 2.021	€ 126.208	€ 124.618	€ 23.857	€ 75.975
Ellaktor SA	€ 3.872	€ 1.850	€ 3.321	€ 13	€ 1.388	€ 2.089
Hellenic Petroleum SA	€ 99.713	€ 94.955	€ 33.545	€ 86.931	€ 50.698	€ 73.168
National Bank of Greece	€ 415.616	€ 364.660	€ 749.060	€ 158.967	€ 73.766	€ 352.414
Eurobank Ergasias	€ 658.459	€ 2.070.450	€ 598.153	€ 2.504.581	€ 82.183	€ 1.182.765
Hellenic Exchanges	€ 41.840	€ 47.152	€ 35.800	€ 42.594	€ 53.025	€ 44.082
Folli Follie	€ 608.332	€ 645.160	€ 618.055	€ 263.932	€ 103.707	€ 447.837
Fourlis Hld	€ 11.152	€ 33.436	€ 23.742	€ 23.997	€ 16.953	€ 21.856
Gek Terna	€ 88.957	€ 92.768	€ 102.101	€ 100.217	€ 88.379	€ 94.484
Grivalia Properties REIC	€ 7.274	€ 7.245	€ 198	€ 4.543	€ 8.992	€ 5.650
Hellenic Telecom	€ 1.236.307	€ 1.769.303	€ 1.775.362	€ 635.358	€ 1.689.634	€ 1.421.193
Lamda Development	€ 12.208	€ 29.054	€ 18.426	€ 26.615	€ 24.806	€ 22.222
Motor Oil Hellas	€ 3.743	€ 109.470	€ 136.251	€ 82.760	€ 82.374	€ 82.920
Mytilineos Holdings	€ 367.093	€ 48.798	€ 198.837	€ 355.612	€ 374.692	€ 269.006
OPAP	€ 1.182.282	€ 1.031.320	€ 879.375	€ 1.178.429	€ 594.865	€ 973.254
Piraeus Port	€ 4.253	€ 8.139	€ 3.192	€ 4.798	€ 1.694	€ 4.415
Public Power Corporation	€ 529.548	€ 81.147	€ 289.753	€ 47.005	€ 565.623	€ 302.616
Gr. Sarantis SA	€ 1.473	€ 2.146	€ 1.558	€ 927	€ 1.008	€ 1.422
Titan Cement	€ 311.163	€ 56.596	€ 299.322	€ 281.844	€ 291.639	€ 248.113
Piraeus Bank	€ 332.082	€ 1.885.614	€ 2.217.023	€ 685.839	€ 2.754.453	€ 1.575.002
Totale liquidità	€ 10.401.511	€ 9.889.637	€ 12.777.889	€ 11.768.176	€ 11.493.425	€ 11.266.127

**Tabella 15: Liquidità del portafoglio revisionato, scenario 3.**

<i>Liquidità del portafoglio <math>\sum (s+x)</math></i>						
Titoli	Simulazione 1	Simulazione 2	Simulazione 3	Simulazione 4	Simulazione 5	Media
Aegean Airlines	€ 43.836	€ 43.337	€ 56.774	€ 45.308	€ 47.559	€ 47.363
Alpha Bank SA	€ 1.324.061	€ 1.435.924	€ 1.318.570	€ 1.350.423	€ 1.407.088	€ 1.367.213
Jumbo SA	€ 89.832	€ 69.515	€ 56.384	€ 57.557	€ 63.888	€ 67.435
Ellaktor SA	€ 5.340	€ 1.882	€ 3.389	€ 2.590	€ 4.212	€ 3.482
Hellenic Petroleum SA	€ 44.879	€ 46.834	€ 42.939	€ 47.929	€ 44.848	€ 45.486
National Bank of Greece	€ 171.404	€ 169.670	€ 190.530	€ 186.748	€ 337.931	€ 211.257
Eurobank Ergasias	€ 385.173	€ 377.354	€ 391.883	€ 483.582	€ 408.706	€ 409.340
Hellenic Exchanges	€ 22.421	€ 20.281	€ 17.910	€ 25.080	€ 20.534	€ 21.245
Folli Follie	€ 239.740	€ 230.911	€ 234.369	€ 240.742	€ 237.837	€ 236.720
Fourlis Hld	€ 51.810	€ 61.970	€ 50.413	€ 48.831	€ 47.664	€ 52.138
Gek Terna	€ 17.330	€ 17.369	€ 16.297	€ 16.764	€ 16.879	€ 16.928
Grivalia Properties REIC	€ 21.810	€ 7.252	€ 17.081	€ 17.868	€ 9.176	€ 14.637
Hellenic Telecom	€ 539.975	€ 532.460	€ 527.527	€ 524.504	€ 516.156	€ 528.124
Lamda Development	€ 8.527	€ 18.486	€ 10.231	€ 8.841	€ 12.557	€ 11.728
Motor Oil Hellas	€ 114.682	€ 109.564	€ 127.546	€ 111.947	€ 108.260	€ 114.400
Mytilineos Holdings	€ 87.260	€ 83.823	€ 84.368	€ 86.921	€ 93.360	€ 87.146
OPAP	€ 715.551	€ 731.535	€ 693.182	€ 745.136	€ 720.589	€ 721.199
Piraeus Port	€ 15.172	€ 5.200	€ 4.919	€ 9.302	€ 5.624	€ 8.043
Public Power Corporation	€ 55.960	€ 56.706	€ 49.659	€ 56.928	€ 50.535	€ 53.958
Gr. Sarantis SA	€ 4.218	€ 4.271	€ 5.207	€ 6.563	€ 4.983	€ 5.048
Titan Cement	€ 87.819	€ 102.005	€ 111.495	€ 101.591	€ 123.208	€ 105.224
Piraeus Bank	€ 843.105	€ 885.459	€ 1.084.242	€ 884.165	€ 868.248	€ 913.044
Totale liquidità	€ 4.889.905	€ 5.011.809	€ 5.094.916	€ 5.059.319	€ 5.149.841	€ 5.041.158

**Tabella 16: Liquidità del portafoglio revisionato, scenario 4.**

<i>Liquidità del portafoglio <math>\sum (s+x)</math></i>						
Titoli	Simulazione 1	Simulazione 2	Simulazione 3	Simulazione 4	Simulazione 5	Media
Aegean Airlines	€ 4.044	€ 19.069	€ 7.636	€ 20.245	€ 12.654	€ 12.730
Alpha Bank SA	€ 1.794.525	€ 1.957.917	€ 14.862	€ 424.774	€ 1.394.559	€ 1.117.328
Jumbo SA	€ 9.902	€ 53.287	€ 75.771	€ 38.280	€ 13.898	€ 38.228
Ellaktor SA	€ 15.724	€ 20.250	€ 276	€ 1.739	€ 32.205	€ 14.039
Hellenic Petroleum SA	€ 215.272	€ 192.678	€ 163.048	€ 11.727	€ 178.341	€ 152.213
National Bank of Greece	€ 150.080	€ 290	€ 464.408	€ 388.754	€ 207.419	€ 242.190
Eurobank Ergasias	€ 89.990	€ 86.739	€ 103.879	€ 235.959	€ 144.456	€ 132.205
Hellenic Exchanges	€ 181.943	€ 150.570	€ 242.030	€ 13.654	€ 218.792	€ 161.398
Folli Follie	€ 153.396	€ 127.123	€ 124.316	€ 27.737	€ 221.325	€ 130.779
Fourlis Hld	€ 396.172	€ 519.016	€ 960.857	€ 594.768	€ 334.486	€ 561.060
Gek Terna	€ 166.883	€ 136.262	€ 81.118	€ 24.709	€ 18.329	€ 85.460
Grivalia Properties REIC	€ 1.159	€ 345	€ 1.119	€ 1.893	€ 2.804	€ 1.464
Hellenic Telecom	€ 1.194.461	€ 1.165.837	€ 251.848	€ 514.299	€ 254.914	€ 676.272
Lamda Development	€ 1.442	€ 1.895	€ 3.636	€ 1.114	€ 1.177	€ 1.853
Motor Oil Hellas	€ 456.479	€ 94.011	€ 154.666	€ 541.483	€ 129.430	€ 275.214
Mytilineos Holdings	€ 186.431	€ 88.760	€ 652.447	€ 621.654	€ 872.743	€ 484.407
OPAP	€ 1.124.268	€ 1.151.539	€ 664.871	€ 1.625.492	€ 1.522.103	€ 1.217.655
Piraeus Port	€ 31.528	€ 18.572	€ 26.210	€ 33.498	€ 2.391	€ 22.440
Public Power Corporation	€ 344.570	€ 567.096	€ 665.071	€ 426.057	€ 162.793	€ 433.117
Gr. Sarantis SA	€ 3.686	€ 2.539	€ 6.936	€ 6.098	€ 5.527	€ 4.957
Titan Cement	€ 59.227	€ 84.368	€ 77.665	€ 73.512	€ 30.714	€ 65.097
Piraeus Bank	€ 934.821	€ 131.170	€ 471.260	€ 194.127	€ 565.539	€ 459.383
Totale liquidità	€ 7.516.002	€ 6.569.333	€ 5.213.932	€ 5.821.574	€ 6.326.598	€ 6.289.488

**Tabella 17: Liquidità del portafoglio revisionato nello scenario A**

Liquidità del portafoglio $\Sigma (s+x)$						
Titoli	Simulazione 1	Simulazione 2	Simulazione 3	Simulazione 4	Simulazione 5	Media
<i>Aegean Airlines</i>	€ 79.259	€ 1.963	€ 78.539	€ 93.002	€ 47.023	€ 59.957
<i>Alpha Bank SA</i>	€ 651.774	€ 2.246.421	€ 437.602	€ 1.723.718	€ 1.077.762	€ 1.227.455
<i>Jumbo SA</i>	€ 70.948	€ 43.499	€ 40.522	€ 54.550	€ 100.023	€ 61.908
<i>Ellaktor SA</i>	€ 1.307	€ 5.315	€ 2.868	€ 2.549	€ 1.197	€ 2.647
<i>Hellenic Petroleum SA</i>	€ 44.523	€ 58.842	€ 89.954	€ 75.056	€ 34.035	€ 60.482
<i>National Bank of Greece</i>	€ 31.794	€ 207.358	€ 363.588	€ 248.491	€ 253.374	€ 220.921
<i>Eurobank Ergasias</i>	€ 101.847	€ 1.064	€ 429.509	€ 97.606	€ 44.895	€ 134.984
<i>Hellenic Exchanges</i>	€ 20.602	€ 4.327	€ 10.908	€ 33.865	€ 1.207	€ 14.182
<i>Folli Follie</i>	€ 387.710	€ 32.563	€ 296.863	€ 409.604	€ 429.445	€ 311.237
<i>Fourlis Hld</i>	€ 43.322	€ 113.483	€ 107.647	€ 61.866	€ 59.634	€ 77.190
<i>Gek Terna</i>	€ 14.912	€ 26.687	€ 4.774	€ 5.144	€ 24.530	€ 15.209
<i>Grivalia Properties REIC</i>	€ 12.089	€ 4.401	€ 8.835	€ 7.170	€ 11.417	€ 8.783
<i>Hellenic Telecom</i>	€ 237.690	€ 552.973	€ 759.581	€ 384.274	€ 1.049.366	€ 596.777
<i>Lamda Development</i>	€ 9.874	€ 1.978	€ 5.553	€ 18.310	€ 12.596	€ 9.662
<i>Motor Oil Hellas</i>	€ 78.503	€ 3.598	€ 74.661	€ 66.664	€ 20.125	€ 48.710
<i>Mytilineos Holdings</i>	€ 129.043	€ 68.371	€ 47.492	€ 86.082	€ 146.670	€ 95.532
<i>OPAP</i>	€ 914.256	€ 700.719	€ 155.355	€ 75.481	€ 661.667	€ 501.496
<i>Piraeus Port</i>	€ 8.115	€ 10.455	€ 2.942	€ 5.457	€ 7.854	€ 6.964
<i>Public Power Corporation</i>	€ 84.775	€ 11.366	€ 59.072	-€ 202	€ 9.537	€ 32.909
<i>Gr. Sarantis SA</i>	€ 1.502	€ 4.117	€ 8.426	€ 7.109	€ 4.257	€ 5.082
<i>Titan Cement</i>	€ 157.594	€ 267.857	€ 176.183	€ 209.176	€ 131.970	€ 188.556
<i>Piraeus Bank</i>	€ 740.351	€ 2.187.447	€ 251.110	€ 134.724	€ 269.380	€ 716.602
<b>Totale liquidità</b>	<b>€ 3.821.791</b>	<b>€ 6.554.802</b>	<b>€ 3.411.982</b>	<b>€ 3.799.697</b>	<b>€ 4.397.963</b>	<b>€ 4.397.247</b>

**Tabella 18: Liquidità del portafoglio revisionato, scenario B.**

## Appendice C

Codice, utilizzato nel programma MATLAB R2017b, per la PSO applicata al modello di revisione del portafoglio basato sul CVaR.

```
clear all;
close all;
clc;

format short

P = 100; % numero particelle

% Caricamento dati
load PrezziFTSEAthex.txt; % importazione prezzi da txt
prezzi = PrezziFTSEAthex;
[n,numvar] = size(prezzi);
rend = log(prezzi(2:end,:)./ prezzi(1:end-1,:)); % rendimenti logaritmici

load liquidita.txt; % importazione liquidità da txt
liq = liquidita;

load Port_iniziale.txt;
s = zeros(P,22);
s(1,:) = Port_iniziale; % portafoglio iniziale
for k = 2:P
    s(k,:) = s(1,:);
end

% Analisi dati
n = 69; % numero prezzi
is = 52; % numero prezzi in sample
oos = n-is; % numero di prezzi out-of-sample
oos = oos+1; % numero di rendimenti +1 out-of-sample
ris = rend(1:n-oos,:); % rendimenti in sample
roos = rend(n-oos+1:(n-1),:); % rendimenti +1 out-of-sample
rend_old = rend; % rendimenti originali
rm_is = mean(ris); % media rendimenti in sample
rm_oos = mean(roos); % media rendimenti out of sample

% Identificazione rendimenti negativi (rd)
alpha = 0.95; % livello di confidenza del CVaR
ord_ris = sort(ris); % rendimenti in sample ordinati dal peggiore al migliore
ord_roos = sort(roos); % rendimenti out of sample ordinati dal peggiore al migliore
```



```

cinque_ris = floor((n-oos)*(1-alpha)); % soglia 0,05 (5% dei rendimenti in sample
ordinati)
cinque_roos = floor((n-is)*(1-alpha)); % soglia 0,05 (5% dei rendimenti out of
sample ordinati)
inf_rd_ris = ord_ris(1:cinque_ris,:); % peggiori rendimenti negativi in sample
inf_rd_roos = ord_roos(1:cinque_roos,:); % peggiori rendimenti negativi out of
sample
medie_w_ris = mean(inf_rd_ris); % media dei rendimenti peggiori in sample
medie_w_roos = mean(inf_rd_roos); % media dei rendimenti peggiori out of sample

% Dati di input
annuo = 1/100; % rendimento annuo desiderato
mi = (1+annuo)^(1/52) - 1; % rendimento settimanale desiderato
L = 100000; % ammontare scambiato minimo in ciasucun titolo
U = 15000000; % ammontare scambiato massimo in ciasucun titolo
cb = 0.001; % commissioni per l'acquisto dell'ammontare di azioni x+
cs = 0.001; % commissioni per la vendita dell'ammontare di azioni x-
Tc = 15/100; % aliquota applicata al capital gain
pr = prezzi; % prezzo del titolo
p_A = mean(prezzi(1:is,:)); % prezzo di acquisto medio di ciascun titolo
l = (liq(n-oos+1,:)); % liquidità corrente (controvalore scambiato) per ciasucun titolo
lu = 200000000; % livello di liquidità massimo del portafoglio (turnover titolo*peso
titolo)
l_is = mean(liq(1:n-oos+1,:));

% Inizializzazione parametri PSO
niter = 100; % numero iterazioni
c1 = 1.49618; % coefficiente di accelerazione individuale
c2 = 1.49618; % coefficiente di accelerazione sociale
iw = 0.7298; % peso d'inerzia
epsilon = 1.0e-004; % parametro di penalità

vmaxx = zeros(1,numvar);
vmaxz = zeros(1,numvar);

% Vettori di appoggio per la funzione obiettivo
cvar_port = zeros(P,1);
vinc_1 = zeros(P,1); % vincolo di rendimento (€)
vinc_2 = zeros(P,1); % (s+x)>=0
app_2 = zeros(P,numvar);
vinc_3 = zeros(P,1); % (x+)>=0
app_3 = zeros(P,numvar);
vinc_4 = zeros(P,1); % (x-)>=0
app_4 = zeros(P,numvar);
vinc_5 = zeros(P,1); % (x-)<=s
app_5 = zeros(P,numvar);
vinc_6 = zeros(P,1); % vincolo di bilancio
vinc_7 = zeros(P,1); % vincolo di liquidità del portafoglio

```

```

app_7 = zeros(P,numvar);
vinc_8 = zeros(P,1); % somma dei pesi = 1
app_8 = zeros(P,numvar);
vinc_9 = zeros(P,1); %  $x \geq Lz$ 
app_9 = zeros(P,numvar);
vinc_10 = zeros(P,1); %  $x \leq Uz$ 
app_10 = zeros(P,numvar);
vinc_11 = zeros(P,1); %  $z \in \{0, 1\}$ 
app_11 = zeros(P,numvar);

% 1) Inizializzazione posizioni, velocità, funzione obiettivo
x = 10000000*rand(P,numvar);
vx = rand(P,numvar);
z = rand(P,numvar);
vz = rand(P,numvar);

f = ones(P,1)*1.0e+015; % funzione fitness

% pb = pbest (nell'ultima colonna c'è funzione obiettivo associata alla migliore
posizione assunta)
pbx = [x f];
pbz = z;

% g=gbest, vettore che rappresenta la migliore posizione globale e il valore della
funzione obiettivo associata
gx = zeros(1,numvar+1);
gz = zeros(1,numvar);

tic;
for k = 1:niter
    % individua range dinamico velocità
    for i = 1:numvar
        vmaxx(i) = abs(max(x(:,i))-min(x(:,i)));
        vmxz(i) = abs(max(z(:,i))-min(z(:,i)));
    end;

    % 2) Calcola funzione obiettivo
    for p = 1:P
        for i = 1:numvar
            app_2(p,i) = max(0,-s(p,i)-x(p,i));
            app_3(p,i) = max(0,-max(0,x(p,i)));
            app_4(p,i) = max(0,-(-min(0,x(p,i))));
            app_5(p,i) = max(0,-min(0,x(p,i))-s(p,i));
            app_7(p,i) = max(0,(((s(p,i)+x(p,i))/sum(s(p,:)+x(p,:))).*l(i))-lu);
            app_8(p,i) = abs(sum((s(p,i)+x(p,i))/(sum(s(p,i)+x(p,i))))-1);
            app_9(p,i) = max(0,L*z(p,i)-x(p,i));
            app_10(p,i) = max(0,x(p,i)-U*z(p,i));
        end;
    end;
end;

```

```

app_11(p,i) = abs(z(p,i)*(1-z(p,i)));

end

cvar_port(p) = -sum((s(p,:)+x(p,:))*medie_w_ris'); % CVaR con livello di
confidenza alpha

A = sum((s(p,:)+(x(p,:)))*rm_is'); % rendimento atteso del portafoglio
revisionato
B = (sum(cb*(max(0,x(p,:))))+(sum(cs*(-min(0,x(p,:))))); % costi di
transazione
C = Tc*((sum((( -min(0,x(p,:))'./p_A(:)).*(pr(n-oos+1,:)-p_A(:)')))); %
tassazione capital gain
Ct = max(0,C);

vinc_1(p) = max(0,(mi*(sum(s(p,:)+x(p,:)))-A+B+Ct); % vincolo di
rendimento (in €)
vinc_2(p) = sum(app_2(p,:)); % divieto di short selling
vinc_3(p) = sum(app_3(p,:)); % positività dell'ammontare acquistato con la
revisione
vinc_4(p) = sum(app_4(p,:)); % positività dell'ammontare venduto con la
revisione
vinc_5(p) = sum(app_5(p,:)); % massimo ammontare venduto ≤ s
vinc_6(p) = abs(sum(s(p,:)+x(p,:))-sum(s(p,:)*((pr(n-oos+1,:)/p_A(:))))+B+Ct);
% vincolo di bilancio (self-finance)
vinc_7(p) = sum(app_7(p,:)); % liquidità del portafoglio ≤ l0
vinc_8(p) = sum(app_8(p,:)); % somma dei pesi = 1
vinc_9(p) = sum(app_9(p,:)); % ammontare scambiato minimo ≥ L
vinc_10(p) = sum(app_10(p,:)); % ammontare scambiato massimo ≤ U
vinc_11(p) = sum(app_11(p,:)); % z è 0 oppure 1

end;

%funzione obiettivo
f =
cvar_port+((1/epsilon))*(vinc_1+vinc_2+vinc_3+vinc_4+vinc_5+vinc_6+vinc_7+vi
nc_8+vinc_9+vinc_10+vinc_11);

% 3) Confronta il valore della funzione obiettivo con il pbest
for p = 1:P
if f(p) < pbx(p,numvar+1)
pbx(p,numvar+1) = f(p);
for i = 1:numvar
pbx(p,i) = x(p,i);
pbz(p,i) = z(p,i);
end;
end;
end;
end;

```

```

% 4) identifica la particella con migliore posizione
[minimo,posizione] = min(pbx(:,numvar+1));
gx(numvar+1) = minimo;
for i = 1:numvar
    gx(i) = pbx(posizione,i);
    gz(i) = pbz(posizione,i);
end;

% 5) Aggiorna velocità e posizione
for p = 1:P
    for i = 1:numvar
        vx(p,i) = iw*vx(p,i)+c1*rand*(pbx(p,i)- x(p,i))+c2*rand*(gx(i)-x(p,i));
        vz(p,i) = iw*vz(p,i)+c1*rand*(pbz(p,i)- z(p,i))+c2*rand*(gz(i)-z(p,i));
        if vx(p,i) > vmaxx(i)
            vx(p,i) = vmaxx(i);
        end;
        if vz(p,i) > vmaxz(i)
            vz(p,i) = vmaxz(i);
        end;
        z(p,i) = z(p,i)+vz(p,i);
        x(p,i) = x(p,i)+vx(p,i);
    end;
end;
converg(k,:) = gx(:,end);

% 6) Riparti dal 2) fino al criterio di stop
end;

toc;

figure;
plot(converg),title('FITNESS FUNCTION del portafoglio migliore'),xlabel('Iterazioni'),ylabel('Funzione di Fitness');

best_fitness = gx(1,numvar+1);
ammontare_ottimo = gx(1,1:numvar)'; % x ottimi

cvar_is = -sum((s(p,:)+(gx(1,1:numvar)))*medie_w_ris'); % CVaR in sample portafoglio revisionato
cvar_oos = -sum((s(p,:)+(gx(1,1:numvar)))*medie_w_roos'); % CVaR out of sample portafoglio revisionato
cvar_s_is = -sum((s(p,:)*medie_w_ris')); % CVaR in sample portafoglio iniziale
cvar_s_oos = -sum((s(p,:)*medie_w_roos')); % CVaR out of sample portafoglio iniziale
R_is = sum((s(p,:)+(gx(1,1:numvar)))*rm_is'); % rendimento in sample portafoglio revisionato
R_oos = sum((s(p,:)+(gx(1,1:numvar)))*rm_oos'); % rendimento out of sample

```

portafoglio revisionato

```
R_s_is = sum((s(p,:)*rm_is')); % rendimento in sample portafoglio iniziale
R_s_oos = sum((s(p,:)*rm_oos')); % rendimento out of sample portafoglio iniziale
costi_trans = (sum(cb*(max(0,gx(1,1:numvar)))))+(sum(cs*(-min(0,gx(1,1:numvar))))); % costi di transazione per la revisione
tax = Tc*((sum((-min(0,gx(1,1:numvar)))/p_A(:)).*(pr(n-oos+1,:)-p_A(:)))); % tassazione capital gain dopo revisione
tax_cg = max(0,tax);
val_att_s = sum(s(p,:)*((pr(n-oos+1,:)/p_A(:)))); % valore attuale del portafoglio nel momento della revisione
```

```
vinc_rendimento = vinc_1(posizione);
vinc_no_short = vinc_2(posizione);
vinc_x_acquistato = vinc_3(posizione);
vinc_x_venduto = vinc_4(posizione);
vinc_vendita_max = vinc_5(posizione);
vinc_bilancio = vinc_6(posizione);
vinc_liquidita = vinc_7(posizione);
vinc_pesi = vinc_8(posizione);
vinc_L = vinc_9(posizione);
vinc_U = vinc_10(posizione);
vinc_z_unitario = vinc_11(posizione);
```

```
x = gx(1:end-1)';
z = gz(1:end)';
x
z
```

## Bibliografia

ACERBI C., TASCHE D., *Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk*, Working paper, 2001.

ACERBI C., TASCHE D., *On the coherence of Expected Shortfall*, Working paper, 2002.

ARNOTT R. D., WAGNER W. H., *The measurement and control of trading costs*, Financial Analysts Journal, 46, 1990, pp. 73–80.

ARTZNER P., DELBAEN F., EBER J.-M., HEATH D., *Coherent measures of risk*, Mathematical Finance, 9 (3), 1999, pp. 203–228.

BLACKWELL T., KENNEDY J., POLI R., *Particle swarm optimization – An overview*, Swarm Intelligence, 1 (1), 2007, pp. 33-57.

CHANG T. J., MEADE N., BEASLEY J. E., SHARAIHA Y. M., *Heuristic for cardinality constrained portfolio optimization*, Computer & Operations Research, 27, 2000, pp. 1271-1302.

CHANG T.-J., YANG S.-C., CHANG K.-J., *Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm*, Expert System with Applications, 36, 2009, pp. 10529-10537.

CHEN Z., WANG Y., *Two-sided coherent risk measures and their application in realistic portfolio optimization*, Journal of Banking and Finance, 32 (12), 2008, pp. 2667-2673.

CORAZZA M., FASANO G., GUSSO R., *Particle swarm optimization with non-smooth penalty reformulation, for a complex portfolio selection problem*, Applied Mathematics and Computation, 224, 2013, pp. 611-624.

CORAZZA M., *La revisione statica del portafoglio azionario: i principali modelli classici*, Dipartimento di Matematica Applicata - Università Ca' Foscari di Venezia, 7, 2002, pp. 1-21.

DA ROLD V., *Accordo per salvare la Grecia. Piano da 110 miliardi di euro. Ad Atene settimana di scioperi*, www.ilsole24ore.com, 2 maggio 2010.

DA ROLD V., *Grecia sull'orlo della bancarotta*, www.ilsole24ore.com, 20 novembre 2009.

DEGREGORI & PARTNERS, *Asset allocation – La gestione del portafoglio*, Edizioni R.E.I., 2015.

DONOHUE C., YIP K., *Optimal Portfolio Rebalancing with Transaction Costs*, Journal of Portfolio Management, 29(4), 2003, pp. 49-63.

DRENOVAK M., RANKOVIC V., *Markowitz portfolio rebalancing with turnover monitoring*, Faculty of Economics, University of Kragujevac, 16(3), 2014, pp. 207-217.

ELTON E. J., GRUBER M. J., *On the optimality of some multiperiod portfolio selection criteria*, Journal of Business, 47, 1974, 231–243.

GANDOLFI G. (a cura di), *Scelta e gestione degli investimenti finanziari*, in *Banca e Mercati*, Roma, Bancaria Editrice, 2009.

GENNOTTE G., JUNG A., *Investment strategies under transaction costs: The finite horizon case*, Management Science, 40, 1994, pp. 385-404.

GUASTAROBA G., MANSINI R., SPERANZA M. G., *Models and simulations for portfolio rebalancing*, Computational Economics, 33, 2009, pp. 237-262.

HULL J. C., *Opzioni, Futures e altri derivati*, a cura di Emilio Barone, VIII edizione, Pearson Italia, 2012, pag. 515.

JOBST N., HORNIMAN M. D., LUCAS C. A., MITRA G., *Computational aspects of alternative portfolio selection models in the presence of discrete asset choice constraints*, Quantitative Finance, 1, 2001, pp. 1-13.

KELLERER H., MANSINI R., SPERANZA M. G., *Selecting portfolios with fixed costs and minimum transaction lots*, Annals of Operations Research, 99, 2000, pp. 287-304.

KONNO H., WIJAYANAYAKE A., *Portfolio optimization problem under concave transaction costs and minimal transaction unit constraints*, Mathematical Programming, 89, 2001, pp. 233-250.

KONNO H., YAMAZAKI H., *Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its application to Tokyo stock market*, Management Science, 37, 1991, pp. 519-531.

KRYZANOWSKI L., TO M. C., *The E-V Stationarity of Secure Returns*, Journal of Banking and Finance, 11, 1987, pp. 117-135

LI D., NG W.-L., *Optimal dynamic portfolio selection: multiperiod mean-variance formulation*, Mathematical Finance, 10, 2000, pp. 387-406.

LI Z.-F., LI Z.-X., WANG S.-Y., DENG X.-T., *Optimal portfolio selection of assets with transaction costs and no short sales*, International Journal of Systems Science, 32, 2001, pp. 599-607.



---

LI Z.-F., WANG S.-Y., DENG X.-T., *A linear programming algorithm for optimal portfolio selection with transaction costs*, International Journal of Systems Science, 31, 2000, 107-117.

LIM A. E. B., SHANTHIKUMAR J. G., VAHN G.-Y., *Conditional value-at-risk in portfolio optimization: Coherent but fragile*, Operations Research Letters, 39, 2011, pp. 163-171.

LIVINI E., *La Grecia fuori dalla recessione. Il Pil torna a crescere nel 2014*, [www.repubblica.it](http://www.repubblica.it), 4 novembre 2014.

LO A. W., PETROV C., WIERZBICKI M., *It's 11 pm – Do you know where your liquidity is? The mean-variance-liquidity frontier*, Journal of Investment Management, 1 (1), 2003, pp. 55-93.

MANSINI R., OGRYCZAK W., SPERANZA M. G., *Conditional value at risk and related linear programming models for portfolio optimization*, Annals of Operations Research, 152, 2005, pp. 227-256.

MANSINI R., SPERANZA M. G., *Heuristic algorithms for the portfolio selection problem with minimum transaction lots*, European Journal of Operational Research, 114, 1999, pp. 219-233.

MARASOVIĆ B., PIVAC S., VUKASOVIĆ S. V., *The impact of transaction cost on rebalancing an investment portfolio in portfolio optimization*, International Scholarly and Scientific Research & Innovation, 9 (3), 2015.

MARKOWITZ H. M., *Portfolio Selection*, Journal of Finance, 7(1), 1952, pp. 77-91.

MARKOWITZ H. M., *Portfolio selection: Efficient diversification of investments*, New York, John Wiley & Sons, 1959.

PACELLI V., *Consulenza finanziaria e ottimizzazione di portafoglio*, Roma, Bancaria Editrice, 2014.

PATEL, N. R., SUBRAHMANYAM, M. G., *A simple algorithm for optimal portfolio selection with fixed transaction costs*, *Management Science*, 38, 1982, pp. 303-314.

PELESSONI R., *Misure di rischio e coerenza*, Materiale del Dipartimento di Matematica Applicata "Bruno de Finetti", Università di Trieste, 2002. pp. 423-433.

PEREIRA G. M., SANT'ANNA L. R., FILOMENA T. P., BECKER J. L., *Restrição de liquidez para modelos de seleção de carteiras*, *Revista Brasileira de Finanças (Online)*, Rio de Janeiro, 13 (2), 2015, pp. 288-324.

POGUE G. A., *An extension of the Markowitz portfolio selection model to include variable transaction costs, short sales, leverage policies and taxes*, *Journal of Finance*, 25, 1970, pp. 1005-1028.

ROCKAFELLAR R. T., URYASEV S., *Conditional value-at-risk for general loss distribution*, *Journal of Banking & Finance*, 26, 2002, pp. 1443-1471.

ROCKAFELLAR R. T., URYASEV S., *Optimization of conditional value-at-risk*, *Journal of Risk*, 2 (3), 2000, pp. 21-41.

SCHREINER J., *A turn-over constrained approach*, *Management Science*, 9, 1980, pp. 67-75.

SMITH K. V., *A transition model for portfolio revision*, *Journal of Finance*, 3, 1967, pp. 425-439.

STEINBACH M. C., *Markowitz revisited: mean-variance models in financial portfolio analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics Review, 43, 2001, pp. 31-85.

WANG M., LI C., XUE H., XU F., *A new portfolio rebalancing model with transaction costs*, Hindawi Publishing Corporation - Journal of Applied Mathematics, 2014.

YOSHIMOTO A., *The mean-variance approach to portfolio optimization subject to transaction costs*, Journal of the Operation Research Society of Japan, 39, 1996, pp. 99-117.

YOUNG M. R., *A minimax portfolio selection rule with linear programming solution*, Management Science, 44, 1998, pp. 673-683.

Anon., *Europa unita contro lo short selling*, [www.ilsole24ore.com](http://www.ilsole24ore.com), 12 agosto 2011.

Anon., *Government debt: Judging the judges*, [www.theguardian.com](http://www.theguardian.com), 4 gennaio 2010.

Anon., *Grecia, accordo nella notte. Via libera agli aiuti*, [www.corriere.it](http://www.corriere.it), 21 febbraio 2012.

Anon. *Greece Exits Recession After Crisis That Put Euro at Risk*, [www.bloomberg.com](http://www.bloomberg.com), 14 novembre 2014.

Anon., *Greek SEC watchdog bans short selling in stocks*, [www.reuters.com](http://www.reuters.com), 28 aprile 2010.

Anon., *L'allarme di Fitch: la Grecia non ce la farà, sarà default*, [www.tg1.rai.it](http://www.tg1.rai.it), 17 gennaio 2012.